



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Pablo Manuel Valle Concepción

*Introducción al Análisis Cuaterniónico
y a sus Aplicaciones*

An Introduction to Quaternion Analysis and
Applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2022

DIRIGIDO POR

María Isabel Marrero Rodríguez

María José Martín Gómez

María Isabel Marrero Rodríguez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna 38200
La Laguna, Tenerife

María José Martín Gómez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna 38200
La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Transmitir mis más sinceros agradecimientos a todos aquellos que me han ayudado en la elaboración de esta Memoria.

En primer lugar, a mis maravillosas tutoras Isabel y Marijose, que sin su ayuda y guía este Trabajo no hubiese sido posible.

En segundo lugar, a mi familia, en especial a mis padres, por apoyarme en todo proyecto que emprendo.

También expresar mis más sinceros agradecimientos a todos los docentes que me han revelado el bello mundo de las matemáticas.

Y por último agradecer a mis compañeros de viaje en esta facultad, muchos de ellos, espero, sean amigos de por vida.

Pablo Manuel Valle Concepción
La Laguna, 13 de junio de 2022

Resumen · Abstract

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado, tras revisar algunos de los detalles históricos sobre el descubrimiento del anillo de división (o cuerpo no conmutativo) conocido hoy en día como cuaterniones y sus propiedades básicas, se presenta un estudio inicial sobre la derivada de funciones en los cuaterniones.

Se explica también la revolución que han supuesto los cuaterniones en muchos campos tecnológicos. En particular, se emplean los sistemas de navegación como ejemplo de la drástica mejora que estos suponen.

Palabras clave: *Cuaterniones – Derivabilidad – Aplicaciones – Giroscopio.*

Abstract

This Bachelor Thesis begins with a review of some of the details in relation to the discovery of the division ring (or non-commutative field) known nowadays as quaternions and its basic properties. A first attempt to the definition of the concept of derivative in quaternions is analyzed.

It is also explained how quaternions have found applications in many technological fields. This is shown through the lens of navigational systems, in which a more detailed exploration is made.

Keywords: *Quaternions – Differentiability – Applications – Gyroscope.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Introducción histórica, definición y propiedades básicas de los cuaterniones	1
1.1. Descubrimiento de los cuaterniones	1
1.2. Definición y propiedades básicas de los cuaterniones	5
1.2.1. Suma de cuaterniones	6
1.2.2. Producto de cuaterniones	6
1.2.3. Compatibilidad de la aritmética en \mathbb{H} con el módulo y el conjugado: el inverso multiplicativo	13
2. Funciones elementales y una introducción a la derivada en cuaterniones	17
2.1. Transformaciones elementales	17
2.1.1. Funciones lineales	17
2.1.2. Polinomios	18
2.1.3. Potencias	19
2.1.4. Función exponencial	21
2.2. Sobre la derivada en \mathbb{H}	22
2.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	25
2.4. Trivialidad de las funciones \mathbb{H} -derivables	27
3. Aplicación de los cuaterniones	31
3.1. Ángulos de Euler y de Tayt-Bryan	31
3.2. El sistema de navegación	33
3.3. El uso de los cuaterniones	35
3.3.1. Fórmula de Olinde Rodrigues	35

3.3.2. Rotaciones y cuaterniones	37
3.3.3. Los cuaterniones como solución al bloqueo del cardán	39
3.3.4. Sobre los convenios cuaterniónicos	40
Conclusiones	43
Bibliografía	47
Póster	49

Introducción

El plano cartesiano \mathbb{R}^2 con las operaciones *suma* y *producto* dadas, respectivamente, por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad (0.1)$$

y

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \quad (0.2)$$

es un cuerpo. A este cuerpo se le denota por \mathbb{C} y se le llama el *cuerpo de los números complejos*. Identificando al eje de abscisas en \mathbb{R}^2 con \mathbb{R} (es decir, todo $x \in \mathbb{R}$ se identifica con el punto $(x, 0) \in \mathbb{C}$), y observando que en este caso las operaciones (0.1) y (0.2) coinciden con la suma y la multiplicación en \mathbb{R} , se sigue que \mathbb{C} es una extensión del cuerpo de los números reales. Más aún, haciendo uso de esta identificación y definiendo el producto por un escalar real λ siguiendo la regla (0.2):

$$\lambda(x, y) = (\lambda, 0) \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y),$$

y observando que, entonces,

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1), \quad (0.3)$$

se tiene que \mathbb{C} es un espacio vectorial de dimensión 2 sobre \mathbb{R} . Por supuesto, siendo \mathbb{C} un cuerpo, es un espacio vectorial unidimensional sobre sí mismo.

A la vista de (0.3), y puesto que el punto $(1, 0)$ representa al número real 1, nos faltaría asignar una notación al $(0, 1)$ para obtener una base del espacio vectorial \mathbb{C} sobre \mathbb{R} . Si denotamos a $(0, 1)$ por i , preocupándonos luego de qué propiedades ha de tener, resulta que podemos escribir todo número complejo z de la forma:

$$z = x + yi,$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$.

Analizamos ahora esas propiedades del número complejo i . Primero empezamos por multiplicarlo por sí mismo, de acuerdo con (0.2):

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Esta sencilla exigencia, junto con la distributividad del producto con la suma, la conmutatividad de i con escalares y las propiedades del cuerpo de los números reales, es suficiente para recuperar el producto en (0.2):

$$(x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + y_1 y_2 i^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i.$$

Otra propiedad interesante del cuerpo de los números complejos es que es un espacio métrico con la siguiente distancia.

Para $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, con $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, se define:

$$d(z_1, z_2) = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Esta distancia es de hecho la distancia inducida por la norma euclídea en \mathbb{R}^2 , que, recordemos, se define como $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

El *módulo* de un número complejo $z = x + yi$, denotado por $|z|$, es la norma del vector (x, y) . Es decir, su distancia al $0 = 0 + 0i$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Puesto que, dados los números reales x_1, y_1, x_2 e y_2 se cumple que

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 y_1 - x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} &= \sqrt{x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \end{aligned}$$

los números complejos verifican la *ley de módulos*:

Teorema 0.1. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|. \quad (0.4)$$

Dado que la suma de números complejos se identifica completamente con la suma de dos vectores de \mathbb{R}^2 , su interpretación geométrica es bien conocida. No obstante, la interpretación geométrica del producto de dos números complejos requiere de un análisis más detallado que se explica a continuación.

Si se consideran dos números complejos no nulos $z_1 = x_1 + y_1 i$ y $z_2 = x_2 + y_2 i$, dividiéndolos por sus módulos obtenemos los números complejos de módulo 1

$$w_1 = \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} i = X_1 + Y_1 i$$

y

$$w_2 = \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{x_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_2}{x_2^2 + y_2^2}i = X_2 + Y_2i.$$

Observemos que se cumple que $|X_1| \leq 1$, $|Y_1| \leq 1$ y $X_1^2 + Y_1^2 = 1$, de manera que podemos escoger $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $X_1 = \cos \alpha$ e $Y_1 = \sin \alpha$. Así, la multiplicación (0.2) de w_1 por w_2 puede escribirse como

$$w_1 \cdot w_2 = M \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

es la matriz que representa un giro en \mathbb{R}^2 de ángulo α en sentido positivo.

Se tiene entonces que multiplicar el número complejo no nulo z_2 por el número complejo, también no nulo, z_1 da lugar al número complejo que se obtiene al rotar el segmento que une el origen con el punto (x_2, y_2) un ángulo α en sentido positivo y cuyo módulo es el módulo de z_1 por el módulo de z_2 .

En otras palabras, la multiplicación compleja da lugar a *giros* (y homotecias, si se multiplica por números complejos de módulo distinto de 1).

Esta interpretación geométrica lleva a la conclusión (ya conocida, por ser \mathbb{C} un cuerpo) de que todo número complejo distinto del cero tiene inverso multiplicativo y, por lo tanto, se puede realizar una operación división, que es la operación necesaria para definir el concepto de *derivada*: la derivada de una función compleja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ en un punto z queda definida como

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

En efecto, el hecho de la existencia de este límite en todos los puntos z de un disco abierto D contenido en \mathbb{C} tiene como consecuencia resultados tan importantes como que tal función es analítica en ese disco, y todos los otros teoremas (debidos a Cauchy, Weierstrass y otros matemáticos célebres) que se estudian en el curso de Variable Compleja del Grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna.

Se plantea, en este punto, la siguiente cuestión: ¿será posible encontrar números “similares” a los números complejos en el espacio tridimensional? Esta es la pregunta que, precisamente, se plantea Sir William Rowan Hamilton a principios de los años 30 del siglo XIX. Comienza, así, un viaje intelectual que le llevaría casi diez años de intentos fallidos hasta que, por fin, en un paseo por el Royal Canal de Dublín con su esposa un 16 de octubre de 1843, la inspiración le saca de dudas y es tal su entusiasmo que decide inscribir en el puente más cercano las famosas reglas de multiplicación de los *cuaterniones*:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

El artículo *On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra*, aparece, como se menciona en [13], en 18 entregas en los volúmenes XXXV-XXXVI de “*The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* (3rd. Series)” a lo largo de los años 1844 – 1850. Cada una de estas entregas, incluyendo la última, terminaba con las palabras “*To be continued*”. Y parece que, de hecho, los cuaterniones continúan despertando interés hoy en día.

En efecto, los cuaterniones no solo son interesantes desde el punto de vista matemático (puro). Tienen numerosas aplicaciones. Tal y como se explica en [8], el mismo Hamilton y sus seguidores utilizaron los cuaterniones para resolver problemas de mecánica y óptica. Hoy en día, los cuaterniones tienen aplicaciones en robótica, visualización por ordenador, animación y efectos especiales en películas, navegación y muchas otras áreas. En particular, podemos señalar una aplicación especialmente llamativa: los cuaterniones han sido utilizados en el diseño de un sistema que rastrea la posición de un cepillo de dientes eléctrico en la boca en relación con los dientes del usuario y compensa automáticamente los movimientos del cabezal durante el cepillado.

En este Trabajo de Fin de Grado, revisaremos con más detalle la historia del descubrimiento de estos interesantes objetos en el primer capítulo. Además de la definición de los cuaterniones, probaremos algunas de sus propiedades básicas (en algunos de los casos, utilizando un argumento desarrollado por el autor).

En el capítulo dos, se presentan algunas funciones elementales en cuaterniones. Este capítulo es, además, el punto de inicio en el estudio del concepto de *derivabilidad* de funciones en los cuaterniones. Se muestran distintos ejemplos y se da una demostración original de un resultado que también se sigue de otro más general, tratado al final de este segundo capítulo.

Finalmente, el tercer capítulo está destinado al análisis de una de las aplicaciones de los cuaterniones: revisaremos el uso de los objetos introducidos por Hamilton hace ya más de 150 años en el diseño de todo aquello que implique modelizar rotaciones, en particular, de los sistemas de navegación.

Introducción histórica, definición y propiedades básicas de los cuaterniones

En este primer capítulo, se definen los cuaterniones y se estudian algunas de sus propiedades. También, se revisan algunos puntos que consideramos importantes en relación con la historia del descubrimiento de los cuaterniones.

1.1. Descubrimiento de los cuaterniones

Son numerosos los textos que recogen la bonita historia del descubrimiento de los cuaterniones por Hamilton, autor de [5] y [6]. En nuestro caso, para los contenidos de esta sección, hemos seguido [10], que incluye algunos de los pensamientos que Hamilton realizó antes de dar con la definición precisa de estos objetos.

Sir William Rowan Hamilton nació en Dublín en agosto de 1805 y murió en septiembre de 1865. Es en 1823 el año en el que Hamilton ocupó el primer puesto entre los 100 candidatos en los exámenes del “Trinity College”, en Dublín. Tal y como se menciona en [10], sus conocimientos humanistas y matemáticos cuando era todavía un alumno de grado llamaron la atención en los círculos académicos de Inglaterra y Escocia, así como de Irlanda.

Si bien a lo largo de su vida Hamilton se dedicó a investigar en multitud de disciplinas, es en el último periodo en el que dedica su tiempo casi exclusivamente a los cuaterniones (incluyendo sus aplicaciones a la dinámica, la astronomía y la teoría de la luz).

Más concretamente, en 1833 Hamilton presenta un artículo a la Real Academia Irlandesa con el título “*Teoría de funciones conjugadas, o parejas algebraicas: con un ensayo preliminar sobre el álgebra como ciencia del tiempo puro.*” En él se recogían, fundamentalmente, los argumentos explicados en la introducción de este trabajo: definía la suma y multiplicación para las “parejas” y demostraba que el cuadrado de la pareja $(0, 1)$ es la pareja $(-1, 0)$, de manera que $(0, 1)$ debía considerarse como $\sqrt{-1}$. Así, Hamilton se convierte en el primer

matemático en tratar a los números complejos como pares ordenados de números reales (aunque esta relación ya existía implícitamente en las representaciones gráficas de los complejos).

En su artículo, Hamilton interpreta el producto de números complejos de la manera ya explicada: como una rotación. Con este nuevo entendimiento geométrico de los números complejos, se plantea la existencia de números similares en el espacio tridimensional, como muestra la afirmación con la que finaliza su tratado, que se considera como el primer intento de Hamilton de encontrar un álgebra que englobara un conjunto de axiomas basados en el “orden y progresión continua, o, del tiempo puro”:

“... el autor espera publicar más adelante muchas aplicaciones sobre este aspecto; especialmente sobre Ecuaciones e Integrales, y sobre la Teoría de Tripletas.”

