Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Samuel Quintero González

Estudio geométrico de la ecuación de Hamilton-Jacobi

Geometrical study of Hamilton-Jacobi equation

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2022

Dirigido por
Juan Carlos Marrero González

Juan Carlos Marrero González
Matemáticas, Estadística e
Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Me gustaría darles las gracias a Juan Carlos por su esfuerzo y paciencia para con esta memoria, sin él no hubiese sido posible.

Por último, me gustaría agraceder a todas las personas con las que he compartido buenos momentos y me han brindado su apoyo.

Samuel Quintero González
La Laguna, 06 de Julio de 2022

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria estudiamos los elementos geométricos necesarios para describir geométricamente las soluciones parciales de la ecuación de Hamilton-Jacobi de la Mecánica Clásica. Para ello presentamos los espacios vectoriales simplécticos, los cuales son necesarios para definir la noción de variedad simpléctica. Estudiamos en detalle las propiedades de las formas simplécticas, y a continuación proporcionamos una demostración del teorema de Darboux, que nos garantiza una carta local para la variedad en la cual la forma simpléctica admite una expresión bastante sencilla. Además, como un objeto geométrico esencial, describimos la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente. Finalmente, aplicamos los resultados anteriores para la obtención de soluciones parciales de la ecuación de Hamilton-Jacobi en un sistema Hamiltoniano completamente integrable: una partícula en el plano bajo la acción de un campo central.

Palabras clave: *Forma simpléctica – Variedad simpléctica – Teorema de Darboux – Fibrado cotangente – Ecuación de Hamilton-Jacobi.*

Abstract

In this memory we study the necessary geometric objects to understand the Hamilton-Jacobi equation in its geometric formulation. For this purpose, we discuss symplectic vector spaces, which are required to define the notion of a symplectic manifold. We study in detail the properties of symplectic forms, and we provide a proof of Darboux's theorem, which proves the existence of a local chart for a symplectic manifold in which the simplectic form admits a very simple expression. Moreover, we describe the canonical symplectic structure of the cotangent bundle. Finally, all the previous results are applied to obtain partial solutions of the Hamilton-Jacobi equations associated with an example of a completly integrable system: a particle in the plane under the action of a central potential.

Keywords: *Simplectic form – Simplectic manifold – Darboux's theorem – Cotangent bundle – Hamilton-Jacobi equation.*

Contenido

Introducción

En esta memoria presentaremos la Geometría diferencial necesaria para entender la ecuación de Hamilton-Jacobi en su formulación geométrica. Esto constituye una aplicación de algunos de los contenidos en la asignnatura optativa “Geometría Diferencial y Aplicaciones” del cuarto curso del grado en Matemáticas en la ULL.

La descripción de la Mecánica Clásica Hamiltoniana usando la geometría simpléctica es un tópico bien establecido en la literatura (veáse, por ejemplo, [1, 2, 4, 5]). De hecho, el espacio de configuración de un sistema mecánico con n grados de libertad puede ser identificado con una variedad diferenciable Q de dimensión n. Bajo esta identificación, el fibrado cotangente T^*Q es el espacio fase de momentos y la energía total del sistema H (suma de la energía cinética y potencial) puede ser considerada como una función diferenciable real sobre T^*Q. Entonces, usando H y la estructura simpléctica canónica de T^*Q, uno puede producir un sistema dinámico sobre T^*Q, el campo de vectores Hamiltoniano asociado a la función H. Las trayectorias de este sistema dinámico son justamente las soluciones de las ecuaciones de Hamilton para H.

En el contexto previo, uno de los principales problemas con los que nos podemos encontrar es la resolución explícita de las ecuaciones de Hamilton: un sistema de ecuaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden sobre T^*Q. Entre los métodos usados para tal resolución tenemos la teoría de Hamilton-Jacobi (veáse [1, 2, 5]). Esencialmente, la teoría de Hamilton-Jacobi consiste en la resolución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer dado en términos de la función Hamiltoniana. En algunos casos, la resolución de tal sistema es sorprendentemente simple y, por tanto, la resolución de las correspondientes ecuaciones de Hamilton.

La teoría de Hamilton-Jacobi está estrechamente relacionada con la teoría de sistemas Hamiltonianos completamente integrables en el sentido de Arnold-Lioville (veáse [2]). Un sistema Hamiltoniano sobre el fibrado cotangente de una variedad diferenciable Q de dimensión n se dice completamente integrable si admite n integrales primeras en involución con respecto del corchete de Poisson en T^*Q. Estas n integrales primeras pueden ser obtenidas desde una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Recíprocamente, dadas n integrales primeras en involución las cuales son verticalmente independientes, uno puede construir una solución completa de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Una etapa intermedia en el proceso anterior es descrita por, las asıllamadas, soluciones parciales de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Dichas soluciones parciales simplifican el proceso de obtención de determinadas soluciones de las ecuaciones de Hamilton (veáse [1]).

El propósito de este trabajo es presentar una descripción geométrica (usando la geometría simpléctica del fibrado cotangente) de las soluciones parciales de la ecuación de Hamilton-Jacobi para una función Hamiltoniana dada.

La memoria se estructura en tres capítulos. En el capítulo 1, se considera la teoría algebraica de los espacios vectoriales simplécticos y de las aplicaciones simplécticas y de las aplicaciones simplécticas entre ellos. En el capítulo 2, se introduce la noción de forma simpléctica sobre una variedad diferenciable, se estudian los morfismo simplécticos entre variedade simplécticas, se prueba que todas las variedades simplécticas son localmente iguales (vía teorema de Darboux) y se describe la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente de una variedad diferenciable. Finalmente, en el capítulo 3, se introducen los campos Hamiltonianos sobre variedades simplécticas, se presenta la ecuación de Hamilton-Jacobi y se describen geométricamente las soluciones parciales de la misma y se aplican los resultados obtenidos a un ejemplo explícito: el movimiento de una partícula en el plano bajo la acción de un campo central.

Cerramos la memoria con breve resumen sobre conclusiones.

1

Espacios vectoriales simplécticos

En este capítulo introduciremos la noción de forma simpléctica sobre un espacio vectorial real de dimensión finita. Entonces, probaremos que existen bases del espacio vectorial simpléctico respecto de las cuales la expresión de la forma simpléctica es extramadamente sencilla. Finalmente, consideraremos las aplicaciones lineales entre espacios simplécticos que preservan las estructuras simplécticas, esto es, las aplicaciones simplécticas.

Seguiremos como referencias bibliográficas [4, 5].

1.1. Formas simplécticas sobre espacios vectoriales

En primer lugar, recordaremos la definición de p-forma sobre un espacio vectorial real de dimensión finita.

Definición 1.1 (p-forma). *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Una p-forma sobre V es una aplicación*

$$\alpha : V\times \overset{p)}{\ldots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando las siguientes propiedades:

1. ***α es lineal en cada componente****. Esto significa que dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1, \ldots, x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_p \in V$ se tiene que:*

$$\alpha(x_1, \ldots, \lambda_1 x_{i_1} + \lambda_2 x_{i_2}, \ldots, x_p) = \lambda_1 \cdot \alpha(x_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_p) + \\ + \lambda_2 \cdot \alpha(x_1, \ldots, x_{i_2}, \ldots, x_p)$$

2. ***α es antisimétrica****. Esto es, dados $x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots x_p \in V$:*

$$\alpha(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p) = -\alpha(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p)$$

Denotaremos por $\bigwedge^p V^*$ al espacio vectorial de las p-formas sobre V. Por convenio, $\bigwedge^0 V^* = \mathbb{R}$.

Veamos cómo expresar una 2-forma ω de forma matricial. Para ello, consideremos $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_m\}$ una base de V. Sean $x, y \in V$ y supongamos que tienen coordenadas respecto a esta base:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

De este modo, usando la bilinealidad de ω, podemos escribir:

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \, \omega(v_i, v_j) = x^T A \, y \tag{1.2}$$

donde $A = (\omega_{ij})_{i,j=1}^{m}$, con $\omega_{ij} = \omega(v_i, v_j)$. Además, como ω es antisimétrica, la matriz A es antisimétrica, es decir, $A^T = -A$. Asímismo, A puede entenderse como la matriz que representa una aplicación lineal, a saber:

$$\left.\begin{array}{rcl} \flat_\omega : V & \longrightarrow & V^* \\ y & \longmapsto & \flat_\omega(y) \end{array}\right\} \tag{1.3}$$

donde:

$$[\flat_\omega(x)]\,(y) \coloneqq \omega(x, y) \quad y \in V \tag{1.4}$$

Es claro que $\flat_\omega$ es una aplicación lineal. Falta comprobar que la matriz asociada a esta aplicación lineal es A. Vamos a comenzar tomando bases en ambos espacios vectoriales. En V consideramos la base $\mathcal{B}$, definida anteriormente, y en V^*, la base dual de $\mathcal{B}$, esto es, $\mathcal{B}^* = \{v^1, \cdots, v^m\}$. Entonces:

$$\flat_\omega(v_j) = \sum_{i=1}^{m} [\flat_\omega(v_j)]\,(v_i)\, v^i = \sum_{i=1}^{m} \omega_{ij}\, v^i \tag{1.5}$$

En consecuencia, la matriz asociada a la aplicación $\flat_\omega$ dada por (1.4) es $A^T = -A$.

Definición 1.2 (Rango de una 2-forma). *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita m y ω una 2-forma. El rango de ω es la dimensión de la imagen de la aplicación lineal $\flat_\omega : V \longrightarrow V^*$ inducida por ω. Diremos que ω es no degenerada si tiene rango máximo, es decir, si tiene rango m.*

Sea ω una 2-forma no degenerada. Entonces, como la matriz A tiene rango máximo, la aplicación $\flat_\omega$ es biyectica y, en particular, es inyectiva. Así, como el espacio dual a V tiene la misma dimensión que V, la inyectividad de $\flat_\omega$ es condición suficiente y necesaria para que ω sea no degenerada. Esto significa que:

$$[\,\omega \text{ no degenerada}\,] \Leftrightarrow [\,\omega(x, y) = 0 \quad \forall y \in V \implies x = 0] \tag{1.6}$$

Definición 1.3. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Una estructura simpléctica sobre V es una 2-forma ω no degenerada. La forma ω es llamada forma simpléctica y el par (V, ω) espacio vectorial simpléctico.*

En la próxima sección daremos varias caracterízaciones y propiedades de estos espacios vectoriales.

Definición 1.4. *Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico y sea $U \subseteq V$ un subespacio vectorial de V. El ortogonal simpléctico de U es el subespacio de V:*

$$U^{\perp} = \{v \in V \,|\, \omega(u, v) = 0 \;\; \forall u \in U\} \tag{1.7}$$

Veamos que:

$$dim\, U + dim\, U^{\perp} = dim\, V \tag{1.8}$$

Supongamos que V tiene dimensión m y que U tiene dimensión $r \leq m$. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_m\}$ una base de V, donde $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_r\}$ es una base de U. Sea $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j v_j \in U^{\perp}$. Para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ tenemos:

$$0 = \omega(v_i, v) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \omega(v_i, v_j) = \sum_{j=1}^{m} \omega_{ij}\, \lambda_j \tag{1.9}$$

Como ω es no degenerada se sigue que la matriz del sistema de ecuaciones homogéneo anterior tiene rango máximo e igual a r. Por tanto, las soluciones del sistema de ecuaciones forman un subespacio, a saber $U^{\perp}$, de dimensión igual a $m - r$ y, en consecuencia, $dim\, V = dim\, U + dim\, U^{\perp}$. Otra consecuencia de este resultado es que $(U^{\perp})^{\perp} = U$. Esto se deduce usando que $(U^{\perp})^{\perp} \subseteq U$.