Por analogía con los números complejos, Hamilton definió sus tripletas con la expresión $a_0 + a_1i + a_2j$, donde $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, e $i^2 = j^2 = -1$. La suma de las expresiones no presentaba ninguna dificultad:

$$(a_0 + a_1i + a_2j) + (b_0 + b_1i + b_2j) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j.$$

La dificultad aparece al definir el producto. Teniendo muy presente la ley de módulos (0.4) para los números complejos (denominada de esta manera por Hamilton) y queriendo que esta se mantuviese para las tripletas, Hamilton se encontraba con lo siguiente: calculaba

$$(a_0 + a_1i + a_2j)^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + 2a_0a_1i + 2a_0a_2j + 2a_1a_2ij,$$

y obtenía el valor del cuadrado del módulo de esta tripleta como

$$(a_0^2 - a_1^2 - a_2^2)^2 + (2a_0a_1)^2 + (2a_0a_2)^2 + (2a_1a_2)^2 = (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)^2 + (2a_1a_2)^2.$$

De esta manera, definiendo el módulo de la tripleta $t = a_0 + a_1i + a_2j$ por

$$|t| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2},$$

concluía que la ley de módulos no era satisfecha, a menos que los términos ij fueran simplificados de la expansión. Esto es posible si se suprime el término haciendo $ij = 0$ (algo que a Hamilton no le resultaba “suficientemente” correcto), o bien incluyéndolo en alguno de los otros términos en el producto.

En este punto, se observa que si el orden del producto al realizar la operación $(a_0 + a_1i + a_2j)^2$ es respetado, el término $2a_1a_2ij$ debe ser $a_1a_2(ij + ji)$. La ley de módulos podría satisfacerse, entonces, imponiendo $ij + ji = 0$. Con

estas consideraciones, Hamilton escribe: “*por momentos me he visto tentado a considerar $ij = 0$. Pero me resulta extraño e incómodo, y me percaté de que la misma supresión del término no deseado, podría obtenerse asumiendo algo que me parecía menos violento, es decir, que $ji = -ij$. De este modo consideré que $ij = k, ji = -k$, reservándome la consideración de si k era nulo o no.*”

El siguiente paso era la definición del producto de dos tripletas arbitrarias. Hamilton calcula el producto como sigue:

$$(a_0 + a_1i + a_2j) \cdot (b_0 + b_1i + b_2j) = (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2) + (a_0b_1 + a_1b_0)i + (a_0b_2 + a_2b_0)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k.$$

Imponiendo la condición $k = 0$, Hamilton se planteaba si la ley de módulos era satisfecha, es decir, si se cumplía la identidad

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2) = (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2)^2 + (a_0b_1 + a_1b_0)^2 + (a_0b_2 + a_2b_0)^2. \quad (1.1)$$

Claramente, la respuesta es no: basta considerar las tripletas $1 - i + j$ y $1 - i - j$ para obtener, tras sustituir en (1.1), que $9 = 5$.

La asunción de que $k = 0$ se volvía, así, insostenible. Sin embargo, la consideración de que k fuese distinto de 0 no satisfacía a Hamilton completamente, puesto que el producto de dos tripletas debiera ser otra, mientras que el producto indicado contenía cuatro términos en lugar de tres.

Este es un resultado que no se detalla en la referencia [10] utilizada en esta sección. Lo incluimos, aportando nuestra propia demostración a efectos de completitud.

Lema 1.1. *Supongamos que i y j verifican $i^2 = j^2 = -1$. Sea $k = ij$. Entonces, si el producto de tripletas por escalares es conmutativo, el producto de tripletas es asociativo y se satisface la propiedad distributiva, no existen números reales a_0, a_1, a_2 tales que $k = a_0 + a_1i + a_2j$.*

Demostración. Supongamos que se cumplen las propiedades naturales mencionadas y que $ij = a_0 + a_1i + a_2j$ para ciertos números reales a_0, a_1 y a_2 .

Se tiene, entonces, por un lado, $i(ij) = (ii)j = -j$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} i(ij) &= i(a_0 + a_1i + a_2j) = -a_1 + a_0i + a_2ij \\ &= -a_1 + a_0i + a_2(a_0 + a_1i + a_2j) = -a_1 + a_0a_2 + (a_0 + a_1a_2)i + a_2^2j. \end{aligned}$$

Se concluye, así, que $a_2^2 = -1$ para algún número real a_2 , lo que es claramente absurdo. ■

Hamilton se atascó en esta imposibilidad por lo que llegaría a rozar la decena de años. Se conoce que la respuesta a la pregunta (que le hacían sus hijos): “Bueno, papá, ¿puedes ya multiplicar las tripletas?” era: “No. Por ahora solo puedo sumarlas y restarlas”.

El resto de la historia es también conocido. El 16 de octubre de 1843, mientras caminaba junto a su mujer por el Canal Real de Dublín, Hamilton se dio cuenta de que todas las dificultades quedaban resueltas si se tomaba k como una tercera unidad imaginaria añadida a i y j . Así describe el propio Hamilton su descubrimiento en una carta a uno de sus hijos 15 años después de aquel paseo:

“Mañana será el decimoquinto cumpleaños de los cuaterniones. Surgieron a la vida, o a la luz, ya crecidos, el 16 de octubre de 1843, cuando me encontraba caminando con la Sra. Hamilton hacia Dublín, y llegamos al Puente de Broughman. Es decir, entonces y ahí, cerré el circuito galvánico del pensamiento y las chispas que cayeron fueron las ecuaciones fundamentales entre i , j , k ; exactamente como las he usado desde entonces. Saqué, en ese momento, una libreta de bolsillo, que todavía existe, e hice una anotación, sobre la cual, en ese mismo preciso momento, sentí que posiblemente sería valioso el extender mi labor por al menos los diez (o podían ser quince) años siguientes. Es justo decir que esto sucedía porque sentí, en ese momento, que un problema había sido resuelto, un deseo intelectual aliviado, deseo que me había perseguido por lo menos los quince años anteriores. No pude resistir el impulso de coger mi navaja y grabar en una piedra del Puente de Brougham la fórmula fundamental con los símbolos i , j , k :

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que contenían la solución del problema y que desde entonces sobrevive como inscripción”.

Hamilton denominó a estas nuevas expresiones *cuaterniones*. Son números de la forma $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, donde q_0, q_1, q_2, q_3 son reales e i, j, k son las unidades imaginarias que verifican $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

No estando seguro aún de que se cumpliera la propiedad asociativa para el producto de cuaterniones, Hamilton escribe: “... tenemos probablemente que $ik = -j$ porque $ik = iij$ e $i^2 = -1$; de este modo, podemos esperar encontrar que $kj = ijj = -i$.”

La mencionada propiedad asociativa le habría proporcionado el valor para ki , de modo que $ki = (-ji)i = (-j)(-1) = j$. Hamilton procede, no obstante, como sigue: “... consideraré que resultaba que $ki = j, jk = i$, porque parecía evidente que si $ji = -ij$, deberíamos tener también que $kj = -jk, ik = -ki$.”

Así, deduce las “asunciones del producto” (como Hamilton las llamaba, de acuerdo con [10]) que son, precisamente:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

1.2. Definición y propiedades básicas de los cuaterniones

A la vista de lo explicado en la sección anterior, es claro que un **cuaternión** es un número de la forma $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, donde $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ y se verifica

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

El conjunto de los cuaterniones se denotará por \mathbb{H} .

Se denomina **parte real** de un cuaternión al coeficiente que no multiplica a ninguna de las unidades imaginarias. Así, para $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$, se tiene $Re(q) = q_0$. La **parte imaginaria** o **parte vectorial** de un cuaternión es la resta de este menos su parte real. Esto es: $Im(q_0 + q_1i + q_2j + q_3k) = q_1i + q_2j + q_3k$. La parte imaginaria de $q \in \mathbb{H}$ será denotada también como \mathbf{q} . Un cuaternión q se dice que es **imaginario puro** si $q = \mathbf{q}$.

Introducimos aquí los operadores $Im_i(\cdot)$, $Im_j(\cdot)$ e $Im_k(\cdot)$ que devuelven el coeficiente correspondiente a la unidad imaginaria indicada. Concretamente, dado $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$,

$$Im_i(q) = q_1, \quad Im_j(q) = q_2, \quad e \quad Im_k(q) = q_3. \quad (1.2)$$

De manera análoga a los números complejos, se define el **conjugado** de un cuaternión q , y se denota como \bar{q} , al cuaternión que resulta al cambiarle el signo a la parte imaginaria de q . Así, si $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, se tiene $\bar{q} = q_0 - \mathbf{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$.

El **módulo** del cuaternión $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ es

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (1.3)$$

Es en este punto cuando nos parece apropiado señalar la siguiente propiedad que muy posiblemente el lector ha considerado: la transformación $I : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$I(q) = (q_0, q_1, q_2, q_3), \quad q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H},$$

es una biyección que nos permite identificar un cuaternión con un vector de \mathbb{R}^4 .

Con esta identificación, el módulo de un cuaternión, dado por (1.3) coincide con la norma euclídea en \mathbb{R}^4 , de manera que \mathbb{H} es un espacio topológico y su topología coincide con la topología usual en el espacio real 4-dimensional.

Parece también conveniente añadir que los cuaterniones pueden identificarse con \mathbb{C}^2 utilizando la siguiente biyección: Dados $(q_0 + q_1i)$ y $(q_2 + q_3i) \in \mathbb{C}$, se define

$$I_2((q_0 + q_1i), (q_2 + q_3i)) = (q_0 + i q_1) + (q_2 + q_3i)j \in \mathbb{H}.$$

No obstante, puesto que salvo en casos ocasionales no nos centraremos en la relación entre los cuaterniones y los números de \mathbb{C}^2 sino, sobre todo, en la identificación entre \mathbb{H} y \mathbb{R}^4 dada por la biyección I definida anteriormente, omitimos más detalles sobre las propiedades de la biyección I_2 .

Para concluir este apartado, y con el fin de facilitar la claridad de la exposición, nos gustaría advertir al lector que, en el caso de que no haya lugar a confusión, cuando escribamos $a \in \mathbb{H}$, se entenderá que $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$, con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Así mismo, la parte imaginaria de a , denotada por \mathbf{a} , representará a $a_1i + a_2j + a_3k$ y el vector \vec{a} a (a_1, a_2, a_3, a_4) .

1.2.1. Suma de cuaterniones

La **suma** de dos cuaterniones $p, q \in \mathbb{H}$, con $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ y $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, es el cuaternión

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k.$$

Es trivial demostrar que el par $(\mathbb{H}, +)$ es un grupo conmutativo: la suma de dos cuaterniones es un cuaternión; se cumplen las propiedades conmutativa y asociativa de manera clara; el elemento neutro de este grupo es el cuaternión cero $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$; y dado un cuaternión $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, su elemento opuesto (el inverso en este grupo) es $-q = -q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$.

Estas condiciones son evidentes utilizando la identificación de los cuaterniones con \mathbb{R}^4 explicada en el punto anterior, dado que la suma de cuaterniones se identifica con la suma de vectores en \mathbb{R}^4 .

1.2.2. Producto de cuaterniones

El **producto** de dos cuaterniones $p, q \in \mathbb{H}$, con $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ y $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$, es el cuaternión

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i \\ &\quad + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)k. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Así, identificando los números reales x con aquellos cuaterniones con parte vectorial nula $q = x + \mathbf{0}$ (o con vectores en \mathbb{R}^4 de la forma $(x, 0, 0, 0)$), se tiene

que la suma y el producto de números reales es un número real, luego podemos concluir que \mathbb{H} es una extensión del cuerpo de los números reales.

Más aún, de acuerdo con (1.4), si x es un número real y $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$,

$$x \cdot q = xq_0 + xq_1i + xq_2j + xq_3k \quad (= qx).$$

Por lo tanto, \mathbb{H} es un espacio vectorial de dimensión 4 sobre \mathbb{R} .

Propiedades del producto

A la vista de lo mencionado en el punto anterior, el producto por escalares en los cuaterniones es conmutativo. Es obvio que en el caso general no lo es, puesto que las reglas $ij = k$, $ji = -k$ no satisfacen la conmutatividad.

En cambio, sí se satisfacen las propiedades asociativa y distributiva. Hay distintas maneras de demostrar estas dos propiedades. En esta memoria, se incluyen las demostraciones que el autor desarrolló a lo largo de este trabajo (incluyendo la descripción de las matrices de multiplicación que se mostrarán en el siguiente punto), a pesar de que *a posteriori* ha encontrado algunas similitudes en otros textos. No ha sido el caso en lo que se refiere al uso de las clases de equivalencia en \mathbb{Z}_3 , que consideramos muy natural y que permite reducir los casos a estudiar en el análisis de la asociatividad del producto de cuaterniones, por ejemplo. Explicaremos el uso de estas clases de equivalencia con detalle al demostrar la propiedad asociativa.

Comenzamos presentando distintas matrices que serán de gran utilidad.

- *Matrices de multiplicación*

Como ya se adelantaba en el párrafo anterior, haremos uso de ciertas operaciones que involucran matrices (y, más concretamente, el producto de una matriz por un vector o de un vector por una matriz). Hemos de tener especial cuidado con cómo se realizan estas operaciones, pues se están asignando a dos objetos iguales distintos objetos finales, como se explicará más adelante.

Más concretamente, consideremos los cuaterniones a y $q \in \mathbb{H}$. A la vista de (1.4), se tiene

$$\begin{aligned} a \cdot q &= a_0q_0 - a_1q_1 - a_2q_2 - a_3q_3 + i(a_0q_1 + a_1q_0 + a_2q_3 - a_3q_2) \\ &\quad + j(a_0q_2 + a_2q_0 + a_3q_1 - a_1q_3) + k(a_0q_3 + a_3q_0 + a_1q_2 - a_2q_1) \end{aligned}$$

Así, haciendo uso de las definiciones de la parte real y de (1.2), queda:

- $Re(a \cdot q) = a_0q_0 - a_1q_1 - a_2q_2 - a_3q_3,$

- $Im_i(a \cdot q) = a_1q_0 + a_0q_1 - a_3q_2 + a_2q_3$,
- $Im_j(a \cdot q) = a_2q_0 + a_3q_1 + a_0q_2 - a_1q_3$,
- $Im_k(a \cdot q) = a_3q_0 - a_2q_1 + a_1q_2 + a_0q_3$.

Por lo tanto, podemos escribir, formalmente,

$$a \cdot q = A^- \cdot \vec{q}, \quad (1.5)$$

donde

$$A^- = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

y \vec{q} es el vector (columna) (q_0, q_1, q_2, q_3) . También

$$a \cdot q = \vec{q}^T \cdot A^+, \quad (1.7)$$

donde

$$A^+ = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ -a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Esto es evidente, ya que podemos identificar el cuaternión $a \cdot q$ tanto con el vector columna $a\vec{q}$ como con el vector fila $a\vec{q}^T$, de manera que el resultado se sigue de (1.5) y (1.7).

Por otro lado, la multiplicación de los cuaterniones $q, b \in \mathbb{H}$ resulta

$$\begin{aligned} q \cdot b &= q_0b_0 - q_1b_1 - q_2b_2 - q_3b_3 + i(q_0b_1 + q_1b_0 + q_2b_3 - q_3b_2) \\ &+ j(q_0b_2 + q_2b_0 + q_3b_1 - q_1b_3) + k(q_0b_3 + q_3b_0 + q_1b_2 - q_2b_1), \end{aligned}$$

de manera que se obtiene, al igual que anteriormente,

- $Re(q \cdot b) = b_0q_0 - b_1q_1 - b_2q_2 - b_3q_3$,
- $Im_i(q \cdot b) = b_1q_0 + b_0q_1 + b_3q_2 - b_2q_3$,
- $Im_j(q \cdot b) = b_2q_0 - b_3q_1 + b_0q_2 + b_1q_3$,
- $Im_k(q \cdot b) = b_3q_0 + b_2q_1 - b_1q_2 + b_0q_3$.

Por lo tanto,

$$q \cdot b = \vec{q}^T \cdot B^+, \quad (1.9)$$

donde

$$B^+ = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & b_0 & -b_3 & b_2 \\ -b_2 & b_3 & b_0 & -b_1 \\ -b_3 & -b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

y

$$q \cdot b = B^- \cdot \vec{q}, \quad (1.11)$$

donde

$$B^- = \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Dado que $A^- = (A^+)^T$ y $B^- = (B^+)^T$, simplificar la notación, definimos $A = A^-$ y $B = B^-$. Así, cuando se requiera del uso de las matrices A^+ o B^+ en (1.8) y (1.10), se escribirá A^T y B^T , respectivamente.

Es conveniente observar lo siguiente, pues puede dar lugar a errores en las demostraciones de los resultados contenidos en este trabajo.

Ya hemos establecido la identificación del cuaternión $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ con el vector $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$. Esta identificación es, por supuesto, análoga a la de asociar a cada cuaternión $q \in \mathbb{H}$ el vector $(q_0, q_1, q_2, q_3)^T$, de manera que se verifican, claramente, las equivalencias entre (1.5) y (1.7) y entre (1.9) y (1.11).

No obstante, podemos, también, identificar los cuaterniones con las matrices de las formas establecidas. De manera más precisa, y por ejemplo, a una matriz de la forma (1.6), le podemos asociar, de manera biunívoca, el cuaternión establecido por la primera columna de la matriz; a una matriz de la forma (1.8), el cuaternión establecido por su primera fila; y, de manera similar, podemos establecer las correspondientes identificaciones entre las matrices (1.10) y (1.12) y el cuaternión $b \in \mathbb{H}$.

- La propiedad distributiva

Entendiendo la multiplicación cuaterniónica como una multiplicación de matrices y vectores es fácil ver que se verifica la propiedad distributiva (multiplicando por la izquierda y por la derecha).

Teorema 1.2. *Dados $p, q, r \in \mathbb{H}$, se tiene*

$$p \cdot (q + r) = p \cdot q + p \cdot r \quad \text{y} \quad (q + r) \cdot p = q \cdot p + r \cdot p.$$

Demostración. Utilizando (1.5) y la propiedad distributiva para las matrices, resulta

$$p \cdot (q + r) = A_p(\vec{q} + \vec{r}) = A_p\vec{q} + A_p\vec{r} = p \cdot q + p \cdot r.$$

Similarmente por la derecha, pero usando en esta ocasión (1.9),

$$(q + r) \cdot p = (\vec{q}^T + \vec{r}^T)B_p^T = \vec{q}^T B_p^T + \vec{r}^T B_p^T = q \cdot p + r \cdot p.$$

■

A pesar de que el producto de cuaterniones no es conmutativo, una vez probada la propiedad distributiva de la suma y el producto, podemos caracterizar aquellos pares de cuaterniones $p, q \in \mathbb{H}$ para los que se satisface $p \cdot q = q \cdot p$.

Comencemos por el caso de dos cuaterniones puros \mathbf{p} y \mathbf{q} e identifiquémoslos con los vectores \vec{p} y $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$. En este caso, es fácil comprobar la identidad en el siguiente lema.

Lema 1.3. *Dados dos cuaterniones puros \mathbf{p} y \mathbf{q} , se tiene*

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \mathbf{p} \times \mathbf{q}, \quad (1.13)$$

donde $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ representa el producto escalar usual de los vectores $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ su productor vectorial.

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} &= (p_1i + p_2j + p_3k) (q_1i + q_2j + q_3k) \\ &= -p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 + (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k \\ &= - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} k \\ &= - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \begin{vmatrix} i & j & k \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \end{aligned}$$

■

Nótese que, en la identidad (1.13), el término $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \in \mathbb{R}$ mientras que $\mathbf{p} \times \mathbf{q}$ da lugar a otra parte vectorial o imaginaria.

Es claro que $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle$ para todo par \mathbf{p}, \mathbf{q} . No obstante, se tiene $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{p}$. Luego el producto $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$ será conmutativo cuando $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = 0$, lo cual ocurre cuando \mathbf{p} y \mathbf{q} son paralelos.

Estudiamos ahora el producto de dos cuaterniones no necesariamente imaginarios puros. Descomponiendo cada cuaternión en su parte real y su parte

vectorial y utilizando la propiedad distributiva así como el Lema 1.3, obtenemos:

$$\begin{aligned} p \cdot q &= (p_0 + \mathbf{p}) \cdot (q_0 + \mathbf{q}) = p_0q_0 + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \\ &= p_0q_0 + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Puesto que el producto de dos escalares, un escalar y una parte vectorial y el producto escalar de dos partes imaginarias son conmutativos, el único término que no verifica esta propiedad en (1.14) es el que involucra al producto vectorial. Luego como en el caso de dos cuaterniones imaginarios puros, dos cuaterniones conmutan si y solo si el producto vectorial de sus partes imaginarias es cero.

En términos del **conmutador** de dos cuaterniones, definido por

$$[p, q] = p \cdot q - q \cdot p,$$

se tiene el siguiente resultado que se sigue fácilmente de la identidad (1.14) que muestra que:

$$[p, q] = 2 \mathbf{p} \times \mathbf{q}. \quad (1.15)$$

Proposición 1.4. *El conmutador de dos cuaterniones $p, q \in \mathbb{H}$ es cero si y solo si el producto vectorial de sus partes imaginarias es cero.*

- *La propiedad asociativa del producto de cuaterniones*

Como consecuencia de la propiedad distributiva, puede demostrarse que se cumple la propiedad asociativa para el producto de cuaterniones si se verifica que se cumple para los productos de cuaterniones de la forma i , j y k (puesto que, claramente, el cuaternión 1 es el elemento neutro para el producto).

La comprobación de este hecho es fácil y son diversos los autores que argumentan de esta manera, mostrando un listado de las 27 posibles combinaciones (véase, por ejemplo, la página web <https://www.math.utah.edu/~schwede/math-435/WS7Sols.pdf> que recoge estas 27 posibilidades). El autor ha decidido mostrar en esta memoria su propia aproximación a la demostración que permite disminuir estas 27 combinaciones a solo 9 y que será útil en la demostración de otros resultados.

Para ello, se hará uso de la naturaleza cíclica del producto de las unidades i , j y k , reduciendo así a un tercio las operaciones necesarias.

Más concretamente, dado un entero no negativo n , denotemos por \bar{n} a la clase de equivalencia $[n]_3$ de n en el cuerpo \mathbb{Z}_3 . Como representantes de las tres clases de equivalencia que conforman a \mathbb{Z}_3 , se toman 1, 2 y 3.

Se utilizarán unidades “genéricas”. Esto es, sean $u_{\overline{1}} = i$, $u_{\overline{2}} = j$ y $u_{\overline{3}} = k$. Con este convenio, es fácil simplificar la escritura de, por ejemplo, las leyes de multiplicación de cuaterniones

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik,$$

que pasan a ser, simplemente,

$$u_{\overline{n}}^2 = -1 = u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n+2}}, \quad u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+1}} = u_{\overline{n+2}} = -u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n}}, \quad (1.16)$$

de manera que, también, $u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+2}} = -u_{\overline{n+1}} = -u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n}}$.

Teorema 1.5. Sean p, q y $r \in \mathbb{H}$. Entonces,

$$p \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r.$$

Demostración. Comprobemos que dadas cualesquiera 3 unidades escogidas $u_{\overline{1}}$, $u_{\overline{2}}$ o $u_{\overline{3}}$ (no necesariamente distintas), el producto de ellas es asociativo:

1. $u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}$.

$$(u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}) \cdot u_{\overline{n}} = -u_{\overline{n}} \quad \text{y} \quad u_{\overline{n}} \cdot (u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}) = u_{\overline{n}} \cdot (-1) = -u_{\overline{n}}.$$

2. $u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+1}}$.

$$(u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}) \cdot u_{\overline{n+1}} = -u_{\overline{n+1}} \quad \text{y} \quad u_{\overline{n}} \cdot (u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+1}}) = u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+2}} = -u_{\overline{n+1}}.$$

3. $u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+2}}$.

$$(u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}) \cdot u_{\overline{n+2}} = -u_{\overline{n+2}} \quad \text{y} \quad u_{\overline{n}} \cdot (u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+2}}) = u_{\overline{n}} \cdot (-u_{\overline{n+1}}) = -u_{\overline{n+2}}.$$

4. $u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n}}$.

$$(u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+1}}) \cdot u_{\overline{n}} = u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n}} = u_{\overline{n+1}} \\ \text{y} \quad u_{\overline{n}} \cdot (u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n}}) = u_{\overline{n}} \cdot (-u_{\overline{n+2}}) = u_{\overline{n+1}}.$$

5. $u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n}}$

$$(u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n+2}}) \cdot u_{\overline{n}} = -u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n}} = u_{\overline{n+2}} \\ \text{y} \quad u_{\overline{n}} \cdot (u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n}}) = u_{\overline{n}} \cdot (u_{\overline{n+1}}) = u_{\overline{n+2}}.$$

6. $u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}$.

$$(u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n}}) \cdot u_{\overline{n}} = -u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n}} = -u_{\overline{n+1}} \quad \text{y} \quad u_{\overline{n+1}} \cdot (u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}) = -u_{\overline{n+1}}.$$

7. $u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}$.

$$(u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n}}) \cdot u_{\overline{n}} = u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n}} = -u_{\overline{n+2}} \quad \text{y} \quad u_{\overline{n+2}} \cdot (u_{\overline{n}} \cdot u_{\overline{n}}) = -u_{\overline{n+2}}.$$

$$8. \ u_{\bar{n}} \cdot u_{\overline{n+1}} \ u_{\overline{n+2}}.$$

$$(u_{\bar{n}} \cdot u_{\overline{n+1}}) \cdot u_{\overline{n+2}} = u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n+2}} = -1 \quad \text{y} \quad u_{\bar{n}} \cdot (u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n+2}}) = u_{\bar{n}} \cdot u_{\bar{n}} = -1.$$

$$9. \ u_{\bar{n}} \cdot u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n+1}}.$$

$$(u_{\bar{n}} \cdot u_{\overline{n+2}}) \cdot u_{\overline{n+1}} = -u_{\overline{n+1}} \cdot u_{\overline{n+1}} = 1 \quad \text{y} \quad u_{\bar{n}} \cdot (u_{\overline{n+2}} \cdot u_{\overline{n+1}}) = u_{\bar{n}} \cdot (-u_{\bar{n}}) = 1.$$

Probada la propiedad distributiva y la propiedad asociativa para las unidades, podemos proceder a probar que se verifica la propiedad asociativa como sigue. Consideremos tres cuaterniones $p, q, r \in \mathbb{H}$ y escribamos

$$p = (p_0u_0 + p_1u_1 + p_2u_2 + p_3u_3), \quad q = (q_0u_0 + q_1u_1 + q_2u_2 + q_3u_3)$$

y

$$r = (r_0u_0 + r_1u_1 + r_2u_2 + r_3u_3),$$

con $u_0 = 1$.

Para realizar las multiplicaciones $p \cdot (q \cdot r)$ y $(q \cdot p) \cdot r$, realizamos las multiplicaciones pero sin simplificar las unidades. Nótese que el orden de las unidades en el producto revela qué coeficientes han de tener tales combinaciones. Esto es, el coeficiente que multiplica a $u_i \cdot u_j \cdot u_k$ (que ya se demostró igual a $u_i \cdot (u_j \cdot u_k)$ y $(u_i \cdot u_j) \cdot u_k$) con $i, j, k = 0, 1, 2, 3$, donde $u_0 = 1$, es, precisamente, el coeficiente $p_i q_j r_k$. Así, el resultado es determinista sin necesidad de saber qué producto se realizó primero, probando así la asociatividad del producto de cuaterniones. ■

1.2.3. Compatibilidad de la aritmética en \mathbb{H} con el módulo y el conjugado: el inverso multiplicativo

En este último apartado del primer capítulo, comprobamos que las propiedades aritméticas de los cuaterniones son “compatibles” con la conjugación y que se verifica la ley de los módulos. Así mismo, se calcula el inverso de todo cuaternión no nulo, de donde se concluye que los cuaterniones, con las operaciones de suma y producto definidas en los apartados anteriores, conforman un anillo de división no conmutativo.

Recordemos que el conjugado del cuaternión $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ es $\bar{q} = q_0 - q_1i - q_2j - q_3k$, y su módulo,

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

Es claro que, a la vista de la definición de la suma de cuaterniones, se verifica que

$$\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}.$$

También, puesto que el módulo de un cuaternión coincide con la norma del vector $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$, se tiene la desigualdad triangular

$$|p+q| \leq |p| + |q|.$$

No es cierto, en cambio, que la conjugación del producto de dos cuaterniones coincida con el producto de los conjugados. El resultado preciso es el siguiente.