1.2. Expresión matricial canónica de una forma simpléctica

El propósito de esta sección es demostrar que un espacio vectorial simpléctico tiene dimensión par $2n$ y que existen bases del mismo respecto de las cuales la matriz asociada a la forma simpléctica es de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array}\right)$$

con I_n la matriz identidad de orden n.

Para este propósito, demostraremos el siguiente resultado para una 2-forma arbitraria sobre un espacio vectorial.

Proposición 1.5. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita m y ω una 2-forma sobre V. Entonces existe una base $\{v_1, \cdots, v_m\}$ de V y un entero s, con $2s \leq m$ tal que:*

- $\omega(v_i, v_{s+i}) = -\omega(v_{s+i}, v_i) = 1$ *con* $1 \leq i \leq s$.
- $\omega(v_i, v_k) = 0$ *para otro caso.*

Demostración. El caso $\omega \equiv 0$ es trivial, basta tomar $s = 0$ y cualquier base de V. Así, consideremos ω no identicamente nula. Nótese que para el caso en que $dim\, V = 1$ ocurre exactamente lo mismo por la antisimetría de ω.

Procedemos por inducción sobre la dimensión del espacio vectorial V:

Caso base: $dim\, V = 2$

Sea $v_1 \in V$ con $v_1 \neq 0$. Entonces, podemos elegir un vector $v_2 \in V$ no nulo tal que $\omega(v_1, v_2) = 1$, pues ω es no identicamente nula. A continuación, veremos que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ es una base de V. Como V es un espacio vectorial de dimensión 2, es suficiente demostrar que son linealmente independientes. Por reducción al absurdo, supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v_2 = \lambda v_1$. Esto significaría que:

$$1 = \omega(v_1, v_2) = \omega(v_1, \lambda v_1) = \lambda \cdot \omega(v_1, v_1) = 0 \tag{1.10}$$

lo cual no es posible.

Concluimos así que $\mathcal{B}$ es una base de V. Así, el resultado para $dimV = 2$ se obtiene sin más que tomar $s = 1$.

Paso inductivo

Probaremos ahora la Proposición para $dim\, V = n$ y suponiendo que el resultado es cierto para $dim\, V < n$.

Al igual que en el caso anterior, podemos elegir $v_1, v_{s+1} \in V$ (con s a determinar posteriormente) tales que:

$$\omega(v_1, v_{s+1}) = 1 \tag{1.11}$$

Definimos el subespacio vectorial $F = span(v_1, v_{s+1})$. Es evidente que F tiene dimensión 2, puesto que v_1 y v_{s+1} son linealmente independientes.

Ahora consideremos el siguiente subespacio de V:

$$W = \{u \in V \,|\, \omega(u, v_1) = \omega(u, v_{s+1}) = 0\} \tag{1.12}$$

Vamos a demostrar que $V = F \oplus W$. Para ello comprobaremos que tienen como intersección el 0 y que $dim\, W = dim\, V - 2$.

<u>$\boldsymbol{F \cap W = \{0\}}$</u>

Sea $u \in F \cap W$. En particular, $u \in F$, luego existen $\lambda_1, \lambda_{s+1} \in \mathbb{R}$ tal que :

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_{s+1} v_{s+1} \tag{1.13}$$

En consecuencia, como $u \in W$ se sigue que:

$$\left.\begin{array}{ll} \omega(u, v_1) & = 0 \\ \omega(u, v_{s+1}) & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} \lambda_1 \cdot \omega(v_1, v_1) + \lambda_{s+1} \cdot \omega(v_{s+1}, v_1) & = 0 \\ \lambda_1 \cdot \omega(v_1, v_{s+1}) + \lambda_{s+1} \cdot \omega(v_{s+1}, v_{s+1}) & = 0 \end{array}\right\} \tag{1.14}$$

Usando que ω es antisimétrica se sigue que $\lambda_1 = \lambda_{s+1} = 0$ y, por tanto, $u = 0$.

<u>$\boldsymbol{dim\, W = dim\, V - 2}$</u>

Consideramos la aplicación lineal:

$$\left.\begin{array}{rl} \flat_{\omega|_F} : V & \longrightarrow \quad F^* \\ y & \longmapsto \flat_\omega(y)_{|_F} \end{array}\right\} \tag{1.15}$$

Tenemos que el núcleo de esta aplicación es precisamente W. En efecto:

$$\left\{u \in V \mid \flat_\omega(y)_{|_F}(u) = 0\right\} = \{u \in V \mid \omega(u, v_1) = \omega(u, v_{s+1}) = 0\} = W. \tag{1.16}$$

Además, la aplicación es sobreyectiva. Sea $\alpha \in F^*$, si

$$\alpha(v_1) = \lambda_1 \quad \text{y} \quad \alpha(v_{s+1}) = \lambda_{s+1} \tag{1.17}$$

entonces, tomamos $u = -\lambda_{s+1} v_1 + \lambda_1 v_{s+1} \in V$. Comprobaremos que $\flat_\omega(u) = \alpha$ en los vectores de F:

$$\left.\begin{array}{r} \flat_\omega(u)_{|_F}(v_1) = \omega(v_1, u) = -\lambda_{s+1} \cdot \omega(v_1, v_1) + \lambda_1 \cdot \omega(v_1, v_{s+1}) = \lambda_1 = \alpha(v_1) \\ \flat_\omega(u)_{|_F}(v_{s+1}) = \omega(v_{s+1}, u) = -\lambda_{s+1} \cdot \omega(v_{s+1}, v_1) + \lambda_1 \cdot \omega(v_{s+1}, v_{s+1}) = \lambda_{s+1} = \alpha(v_{s+1}) \end{array}\right\}$$

donde hemos tenido en cuenta (1.11). Por lo tanto:

$$dim\, V = dim\, W + dim\, F = dim\, W + 2 \tag{1.18}$$

Puesto que $dim\, W < n$, se sigue, en virtud de la hipótesis de inducción, que existe un entero s, con $2s \leq n$ y una base de W, a saber:

$$\mathcal{B}' = \{v_2, \ldots, v_s, v_{s+2}, \ldots, v_{2s}, v_{2s+1}, \ldots, v_n\} \tag{1.19}$$

verificando:

- $\omega(v_i, v_{s+i}) = -\omega(v_{s+i}, v_i) = 1$ con $2 \leq i \leq s$.
- $\omega(v_i, v_k) = 0$ en otros casos.

Entonces, por un cálculo directo similar a los anteriores, y teniendo en cuenta la definición de W, se sigue que la base de V buscada es:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_s, v_{s+1}, v_{s+2}, \ldots, v_{2s}, v_{2s+1}, \ldots, v_n\}$$

□

Usando el resultado anterior, deducimos que existe una base de V en la cual ω tiene por matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & +1 \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \ \cdots & +1 & 0 \cdots 0 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 \ \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 \ \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \ \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \ \cdots & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

Usando la Proposición 1.5 se prueba el siguiente resultado:

Teorema 1.6. *Sea V un espacio vectorial de dimensión m y ω una 2-forma sobre V. El rango de ω es un número par. Además, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$rang(\omega) = 2s \leq m$.*
2. *Hay $2s$ 1-formas linealmente independientes sobre V, a saber, $\{v^1, \ldots, v^{2s}\}$, tales que:*
$$\omega = v^1 \wedge v^{s+1} + \cdots + v^s \wedge v^{2s} \tag{1.21}$$
3. *La potencia exterior $\omega \wedge \overset{s)}{\ldots} \wedge \omega \neq 0$ y $\omega \wedge \overset{s+1)}{\ldots} \wedge \omega = 0$.*

Bajo las condiciones anteriores, $\{v^1, \ldots, v^{2s}\}$ es una base de la imagen de la aplicación lineal $\flat_\omega$.

Nota:. Vamos a recordar algunas definiciones relacionadas con la terminología usada en el teorema previo:

1. Una p-forma sobre un espacio vectorial real V de dimensión finita es una aplicación $\alpha : V \times \overset{p)}{\ldots} \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, la cual es $\mathbb{R}$-multilineal y antisimétrica.
2. Sean α una p-forma y β una q-forma sobre V. Entonces, $\alpha \wedge \beta$ es una (p+q)-forma definida como:
$$(\alpha \wedge \beta)(u_1, \ldots, u_{p+q}) = \frac{1}{p! \cdot q!} \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma \cdot \alpha(u_{\sigma(1)}, \ldots u_{\sigma(p)}) \cdot \beta(u_{\sigma(p+1)}, \ldots u_{\sigma(p+q)})$$
para $u_1, \ldots, u_{p+q} \in V$, donde S_n es el grupo de permutaciones de orden n.

3. Si α, β son 1-formas sobre V entonces, $\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha$. En particular, $\alpha \wedge \alpha = 0$.
4. Si (V, ω) es un espacio vectorial simpléctico, entonces la dimensión de V es par. Esto es consecuencia inmediata del teorema anterior y la no degeneración de ω.

Ahora, usando el Teorema 1.6, obtenemos la siguiente caracterización de espacios vectoriales simplécticos.

Proposición 1.7. *Sea V un espacio vectorial de dimensión $2n$ y ω una 2-forma sobre V. Entonces, son equivalentes:*

1. (V, ω) *es un espacio vectorial simpléctico.*
2. $\flat_\omega : V \longrightarrow V^*$ *es un isomorfismo lineal.*
3. $\omega^n = \omega \wedge \overset{n)}{\ldots} \wedge \omega \neq 0$.

Sea (V, ω) un espacio vectorial simpléctico de dimensión par $2n$. Entonces, existe una base $\mathcal{B} = \{v_i\}_{i=1,\ldots,2n}$ tal que:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} v^i \wedge v^{n+i} \tag{1.22}$$

Se dice, en este caso, que la base $\mathcal{B}$ es simpléctica para la forma ω.

1.3. Aplicaciones lineales simplécticas

En esta sección, estudiaremos las aplicaciones lineales simplécticas, esto es, las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales simplécticos que preservan las estructuras simplécticas.

Definición 1.8. *Sean (V, ω) y (U, α) espacios vectoriales simplécticos y $h : U \longrightarrow V$ una aplicación lineal. Diremos que h es simpléctica si:*

$$h^*\omega = \alpha \tag{1.23}$$

donde $h^*\omega$ es la 2-forma sobre U definida como:

$$(h^*\omega)(u_1, u_2) \coloneqq \omega(h(u_1), h(u_2)) \quad \textit{para} \quad u_1, u_2 \in U. \tag{1.24}$$

Nota:. Ahora veremos cómo se relacionan, en general, las matrices de $h^*\omega$ y ω respecto de bases en U y V. Denotemos por A y B a las matrices que representa a la aplicaciones lineales $\flat_\omega$ y $\flat_{h^*\omega}$, respectivamente, con respecto a las base $\mathcal{B}_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ y $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de U y V. Sea H la matriz asociada a la aplicación h respecto de las bases anteriores. Probaremos que:

$$\flat_{h^*\omega} = h^* \circ \flat_\omega \circ h : U \longrightarrow U^* \tag{1.25}$$

y que, por lo tanto:

$$B = H^T \cdot A \cdot H \tag{1.26}$$

pues $A^T = -A$ y $B^T = -B$.

En efecto, sean $u, w \in U$. Entonces:

$$[(h^* \circ \flat_\omega \circ h)(u)]\,(w) = [h^*(\flat_\omega(h(u))]\,(w) = [\flat_\omega(h(u))]\,(h(w)) = \omega(h(u), h(w)) =$$

$$= (h^*\omega)(u, w) = [\flat_{h^*\omega}(u)]\,(w)$$

Se concluye así que $\flat_{h^*\omega} = h^* \circ \flat_\omega \circ h$, que es lo que queríamos demostrar.

Además, se pueden probar los siguientes resultados.