Proposición 1.6. Sean $p, q \in \mathbb{H}$. Entonces,

$$\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}. \quad (1.17)$$

Demostración. Utilizando (1.14), se tiene

$$\begin{aligned} \overline{p \cdot q} &= \overline{p_0q_0 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}} \\ &= p_0q_0 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - p_0\mathbf{q} - q_0\mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q} \\ &= p_0q_0 - \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle - p_0\mathbf{q} - q_0\mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\ &= p_0q_0 - \langle -\mathbf{q}, -\mathbf{p} \rangle + p_0(-\mathbf{q}) + q_0(-\mathbf{p}) + (-\mathbf{q}) \times (-\mathbf{p}) = \bar{q} \cdot \bar{p}. \end{aligned}$$

■

La relación entre el módulo y el conjugado de un cuaternión es la siguiente:

Lema 1.7. Sea $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H}$. Entonces,

$$|q|^2 = q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q.$$

Es fácil demostrar este lema utilizando un argumento similar al usado en la demostración de la proposición anterior. No obstante, hemos decidido incluir otra prueba alternativa que sigue la misma línea que la usada para demostrar la asociatividad del producto de cuaterniones.

Demostración. Denotando de nuevo por $u_{\bar{1}} = i$, $u_{\bar{2}} = j$ y $u_{\bar{3}} = k$ y haciendo la multiplicación $q \cdot \bar{q}$ (o $\bar{q} \cdot q$) sin multiplicar las unidades, para obtener el resultado basta demostrar que, para $n = 1, 2, 3$, $u_{\bar{n}}u_{\overline{n+1}} + u_{\overline{n+1}}u_{\bar{n}} = 0$ (lo que implica que $q_{\bar{n}}q_{\overline{n+1}}u_{\bar{n}}u_{\overline{n+1}} + q_{\overline{n+1}}q_{\bar{n}}u_{\overline{n+1}}u_{\bar{n}} = 0$), puesto que es claro que $q_0(-q_{\bar{n}}u_{\bar{n}}) + q_{\bar{n}}q_0u_{\bar{n}} = 0$.

La condición a demostrar es obvia por la ley de multiplicación de cuaterniones, resultando que

$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = |q|^2.$$

■

Podemos utilizar la identidad proporcionada en el lema anterior para definir el inverso multiplicativo de un cuaternión no nulo q . El procedimiento es similar al utilizado para definir el correspondiente inverso en \mathbb{C} . Comenzamos definiendo formalmente este concepto.

Dado un cuaternión no nulo $q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, llamamos **inverso multiplicativo** de q , denotado por q^{-1} , al cuaternión que cumple

$$q \cdot q^{-1} = q^{-1} \cdot q = 1.$$

Proposición 1.8. *Todo cuaternión no nulo tiene un único inverso multiplicativo*

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}.$$

Demostración. Puesto que la multiplicación por escalares conmuta con el producto de cuaterniones, se tiene:

$$q \cdot \frac{\bar{q}}{|q|^2} = \frac{q \cdot \bar{q}}{|q|^2} = \frac{|q|^2}{|q|^2} = 1 = \frac{|q|^2}{|q|^2} = \frac{\bar{q} \cdot q}{|q|^2} = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \cdot q.$$

Que el inverso es único es una consecuencia directa de la propiedad distributiva y el hecho de que el producto de dos cuaterniones es 0 si y solo si uno de ellos lo es. ■

Finalizamos este capítulo comprobando que el producto de cuaterniones es compatible con el módulo. Es decir, que se verifica lo que Hamilton denominó como la **ley de módulos**.

Proposición 1.9. *Sean $p, q \in \mathbb{H}$. Entonces, $|p \cdot q| = |p| |q|$.*

Demostración. Utilizando el lema 1.7 y (1.17), junto con la propiedad asociativa para el producto de cuaterniones y el hecho de que esta multiplicación es conmutativa si uno de los términos es un número real, se tiene

$$\begin{aligned} |p \cdot q|^2 &= (p \cdot q) \cdot \overline{(p \cdot q)} = (p \cdot q) \cdot (\bar{q} \cdot \bar{p}) = p \cdot (q \cdot \bar{q}) \cdot \bar{p} \\ &= |q|^2 \cdot p \cdot \bar{p} = |p|^2 |q|^2. \end{aligned}$$

Basta tomar raíces cuadradas para obtener que $|p \cdot q| = |p| |q|$. ■

Funciones elementales y una introducción a la derivada en cuaterniones

En este capítulo, tras definir algunas funciones elementales, analizamos el concepto de derivación en cuaterniones que surge al considerar el enfoque análogo a la habitual en las funciones complejas de variable compleja. Obtenemos así las ecuaciones de Cauchy-Riemann en \mathbb{H} .

Finalizaremos demostrando que son muy pocas las funciones en este anillo de división que resultan ser derivables de acuerdo a la definición.

2.1. Transformaciones elementales

La no conmutatividad del producto de cuaterniones da lugar a dificultades al definir conceptos tan básicos como aplicación lineal o polinomio. Estudiamos este tipo de funciones (y otras) en esta primera sección del capítulo.

2.1.1. Funciones lineales

Como en otros objetos algebraicos, los únicos operadores lineales son los monomios de primer grado. Sin embargo se requiere diferenciar entre los que tienen el coeficiente a la izquierda de la indeterminada o a la derecha.

Más concretamente, observemos que, utilizando la definición habitual de función lineal, se tiene que $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ es **lineal por la derecha** si verifica las siguientes condiciones: para cualesquiera $p, q \in \mathbb{H}$:

$$(1) \quad f(p + q) = f(p) + f(q), \quad (2.1)$$

$$(2) \quad f(p \cdot q) = p \cdot f(q).$$

Diremos que tal función f es **lineal por la izquierda** si verifica (2.1) y

$$(2') \quad f(p \cdot q) = f(p) \cdot q, \quad p, q \in \mathbb{H}. \quad (2.2)$$

Como avanzábamos, todas las aplicaciones lineales en \mathbb{H} vienen dadas por monomios de grado 1. Demostramos este hecho en la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Sea $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una función lineal por la derecha. Entonces, existe $\alpha \in \mathbb{H}$ tal que*

$$f(q) = q \cdot \alpha, \quad q \in \mathbb{H}.$$

Si f es lineal por la izquierda, entonces existe $\beta \in \mathbb{H}$ tal que

$$f(q) = \beta \cdot q, \quad q \in \mathbb{H}. \quad (2.3)$$

Demostración. Es claro que las funciones en la proposición satisfacen

$$f(p + q) = f(p) + f(q)$$

para cualesquiera $p, q \in \mathbb{H}$, por la propiedad distributiva.

También es cierto que si $f(q) = q \cdot \alpha$ para $\alpha \in H$ y todo cuaternión q , se tiene, por la propiedad asociativa para el producto de cuaterniones:

$$f(p \cdot q) = (p \cdot q) \cdot \alpha = p \cdot (q \cdot \alpha) = p \cdot f(q), \quad p, q \in \mathbb{H}.$$

Así, f es lineal por la derecha. De manera similar se comprueba que toda función de la forma (2.3) verifica (2.2).

Sea ahora $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una función lineal por la derecha. Entonces, para todo $q \in \mathbb{H}$,

$$f(q) = f(q \cdot 1) = q \cdot f(1).$$

Es decir, $f(q) = q \cdot \alpha$, donde $\alpha = f(1) \in \mathbb{H}$.

Similarmente, si f es lineal por la izquierda,

$$f(q) = f(1 \cdot q) = f(1) \cdot q,$$

luego necesariamente debe ser de la forma (2.3), con $\beta = f(1)$. ■

2.1.2. Polinomios

Es evidente que la no conmutatividad del producto de cuaterniones da lugar a dificultades en la definición y el estudio de los polinomios de grado n .

Por ejemplo, resulta claro que una expresión de la forma

$$\alpha \cdot x + x \cdot \beta,$$

siendo la suma de dos aplicaciones lineales en \mathbb{H} , es un polinomio cuaterniónico de grado 1 (en la variable x).

No obstante, este ejemplo tan simple muestra que si se permite la combinación de términos lineales por la izquierda y la derecha simultáneamente, surgen fenómenos como el siguiente: la ecuación

$$i \cdot x + x \cdot j = 1$$

no tiene solución en los cuaterniones.

Algunos autores diferencian aquellos polinomios que involucran la multiplicación por los coeficientes solo por la derecha o solo por la izquierda. Utilizan, para este tipo de polinomios, la denominación *polinomios unilaterales* (véase [2], por ejemplo). De esta manera, denominamos **polinomio unilateral por la izquierda de grado n** a una expresión de la forma

$$\alpha_n \cdot x^n + \alpha_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot x + \alpha_0,$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{H}$, $\alpha_n \neq 0$ y x^n es la potencia n -ésima del cuaternión x , que se estudiará en el siguiente apartado.

De manera análoga, un **polinomio unilateral por la derecha de grado n** es una expresión de la forma

$$x^n \cdot \beta_n + x^{n-1} \cdot \beta_{n-1} + \dots + x \cdot \beta_1 + \beta_0,$$

donde $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{H}$, $\beta_n \neq 0$.

Incluso en estos casos de polinomios unilaterales, la no conmutatividad de los cuaterniones da lugar a que no se cumpla, por ejemplo, el Teorema Fundamental del Álgebra. En efecto, la ecuación $x^2 = -1$ tiene infinitas soluciones: todo cuaternión imaginario puro de módulo 1 la satisface.

2.1.3. Potencias

Dado un número entero no negativo n , se define la **potencia n -ésima q^n** del cuaternión q como la multiplicación de q por sí mismo n veces. Considerando las propiedades básicas de las potencias y recordando que todo cuaternión no nulo tiene inverso multiplicativo, resulta

$$\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}^{1-1} = \mathbf{q}^1 \cdot \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^{-1} = 1.$$

El cálculo de las potencias n -ésimas de un cuaternión imaginario puro de módulo 1 es sencillo. Basta utilizar (1.13), teniendo en cuenta que $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$ y que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = |u|^2 = 1$ para obtener

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = -\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = -|u|^2 = -1.$$

Así, se tiene que las potencias de este tipo de cuaterniones forman un ciclo que debería resultar familiar al lector, pues es similar al de las potencias del número $i \in \mathbb{C}$. Concretamente, se tiene

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^2 = -1, \quad \mathbf{u}^3 = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^4 = 1.$$

Por tanto, para $n \geq 0$, resulta $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}^{\lfloor n \rfloor_4}$, donde $\lfloor n \rfloor_4$ representa la clase de equivalencia de n en \mathbb{Z}_4 .

Para cuaterniones imaginarios puros de módulo arbitrario distinto de cero \mathbf{q} , escribiendo $\mathbf{u}_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ y usando que el producto de cuaterniones conmuta con escalares, se tiene la identidad $\mathbf{q}^n = |\mathbf{q}|^n \mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{\lfloor n \rfloor_4}$, $n \geq 0$.

Consideremos ahora la potencia de un cuaternión $q \in \mathbb{H}$ no necesariamente imaginario puro (y no nulo). Si $\mathbf{q} = 0i + 0j + 0k$, necesariamente $q^n = q_0^n$. Si $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, escribamos

$$q = q_0 + \mathbf{q} = |q| \frac{q_0}{|q|} + |q| \frac{|\mathbf{q}|}{|q|} \mathbf{u}_{\mathbf{q}} = |q| (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u}_{\mathbf{q}}), \quad (2.4)$$

donde $\alpha = \arccos(q_0/|q|)$. Así,

$$q^n = |q|^n (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u}_{\mathbf{q}})^n,$$

por lo que podemos centrarnos en el cálculo de potencias de cuaterniones de la forma

$$\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u}, \quad (2.5)$$

donde \mathbf{u} es un cuaternión imaginario puro de módulo 1.

Usaremos el siguiente lema (véase [9]) que relaciona las potencias de cuaterniones de la forma (2.5) con potencias de números complejos:

Lema 2.2. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea \mathbf{u} un cuaternión imaginario puro de módulo 1. Definamos el número complejo $z = \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha i$. Entonces, si $z^n = a + bi$, se tiene*

$$(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u})^n = a + b\mathbf{u}.$$

Demostración. El resultado es trivialmente cierto para $n = 1$.

Supongamos que se verifica para cierto número natural k y sea $z^k = a + bi$, de manera que $z^{k+1} = (a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha) + (a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha)i$. Entonces, puesto que el producto de un cuaternión por sí mismo sí conmuta y teniendo en cuenta que $\mathbf{u}^2 = -1$ para el tipo de cuaterniones \mathbf{u} en el enunciado del lema, se tiene:

$$\begin{aligned}
 (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u})^{k+1} &= (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u})^k (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u}) \\
 &= (a + b\mathbf{u}) (\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u}) \\
 &= (a \cos \alpha - b \operatorname{sen} \alpha) + (a \operatorname{sen} \alpha + b \cos \alpha) \mathbf{u}.
 \end{aligned}$$

Esto termina la demostración. ■

Quizá la principal consecuencia del lema anterior es la extensión de la fórmula de De Moivre para los números complejos a los cuaterniones.

En efecto, la conocida fórmula establece que si el número complejo z es de la forma $\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, y n es un número entero positivo, entonces $z^n = \cos(n\alpha) + \operatorname{sen}(n\alpha)i$. A la vista del lema anterior, se sigue que si un cuaternión es de la forma (2.5),

$$(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \mathbf{u})^n = \cos(n\alpha) + \operatorname{sen}(n\alpha) \mathbf{u}.$$

Con estos argumentos, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 2.3. *Sea $n \geq 1$. La potencia n -ésima del cuaternión no nulo $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ es, si $\mathbf{q} = 0i + 0j + 0k$, $q^n = q_0^n$. En caso contrario,*

$$q^n = |q|^n \left(\cos(n\alpha) + \operatorname{sen}(n\alpha) \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} \right), \quad \alpha = \arccos(q_0/|q|).$$

2.1.4. Función exponencial

Sea \mathbf{q} un cuaternión imaginario puro no nulo, de manera que $\mathbf{q}^n = |\mathbf{q}|^n \mathbf{u}_{\mathbf{q}}^{[n]_4}$, $n \geq 0$, donde $\mathbf{u}_{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/|\mathbf{q}|$, como en la sección anterior.

La **exponencial** de \mathbf{q} se define como la serie (absolutamente convergente):

$$e^{\mathbf{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{q}^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |\mathbf{q}|^{2n}}{(2n)!} \right] + \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n |\mathbf{q}|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \mathbf{u}_{\mathbf{q}}.$$

Llegamos, por tanto, a que

$$e^{\mathbf{q}} = \cos |\mathbf{q}| + \operatorname{sen} |\mathbf{q}| \mathbf{u}_{\mathbf{q}},$$

extendiendo así la conocida fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ para los números complejos.

Algunas propiedades fáciles de probar de la exponencial de un cuaternión imaginario puro son que su módulo es igual a 1 y que se verifica $\overline{e^{\mathbf{q}}} = e^{-\mathbf{q}}$.

No obstante, debido a la falta de conmutatividad para el producto de cuaterniones, no se verifica, necesariamente, que $e^{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = e^{\mathbf{p}} \cdot e^{\mathbf{q}}$. En efecto, basta tomar $\mathbf{p} = i$ y $\mathbf{q} = j$ para obtener $e^i = \cos 1 + i \operatorname{sen} 1$, $e^j = \cos 1 + j \operatorname{sen} 1$ y $e^{i+j} = \cos \sqrt{2} + i \operatorname{sen} \sqrt{2} + j \operatorname{sen} \sqrt{2} \neq e^i e^j$ (y también distinto de $e^j e^i$, pues este producto da lugar a un cuaternión cuyo coeficiente en k es distinto de cero).

Por otro lado, dado que la multiplicación por escalares sí conmuta, se tiene que $e^{q_0} \cdot e^{\mathbf{q}} = e^{\mathbf{q}} \cdot e^{q_0} = e^{q_0+\mathbf{q}}$ para todo $q_0 \in \mathbb{R}$. La demostración de este hecho es completamente similar a la prueba de que si el producto de dos matrices conmuta, entonces la exponencial de la suma de las matrices coincide con el producto de las exponenciales de las matrices. Se omiten los detalles aunque remitimos al lector a, por ejemplo, [11]. Se define, por tanto, la **exponencial de un cuaternión arbitrario** $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \mathbf{q}$ como

$$e^q = e^{q_0} e^{\mathbf{q}} = e^{q_0} (\cos |\mathbf{q}| + \operatorname{sen} |\mathbf{q}| \mathbf{u}_{\mathbf{q}}) . \quad (2.6)$$

Utilizando la definición de la exponencial de un cuaternión, (que no se anula en este anillo de división), se plantea resolver, dado $q \in \mathbb{H}$ distinto de cero, la ecuación

$$e^x = q, \quad x \in \mathbb{H}.$$

Es decir, la determinación del logaritmo de un cuaternión.

La deducción de la fórmula es similar a la que se utiliza para definir el logaritmo en el cuerpo de los números complejos, como el lector habrá adivinado a la vista de (2.4) y (2.6). Una vez más, se debe omitir los argumentos por cuestiones de espacio. No obstante, parece apropiado establecer la definición de esta función con el fin de completar esta sección sobre funciones elementales.

Concretamente, se tiene que, dado un cuaternión $q = q_0 + \mathbf{q} \in \mathbb{H}$ no nulo y con $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, de manera que podemos escribir q de la forma dada en (2.4),

$$\log q = \log(|q|) + \arccos \alpha \cdot \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|}, \quad \alpha = \left(\frac{q_0}{|q|} \right).$$

2.2. Sobre la derivada en \mathbb{H}

Como se ha mencionado anteriormente, la topología inducida por el módulo es equivalente a la topología usual de \mathbb{R}^4 . Por tanto, el estudio de la continuidad de una función $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, definida por

$$\begin{aligned} f(q) = f(t + xi + yj + zk) &\mapsto f_0(t + xi + yj + zk) + f_1(t + xi + yj + zk)i \\ &+ f_2(t + xi + yj + zk)j + f_3(t + xi + yj + zk)k, \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde $f_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ son funciones con valores reales, es equivalente al estudio de la continuidad de $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, dada por

$$\begin{aligned} F(t, x, y, z) \\ = (f_0(t, x, y, z), f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), f_3(t, x, y, z)). \end{aligned} \quad (2.8)$$

En cuanto a la *derivabilidad* de una función $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$, parece conveniente introducir los siguientes conceptos, dada la no conmutatividad del anillo de división que estamos considerando.

Concretamente, se dice que la función $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ es **\mathbb{H} -derivable por la derecha en el punto q** si existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(q + h) - f(q)] \cdot h^{-1}, \quad (2.9)$$

donde h^{-1} es el inverso multiplicativo del cuaternión h . Si existe el límite en (2.9), se denota por $f'_+(q)$ y se le llama **\mathbb{H} -derivada por la derecha de f en q** . De manera similar, se dice que f es **\mathbb{H} -derivable por la izquierda en q** si existe la **\mathbb{H} -derivada por la izquierda de f en q**

$$f'_-(q) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \cdot [f(q + h) - f(q)]. \quad (2.10)$$

Una primera aproximación a la definición de derivabilidad de una función en los cuaterniones es la siguiente. Se dice que $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ es **\mathbb{H} -derivable en el punto $q \in \mathbb{H}$** si existen $f'_+(q)$ y $f'_-(q)$ y son iguales. La derivada de f en q se denota por $f'(q)$ y es, precisamente, el valor común de los dos límites mencionados.

Como es habitual, se dice que $f : \Omega \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ es **\mathbb{H} -derivable en el abierto Ω** (resp. **\mathbb{H} - derivable por la derecha o por la izquierda**) si es derivable (resp. derivable por la derecha o por la izquierda) en todos los puntos $q \in \Omega$.

Evidentemente, toda función constante es \mathbb{H} -*derivable*. Los primeros ejemplos de funciones no constantes que el autor de esta memoria se propuso analizar para entender estos conceptos, muestran que esta definición de derivabilidad en \mathbb{H} resulta extremadamente restrictiva.

Más concretamente, calculemos las derivadas izquierda y derecha de los polinomios de grado 1, recordando que debemos distinguir entre los polinomios unilaterales por la izquierda y por la derecha, definidos en la sección 2.1.2.

Ejemplo 2.2.1 (Polinomio unilateral por la izquierda.) *Dados $a, b \in \mathbb{H}$, consideremos la función*

$$\mathcal{L}(q) := a \cdot q + b, \quad q \in \mathbb{H}. \quad (2.11)$$

Entonces, teniendo en cuenta que $h \rightarrow 0 \in \mathbb{H}$ si y solo si $|h| \rightarrow 0$, resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_+(q) &= \lim_{|h| \rightarrow 0} [\mathcal{L}(q+h) - \mathcal{L}(q)] \cdot h^{-1} = \lim_{|h| \rightarrow 0} [a \cdot (q+h) + b - (a \cdot q + b)] \cdot h^{-1} \\ &= \lim_{|h| \rightarrow 0} [a \cdot h] \cdot h^{-1} = \lim_{|h| \rightarrow 0} a \cdot [h \cdot h^{-1}] = a. \end{aligned}$$

No obstante,

$$\mathcal{L}'_-(q) = \lim_{|h| \rightarrow 0} h^{-1} \cdot [\mathcal{L}(q+h) - \mathcal{L}(q)] = \lim_{|h| \rightarrow 0} h^{-1} \cdot a \cdot h$$

que, en general, no existe: tomando $a = 1 + k$ y $h = r + 0i + 0j + 0k$, se tiene

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} h^{-1} \cdot a \cdot h = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \cdot a \cdot r = a = 1 + k,$$

mientras que tomando $h = 0 + ri + 0j + 0k$, resulta:

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} h^{-1} \cdot a \cdot h = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-i}{r} \cdot a \cdot ir = -i \cdot a \cdot i = 1 - k \neq a.$$

De hecho, se pueden caracterizar los casos en los que existe $\mathcal{L}'(q)$ (y, por tanto, existe la derivada de la función \mathcal{L}'_- en el punto q). El resultado preciso se recoge en el siguiente lema.

Lema 2.4. *Dada una función de la forma (2.11) y dado $q \in \mathbb{H}$, existe $\mathcal{L}'_-(q)$ si y solo si $a = a_0 + 0i + 0j + 0k$. En tal caso, $\mathcal{L}'_-(q) = \mathcal{L}'_+(q) = a_0$.*

Demostración. Supongamos que existe $\lim_{|h| \rightarrow 0} h^{-1} \cdot a \cdot h$, y sea $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$. Tomando $h_n = ru_n$, $r \in \mathbb{R}$ y $u_1 = i$, $u_2 = j$, $u_3 = k$, queda, para $n = 1, 2, 3$,

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} h^{-1} \cdot a \cdot h = -u_n \cdot a \cdot u_n. \quad (2.12)$$

Además, se tiene $u_n \cdot u_n \cdot u_n = -u_n$ y $u_n \cdot u_l \cdot u_n = u_l$ si $l \neq n$ para los valores de n mencionados.

Sea a'_n el límite en (2.12) correspondiente a uno de los valores de n . Usando las identidades anteriores, resulta

$$\begin{cases} \operatorname{Im}_l(a'_n) = -a_l, & \text{si } n = l \\ \operatorname{Im}_l(a'_n) = a_l, & \text{si } n \neq l \end{cases}.$$

Por lo tanto, la parte imaginaria $\mathbf{a} = 0$.

Es claro que si $a = a_0 \in \mathbb{R}$, entonces, por la conmutatividad del producto por escalares y la propiedad asociativa para el producto de cuaterniones, existe

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} h^{-1} \cdot a \cdot h = \lim_{|h| \rightarrow 0} a \cdot h^{-1} \cdot h = a = \mathcal{L}'_-(q).$$

■

Se obtiene un resultado completamente análogo al considerar una función lineal unilateral por la derecha dada por $\mathcal{R}(q) = q \cdot a + b$. En este caso, existe $\mathcal{R}_-(q) = q$ pero no existe $\mathcal{R}_+(q)$ (salvo que a sea real, en cuyo caso $\mathcal{R} = \mathcal{L}$). Otro de los ejemplos considerados por el autor es el de la función cuadrática $f(q) = q^2$. En este caso, no existe ninguno de los límites (2.9) ni (2.10).

2.3. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

A la vista de los resultados obtenidos al analizar las funciones en los ejemplos de la sección anterior, la pregunta natural es obvia: ¿existe alguna función no constante $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ que sea \mathbb{H} -derivable en algún punto? Para responderla, intentaremos caracterizar las condiciones de derivabilidad por la derecha y por la izquierda obteniendo, en particular, las correspondientes **ecuaciones de Cauchy-Riemann** en los cuaterniones. El procedimiento será similar al que se sigue al considerar la condición de derivabilidad en \mathbb{C} .

Concretamente, consideremos una función $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ como en (2.7) y la correspondiente función $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por (2.8). Supongamos que existe la derivada lateral por la derecha (2.9) en un punto $q \in \mathbb{H}$ y $f'_+(q) = a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$.

Entonces, utilizando las reglas de la aritmética en \mathbb{H} y el álgebra de los límites (también satisfecha, dada la definición de límite por la derecha), se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} ([f(q+h) - f(q)] \cdot h^{-1} - a) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} ([f(q+h) - f(q)] \cdot h^{-1} - a \cdot h \cdot h^{-1}). \end{aligned}$$

Puesto que un cuaternión es nulo si y solo si su módulo es igual a 0, resulta, aplicando también la ley de módulos, que la condición $f'_+(q) = a$ es equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(q+h) - f(q) - a \cdot h|}{|h|} = 0. \quad (2.13)$$

Pero, usando las matrices de multiplicación presentadas en la sección 1.2.2 (en particular, (1.5) (con $q = h$), se tiene que (2.13) es, precisamente, la condición

de la diferenciabilidad de F en el punto $(q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4$. La matriz jacobiana de F resulta ser la matriz (1.6), es decir,

$$J_F(q) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

de donde se siguen, escribiendo las coordenadas de un punto en \mathbb{R}^4 como (t, x, y, z) , las **ecuaciones de Cauchy-Riemann por la derecha**:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial f_3}{\partial z}, \quad (2.15)$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = -\frac{\partial f_2}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial y}, \quad (2.16)$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = -\frac{\partial f_3}{\partial x}, \quad (2.17)$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial z} = -\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial t}. \quad (2.18)$$

De esta manera, se demuestra el siguiente resultado.

Teorema 2.5. *Dadas las funciones f y F como en (2.7) y (2.8), respectivamente, se tiene que existe $f'_+(q)$, $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ si y solo si F es diferenciable en (q_0, q_1, q_2, q_3) y se verifican, en ese punto, las ecuaciones (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18).*

Argumentando de manera similar pero considerando ahora la derivada por la izquierda, se obtiene que la condición $f'_-(q) = b \in \mathbb{H}$ es equivalente a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(q+h) - f(q) - h \cdot b|}{|h|} = 0. \quad (2.19)$$

Por lo tanto, utilizando ahora la matriz en (1.12), se sigue que (2.19) es equivalente a que F sea diferenciable en $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ y

$$J_F(q) = \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Concluimos, así, el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Dadas las funciones f y F como en (2.7) y (2.8), respectivamente, se tiene que existe $f'_-(q)$, $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ si y solo si F es diferenciable en (q_0, q_1, q_2, q_3) y se verifican, en ese punto, las ecuaciones (2.15),*

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_0}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial z} = -\frac{\partial f_3}{\partial y}, \\ -\frac{\partial f_0}{\partial y} &= -\frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_2}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \quad y \\ -\frac{\partial f_0}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_3}{\partial t}. \end{aligned}$$

2.4. Trivialidad de las funciones \mathbb{H} -derivables

A la vista de los resultados en la sección anterior, se tiene el resultado siguiente.