Proposición 1.9. *Sean (V, ω) , (U, α) y (W, η) espacios vectoriales simplécticos. Se tiene que:*

1. *Si $h : U \longrightarrow V$ es una aplicación simpléctica, entonces, h es inyectiva.*
2. *Si $h : U \longrightarrow V$ y $f : V \longrightarrow W$ son aplicaciones simplécticas, entonces $f \circ h$ es aplicación simpléctica.*
3. *La aplicación identidad en V es una aplicación simpléctica.*

Demostración. Sólo vamos a demostrar 1, el resto de resultados son triviales. Supongamos que $h : U \longrightarrow V$ es una aplicación simpléctica. Veamos que es inyectiva. Sean $u_1, u_2 \in U$ tales que $h(u_1) = h(u_2)$. Entonces, tenemos que: $(h^* \circ \flat_\omega)(h(u_1)) = (h^* \circ \flat_\omega)(h(u_2))$ y en consecuencia, como $\flat_\alpha = h^* \circ \flat_\omega \circ h$ se tiene que : $\flat_\alpha(u_1) = \flat_\alpha(u_2)$. Puesto que (U, α) es un espacio vectorial simpléctico, por la Proposición 1.7, se sigue que $\flat_\alpha$ es isomorfismo lineal, y en particular, es una aplicación inyectiva. Así, $u_1 = u_2$.

□

Definición 1.10. *Sean (V, ω) y (U, α) espacios vectoriales simplécticos. Diremos que una aplicación $h : U \longrightarrow V$ lineal, simpléctica y biyectiva es un isomorfismo simpléctico. Si $U = V$, entonces, se dice que h es un autormorfismo simpléctico.*

Nota:. Si $h : V \longrightarrow V$ es una aplicación lineal y simpléctica, h es automorfismo simpléctico. Así, si H es la matriz asociada a la aplicación lineal h, y A la matriz asociada a ω respecto de la base de V, se tiene que:

$$[\,\text{h aplicación simpléctica}\,] \Leftrightarrow [\,A = H^T \cdot A \cdot H] \tag{1.27}$$

2

Variedades Simplécticas

El el capítulo anterior introducimos la noción de formas simplécticas sobre espacios vectoriales y en este extenderemos este concepto a una variedad diferenciable. Veremos que como una 2-forma induce aplicación diferenciable, entre los fibrados tangente y cotangente, y estudiaremos sus principales características y propiedades, que nos ayudarán a entender el concepto de campo Hamiltoniano en el próxima capítulo. Asímismo, introduciremos el concepto de transformación simpléctica, de forma totalmente a las aplicaciones simplécticas entre espacios vectoriales. Veremos como estas pueden ser caracterizadas en términos de un tipo muy concreto de subvariedad. Además, se generalizará el Teorema (1.5), el cual proporciona una carta local de la variedad en la que una forma simpléctica adopta una expresión muy sencilla. Finalmente, veremos como de forma muy natural se le puede dotar al fibrado cotangente de cualquier variedad diferenciable de estructura de variedad simpléctica.

Notación: habitualmente, cuando queramos hacer constar la dimensión de una variedad diferenciable M de dimensión m, usaremos la notación M^m.

Seguiremos como referencias bibliográficas [1, 3, 4, 5]

2.1. Formas simplécticas sobre variedades diferenciables

Empezaremos recordando brevemente la definición del fibrado de las p-formas sobre una variedad así como la noción de diferenciabilidad de p-formas.

Definición 2.1 (Fibrado de las p-formas). *Sea M^m una variedad diferenciable. Entonces, para cada $x \in M$, podemos considerar el espacio vectorial $\bigwedge^p T_x^* M$ de las p-formas en el punto x. Al conjunto:*

$$\bigwedge^p M = \bigcup_{x \in M} \bigwedge^p T_x^* M \quad con \;\; 1 \leq p \leq m \tag{2.1}$$

se le denomina fibrado de las p-formas sobre la variedad M. Asímismo, tenemos la proyección canónica:

$$\left.\begin{array}{rcl} \Pi_{\bigwedge^p M} : \bigwedge^p M & \longrightarrow & M \\ \alpha & \longmapsto & \Pi_{\bigwedge^p M}(\alpha) \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

con $\Pi_{\bigwedge^p M}(\alpha) = x$ *si y sólo si* $\alpha \in \bigwedge^p T_x^* M$.

Nota:. Recordemos que $\bigwedge^p M$ tiene estructura de variedad diferenciable de dimensión $m+\binom{m}{p}$ y que, además, la proyección canónica $\Pi_{\bigwedge^p M}$ es una submersión. Así, la siguiente defnción tiene perfecto sentido.

Definición 2.2 (p-forma diferenciable). *Una p-forma diferenciable sobre una variedad difenciable M es una aplicación:*

$$\alpha : M \longrightarrow \bigwedge^p M \tag{2.3}$$

verificando:

i) α *es una sección de la proyección canónica, esto es:*

$$\alpha(x) \in \bigwedge^p T_x^* M\,, \quad \forall x \in M. \tag{2.4}$$

ii) α *es diferenciable.*

El objetivo ahora es extender el concepto de forma simpléctica a una variedad diferenciable. Para ello introducimos la noción de rango de una 2-forma sobre una variedad, usando la definición de rango de una 2-forma sobre un espacio vectorial.

Definición 2.3. *Sea* M^m *una variedad diferenciable y* ω *una 2-forma sobre M. El rango de* ω *en un punto* $x \in M$ *es el rango de la 2-forma:*

$$\omega_x : T_x M \times T_x M \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.5}$$

Decimos que ω *es no degenerada si para cada* $x \in M$, ω_x *es no degenerada.*

Definición 2.4 (Forma casi-simpléctica). *Una forma casi-simpléctica sobre una variedad diferenciable M es una 2-forma* ω *no degenerada. El par* (M, ω) *es llamado una variedad casi-simpléctica.*

Usando el Teorema 1.6 deducimos el siguiente resultado:

Proposición 2.5. *Sea* M^m *una variedad diferenciable y* ω *una 2-forma sobre M. Entonces:*

1. *Si* ω *es una forma casi-simpléctica, entonces M tiene dimensión par.*

2. *Si ω es una forma casi-simpléctica y $m = 2n$, entonces $\omega^n = \omega \wedge \overset{n)}{\ldots} \wedge \omega \neq 0$ en todo punto, es decir:*

$$\omega_x^n = \omega_x \wedge \overset{n)}{\ldots} \wedge \omega_x \neq 0, \ \ \textit{para cada } x \in M. \tag{2.6}$$

Sea M una variedad diferenciable y ω una 2-forma sobre M. Para cada punto de la variedad $x \in M$, podemos considerar la aplicación lineal inducida por ω_x, esta es:

$$\flat_{\omega_x} : T_xM \longrightarrow T_x^*M \tag{2.7}$$

Esto permite construir una aplicación entre los fibrado tangente y cotangente:

$$\flat_\omega : TM \longrightarrow T^*M \tag{2.8}$$

de modo que: $\flat_{\omega|_{T_xM}} = \flat_{\omega_x}$.

Proposición 2.6. *Sea (M, ω) una variedad casi-simpléctica. Entonces, la aplicación $\flat_\omega$ es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable.*

Demostración. Sea $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$ una carta local en M. En esta carta la 2-forma puede expresarse como:

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \ \text{ con } \ \omega_{ij} = -\omega_{ji}. \tag{2.9}$$

Entonces, como ω es diferenciable, las funciones $\omega_{ij} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, esto es, $\omega_{ij} \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable.

Considereamos a continuación la carta inducida por $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$ en el fibrado tangente TM, dada por:

$$\left(\tau_M^{-1}(U), \overline{\psi} = (x^1, \ldots, x^m, v^1, \ldots, v^m)\right) \tag{2.10}$$

con $\tau_M : TM \longrightarrow M$ la proyección canónica. Asimismo, consideramos la correspondiente carta en T^*M.

$$\left(\pi_M^{-1}(U), \underline{\psi} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^m, p_1, \ldots, p_m)\right) \tag{2.11}$$

donde $\Pi_M : T^*M \longrightarrow M$ es la proyección canónica. Veamos ahora la expresión de aplicación $\flat_\omega$ en coordenadas. Sea:

$$(x^1, \ldots, x^m, v^1, \ldots, v^m) \in \overline{\psi}\left(\tau_M^{-1}(U)\right) \subseteq \mathbb{R}^m \tag{2.12}$$

Entonces:

$$\hat{\flat}_\omega(x^1,\ldots,x^m,v^1,\ldots,v^m)=(x^1,\ldots,x^m,\textstyle\sum_{i=1}^m v^i\cdot\omega_{i1}(\psi(x^1,\ldots,x^m)),\ldots,$$
$$\ldots,\textstyle\sum_{i=1}^m v^i\cdot\omega_{im}(\psi(x^1,\ldots,x^m))) \tag{2.13}$$

Por tanto, $\flat_\omega$ es diferenciable.

Por otra parte, para cada $x\in M$, la matriz asociada a $\flat_{\omega_x}:T_xM\longrightarrow T_x^*M$ respecto de las bases $\{\partial/\partial x^i|_x\}_{i=1,\ldots,m}$ y $\{dx^i|_x\}_{i=1,\ldots,m}$ es justamente $(-\omega_{ij}(x))_{i,j=1,\ldots,m}$. Puesto que ω_x es no degenerada, la mencionada matriz admite inversa. Denotemosla por $(\omega^{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$. Las componentes de esta matriz son funciones en U, $\omega^{ij}:U\longrightarrow\mathbb{R}$. De hecho, son funciones son diferenciables, pues ω_{ij} lo son. Denotamos entonces por:

$$\flat_\omega^{-1}:T^*M\longrightarrow TM \tag{2.14}$$

la inversa de $\flat_\omega:TM\longrightarrow T^*M$. Considerando finalmente las cartas (2.10) y (2.11) descritas con anterioridad, inducidas en TM y T^*M respectivamente, un cálculo directo prueba que, si $(x^1,\ldots,x^m,p_1,\ldots,p_m)\in\underline{\psi}(\pi_M^{-1}(U))$, entonces:

$$\hat{\flat}_\omega^{-1}(x^1,\ldots,x^m,p_1,\ldots,p_m)=(x^1,\ldots,x^m,\textstyle\sum_{i=1}^m p_i\cdot\omega^{i1}(\psi(x^1,\ldots,x^m)),\ldots,$$
$$\ldots,\textstyle\sum_{i=1}^m p_i\cdot\omega^{im}(\psi(x^1,\ldots,x^m))) \tag{2.15}$$

Por tanto, $\flat_\omega^{-1}$ es diferenciable.

□

Ahora, podemos deducir el siguiente resultado.

Proposición 2.7. *Sea M una variedad diferenciable y ω una 2-forma sobre M. Entonces, son equivalentes:*

1. *ω es una forma casi-simpléctica sobre M.*
2. *$\flat_\omega:TM\longrightarrow T^*M$ es un isormorfismo de fibrados vectoriales, expresado de otra forma, $\flat_\omega:TM\longrightarrow T^*M$ es diferenciable y $\flat_{\omega|_{T_xM}}:T_xM\longrightarrow T_x^*M$ es un isomorfismo lineal $\forall x\in M$.*

Demostración. Se sigue directamente de la Proposición 1.7. Así, ω es una forma casi-simpléctica sii $\forall x\in M$, ω_x es no degenerada, sii para todo $x\in M$, la aplicación inducida $\flat_{\omega_x}$ es un isomorfismo lineal.

□

Sea (M,ω) una variedad casi-simpléctica y consideremos el isomorfismo de fibrados vectoriales $\flat_\omega:TM\longrightarrow T^*M$. Denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ y $\Omega^1(M)$ los $C^\infty(M)$-módulos de los campos de los vectores y las 1-formas, respectivamente, sobre M. Entonces, $\flat_\omega$ induce otra aplicación denotaremos de la misma forma:

$$\flat_\omega:\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\Omega^1(M) \tag{2.16}$$

definida por:

$$\flat_\omega(X)(x) = \flat_{\omega_x}(X(x)) \tag{2.17}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $x \in M$. Tenemos que:

Proposición 2.8. *Sea (M,ω) una variedad casi-simpléctica. Entonces, la aplicación $\flat_\omega : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ está bien definida y es un isomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos.*

Demostración. Vamos a empezar demostrando que $\flat_\omega$ está bien definida, esto es, que dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, se sigue que $\flat_\omega(X) \in \Omega^1(M)$.

Sea $x \in M$ y $(U, \psi = (x^1,\ldots,x^m))$ una carta local en M tal que $x \in U$. Supongamos que :

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \text{ con } \omega_{ij} = -\omega_{ji} \text{ y } X = \sum_{i=1}^{m} X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.18}$$

Entonces,

$$\flat_\omega(X) = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{k=1}^{m} X_k \cdot \omega_{ki}\right] dx^i. \tag{2.19}$$

Ya que las funciones X_k y ω_{ki} son diferenciables se sigue que cada componente de (2.19) es diferenciable. Por tanto, $\flat_\omega(X)$ es una 1-forma diferenciable sobre M.

Seguidamente veremos que $\flat_\omega$ es un homomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos. Es claro que $\flat_\omega$ es lineal y, por tanto, basta con probar que:

$$\flat_\omega(f \cdot X) = f \cdot \flat_\omega(X) \tag{2.20}$$

Sean $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Tenemos:

$$\left(\flat_\omega(f\cdot X)\right)(x) = \flat_{\omega_x}(f(x)\cdot X(x)) = f(x)\cdot \flat_{\omega_x}(X(x)) \quad \forall x \in M \tag{2.21}$$

Concluimos así que $\flat_\omega(f \cdot X) = f \cdot \flat_\omega(X)$.

Para finalizar, nos falta por demostrar que $\flat_\omega$ admite inversa diferenciable. Sea $\flat_\omega^{-1} : T^*M \longrightarrow TM$ el homomorfismo inverso de $\flat_\omega$. Definimos entonces:

$$\overline{\flat_\omega} : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \tag{2.22}$$

con $\overline{\flat_\omega}(\alpha)(x) = \flat_{\omega_x}^{-1}(\alpha(x))$, donde $\alpha \in \Omega^1(M)$ y $x \in M$. Al igual que $\flat_\omega$, se puede demostrar que $\overline{\flat_\omega}$ está bien definida y que es un homomorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos. Además, verifica que:

$$\flat_\omega \circ \overline{\flat_\omega} = id_{|_{\Omega^1(M)}} \quad \text{y} \quad \overline{\flat_\omega} \circ \flat_\omega = id_{|_{\mathfrak{X}(M)}} \tag{2.23}$$

Así, $\flat_\omega$ es un isormorfismo de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-módulos.

□

Ahora, introducimos la noción de forma simpléctica sobre una variedad

Definición 2.9 (Forma simpléctica). *Sea M una variedad diferenciable y ω una forma casi-simpléctica sobre M. Diremos que ω es simpléctica si es cerrada, esto es, $d\omega = 0$. Entonces, el par (M, ω) es llamado variedad simpléctica.*

Finalmente, introduciremos unos tipos muy concretos de subvariedades de variedades simplécticas y obtendremos caracterizaciones de las mismas que utilizaremos posteriormente.

Definición 2.10. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y consideremos $N \subseteq M$ una subvariedad de M. Diremos que N es:*

- *simpléctica si para todo $x \in N$ se tiene que: $T_xN \cap T_xN^{\perp} = 0$.*
- *isótropa si para todo $x \in N$ se tiene que $T_xN \subseteq T_xN^{\perp}$.*
- *coisótropa si para todo $x \in N$ se tiene que $T_xN^{\perp} \subseteq T_xN$.*
- *lagrangiana si para todo $x \in N$ se tiene $T_xN^{\perp} = T_xN$.*

donde $T_xN^{\perp}$ es el ortogonal simpléctico de T_xN definido en (1.7).

Proposición 2.11. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $N \subseteq M$ una variedad de M. Entonces, N es una subvariedad lagrangiana si y sólo si $i^*(\omega) = 0$ y $dim\, N = 1/2 \cdot dim\, M$, donde $i : N \longrightarrow M$ es la inclusión canónica.*

Demostración. Supongamos que T_xN es una subespacio lagrangiano de T_xN, por tanto, $dim\, T_xN = dim\, T_xN^{\perp} = 1/2 \cdot dim\, T_xM$. Además, si $X, Y \in T_xN$, entonces:

$$(i^*\omega)_x(X, Y) = \omega_x(X, Y) = 0 \tag{2.24}$$

pues $T_xN = T_xN^{\perp}$. Concluimos así que $i^*\omega = 0$.

Recíprocamente, si $dim\, T_xN = 1/2 \cdot dim\, T_xM$ se sigue por (1.8) que $T_xN^{\perp}$ tiene la misma dimensión que T_xN. Además, como $i^*\omega = 0$, se sigue el contenido $T_xN \subseteq T_xN^{\perp}$. Por tanto, $T_xN = T_xN^{\perp}$ y, en consecuencia, que N es una subvariedad lagrangiana de M.

2.2. Aplicaciones simplécticas

Una vez introducida la estructura de variedad simpléctica procedemos a estudiar las aplicaciones que conservan dicha estructura, como suele ser habitual en matemáticas. En nuestro caso, estas aplicaciones son las aplicaciones simplécticas.

Definición 2.12. *Sean (M, ω) y (Q, α) dos variedades simplécticas con igual dimensión, a saber $2n$. Una aplicación diferenciable $h : M \longrightarrow Q$ se dice que es una transformación simpléctica si:*

$$h^*\alpha = \omega \tag{2.25}$$

donde $h^*\alpha$ es la 2-forma sobre M dada por:

$$\alpha_{h(x)}\left((T_x h)(X), (T_x h)(Y)\right) = \omega_x(X, Y) \tag{2.26}$$

para $x \in M$ y $X, Y \in T_x M$.

Usando la definición anterior, uno puede probar el siguiente resultado.

Proposición 2.13. *Sean (M, ω) y (Q, α) variedades simplécticas de la misma dimensión, a saber $2n$. Si $h : M \longrightarrow Q$ es una transformación simpléctica, entonces h es un difeomorfismo local.*

Demostración. Sea $h : M \longrightarrow Q$ una transformación simpléctica. Entonces, usando la Proposición 1.9 y el hecho de que $dim\, M = dim\, Q$, se sigue que $T_x h : T_x M \longrightarrow T_{h(x)} Q$ es un isomorfismo lineal para todo $x \in M$. Así, h tiene rango máximo y en consecuencia, usando un resultado clásico en Geometría Diferencial, h es un difeomorfismo local.

□

A continuación, introduciremos la noción de simplectomorfismo y transformación canónica.

Definición 2.14. *Sean (M, ω) y (Q, α) variedades simplécticas de la misma dimensión. Entonces:*

1. *Si $h : M \longrightarrow Q$ es una transformación simpléctica biyectiva diremos que h es un difeomorfismo simpléctico o un simplectomorfismo.*
2. *En las condiciones anteriores, si $M = Q$ y $\omega = \alpha$ decimos que h es una transformación canónica.*

Sea (M, ω) una variedad simpléctica. La idea es caracterizar las aplicaciones simplécticas en términos de subvariedades lagrangagianas introducidas en la Definición 2.10. Para ello, en $M \times M$ consideramos la estructura simpléctica dada por:

$$\left.\begin{array}{rcl} (\omega, -\omega)_{(x,y)} : (T_x M \times T_y M) \times (T_x M \times T_y M) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (X_1, Y_1, X_2, Y_2) & \longmapsto & \omega_x(X_1, X_2) - \omega_y(Y_1, Y_2) \end{array}\right\}$$

donde se ha utilizado la identificación $T_{(x,y)}(M \times M) \cong T_x M \times T_y M$. Recordemos que el grafo de f, Γ_f, es una subvariedad regular de $M \times M$:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in M\} \subseteq M \times M \tag{2.27}$$

y que además $T_{(x,f(x))}\Gamma_f$ puede identificarse con:

$$\{(X, (T_x f)(X)) \,|\, X \in T_x M\} \tag{2.28}$$

para todo $x \in M$.

Proposición 2.15. *Sea* (M, ω) *una variedad simpléctica de dimensión* $2n$ *y* $f : M \longrightarrow M$ *una aplicación diferenciable. Entonces son equivalentes:*

1. *f es simpléctica.*
2. *El grafo de f,* Γ_f*, es una subvariedad lagrangiana de* $TM \times TM \cong T(M \times M)$ *respecto de la estructura simpléctica* $(\omega, -\omega)$*.*
3. $i^*(\omega, -\omega) = 0$*, donde* i *es la inclusión canónica de* Γ_f *en* $M \times M$*.*

Demostración. Probaremos solamente la doble implicación entre 1) y 2), puesto que la equivalencia entre 2) y 3) es consecuencia directa de la Proposición 2.11.

[1 ⇒ 2] Supongamos que f es simpléctica. Tenemos que demostrar:

$$T_{(x,f(x))}\,\Gamma_f = (T_{(x,f(x))}\,\Gamma_f)^{\perp} \tag{2.29}$$

para todo $x \in M$.

"$\subseteq$" Sea $(X, (T_x f)(X)) \in T_{(x,f(x))}\,\Gamma_f$. Entonces, tenemos que para todo vector tangente a Γ_f en $(x, f(x))$, $(X', (T_x f)(X')) \in T_{(x,f(x))}\Gamma_f$, se cumple que:

$$(\omega, -\omega)_x((X, (T_x f)(X)), (X', (T_x f)(X'))) =$$

$$\omega_x(X, X') - \omega_{f(x)}((T_x f)(X), (T_x f)(X')) = 0$$

donde hemos utilizado en el último paso que f es simpléctica, y que, por tanto, $f^*\omega = \omega$. Así, $(X, (T_x f)(X)) \in (T_{(x,f(x))}\,\Gamma_f)^{\perp}$.

Por otra parte, tenemos que:

$$dim\,(T_{(x,f(x))}\,\Gamma_f)^{\perp} = dim\,(T_x M \times T_x M) - dim\,T_{(x,f(x))}\,\Gamma_f = n. \tag{2.30}$$

En conclusión, Γ_f es una subvariedad lagrangiana de $M \times M$.

[2 ⇒ 1] Supongamos ahora que Γ_f es una subvariedad lagrangiana. Entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega, -\omega)_{(x,f(x))}((X, (T_x f)(X)), (Y, (T_x f)(Y))) \\ &= \omega_x(X, Y) - \omega_{f(x)}((T_x f)(X), (T_x f)(Y)). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Por tanto, $f^*\omega = \omega$ y, en consecuencia, f es una aplicación simpléctica.

□

A continuación, introducimos la noción de campo simpléctico en una variedad simpléctica.

Definición 2.16. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y X un campo de vectores sobre M. Diremos que X es simpléctico o que es una transformación infinitesimal simpléctica si su flujo consta de transformaciones simplécticas.*

Nota:. 1. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Para cada punto $x \in M$, existe un abierto $U \subseteq M$, con $x \in U$, un número $\epsilon > 0$ y una aplicación diferenciable:

$$\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M \tag{2.32}$$

que verifica:

- $\forall t \in (-\epsilon, \epsilon)$, el subconjunto $\phi_t(U) = \{\phi(t, y) \,|\, y \in U\}$ es abierto y la aplicación : $\phi_t : U \subseteq M \longrightarrow \phi_t(U)$ un difeomorfismo.
- Para todo $t, s \in (-\epsilon, \epsilon)$ tal que $t + s \in (-\epsilon, \epsilon)$ se tiene que: $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}$.
- El grupo uniparamétrico local $\{\phi_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ induce sobre U el campo X, es decir, para todo $y \in U$, $\phi_y : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ es una curva integral de X con condición inicial y (en particular, $\phi_0 = id_M$).