Teorema 2.7. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una función de la forma (2.7), donde Ω es un abierto conexo en \mathbb{H} . Entonces, f es \mathbb{H} -derivable en Ω si y solo si $f(q) = a_0q + b$, donde $a_0 \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{H}$. En tal caso, $f'(q) = a_0$ para todo $q \in \Omega$.*

Demostración. Utilizando los teoremas 2.5 y 2.6, se tiene que la función F dada por (2.8) es diferenciable en los puntos del conjunto Ω (considerado ahora como conjunto, necesariamente abierto y conexo, de \mathbb{R}^4). Además, por (2.14) y (2.20), la matriz jacobiana de F en cada uno de estos puntos, debe cumplir

$$J_F(q) = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 - a_2 - a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - a_1 - a_2 - a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

de donde resulta, al igualar coeficientes, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, de forma que

$$F(t, x, y, z) = (a_0t, a_0x, a_0y, a_0z) + (b_0, b_1, b_2, b_3), \quad a_0, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}.$$

Así, f debe tener la forma prescrita. Además, por el lema 2.4, en tal caso, $f'(q) = a_0$. ■

Después de que el autor de esta memoria probara el teorema 2.7, tuvo conocimiento del artículo [1], donde se caracterizan las funciones $f : \Omega \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ que poseen derivada por la derecha en el abierto Ω . Concretamente, el resultado es el siguiente:

Teorema 2.8. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ una función para la que existe*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(q+h) - f(q)) \cdot h^{-1}, \quad q \in \Omega.$$

Entonces, f es de la forma (2.11). Es decir, existen $a, b \in \mathbb{H}$ tales que $f(q) = a \cdot q + b$, $q \in \Omega$.

Nótese que ya hemos comprobado que las funciones de la forma descrita en el teorema 2.8 tienen derivada por la derecha. Por lo tanto, este resultado afirma que son las únicas funciones definidas en \mathbb{H} con esta propiedad.

El punto clave en la demostración del teorema se basa en un importante resultado de la teoría de funciones holomorfas de varias variables complejas que el autor de esta memoria desconocía. Más concretamente, en el teorema de Hartogs que establece que una función f es holomorfa en un dominio de \mathbb{C}^2 si y solo si es holomorfa en cada una de sus variables por separado (véase [4]).

Veamos cómo con este resultado es posible demostrar el teorema 2.8.

Supongamos, adaptando la notación para facilitar la exposición, que f es de la forma

$$f(t + xi + yj + zk) \mapsto f_0(t + xi + yj + zk) + f_1(t + xi + yj + zk)i \\ + f_2(t + xi + yj + zk)j + f_3(t + xi + yj + zk)k.$$

Por el teorema (2.5), deben cumplirse las ecuaciones de Cauchy-Riemann por la derecha (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18).

Consideremos las variables $z_1 = t + ix$ y $z_2 = z + iy$, $(t, x, y, z) \in \Omega$, y las funciones $\varphi_1(z_1, z_2) = f_0(z_1, z_2) + if_1(z_1, z_2)$ y $\varphi_2(z_1, z_2) = f_3(z_1, z_2) + if_2(z_1, z_2)$.

En estos nuevos términos, las ecuaciones de Cauchy-Riemann por la derecha dan lugar a:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} = 0, \quad (2.21)$$

y

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} = \overline{\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} \right)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} = -\overline{\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} \right)}, \quad (2.22)$$

ecuaciones que el autor de este Trabajo de Fin de Grado había obtenido antes de conocer el artículo [1].

Las ecuaciones en (2.21) implican que las funciones φ_1 y φ_2 son holomorfas en las variables z_1 y z_2 por separado. Las identidades en (2.22), que las derivadas de φ_1 y φ_2 son, a la vez, holomorfas y tienen conjugada holomorfa; son, por tanto, constantes. Siendo las derivadas constantes y escribiéndolas en términos de las funciones f_0, f_1, f_2, f_3 , resulta que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + i \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} = \frac{\partial f_0}{\partial z} + i \frac{\partial f_1}{\partial z}$$

y

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1} = \frac{\partial f_3}{\partial t} + i \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} = \frac{\partial f_3}{\partial z} + i \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Utilizando, de nuevo, (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18), se tiene que la matriz jacobiana de la función F dada por (2.8) es constante y de la forma

$$J_F = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

donde $a_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t}$, $a_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t}$, $a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial t}$ y $a_3 = \frac{\partial f_3}{\partial t}$. Resulta, así que

$$F(q) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

para ciertos números reales a_0, a_1, a_2, a_3 y b_0, b_1, b_2, b_3 .

De este modo, a la vista de (1.5), y dada la forma de la matriz jacobiana, que coincide con (1.6), ya se obtiene la conclusión del teorema 2.8.

Aplicación de los cuaterniones

El 24 de julio de 1969 se pronunciaron por primera vez las palabras: “That’s one small step for man, one giant leap for mankind.”, cumpliendo así uno de los principales propósitos de la misión *Apollo 11*. El viaje fue un completo éxito pero no estuvo exento de contratiempos, pues el sistema de navegación de la nave tenía un fallo inherente en el diseño que llevaría al piloto del módulo de comando, Michael Collins, a pedir un peculiar regalo a “Houston” por Navidad: un cuarto cardán.

Para entender tan peculiar deseo, explicaremos, en este capítulo, el sistema de navegación de la nave. También, la utilidad de los cuaterniones para evitar el problema denominado “*gimbal lock*” (bloqueo de cardán).

3.1. Ángulos de Euler y de Tayt-Bryan

En 1776, Euler [3] publica un resultado muy importante en relación con las rotaciones en el espacio \mathbb{R}^3 : toda rotación de una esfera en torno a su centro tiene un eje (de rotación) y lo calcula usando una construcción geométrica.

En términos modernos, podemos enunciar el teorema de la rotación de Euler como sigue, recordando que el **grupo de rotación tridimensional**, conformado por matrices $M \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ que son ortogonales ($M^T M = M M^T = Id$) y tienen determinante igual a 1 es, usualmente, denotado por $SO(3)$.

Teorema 3.1 (Teorema de rotación de Euler). *Sea $M \in SO(3)$. Entonces, existe un vector no nulo $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $M\vec{v} = \vec{v}$.*

Es claro que, sin pérdida de generalidad, se puede tomar al vector \vec{v} en el teorema de Euler de norma igual a 1, es decir, en la esfera unidad

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Siendo la esfera una superficie bidimensional, puede identificarse utilizando 2 parámetros; por ejemplo, los ángulos de latitud y longitud. Puesto que una rotación transforma a los puntos que no están en el eje de rotación de acuerdo con un ángulo fijo con respecto a ese eje, se deduce que toda rotación en el espacio está completamente determinada por 3 ángulos: el de latitud, el de longitud (aunque pueden ser otros), y el ángulo de rotación.

Utilizando la composición de rotaciones, es posible transformar un sistema de ejes xyz , considerado fijo (o un “sólido 1”), en otro ligado al primero (“sólido 4”) mediante sólidos intermedios. Podemos seguir el siguiente procedimiento estándar, que es de gran utilidad.

(1) Efectuamos una rotación de un ángulo φ en torno a un eje del sólido 1 que nos lleva a un sólido intermedio 2.

(2) A continuación, rotamos un ángulo θ en torno a un eje del sólido 2, que nos lleva a otro sólido intermedio 3.

(3) Por último, giramos un cierto ángulo ψ en torno a un eje del sólido 3 para llegar, finalmente, al sólido 4.

La elección de qué ejes son los de rotación en el proceso (1)–(2)–(3) puede hacerse de diferentes formas. De hecho, hay un total de 12 formas posibles, que suelen dividirse en dos grupos. El primero de estos grupos, conformado por las siguientes elecciones de los ejes de rotación, es:

$$z - x - z, x - y - x, y - z - y, z - y - z, x - z - x, y - x - y.$$

Los correspondientes ángulos $\varphi - \theta - \psi$ determinados en el proceso de transformación del sólido 1 al sólido 4 descrito utilizando estas elecciones de ejes se denominan **ángulos de Euler**.

Tomando como elección de los ejes de rotación los casos en los que todos son diferentes, es decir,

$$x - y - z, y - z - x, z - x - y, x - z - y, z - y - x, y - x - z,$$

se tienen los **ángulos de Tait-Bryan** (φ, θ, ψ) también llamados **ángulos de cardán** o “**yaw**”, “**pitch**” y “**roll**” (desviación, inclinación y balanceo). Estos son los más comunes en el campo de la aviación, dado que se usan como sigue: el *yaw* modeliza el rumbo, el *pitch*, la elevación y el *roll* el alabeo. A la orientación angular que representan estos ángulos se la denomina **actitud angular** o, simplemente, **actitud**.

3.2. El sistema de navegación

Un **soporte de Cardano** es un mecanismo de suspensión que consiste en tres aros concéntricos (cardanes), uno de ellos fijo (la cuna), con el propósito de orientar los ejes de rotación en cualquier dirección del espacio. Normalmente se emplea en conjunción con un cuerpo con un eje de simetría de rotación que gira alrededor de dicho eje, al cual se suele denominar **giroscopio**. Se crea así un dispositivo que es capaz de mantener su orientación a pesar de fuerzas externas. Esto es debido a que un giroscopio en libre rotación mantiene su orientación, y el soporte de Cardano minimiza el efecto de los momentos angulares externos.

La figura 3.1 representa un soporte de Cardano en el que se ha introducido un modelo de avión para visualizar los ángulos de Tait-Bryan: yaw, *pitch* y *roll*, ya mencionados.

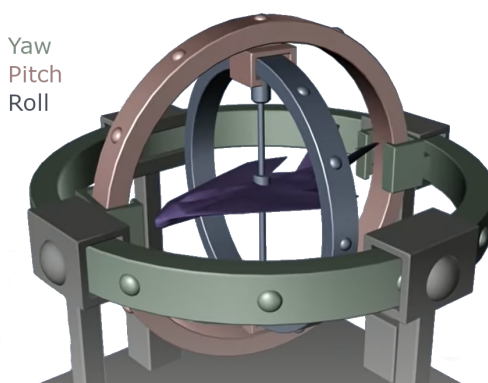


Figura 3.1. Ángulos de Tait-Bryan

La figura 3.2 muestra un ejemplo de una actitud aeronáutica empleando estos ángulos sería.

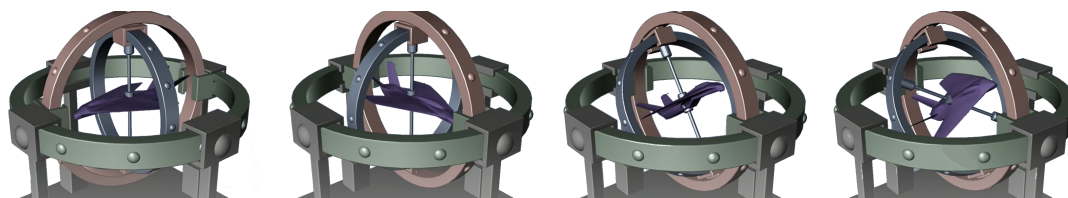


Figura 3.2. Rotación de un avión por un *yaw*: 90° , *pitch*: 30° y *roll*: 45° .

En este punto, podemos plantear la posibilidad de que dos cardanes coincidan (por ejemplo, colocando el avión en vertical). Se pierde entonces uno de

los ejes en el sistema tridimensional xyz , y con ello un grado de libertad (figura 3.3)

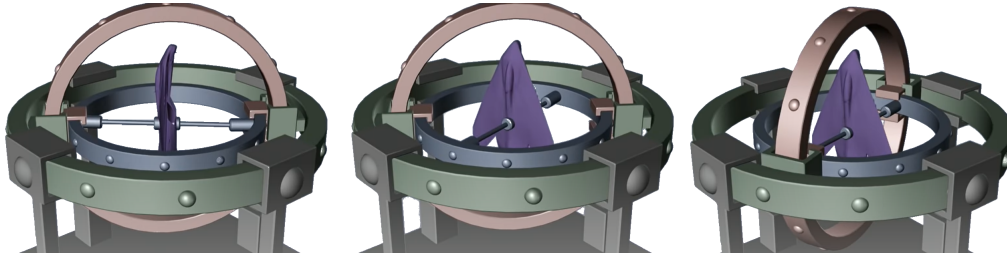


Figura 3.3. Dos rotaciones distintas que producen el mismo resultado debido a la superposición de giros en los ángulos de Euler que ocurre cuando el ángulo intermedio se encuentra en uno de sus extremos.

Estas posibilidades dan lugar a un importante fenómeno que, aunque no plantea muchas dificultades desde el punto de vista matemático (pues, llegado el caso, se aplica una nueva rotación y se recupera una posición donde no coinciden los ejes de los cardanes). Sí es un problema relevante desde el punto de vista físico e informático. Concretamente, si desde una de estas posiciones con dos ejes coincidentes se intenta rotar el avión a lo largo del *yaw* (en el paso 3 de la figura 3.3), hay que “levantar la mesa y rotarla”, dado que el soporte de Cardano no permite realizar este movimiento por sí mismo. En otras palabras, hay que desbloquear el cardán.

En el caso del *Apollo 11*, lo que se encontraba dentro de los cardanes no era un avión, como en las figuras anteriores, sino una plataforma con sensores que percibían cambios en las aceleraciones lineales y angulares en las tres dimensiones. Esta plataforma debía permanecer con la misma orientación a lo largo de todo el trayecto para poder realizar los cálculos de posición y actitud (véase la figura 3.4).

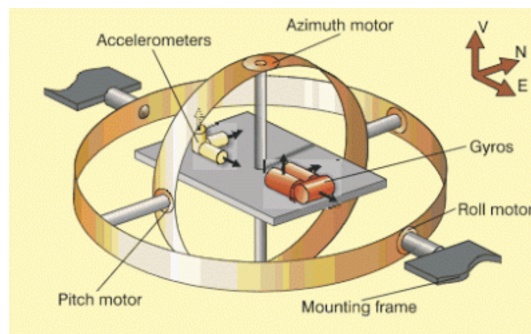


Figura 3.4. Esquema de la *IMU* (*Inertial Measurement Unit*) del *Apollo 11*.

Cuando dos cardanes se encontraban a menos de 5 grados de alinearse, el sistema tenía que ser apagado y reseteado, alineándolo con estrellas guía. Este era, precisamente, el trabajo de Michael Collins, quien no pudo observar el módulo lunar desde su módulo orbital, dado que cada vez que iba a pasar por encima del módulo lunar, tenía que realizar el procedimiento de reseteo. De ahí su deseo de un cuarto cardán por Navidad.