La aplicación $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times U \longrightarrow M$ es el flujo local del campo X alrededor del punto $x \in M$.

2. Sea α una p-forma sobre M y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, podemos definir la derivada de Lie de α respecto de X, $\mathcal{L}_X \alpha$, la cual es una p-forma sobre M, dada por:

$$(\mathcal{L}_X \alpha)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_t^* \alpha)(x) - \alpha(x)}{t} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\phi_t^* \alpha) \tag{2.33}$$

o, alternativamente,

$$(\mathcal{L}_X \alpha)(X_1, \ldots, X_p) = X(\alpha(X_1, \ldots, X_p)) - \sum_{i=1}^{p} \alpha(X_1, \ldots, [X, X_i], \ldots X_p) \tag{2.34}$$

para $X_1, \ldots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$, donde $[\,,\,]$ es el corchete de Lie de campos de vectores sobre M.

3. Lema de Poincaré: sea α una p-forma cerrada en M, entonces para todo $x \in M$, existe un abierto $U \subseteq M$, con $x \in U$, y $\exists \beta$ (p-1)-forma sobre U tal que $\alpha = d\beta$ en U.

Ahora, podemos probar las siguientes caracterizaciones de campos simplécticos.

Proposición 2.17. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, son equivalentes:*

1. *X es un campo de vectores simpléctico.*
2. *$\mathcal{L}_X \omega = 0$.*

3. *Para todo $x \in M$ existen un abierto $U \subseteq M$, con $x \in U$, y una función diferenciable $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre U tal que:*

$$\flat_\omega(X) = df \tag{2.35}$$

Demostración.

[1 ⇒ 2] Sea X es un campo de vectores simpléctico y $\{\phi_t\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)}$ el flujo local de X alrededor de un punto $x \in M$. Entonces, $\phi_t^*\omega = \omega$. Por tanto, usando (2.33), es obvio que $\mathcal{L}_X\omega = 0$.

[2 ⇒ 1] Supongamos que $\mathcal{L}_X\omega = 0$. Nuevamente, usando (2.33), se sigue que:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} (\phi_t^*\omega) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_t^*\omega = \phi_0^*\omega = \omega, \quad \forall t \tag{2.36}$$

[2 ⇒ 3] Sea $i_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$ el producto interior por el campo X, esto es:

$$(i_X\alpha)(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \ldots, X_{k-1}) \tag{2.37}$$

con $X_1, \ldots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, por la identidad de Cartan:

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X. \tag{2.38}$$

En este caso, como $\mathcal{L}_X\omega = 0$, se sigue que:

$$i_X(d\omega) + d(i_X\omega) = 0. \tag{2.39}$$

Teniendo en cuenta que $i_X\omega = \flat_\omega(X)$ y que $d\omega = 0$, se tiene que: $d(\flat_\omega(X)) = 0$. Por el lema de Poincaré, concluimos que, para cada $x \in M$, existen un abierto $U \subseteq M$, con $x \in U$, y una función diferenciable $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sobre U tal que:

$$\flat_\omega(X) = df \tag{2.40}$$

[3 ⇒ 2] En general, tenemos que:

$$\mathcal{L}_X\omega = d(i_X\omega) + i_X(d\omega) = d(\flat_\omega(X)). \tag{2.41}$$

Sea $x \in M$. Entonces, existen un abierto $U \subseteq M$, con $x \in U$, y una función diferenciable, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, sobre U tal que $\flat_\omega(X) = df$. Luego,

$$(\mathcal{L}_X\omega)_{|_U} = d^2 f = 0 \tag{2.42}$$

En particular, $(\mathcal{L}_X\omega)_x = 0$.

□

2.3. Teorema de Darboux

Previo a la prueba del Teorema de Darboux, y su posterior generalización, es necesario introducir el concepto de campos de vectores dependientes del tiempo, el cual será el eje de la demostración.

Definición 2.18. *Un campo de vectores dependiente del tiempo sobre una variedad M es un aplicación de clase C^∞- diferenciable:*

$$X : \mathbb{R} \times M \longrightarrow TM \tag{2.43}$$

tal que $X_t(x) = X(t,x) \in T_xM$ para todo $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$.

A partir de un campo dependiente del tiempo, se puede construir un campo $\tilde{X}$ sobre $\mathbb{R} \times M$, la suspensión de X, como sigue:

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial t} + X. \tag{2.44}$$

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ y $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$, entonces:

$$(\tilde{X}f)(t,x) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,x)} f \;+ [X_t(x)]\,(f_t) \tag{2.45}$$

con $f_t(x) = f(t,x)$.

Sea $(U, \psi(x^1, \ldots, x^m))$ una carta local en M. Entonces, $(\mathbb{R} \times U, id \times \psi)$ es una carta local en $\mathbb{R} \times M$, donde:

$$\left.\begin{array}{rcl} id \times \psi : \mathbb{R} \times U & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^{m+1} \\ (t,x) & \longmapsto & (t, \psi(x)) \end{array}\right\} \tag{2.46}$$

Veamos ahora cómo actúan los vectores tangentes inducidos por esta carta local. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ y $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$, entonces:

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,x)} f = \left.\frac{\partial (f \circ (id \times \psi)^{-1})}{\partial t}\right|_{(t,\psi(x))} = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\,, \tag{2.47}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{(t,x)} f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x} f_t \quad , \, i = 1, \ldots, n. \tag{2.48}$$

Tras estas consideraciones ya podemos calcular las componentes del campo $\tilde{X}$ en $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$:

$$\tilde{X}(t,x)(t) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,x)} (t) + [X_t(x)](t_t) = 1\,, \tag{2.49}$$

$$\tilde{X}(t,x)(x^i) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{(t,x)} (x^i) + [X_t(x)](x_t^i) = X_t^i(x) = X^i(t,x). \tag{2.50}$$

Para cada $(s,x) \in \mathbb{R} \times M$ consideramos la curva integral:

$$t \longmapsto \gamma(t) \in \mathbb{R} \times M \tag{2.51}$$

de $\tilde{X}$ tal que, para $t = s$, $\gamma(s) = (s,x)$.

En M consideremos la carta local $(U, \psi = (x^1, \cdots, x^m))$ y en $\mathbb{R} \times M$ la respectiva carta inducida $(\mathbb{R} \times U, id \times \psi = (t, x^1, \cdots, x^m))$. Escribimos la curva integral de $\tilde{X}$ en coordenadas: $\hat{\gamma}(t) = (\tilde{x}^0(t), \tilde{x}^1(t), \ldots, \tilde{x}^m(t))$. Entonces:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt}\gamma\right)(t) = \dfrac{d\tilde{x}^0(t)}{dt} = \tilde{X}(\gamma(t))(t) = 1 \\ \\ \tilde{x}^0(s) = s \end{cases} \tag{2.52}$$

De esto último obtenemos que: $\tilde{x}^0(t) = t$. Por otra parte:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt}\gamma\right)(x^i) = \dfrac{d\tilde{x}^i(t)}{dt} = \tilde{X}(\gamma(t))(x^i) = X^i(t, \tilde{x}^1(t), \ldots, \tilde{x}^m(t)) \\ \\ \tilde{x}^i(s) = x^i(x) \end{cases} \tag{2.53}$$

Si denotamos la curva integral γ de $\tilde{X}$ por $t \longrightarrow \tilde{\Phi}_{t,s}(x)$, entonces

$$\tilde{\Phi}_{t,s}(x) = (t, \Phi_{t,s}(x)) \tag{2.54}$$

con

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi_{t,s}(x) = X(t, \Phi_{t,s}(x)) \\ \\ \Phi_{s,s}(x) = x \end{cases} \tag{2.55}$$

Diremos que $\{\Phi_{t,s}\}$ es el grupo uniparamétrico local (dependiente del tiempo) del campo X.

Proposición 2.19. *Para $t, s, r \in (-\epsilon, \epsilon)$, con $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene:*

i) $\Phi_{t,t} = id$
ii) $\Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,r} = \Phi_{t,r}$

Demostración.

i) Es inmediato.

ii) Tenemos que: $t \longmapsto (t, \Phi_{t,r}(x))$ es curva integral de $\tilde{X}$ y para $t = s$ pasa por $(s, \Phi_{s,r}(x))$. Por otra parte,

$$t \longmapsto (t, \Phi_{t,s}(\Phi_{s,r}(x))) \tag{2.56}$$

es curva integral de $\tilde{X}$ y en $t = s$ pasa por $(s, \Phi_{s,r}(x))$. De la unicidad de las curvas integrales se sigue:

$$\Phi_{t,r} = \Phi_{t,s} \circ \Phi_{s,r} \tag{2.57}$$

Sea $X : \mathbb{R} \times M \longmapsto TM$ un campo de vectores dependiente del tiempo y $\{\Phi_{t,s}\}$ su flujo uniparamétrico local dependiente del tiempo. Supongamos que $\{\tilde{F}_t\}$ es el flujo de su campo de suspensión. Entonces:

$$\tilde{F}_t(s, x) = (t + s, F_t(s, x)) \quad \text{con } F_{0,s}(x) = x \tag{2.58}$$

pues $\tilde{F}_0(s, x) = (s, x)$. Por otro parte, $t \longmapsto (t, \Phi_{t,s}(x))$ es curva integral de $\tilde{X}$ y $\Phi_{s,s}(x) = x$.

En consecuencia:

$$F_{t-s}(s, x) = \Phi_{t,s}(x) \quad \forall t, s, x \tag{2.59}$$

□

Así, usando un resultado clásico sobre la relación entre la derivada del flujo de un campo de vectores y la derivada de Lie respecto del campo de vectores X, deducimos la siguiente proposición.

Proposición 2.20. *Sea $X : \mathbb{R} \times M \longrightarrow TM$ campo de vectores dependiente del tiempo y $\{\Phi_{t,s}\}$ el flujo dependiente del tiempo de X. Entonces:*

$$\frac{d}{dt}\left(\Phi^*_{t,s}\alpha\right) = \Phi^*_{t,s}\left(\mathcal{L}_{X_t}\alpha\right) \tag{2.60}$$

para cada p-forma α sobre M.

Ahora, ya podemos probar el Teorema de Darboux para una variedad simpléctica.

Teorema 2.21 (Teorema de Darboux). *Sea M una variedad diferenciable de dimensión par $m = 2n$ y ω una forma casi simpléctica sobre M. Entonces, $d\omega = 0$ si y sólo si para cada $x \in M$ existe una carta local en M, a saber, $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n))$, tal que en U:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i \tag{2.61}$$

Demostración.
$\Leftarrow$ Inmediato.
$\Rightarrow$ Sin pérdida de generalidad demostraremos el resultado para $M = \mathbb{R}^{2n}$ y x=0. Por el Teorema 1.6, podemos encontrar funciones coordenadas $\{\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_n\}$ en $\mathbb{R}^{2n}$, verificando $\tilde{x}^i(x) = \tilde{p}_i(x) = 0$, tales que:

$$\omega(0) = \sum_{i=0}^{n} d\tilde{x}^i_{|0} \wedge d\tilde{p}_{i\,|0} \tag{2.62}$$

Consideramos entonces la 2-forma constante ω_1 sobre $\mathbb{R}^{2n}$ definida por:

$$\omega_1 = \sum_{i=1}^{n} d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{p}_i \tag{2.63}$$

Definimos así: $\omega_t = \omega + t \cdot (\omega_1 - \omega)$. Nótese que $\omega_t(0) = \omega(0)$.

Veremos al final de la prueba del teorema (en ***i)***) que existe un entorno $U \subseteq M = \mathbb{R}^{2n}$ de $x = 0$ tal que ω_t es no degenerada para todo $t \in [-\epsilon, 1+\epsilon]$, con $\epsilon > 0$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que U es una bola centrada en el origen $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Ya que $\omega - \omega_1$ es cerrada en U entonces, por el de Poincaré, se sigue que existe una 1-forma α en U tal que:

$$d\alpha = \omega - \omega_1 \tag{2.64}$$

Sin pérdida de generalidad suponemos que $\alpha(0) = 0$. Como $\alpha \in \Omega^1(U)$ y ω_t es no degenerada, la aplicación:

$$\flat_{\omega_t} : \mathfrak{X}(U) \longrightarrow \Omega^1(U) \tag{2.65}$$

es biyectiva para todo $t \in [-\epsilon, 1+\epsilon]$. Así, existe $X_t \in \mathfrak{X}(U)$ tal que:

$$\flat_{\omega_t}(X_t) = i_{X_t}\omega_t = -\alpha. \tag{2.66}$$

Por tanto:

$$\omega_t(0)(X_t(0), Y) = -\alpha(0)(Y) \quad \forall Y \in T_0M. \tag{2.67}$$

Nuevamente, puesto que ω_t es no degenerada: $X_t(0) = 0$. Así, X es un campo de vectores dependiente del tiempo en U y $X_t(0) = 0$.

Demostraremos después de la prueba (en ***ii)***) que la condición $X_t(0) = 0$ implica que existe una bola $V \subseteq U$ centrada en el origen tal que el grupo paramétrico dependiente del tiempo $\phi_{t,0}$ es definido para todo $t \in (-\epsilon', 1+\epsilon')$. Además, usando (2.66), la Proposición (2.19) y la definición de ω_t, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\phi_{t,0}^{*}\,\omega_t\right) &= \frac{d}{dt}\left(\phi_{t,0}^{*}\left(\omega + t(\omega_1-\omega)\right)\right)\\
&= \phi_{t,0}^{*}\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega\right) + \frac{d}{dt}\left(t\cdot\phi_{t,0}^{*}(\omega_1-\omega)\right)\\
&= \phi_{t,0}^{*}\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega\right) + t\cdot\frac{d}{dt}\left(\phi_{t,0}^{*}(\omega_1-\omega)\right) + \phi_{t,0}^{*}(\omega_1-\omega)\\
&= \phi_{t,0}^{*}\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega\right) + t\cdot\phi_{t,0}^{*}(\mathcal{L}_{X_t}(\omega-\omega_1)) + \phi_{t,0}^{*}(\omega_1-\omega)\\
&= \phi_{t,0}^{*}\left(\mathcal{L}_{X_t}(\omega + t\cdot(\omega_1-\omega))\right) + \phi_{t,0}^{*}(\omega_1-\omega)\\
&= \phi_{t,0}^{*}\left(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t\right) + \phi_{t,0}^{*}(d\alpha) = \phi_{t,0}^{*}\left(di_{X_t}\omega_t + i_{X_t}d\omega_t\right) + \phi_{t,0}^{*}(d\alpha)\\
&= \phi_{t,0}^{*}(-d\alpha) + \phi_{t,0}^{*}(d\alpha) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.68}
$$

Por tanto, $\phi_{1,0}^{*}(\omega_1) = \phi_{0,0}^{*}(\omega_0) = \omega$. Esto significa que $\phi_{1,0}$ proporciona un cambio de coordenadas requerida para transformar ω en ω_1.

i) Consideremos la aplicación:

$$
\left.\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (t,x) & \longmapsto & det(A(t,x)) \end{array}\right\}
\tag{2.69}
$$

donde $A(t,x)$ es la matriz asociada a $\omega_t(x)$ respecto de la base: $\{d\tilde{x}^1,\ldots,d\tilde{x}^n, d\tilde{p}_1,\ldots,d\tilde{p}_n\}$. Claramente F es diferenciable. Por tanto, $\overline{U} = F^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ es un abierto en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2n}$. Nótese que $\mathbb{R}\times\{(0,\ldots,0)\}\subseteq\overline{U}$ pues $det(A(t,0))\neq 0$ $\forall t\in\mathbb{R}$. Entonces, como $\overline{U}$ es abierto, para cada $t\in[0,1]$, existe $\epsilon_t>0$ tal que: $(t-\epsilon_t,t+\epsilon_t)\times U_t\subseteq\overline{U}$, con U_t entorno abierto del punto $(0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^{2n}$. Tenemos así un recubrimiento por abiertos del intervalo cerrado $[0,1]$, a saber:

$$
\mathcal{U} = \{\,(t-\epsilon_t,t+\epsilon_t)\cap[0,1]\,/\,t\in[0,1]\,\}
\tag{2.70}
$$

De modo que, dada la compacidad del intervalo $[0,1]$ se sigue que existen $t_1,\ldots,t_k\in[0,1]$ tales que:

$$
[0,1] = \bigcup_{i=1}^{k}(t_i-\epsilon_{t_i},t_i+\epsilon_{t_i})\cap[0,1]
\tag{2.71}
$$

Por tanto, el entorno del origen buscado es $U=\cap_{i=1}^{k}U_{t_i}$. Concluimos que existe $\epsilon>0$ tal que ω_t es no degenerada en U para todo $t\in(-\epsilon,\epsilon+1)$.

ii) Sea $\tilde{X}=\partial/\partial t + X$ el campo de suspensión de X. Entonces:

$$\tilde{X}(t,(0,\ldots,0)) = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_t \tag{2.72}$$

pues $X_t(0) = 0$. Así, la curva integral de $\tilde{X}$ que pasa por el punto $(0,(0,\ldots,0))$ es justamente: $t \longmapsto (t,(0,\ldots,0))$. Esta curva está definida en el intervalo $(-\epsilon, 1+\epsilon)$. Ahora bien, ya que el dominio $\tilde{D}$ del flujo del campo $\tilde{X}$ es un abierto de $(\mathbb{R}\times(-\epsilon,1+\epsilon)\times U)$ y $(-\epsilon,1+\epsilon)\times\{(0,(0,\ldots,0))\}\subseteq\tilde{D}$, se sigue que existe una bola abierta $V\subset U$ centrada en el origen y un $\tau,\epsilon'>0$ suficientemente pequeños tales que $(-\epsilon',1+\epsilon')\times((-\tau,\tau)\times V)\subseteq\tilde{D}$. En particular, la curva integral de $\tilde{X}$ por $(0,x)$ está definida para todo $x\in V$ y $t\in(-\epsilon',1+\epsilon')$, para todo $x\in V$. Así, si F_t es el flujo del campo $\tilde{X}$ entonces $F_t(0,x)$ está definida para todo $x\in V$ y $t\in(-\epsilon',1+\epsilon')$. Esto implica que $\phi_{t,0}(x)$ está definida para todo $x\in V$ y para $t\in(-\epsilon',1+\epsilon')$.

□

Definición 2.22. *Los entornos coordenados dados por el Teorema de Darboux son llamados simplécticos y sus funciones coordenadas* $(x^1,\ldots,x^n,p_1,\ldots,p_n)$ *son llamadas simplécticas o coordenadas canónicas.*

Ahora, introduciremos la noción de forma presimpléctica.

Definición 2.23. *Sea M una variedad de dimensión $2n+r$ y ω una 2-forma cerrada en M de rango constante $2n$. Entonces, se dice que ω es una forma (o estructura) presimpléctica sobre M y el par (M,ω) es una variedad presimpléctica.*

Supongamos que (M,ω) es una variedad presimpléctica de dimensión $2n+r$ y que el rango de ω es constante e igual a $2n$. Consideramos sobre M la distribución D definido por:

$$x \longmapsto D(x) = \{v\in T_xM \mid i_v\omega_x = 0\} = Ker\,(\flat_{\omega_x}) \in T_xM \tag{2.73}$$

Tenemos que D es una distribución de dimensión r. Además, D es completamente integrable. En efecto, sean $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ tales que $X(x),Y(x)\in D(x),\forall x\in M$. Entonces, como ω es cerrada, tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 = d\omega(X,Y,Z) = \frac{1}{3}\cdot[\,X(\omega(Y,Z)) - Y(\omega(X,Z)) + Z(\omega(X,Y))\,] + \\ -\omega([X,Y],Z) + \omega([X,Z],Y) - \omega([Y,Z],X) \end{aligned} \tag{2.74}$$

Como X,Y son secciones de del subfibrado D, de (2.74), se deduce que:

$$0 = \omega([X,Y],Z), \quad \forall Z\in\mathfrak{X}(M) \tag{2.75}$$

lo cual implica que

$$X(x),Y(x)\in D(x) \tag{2.76}$$

A continuación, aplicando el Teorema de Frobenius, se sigue que existe $(U, \psi = (y^1, \ldots, y^{2n}, y^{2n+1}, \ldots, y^{2n+r}))$ carta local en M tal que $\psi(x) = (0, \ldots, 0)$ y $\{\partial/\partial y^{2n+1}, \ldots \ldots, \partial/\partial y^{2n+r}\}$ forman una base local de D en U. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que $\psi(U) = V \times W$, con las primeras $2n$ correspondientes a V. Supongamos que en U:

$$\omega = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n} \omega_{ij}(y^1, \ldots, y^{2n}, y^{2n+1}, \ldots, y^{2n+r})\ dy^i \wedge dy^j. \tag{2.77}$$

Como $d\omega = 0$, se sigue que $\partial \omega_{ij}/\partial y^{2n+k} = 0$, para todo $i, j \in \{1, \ldots, 2n\}$ y $k \in \{1, \ldots, r\}$.

Por tanto, ω es una 2-forma en las coordenadas $(y^1, \ldots, y^{2n})$, esto es:

$$\omega = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2n} \omega_{ij}(y^1, \ldots, y^{2n})\ dy^i \wedge dy^j. \tag{2.78}$$

Así, ω puede ser vista como una 2-foma en V. De esta manera, ya que ω es cerrada y de rango máximo $2n$, aplicando el Teorema de Daroboux se deduce que existe un abierto V', con $V' \subseteq V$, tal que $(0, \ldots, 0) \in V'$ y en V':

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i\,, \tag{2.79}$$

con $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ coordenadas en V'.

Está claro que $(V' \times W, (x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n, y^{2n+1}, \ldots, y^{2n+r}))$ es una cartal local en M.

Queda probado por tanto el siguiente teorema.

Teorema 2.24. *Sea M una variedad de dimensión $2n + r$ y ω una 2-forma de rango constante $2n$. Entonces, ω es cerrada si y sólo si para cada $x \in M$ existe un entorno coordenado U con coordenadas locales $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n, y^{2n+1}, \ldots,$ $\ldots, y^{2n+r}))$ tales que:*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i \tag{2.80}$$

sobre U.

2.4. Estructura simpléctica del fibrado cotangente

Esta última sección del capítulo está enteramente dedicada a estudiar un ejemplo concreto de variedad simpléctica. Veremos que el fibrado cotangente de una variedad diferenciable arbitraria admite una estrutura simpléctica canónica.

Definición 2.25 (1-forma de Liouville). *Sea M una variedad diferenciable, T^*M su fibrado cotangete y $\Pi_M : T^*M \longrightarrow M$ la proyección canónica. Definimos una 1-forma sobre T^*M:*

$$\left.\begin{array}{rcl} \lambda_M : T^*M & \longrightarrow & T^*(T^*M) \\ \alpha & \longmapsto & \lambda_M(\alpha) \end{array}\right\} \tag{2.81}$$

dada por:

$$\lambda_M(\alpha)(X) = \alpha((T_\alpha \Pi_M)(X)) \tag{2.82}$$

para $X \in T_\alpha(T^*M)$. La 1-forma λ_M recibe el nombre de 1-forma de Liouville.