En efecto, si se añade un cardán al sistema y se fuerza a que este esté siempre en una posición de 90° respecto del cardán fijo, el problema no ocurre, pues incluso en el caso de que los cardanes móviles coincidan, la dimensión de la configuración será igual a 3.

Los ingenieros de la NASA no se decidieron por un cuarto cardán. Consideraban que implicaba demasiada aparatosidad. Además, los ingenieros habían llegado a otra solución y pensaban que sería suficiente; parece que esta era incorrecta y nunca llegó a funcionar. Los astronautas se tuvieron que contentar con la única solución disponible: el reseteo manual. Evidentemente, esta solución no puede considerarse, desde varios puntos de vista, completamente satisfactoria.

3.3. El uso de los cuaterniones

Hoy en día, los sistemas de navegación basados en los ángulos de Euler o de Tait-Bryan están entrando en desuso en beneficio de los basados en los cuaterniones.

Con estos nuevos sistemas de navegación (conocidos como *strapdown*), se permite acoplar los sensores que controlan el sistema directamente a la nave. Es cierto que se requiere de una velocidad de cálculo de los datos bastante superior a la de la vista hasta ahora. En efecto, sustentando los sensores en un soporte de Cardano y manteniendo la orientación de estos, con una frecuencia de $50Hz$ se producían resultados relativamente satisfactorios, mientras que los sistemas *strapdown* requieren de una frecuencia de $2000Hz$ para ser funcionales. Afortunadamente, este inconveniente se ataja gracias a los avances en los campos de la ingeniería electrónica e informática.

El uso final de estos nuevos diseños coincide con el inicial: se desea orientar los ejes de rotación en cualquier dirección del espacio y corregir las alteraciones que se presenten. Veamos su relación con los cuaterniones. Para ello, comenzamos revisando la fórmula de Olinde Rodrigues, que da lugar a un algoritmo eficiente para rotar un vector en el espacio, dados un eje y un ángulo de rotación.

3.3.1. Fórmula de Olinde Rodrigues

Consideremos una rotación de eje determinado por el vector unitario \mathbf{u} y ángulo ϕ en sentido positivo.

Dado el vector \mathbf{x} , analicemos la acción de este movimiento aplicado a dicho vector.

Para ello, denotemos por \mathbf{x}_{\parallel} a la proyección ortogonal de \mathbf{x} sobre el espacio vectorial generado por \mathbf{u} , y sea $\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}$.

Es bien conocido que $\mathbf{x}_{\parallel} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}$. También es fácil calcular \mathbf{x}_{\perp} utilizando las propiedades del producto vectorial de \mathbb{R}^3 . Concretamente, se tiene

$$\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} = -\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{x}).$$

Sea \mathbf{x}' el vector obtenido al aplicar la rotación mencionada, tal y como se muestra en la figura 3.5.

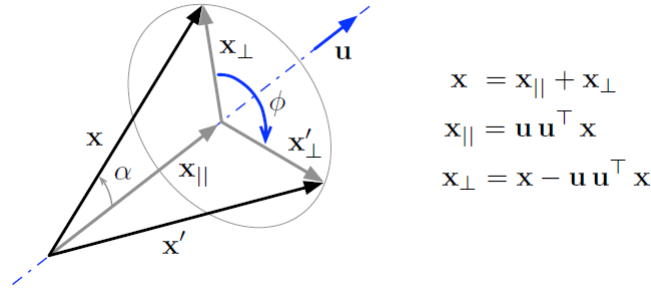


Figura 3.5. Rotación de un vector \mathbf{x} alrededor de \mathbf{u} un ángulo ϕ .

Puesto que las rotaciones preservan las distancias y dado que se cumple

$$\|\mathbf{x}_{\parallel}\| = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle| = \|\mathbf{x}'_{\parallel}\| = |\langle \mathbf{u}, \mathbf{x}' \rangle|,$$

se tiene $\mathbf{x}_{\parallel} = \mathbf{x}'_{\parallel}$.

Consideremos, con el fin de determinar \mathbf{x}'_{\perp} en función de \mathbf{x} y \mathbf{u} , la base ortonormal $\left\{ \frac{\mathbf{x}_{\perp}}{\|\mathbf{x}_{\perp}\|}, \mathbf{u} \times \frac{\mathbf{x}_{\perp}}{\|\mathbf{x}_{\perp}\|} \right\}$ del plano en \mathbb{R}^3 cuyo vector normal es \mathbf{u} .

Restringiéndonos a ese plano, y usando de nuevo que se preservan las normas y, por lo tanto, se cumple que $\|\mathbf{x}'_{\perp}\| = \|\mathbf{x}_{\perp}\|$, resulta, haciendo uso de la bien conocida descripción de las rotaciones en un plano, que

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \cos \phi \mathbf{x}_{\perp} + \operatorname{sen} \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}_{\perp}).$$

Por tanto, se obtiene la **fórmula de Olinde Rodrigues**

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x}'_{\parallel} + \mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\parallel} + \cos \phi \mathbf{x}_{\perp} + \operatorname{sen} \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}_{\perp}) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} + \cos \phi (\mathbf{x} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}) \\ &\quad + \operatorname{sen} \phi [(\mathbf{u} \times \mathbf{x} - \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle (\mathbf{u} \times \mathbf{u}))] \\ &= \cos \phi \mathbf{x} + \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle (1 - \cos \phi) \mathbf{u} + \operatorname{sen} \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

3.3.2. Rotaciones y cuaterniones

En esta sección, recuperamos la notación introducida en el primer capítulo para expresar la fórmula de Olinde Rodrigues en términos de los cuaterniones.

Más concretamente, recordemos que $q \in \mathbb{H}$ representa al cuaternión $q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ y que dado un cuaternión de esta manera, $q = q_0 + \mathbf{q}$, donde $\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$. Así, el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ se corresponde, precisamente, con el cuaternión imaginario puro, también denotado por $\mathbf{x} = x_1i + x_2j + x_3k$.

Con esta notación, se tiene el siguiente teorema que podría denominarse la fórmula de Olinde Rodrigues en términos de cuaterniones.

Teorema 3.2. *Consideremos una rotación de eje determinado por el vector unitario \mathbf{u} y ángulo ϕ , en sentido positivo.*

Sea \mathbf{x}' el resultado de aplicar esta transformación al vector \mathbf{x} . Entonces,

$$\mathbf{x}' = q \cdot \mathbf{x} \cdot \bar{q}, \quad (3.2)$$

donde

$$q = e^{\mathbf{u}\frac{\phi}{2}} = \cos \frac{\phi}{2} + \text{sen} \frac{\phi}{2} \mathbf{u}.$$

Para probar (3.2) haremos uso del siguiente lema, que será demostrado posteriormente.

Lema 3.3. *Sean \mathbf{p} y \mathbf{q} dos cuaterniones imaginarios puros. Entonces,*

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \mathbf{q} - 2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{p}.$$

Demostración. (Teorema 3.2.) Por la definición del producto de cuaterniones (1.4) y usando la propiedad distributiva (teorema 1.2),

$$\begin{aligned} q \cdot \mathbf{x} \cdot \bar{q} &= \left(\cos \frac{\phi}{2} + \text{sen} \frac{\phi}{2} \mathbf{u} \right) \cdot (0 + \mathbf{x}) \cdot \left(\cos \frac{\phi}{2} - \text{sen} \frac{\phi}{2} \mathbf{u} \right) \mathbf{u} \\ &= \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{x} + \text{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) - \text{sen}^2 \frac{\phi}{2} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Recordando la definición del conmutador $[p, q] = p \cdot q - q \cdot p$, $p, q \in \mathbb{H}$ (para el que, por las ecuaciones (1.13) y (1.15), se tiene: $[p, q] = [\mathbf{p}, \mathbf{q}]$), la fórmula del seno del ángulo doble, y aplicando el lema 3.3, se tiene que (3.3) puede escribirse como

$$q \cdot \mathbf{x} \cdot \bar{q} = \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathbf{x} + \text{sen} \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} [\mathbf{u}, \mathbf{x}]$$

$$- \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} (\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{x} - 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}). \quad (3.4)$$

Utilizando (1.15), el hecho de que \mathbf{u} es unimodular, y la fórmula del coseno del ángulo doble, de (3.4) resulta

$$\begin{aligned} q \cdot \mathbf{x} \cdot \bar{q} &= \left(\cos^2 \frac{\phi}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} \right) \mathbf{x} + \operatorname{sen} \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) + 2 \operatorname{sen}^2 \frac{\phi}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} \\ &= \cos \phi \mathbf{x} + \operatorname{sen} \phi (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) + (1 - \cos \phi) \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u} \end{aligned}$$

que es, precisamente, (3.1). ■

Comprobemos ahora que se verifica la fórmula en el lema 3.3.

Demostración. (Lema 3.3.)

Una vez más, la propiedad distributiva permite reducir el resultado a su cumplimiento para las unidades $u_1 = i$, $u_2 = j$ y $u_3 = k$ (que en el producto $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ irán multiplicadas por los coeficientes p_i , q_j y p_k correspondientes).

Procederemos de manera similar a la demostración de la asociatividad, denotando por \bar{n} a la clase de equivalencia $[n]_3$ de n en el cuerpo \mathbb{Z}_3 para reducir el total de 27 posibilidades a solo 9. También usaremos (1.16), obteniendo así:

1. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} = -p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\bar{n}} u_{\bar{n}}$,
2. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} \cdot p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} = p_{\bar{n}} q_{\overline{n+1}} p_{\bar{n}} u_{\overline{n+1}}$,
3. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} \cdot p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} = p_{\bar{n}} q_{\overline{n+2}} p_{\bar{n}} u_{\overline{n+2}}$,
4. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot p_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} = -p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}}$,
5. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot p_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} = -p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}}$,
6. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} \cdot p_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} = -p_{\bar{n}} q_{\overline{n+1}} p_{\overline{n+1}} u_{\bar{n}}$,
7. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} \cdot p_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} = -p_{\bar{n}} q_{\overline{n+2}} p_{\overline{n+2}} u_{\bar{n}}$,
8. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} \cdot p_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} = -p_{\bar{n}} q_{\overline{n+1}} p_{\overline{n+2}} u_{\bar{n}}$ y
9. $p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} \cdot q_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} \cdot p_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} = p_{\bar{n}} q_{\overline{n+2}} p_{\overline{n+1}} u_{\bar{n}}$.

Al sumar **8** con **9** se cancelan (concretamente, el sumando con índice \bar{n} de **8** se cancela con el sumando de índice $\overline{n+2}$ de **9**). Si ahora agrupamos sumandos positivos y negativos a la vez que sumamos y restamos $p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\bar{n}} u_{\bar{n}}$, resulta

$$\mathbf{Sumandos} : p_{\bar{n}}^2 q_{\bar{n}} u_{\bar{n}} + p_{\bar{n}}^2 q_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} + p_{\bar{n}}^2 q_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \mathbf{q}, \quad \text{y}$$

$$\mathbf{Substraendos} : 2p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\bar{n}} u_{\bar{n}} + 2p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}} + 2p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}} = 2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{p}.$$

En la expresión de los substraendos se ha agrupado **4** con **7** para obtener $2p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\overline{n+1}} u_{\overline{n+1}}$. También, **5** con **6**, resultando: $2p_{\bar{n}} q_{\bar{n}} p_{\overline{n+2}} u_{\overline{n+2}}$. Así, concluimos la identidad deseada:

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \mathbf{q} - 2 \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \mathbf{p}.$$

■

3.3.3. Los cuaterniones como solución al bloqueo del cardán

Es conveniente recordar, en este punto, que todo cuaternión $p = p_0 + \mathbf{p}$ con parte imaginaria no nula y de módulo 1 puede escribirse, de acuerdo con (2.4), como

$$p = \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \mathbf{u}_p = \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}. \quad (3.5)$$

Es decir, podemos establecer una correspondencia biyectiva entre los cuaterniones de este tipo y los pares (α, \mathbf{u}) de ángulos $\alpha \in [0, 2\pi)$ y vectores unitarios $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Dicho de otra manera, la sencilla relación (3.5) proporciona una identificación entre las rotaciones en el espacio y los cuaterniones.

Más aún, la fórmula (3.2), con $q = e^{\frac{\phi}{2}\mathbf{u}}$, es la expresión del giro determinado por el vector unimodular \mathbf{u} y el ángulo ϕ . De hecho, tras efectuar el producto en (3.2), se obtiene

$$\mathbf{x}' = q \cdot \mathbf{x} \cdot \bar{q} = R_q \mathbf{x},$$

donde

$$R_q = \begin{pmatrix} q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_2 + 2q_0q_3 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}.$$

Así, es posible modelizar los giros usando la función ρ , definida en los pares $\phi \in [0, 2\pi)$ y $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{S}^2$ y con valores en $SO(3)$:

$$\rho(\phi, \mathbf{x}) = e^{\frac{\phi}{2}\mathbf{x}} \equiv R_q, \quad q = e^{\frac{\phi}{2}\mathbf{x}}. \quad (3.6)$$

Recordemos que el problema del bloqueo de cardán en los ángulos de Euler (o de Tait-Bryan) aparece, fundamentalmente, a partir de la superposición de

actitudes. Esto es, dado un orden de ángulos de Euler (o de Tait-Bryan) existen actitudes con infinitas representaciones (la colocación en vertical del avión en la figura 3.3 es un ejemplo de ello). Este hecho supone un problema a la hora de realizar programas de ordenador. En efecto, la redundancia se debe al colapso de una dimensión en otra, lo cual dificulta el giro en una de las otras dos direcciones. No hay ángulo que modelice ese giro unívocamente como ocurriría si los cardanes no estuviesen alineados, sino que se ha de usar una combinación de los tres para realizar dicha rotación.

Esto no ocurre con los cuaterniones. La aplicación en (3.6) es biyectiva, siempre que $\phi \in [0, 2\pi)$ (y no $\theta = \frac{\phi}{2} \in [0, 2\pi)$, que es la condición que se considera en [12]). Esta segunda restricción da lugar a un doble recubrimiento, como se demuestra en el propio texto [12].