Veamos que λ_M es una 1-forma diferenciable. Para ello comprobaremos que sus componentes en una carta local son diferenciables.

Sea $\left(\Pi_M^{-1}(U), \underline{\psi} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^m, p_1, \ldots, p_m)\right)$ la carta inducida en T^*M por una carta $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$ en M. Entonces:

$$\lambda_M = \sum_{i=1}^{M} \left[\lambda_M \left(\frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right) d\underline{x}^i + \lambda_M \left(\frac{\partial}{\partial p_i} \right) dp_i \right] \tag{2.83}$$

Si $\alpha \in \Pi_M^{-1}(U)$, con $\underline{\psi}(\alpha) = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^m, p_1^\alpha, \ldots, p_m^\alpha)$, entonces, tenemos que:

$$\lambda_M(\alpha) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right|_\alpha \right) = \alpha \left((T_\alpha \Pi_M) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right|_\alpha \right) \right) = \alpha \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Pi_M(\alpha)} \right) = p_i(\alpha) \tag{2.84}$$

donde la penúltima igualdad se deduce como sigue:

$$\begin{aligned} (T_\alpha \Pi_M) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right|_\alpha \right) (f) &= \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right|_\alpha (f \circ \Pi_M) = \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right|_{\underline{\psi}(\alpha)} (f \circ \Pi_M \circ \underline{\psi}^{-1}) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right|_{\underline{\psi}(\alpha)} (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \Pi_M \circ \underline{\psi}^{-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left. \frac{\partial (f \circ \psi^{-1})}{\partial y^j} \right|_{\psi(\Pi_M(\alpha))} \cdot \left. \frac{\partial (\psi \circ \Pi_M \circ \underline{\psi}^{-1})_j}{\partial x^i} \right|_{\underline{\psi}(\alpha)} \\ &= \left. \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial y^i} \right|_{\psi(\Pi_M(\alpha))} = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Pi_M(\alpha)} f \end{aligned} \tag{2.85}$$

Queda así demostrado que $(T_\alpha \Pi_M) \left(\left. \frac{\partial}{\partial \underline{x}^i} \right|_\alpha \right) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Pi_M(\alpha)}$.

De forma totalmente similar se sigue que:

$$(T_\alpha \Pi_M)\left(\left.\frac{\partial}{\partial p_i}\right|_\alpha\right) = 0 \tag{2.86}$$

Por tanto, se concluye que:

$$\lambda_M = \sum_{i=1}^{m} p_i \, d\underline{x}^i \tag{2.87}$$

Si $\beta : M \longrightarrow T^*M$ entonces uno puede considerar la aplicación inducida $\beta^* : \Omega^1(T^*M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ definida como:

$$(\beta^*\alpha)(x)(X_1, \ldots, X_k) = \alpha(\beta(x))((T_x\beta)(X_1), \ldots, (T_x\beta)(X_k)) \tag{2.88}$$

para $X_1, \ldots, X_k \in T_xM$. De hecho, si $\alpha \in \Omega^1(T^*M)$ la escribimos en una carta local $(\Pi_M^{-1}(U), \underline{\psi} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n, p_1, \ldots, p_n))$ resulta:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d\underline{x}^i + \alpha^i dp_i \tag{2.89}$$

Entonces,

$$\beta^*\alpha = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \circ \beta) \, d(\underline{x}^i \circ \beta) + (\alpha^i \circ \beta) \, d(p_i \circ \beta) \tag{2.90}$$

El siguiente resultado muestra una forma muy interesante de caracterizar a la 1-forma de Lioville.

Proposición 2.26. *La 1-forma de Liouville λ_M es la única 1-forma sobre T^*M tal que:*

$$\beta^*\lambda_M = \lambda_M \tag{2.91}$$

para cualquier 1-forma β sobre M.

Demostración. Sea β una 1-forma sobre M y $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$ una carta local en M. Escribimos:

$$\beta = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \, dx^i \tag{2.92}$$

Entonces, si $(\Pi_M^{-1}(U), \underline{\psi} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n, p_1, \ldots, p_n))$ es la carta inducida en T^*M se sigue que:

$$\beta_i = p_i \circ \beta \quad \text{y} \quad x^i = \underline{x}^i \circ \beta \tag{2.93}$$

Por tanto, en U, tenemos que:

$$\beta^*(\lambda_M) = \beta^*\left(\sum_{i=1}^{m} p_i \, d\underline{x}^i\right) = \sum_{i=1}^{m} (p_i \circ \beta) \, d(\underline{x}^i \circ \beta) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \, dx^i = \beta \tag{2.94}$$

Queda por demostrar la unicidad de λ_M. Sea λ una 1-forma sobre T^*M tal que:

$$\beta^*\lambda = \beta \tag{2.95}$$

para cualquier 1-forma β sobre M.

Sea $x \in M$ y $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$ una carta local en M, con $x \in U$. Consideramos la carta inducida $(\Pi_M^{-1}(U), \underline{\psi} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n, p_1, \ldots, p_n))$ en T^*M. Supongamos que en $\Pi_M^{-1}(U)$:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} (a_i\, d\underline{x}^i + b^i\, dp_i) \tag{2.96}$$

y sea β una 1-forma en M tal que en U: $\beta = \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, dx^i$. Entonces, en U:

$$\begin{aligned}\beta^*\lambda &= \sum_{i=1}^{m} (a_i \circ \beta)\, d(\underline{x}^i \circ \beta) + (b^i \circ \beta)\, d(p_i \circ \beta) = \sum_{i=1}^{m} (a_i \circ \beta)\, dx^i + (b^i \circ \beta)\, d\beta_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(a_i \circ \beta + \sum_{j=1}^{m} (b^i \circ \beta) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \beta_i \right) dx^i\end{aligned} \tag{2.97}$$

Por tanto, por (2.93) tenemos que:

$$p_i \circ \beta = \beta_i = a_i \circ \beta + \sum_{j=1}^{m} (b^i \circ \beta) \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} \beta_i \tag{2.98}$$

Ahora probaremos que $p_i(\gamma) = a_i(\gamma)$ y $b_i(\gamma) = 0$, para todo $\gamma \in T_x^*M$. Sea $\gamma \in T_x^*M$. Supongamos que:

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i\, dx^i_{|_x} \ , \quad \gamma_i \in \mathbb{R} \tag{2.99}$$

Consideramos una 1-forma β sobre M tal que:

$$\beta_{|U} = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i\, dx^i \tag{2.100}$$

De (2.97) se sigue que en U: $p_i \circ \beta = a_i \circ \beta$, para todo i. En particular:

$$p_i(\gamma) = p_i(\beta(x)) = a_i(\beta(x)) = a_i(\gamma)\,, \quad \forall i \tag{2.101}$$

Aplicando (2.98) y el resultado anterior, concluimos que:

$$\sum_{j=0}^{m} b^j(\alpha(x)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \alpha_j = 0 \tag{2.102}$$

para toda 1-forma α sobre M.

Nuevamente, sea $\gamma \in T_x^*M$ dada por (2.99). Considemos entonces una 1-forma α sobre M tal que:

$$\alpha_{|U} = \sum_{i=1}^{m} \left[x^i + (\gamma_i - x_o^i)\right] dx^i \tag{2.103}$$

donde $(x_0^1, \ldots, x_0^m)$ son las coordenadas del punto x en la carta $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$. Nótese que $\alpha(x) = \gamma$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=0}^{m} b^j(\alpha(x)) \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x \alpha_j = 0 \\ &= \sum_{j=0}^{m} b^j(\gamma)\delta_{i,j} = b^i(\gamma) \ , \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \end{aligned} \tag{2.104}$$

y esto último es lo que queriamos que demostrar. En conclusión, $\lambda_M(x) = \lambda(x)$, para todo $x \in M$.

□

Proposición 2.27. *Sea M una variedad diferenciable. Entonces, la 2-forma:*

$$\omega_M = -d\lambda_M \tag{2.105}$$

define una estructura simpléctica sobre T^*M.

Demostración. Tenemos que demostrar que ω_M es no degenerada y cerrada. Esto último es evidente dada su definición.

Veamos que ω_M es no degenerada. Sea $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$ una carta local en M y $(\mathit{\Pi}_M^{-1}(U), \underline{\psi} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n, p_1, \ldots, p_n))$ la correspondiente carta inducida en T^*M. Tenemos que:

$$\lambda_M = \sum_{i=1}^{m} p_i d\underline{x}^i \ \Rightarrow \ \omega_M = -d\lambda_M = \sum_{i=1}^{m} d\underline{x}^i \wedge dp_i \tag{2.106}$$

En consecuencia:

$$\omega_M^m = \omega_M \wedge \overset{m)}{\ldots}, \wedge \omega_M = K \, d\underline{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\underline{x}^m \wedge dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_m \neq 0 \tag{2.107}$$

donde K es una constante no nula. Puesto que $(\omega_M^m)_x \neq 0$ en todo punto x de $\mathit{\Pi}_M^{-1}(U)$ se sigue por la Proposición (1.7) que ω_M es no degenerada.

□

Definición 2.28. *Sea M una variedad diferenciable. La 2-forma ω_M es llamada la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente T^*M.*

Sea $F : M \longrightarrow M$ un difeomorfismo, Entonces podemos considerar ka elevación cotangente de F:

$$T^*F : T^*M \longrightarrow T^*M \tag{2.108}$$

definida como sigue. Sea $x \in M$ un punto de la variedad y consideramos $\alpha \in T^*_x M$ y $X \in T_{F^{-1}(x)}M$. Entonces, la anterior aplicación se define como:

$$(T^*F)(\alpha)(X) = \alpha\big((T_{F^{-1}(x)}F)(X)\big) \tag{2.109}$$

Nótese que F también induce una aplicación diferenciable entre los respectivos fibrados de las p-formas, la cual se define de forma completamente análoga a T^*F, y se denotará de igual forma, esto es, T^*F.

Proposición 2.29. *Sea M una variedad diferenciable y $f : M \longrightarrow M$ un difeomorfismo. Entonces, $T^*F : T^*M \longrightarrow T^*M$ es un simplectomorfismo.*

Demostración. Probaremos que:

$$(T^*F)^*\lambda_M = \lambda_M \tag{2.110}$$

lo cual implica que:

$$(T^*F)^*(\omega_M) = -d\big((T^*F)^*(\lambda_M)\big) = -d\lambda_M = \omega_M \tag{2.111}$$

Sea $\alpha \in T^*_x M$ y $X \in T_\alpha(T^*M)$. Entonces, usando la Definición 2.25, se sigue que

$$\begin{aligned} &[(T^*F)^*(\lambda_M)](\alpha)(X) = \lambda_M((T^*F)(\alpha))(T_\alpha(T^*F)(X)) = \\ &= (T^*F)(\alpha)\big(T_{(T^*F)(\alpha)}\Pi_M\big)\big(T_\alpha(T^*F)(X)\big) = \\ &= (T^*F)(\alpha)(T_\alpha(\Pi_M \circ T^*F)(X)) \end{aligned} \tag{2.112}$$

Ahora, de (2.109), deducimos que el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} T^*M & \xrightarrow{T^*F} & T^*M \\ \Pi_M \big\downarrow & & \big\downarrow \Pi_M \\ M & \xrightarrow{F^{-1}} & M \end{array} \tag{2.113}$$

es conmutativo. Así, usando nuevamente (2.109) y (2.112), se tiene que

$$
\begin{aligned}
[(T^*F)^*(\lambda_M)](\alpha)(X) &= (T^*F)(\alpha)(T_\alpha(F^{-1} \circ \mathit{\Pi}_M)(X)) = \\
&= \alpha\big(T_\alpha(F \circ F^{-1} \circ \mathit{\Pi}_M)(X)\big) = \\
&= \alpha\big((T_\alpha \mathit{\Pi}_M)(X)\big) \\
&= \lambda_M(\alpha)(X)
\end{aligned}
\tag{2.114}
$$

lo que prueba el resultado.