3.3.4. Sobre los convenios cuaterniónicos

En este trabajo se ha empleado el convenio de Hamilton para representar los cuaterniones: la unidad real delante de las imaginarias. También, en aplicación de lo que hoy se conoce como la “regla de la mano derecha para la multiplicación”, que no es más que la ley de multiplicación de Hamilton

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \quad ijk = -1.$$

No obstante, la NASA utiliza otra convenio que encontraba más conveniente, el conocido como **convenio JPL** (*Jet Propulsion Laboratory*) o **de Shuster**.

Este convenio consiste en emplear la “regla de la mano izquierda” para el producto, al que, en esta ocasión y para distinguirlo del anterior, denotaremos por \otimes . Esto es, se sigue la ley

$$i \otimes k = j, \quad j \otimes i = k, \quad k \otimes j = i, \quad i \otimes j \otimes k = 1,$$

además de anteponer las coordenadas imaginarias a la real.

La NASA justifica el uso de este convenio no del todo habitual como sigue. Al considerar una tríada T de vectores unitarios ortogonales $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ fijos a un sólido, es un problema fundamental determinar la orientación respecto de un sistema de referencia apropiado al que podemos denominar como (x, y, z) , con base ortonormal (e_x, e_y, e_z) .

Este problema queda resuelto especificando las coordenadas de cada uno de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ en la base ortonormal de referencia, lo que, además, permite obtener la matriz de cambio de base C_T entre ambos sistemas.

Concretamente, estas matrices $C_T \in \mathcal{M}_{3,3} = (a_{ij}), i, j = 1, 2, 3$, están definidas por

$$a_{i,j} = \langle a_i, e_j \rangle .$$

De ahí la denominación de **matriz de los cosenos directores** para este tipo de matrices.

Ocurre que tales matrices, aplicadas a vectores de \mathbb{R}^3 , a los que identificamos con los cuaterniones imaginarios puros \mathbf{q} , verifican

$$\mathbf{C}_T(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{C}_T(\mathbf{q}) \mathbf{C}_T(\mathbf{p}) .$$

Sin embargo, si se trabaja utilizando el convenio *JPL*, y dado que $p \cdot q = q \otimes p$ de la condición anterior

$$\mathbf{C}_T(\mathbf{q} \otimes \mathbf{p}) = \mathbf{C}_T(\mathbf{q}) \mathbf{C}_T(\mathbf{p}) .$$

Como era de esperar, este cambio arbitrario en la notación le ha supuesto a la NASA algunas dificultades. En particular, en cuanto a la colaboración con el resto de agencias espaciales y en cualquier otro ámbito que utilice cuaterniones como es la robótica, parte esencial de muchas misiones espaciales, que adopta el convenio de Hamilton.

Esta circunstancia fue especialmente relevante a la hora de emplear el trasbordador espacial para impulsar la *ISS* (Estación Espacial Internacional). Durante la maniobra, las dos naves involucradas estaban acopladas y para ejecutar las maniobras correctamente requerían de una comunicación constante y precisa entre las distintas agencias espaciales participantes: NASA (Estados Unidos), Roscosmos (Rusia), JAXA (Japón), ESA (Europa) y CSA/ASC (Canadá). De todas ellas, solo la NASA utilizaba el convenio *JPL*. Afortunadamente, estas complicaciones con los cambios de notación, fueron resueltas.

Conclusiones

El interés del autor de este trabajo por el estudio de los cuaterniones surge de su utilidad en el diseño de sistemas de navegación.

Este interés inicial, motivado por sus conocimientos sobre aeronáutica, ha desembocado en la consecución de este Trabajo de Fin de Grado que, finalmente, ha variado en su pauta inicial.

Concretamente, una vez revisada la historia sobre el descubrimiento de los cuaterniones y sus propiedades básicas (algunas de ellas, demostradas utilizando una técnica propia del autor) en el capítulo 1, se plantea la cuestión sobre el concepto de derivabilidad en los cuaterniones.

Los contenidos del capítulo dos (y, más concretamente, la segunda parte de este capítulo) se basan en la pregunta natural sobre la relación entre la derivabilidad de las funciones en cuaterniones y la diferenciabilidad de las funciones en \mathbb{R}^4 . Como se ha mencionado, el autor consiguió demostrar por sí mismo el teorema 2.7. Como consecuencia, el concepto de derivabilidad en los cuaterniones que surge de adaptar el de diferenciabilidad en \mathbb{R}^4 no resulta satisfactorio dada su extremada rigidez.

A pesar de ser el teorema 2.7 un resultado que se sigue de otro más fuerte (teorema 2.8 junto con el lema 2.4), el hecho de que fuese una demostración original fue determinante en la decisión de incluir en este trabajo las últimas secciones del capítulo dos.

No obstante, durante el desarrollo del Trabajo de Fin de Grado, el autor ha estudiado, también, otras posibles nociones de derivabilidad en los cuaterniones, si bien parece que el ámbito para estas es más natural en los *cuaterniones complejos*.

Más concretamente, se analizó en detalle el primer capítulo de [7], con las dificultades que plantea la lectura de un libro escrito por un autor ruso, en general, si se nos permite añadir. Concretamente, en este texto, y usando de

nuevo la notación $u_1 = i$, $u_2 = j$ y $u_3 = k$ para las unidades imaginarias en los cuaterniones, se definen los *cuaterniones complejos* como los objetos de la forma

$$q = q_0 + q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 u_3,$$

donde q_0, q_1, q_2, q_3 son números complejos.

Debe, en este caso, asumirse una condición adicional a las leyes de multiplicación consideradas en \mathbb{H} , a saber: el número complejo i conmuta con las unidades de los cuaterniones. Esta no es la regla adicional que se considera en todos los casos pues, en algunos, es modificada por la condición $iu_k = -u_k i$, $k = 1, 2, 3$. Se obtienen, en esta ocasión, los llamados *octoniones* (o *números de Cayley*) en lugar de los cuaterniones complejos.

A pesar de que, como espacios vectoriales reales, los cuaterniones complejos y los octoniones son isomorfos, sus propiedades algebraicas son radicalmente distintas: los octoniones son un anillo de división (todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo), aunque el precio a pagar por esta propiedad es que se pierde la asociatividad del producto. El producto de cuaterniones complejos, no obstante, sí satisface la propiedad asociativa.

Sin embargo, existen cuaterniones complejos no nulos sin inverso multiplicativo. En efecto, tomando los cuaterniones complejos $1 + iu_1$ y $1 - iu_1$, se tiene

$$(1 + iu_1) \cdot (1 - iu_1) = 1 + iu_1 - iu_1 - i^2 u_1^2 = 1 - 1 = 0.$$

Considerando funciones $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow H(\mathbb{C})$, de variable, vectores en \mathbb{R}^3 y valores en las funciones holomorfas en abiertos del plano, puede considerarse el cuaternión complejo

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f_0(x_1, x_2, x_3) + f_1(x_1, x_2, x_3)u_1 + f_2(x_1, x_2, x_3)u_2 \\ &+ f_3(x_1, x_2, x_3)u_3 = f_0(x_1, x_2, x_3) + \vec{f}(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

El operador de Moisil-Theodoresco, definido por

$$Df = \sum_{k=1}^3 u_k \partial_k f, \quad \partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$$

es, precisamente,

$$Df = -\operatorname{div} \vec{f} + \operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} \vec{f}.$$

Así, la ecuación $Df = 0$ da lugar al sistema Moisil-Theodoresco

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{f} = 0 \\ \operatorname{grad} f_0 + \operatorname{rot} \vec{f} = 0, \end{cases}, \quad (3.7)$$

cuyas soluciones deben ser funciones armónicas, dado que $D^2 = -\Delta$, donde Δ es el laplaciano.

Sin duda, es un plan para el futuro continuar con el estudio de las propiedades de este operador y del correspondiente sistema (3.7). No obstante, nos remitimos a las razones explicadas anteriormente que nos han llevado a considerar los contenidos del capítulo dos de este trabajo, en lugar de mencionar la revisión de los contenidos en [7].

Más aún, entendemos que este trabajo debía recoger de manera explícita la importante utilidad de los cuaterniones en el diseño de los sistemas de navegación, como ejemplo que explica, en cierta manera, el por qué está teniendo tan fuerte empuje el estudio de los cuaterniones (reales) en muchos ámbitos de las ciencias tecnológicas. Estos son los contenidos del capítulo tres.

Bibliografía

- [1] J. Arias de Reyna-Martínez, Funciones derivables en cuaterniones, *Gaceta Matemática*, **5-6** (1975), 127–129.
- [2] D.Cao-Labora, E. Macías-Virgós, M. Regueiro-Torres, Ecuaciones cuaterniónicas, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.*, **19** (2016), 47–66.
- [3] L. Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.*, **20** (1776), 189–207.
- [4] P. Garrett, *Hartogs' Theorem: Separate Analyticity Implies Joint*. Lecture Notes, 2005. Disponible en la página web <https://www-users.cse.umn.edu/garrett/m/complex/hartogs.pdf>.
- [5] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions. Part 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Reimpresión del original de 1866, publicado previamente por Chelsea, Nueva York, 1969.
- [6] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions. Part 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Reimpresión del original de 1866, publicado previamente por Chelsea, Nueva York, 1969.
- [7] V.V. Kravchenko, *Applied Quaternionic Analysis*, Research and Exposition in Mathematics, Heldermann-Verlag, Germany, 2003.
- [8] P. Lynch, *The Many Modern Uses of Quaternions*. Blog That's Maths, 2018. Disponible en la página web: <https://www.irishtimes.com/news/science/the-many-modern-uses-of-quaternions-1.3642385>.
- [9] H. E. Salzer, An elementary note on powers of quaternions, *Amer. Math. Monthly* **59** (1952), 298–300.
- [10] J. M. Sánchez-Muñoz, Historias de matemáticas: Hamilton y el descubrimiento de los cuaterniones. *Pensamiento Matemático*, **1** (2011), 27 pp.

- [11] G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill, Boca Raton, FL, 1991.
- [12] Joan Solà, *Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter*, 2017. ArXiv:1711.02508-v1.
- [13] D. R. Wilkings, *On quaternions, or on a New System of Imaginaries in Algebra*. History of Mathematics: Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), 2018. Disponible en la página web: <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/>.

An Introduction to Quaternion Analysis and Applications

Pablo Manuel Valle Concepción

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0100972573@ull.edu.es

Abstract

A review of some of the details in relation to the discovery of the division ring (or non-commutative field) known nowadays as quaternions and its basic properties is made. A first attempt to the definition of the concept of derivative in quaternions is analyzed.

It is also explained how quaternions have found applications in many technological fields. This is shown through the lens of navigational systems, in which a more detailed exploration is made.

1. Definition and basic properties

IN 1843 Sir William Rowan Hamilton gave birth to, or brought to light, as he would put it, a peculiar algebraic structure known as quaternions. Although unfortunately overshadowed by vector calculus through most of the 20th century, they have recently regained the spotlight due to its numerous applications.



A quaternion has the form

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k, \quad \text{where } q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$$

and

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

The set of quaternions is denoted by \mathbb{H} .

The **sum** of two quaternions $p = p_0 + p_1i + p_2j + p_3k$ and $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ is given by

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)i + (p_2 + q_2)j + (p_3 + q_3)k.$$

Their (non-commutative) **product** is

$$p \cdot q = (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3) + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)k.$$

This set, with these two operations, satisfies every property a field must have, except for the commutativity of its product. Thus, $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ is a division ring (non-commutative field).

- There is a bijective correspondence between \mathbb{H} and \mathbb{R}^4 :

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H} \iff \vec{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^4.$$

- There is a bijection between \mathbb{H} and the matrices $M \in \mathcal{M}_{4 \times 4}$ of the following form:

$$q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \in \mathbb{H} \iff A_q = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}.$$

Within these terms, the product can be written as a multiplication of a matrix and a (column) vector: $p \cdot q = A_p \vec{q}$.

The **law of the modulus** is satisfied:

$$|p \cdot q| = |p| \cdot |q|, \quad p, q \in \mathbb{H},$$

where, the modulus $|q|$ of the quaternion $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$ equals

$$|q| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}.$$

2. A first attempt to define a derivative

LET $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ be given by

$$f(q) = f_0(q) + f_1(q)i + f_2(q)j + f_3(q)k,$$

where $f_i : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2, 3$ are scalar functions.

The **right-hand derivative** of f at q is

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(q+h) - f(q)] \cdot h^{-1}, \quad (1)$$

where h^{-1} is the multiplicative inverse of $h \in \mathbb{H}$.

Theorem. [Rigidity of the concept of right-hand derivative.]

Let $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ have right-hand derivative at the points of an open and connected set in \mathbb{H} . Then,

$$f(q) = a \cdot q + b$$

for two given quaternions a and b .

3. Application

THE phenomenon known as *gymbal lock* was the reason why Apollo 11 Command Module Pilot Michael Collins asked Houston for a fourth gymbal for Christmas.

This phenomenon arises from the loss of one degree of freedom in a three-dimensional, three-gymbal mechanism, also known as Cardan suspension, that occurs when the axes of two of the three gymbals are driven into a parallel configuration, "locking" the system into rotation in a degenerate two-dimensional space.

A rotation in the space is determined by a unimodular vector \mathbf{u} and an angle $\phi \in [0, 2\pi)$. Given the quaternion

$$q = e^{\frac{\phi}{2}\mathbf{u}} = \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{u},$$

such a rotation can be easily described by the formula

$$\mathbf{x}' = q \cdot \mathbf{x} \cdot \bar{q}, \quad (2)$$

which gives the explicit formula for the rotation in terms of the quaternion exponential.

The development of quaternion theory to study rotations has allowed to simply strap down the sensors to the ship, thus removing the need for Cardan suspension and avoiding the gymbal-lock problem in its entirety.

References

- [1] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions. Part 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Reprint of the 1866, original. Previously published by Chelsea, New York, 1969.
- [2] W. R. Hamilton, *Elements of Quaternions. Part 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. Reprint of the 1866, original. Previously published by Chelsea, New York, 1969.