$\square$

3

La ecuación de Hamilton-Jacobi

El espacio de configuración de un sistema mecánico conservativo con m grados de libertad puede identificarse con una variedad diferenciable de dimensión m.

El interés central al estudiar un sistema mecánico es describir la evolución de las partículas que componen el sistema. Con tal fin, la primera etapa consiste en obtener en obtener las ecuaciones del movimiento de las partículas del sistema. Una de las formas más conocidas en Mecánica Clásica consiste en calcular la energía del sistema, esto es, el Hamiltoniano del sistema $H = H(q^i, p_i)$, donde q^i son las coordenadas generalizadas que lo describen y p_i los momentos generalizados, y emplear las llamadas ecuaciones de Hamilton, las cuales proporcionan las ecuaciones del movimiento:

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{3.1}$$

Geométricamente, las soluciones de estas ecuaciones son las curvas de un campo de vectores sobre el llamado espacio fase de momentos. Este espacio de momentos se corresponde con el fibrado cotangente T^*Q y el Hamiltoniano del sistema no será más que una función sobre T^*Q. La idea para construir este campo de vectores consiste en emplear la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente estudiada en el capítulo anterior, si bien la construcción puede ser realizada para una variedad simpléctica arbitraria. Seguidamente estudiaremos las transformaciones que preserven la estructura simpléctica y que faciliten la resolución de las ecuaciones de Hamilton, y veremos cómo la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser aplicada para tal fin. Finalizaremos el capítulo, aplicando los resultados obtenidos a un ejemplo concreto.

Seguiremos como referencias bibliográficas [1, 2, 5].

3.1. Campos Hamiltonianos y ecuaciones de Hamilton

Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable real. La aplicación inducida por ω, $\flat_\omega : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$, es un isomorfismo de módulos por la Proposición 2.8, de modo que existe un único campo de vectores X_H sobre M, tal que:

$$[\,\flat_\omega(X_H) = dH\,] \iff [\,i_{X_H}\omega = dH\,] \tag{3.2}$$

Definición 3.1. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y consideremos la función diferenciable $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$. El campo de vectores X_H es conocido como campo hamiltoniano y la terna (M, ω, X_H) es llamada sistema hamiltoniano.*

En primer lugar, probaremos que los campos hamiltonianos son simplécticos.

Proposición 3.2. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y sea $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, el campo de vectores X_H es simpléctico.*

Demostración. Por la Proposición 2.17 tenemos que es sufieciente demostrar que $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$. Para esto usaremos la identidad:

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X \tag{3.3}$$

Tenemos que:

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = i_{X_H}(d\omega) + d(i_{X_H}\omega) = d^2H = 0 \tag{3.4}$$

donde hemos usado que ω, al ser una forma simpléctica, es cerrada, esto es, $d\omega = 0$.

□

Esta última proposición nos proporciona una forma de construir campos de vectores simplécticos a partir de funciones diferenciables. A continuación veremos una caracterización de campo de vectores simpléctico en términos de campos localmente Hamiltonianos.

Definición 3.3. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Diremos que un campo de vectores X sobre M es localmente Hamiltoniano si para cada $x \in M$ existe un entorno abierto U de x y una función diferenciable $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

$$X = X_H \quad en\, U \tag{3.5}$$

Usando de nuevo la Proposición

Proposición 3.4. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y X un campo de vectores sobre M. Entonces, X es un campo localmente Hamiltoniano si, y sólo si, X es simpléctico.*

Nota:. Téngase en cuenta que no todo campo de vectores simpléctico es (globalmente) Hamiltoniano.

Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$ y $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Supongamos que X_H es el campo de vectores caracterizado por:

$$i_{X_H}\omega = dH \tag{3.6}$$

Usando el Teorema de Darboux es posible elegir un entorno coordenado $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n))$ sobre M tal que:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i \tag{3.7}$$

Sea $\sigma : I = (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ una curva integral de X_H, es decir:

$$X_H(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t) \ , \ t \in I \tag{3.8}$$

En coordenadas: $\hat{\sigma}(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t), p_1(t), \ldots, p_n(t))$. Por lo tanto:

$$\dot{\sigma}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{dx^i(t)}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\sigma(t)} + \frac{dp_i(t)}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_{\sigma(t)} \right] \tag{3.9}$$

De (3.7) obtenemos que:

$$\left.\begin{aligned} \flat_\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= dp_i \\ \flat_\omega\left(\frac{\partial}{\partial p_i}\right) &= -dx^i \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \flat_\omega^{-1}(dx^i) &= -\frac{\partial}{\partial p_i} \\ \flat_\omega^{-1}(dp_i) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Como $dH = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial H}{\partial x^i} dx^i + \dfrac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$, se obtiene:

$$X_H = \flat_\omega^{-1}(dH) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{3.11}$$

De modo que:

$$X_H(\sigma(t)) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial H}{\partial x^i}(\sigma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial p_i}\Big|_{\sigma(t)} + \frac{\partial H}{\partial p_i}(\sigma(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\sigma(t)} \right) \tag{3.12}$$

Así, usando (3.8) y (3.9), obtenemos las ecuaciones de Hamilton:

$$\frac{dx^i}{dt}(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(\sigma(t)) \ , \quad \frac{dp_i}{dt}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(\sigma(t)) \tag{3.13}$$

Estas últimas son consecuencia directa de (3.6), la cual es llamada forma intrínseca de las ecuaciones de Hamilton.

Nota:. Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces, en coordenadas canónicas, que recordemos que son las que proporciona el Teorema de Darboux, el campo de vectores X_f se escribe como:

$$X_f = \sum_{i=1}^{n} \left(-\frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \tag{3.14}$$

Ahora demostraremos que la energía se conserva en cuando el sistema mecánico evoluciona. En lenguaje geométrico significa que el Hamiltoniano es constante a lo largo de las curvas integrales del campo Hamiltoniano.

Proposición 3.5 (Ley de la conservación de la energía). *Sea (M, ω, X_H) un sistema Hamiltoniano. Entonces, el Hamiltoniano se mantiene constante a lo largo de las curvas integrales de X_H.*

Demostración. Sea $\sigma : I \longrightarrow M$ una curva integral de X_H. Tenemos que demostrar que la función $H \circ \sigma : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es constante, o equivalentemente:

$$\frac{d(H \circ \sigma)}{dt} = 0\,. \tag{3.15}$$

Ahora bien:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t (H \circ \sigma) = (T_t\, \sigma) \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_t \right) (H) = \dot{\sigma}(t)(H) = X_H(\sigma(t))(H) \tag{3.16}$$

Falta probar que $X_H(H)$ es identicamente nula:

$$X_H(H) = dH(X_H) = (i_{X_H}\omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0. \tag{3.17}$$

□

3.2. Transformaciones canónicas y funciones generatrices

Al final del capítulo vimos que la evolución de un sistema mecánico conservativo viene descrita por las ecuaciones de Hamilton, no obstante la resolución de estas ecuaciones no siempre es sencilla. La idea es encontrar $f : M \longrightarrow M$ un difeomorfismo (local) que transforme coordenadas canónicas en coordenadas canónicas, es decir, que f sea una transformación simpléctica: $f^*\omega = \omega$. En las nuevas coordenadas, la obtención de las curvas integrales de X_H debe ser más sencilla . Ahora, por la Proposición 2.15, esto es equivalente a que:

$$i^*(\omega, -\omega) = 0 \tag{3.18}$$

siendo $i : \Gamma_f \longrightarrow M \times M$ la inclusión canónica del grafo de f, Γ_f, en $M \times M$.

Por otra parte, por el lema de Poincaré, $(\omega, -\omega)$ es localmente exacta. Esto es, existe una 1-forma θ sobre $M \times M$ tal que:

$$(\omega, -\omega) = -d\theta. \tag{3.19}$$

Entonces, por (3.18) tenemos:

$$0 = i^*(\omega, -\omega) = d(-i^*\theta). \tag{3.20}$$

Esto significa que $-i^*\theta$ es una 1-forma sobre Γ_f cerrada. Luego, nuevamente, es localmente exacta. Así existe una función $S \in C^\infty(\Gamma_f, \mathbb{R})$ tal que:

$$dS = -i^*\theta. \tag{3.21}$$

A la función S se le denomina función generatriz de la aplicación simpléctica f. Consideremos ahora las nuevas funciones coordenadas definidas por f:

$$\underline{x}^i = x^i \circ f \quad \text{ y } \quad \underline{p}_i = p_i \circ f \tag{3.22}$$

De modo, que una posible elección para θ es:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} p_i dx^i - \underline{p}_i d\underline{x}^i \tag{3.23}$$

Nota:. En la última expresión hay un claro abuso de notación, las funciones (x^i, p_i) son coordenadas en el primer factor de $M \times M$, y las funciones $(\underline{x}^i, \underline{p}_i)$ son coordenadas en el segundo factor de $M \times M$.

Por tanto, usando (3.21), resulta:

$$dS = -i^* \left(\sum_{i=1}^{n} p_i dx^i - \underline{p}_i d\underline{x}^i \right) \tag{3.24}$$

Puesto que Γ_f es una subvariedad regular de $M \times M$ de dimensión $2n$, podemos optar, siempre que sea posible según el caso, por alguna de las siguientes posibilidades para la elección de las coordenadas en Γ_f: $(x^i, \underline{x}^i)$, $(x^i, \underline{p}_i)$, $(p_i, \underline{x}^i)$, $(p_i, \underline{p}_i)$.

Si elegimos como coordenadas $(x^i, \underline{x}^i)$, de (3.24), tenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial x^i} = -p_i(x, \underline{x}) \qquad \frac{\partial S}{\partial \underline{x}^i} = \underline{p}_i(x, \underline{x}) \tag{3.25}$$

La función generatriz debe ser capaz de definir $\underline{x}$ en términos de x y p. Para esto debe ocurrir que la matriz:

$$\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^i \, \partial \underline{x}^j} \right)_{i,j=1,\ldots,n} \tag{3.26}$$

sea regular. En este caso, podemos escribir la expresión de f en coordenadas:

$$\hat{f}(x,p) = \left(\underline{x}^1(x,p), \ldots, \underline{x}^n(x,p), \frac{\partial S}{\partial \underline{x}^1}(x,p), \ldots, \frac{\partial S}{\partial \underline{x}^n}(x,p) \right) \tag{3.27}$$

3.3. La ecuación de Hamilton-Jacobi

Si nos situamos en el caso particular en el que la variedad simpléctica M es el fibrado cotangente T^*Q de una variedad diferenciable Q (lo que, debido al Teorema de Darboux, no supone ninguna restricción local), la idea es buscar funciones generatrices tales que en las nuevas coordenadas canónicas las ecuaciones de Hamilton adopten una forma sencilla. Una posible estrategia posible sería buscar funciones generatrices $S(x, \underline{x})$ en $Q \times Q$ tal que el Hamiltoniano en las nuevas coordenadas sea de la forma:

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, \underline{x})\right) = K(\underline{x}) \tag{3.28}$$

con K una función sobre Q (el nuevo Hamiltoniano en las coordenadas canónicas descritas por S). Este problema podría resultar complicado. Más sencillo sería fijar $\underline{x} = \underline{x}_0$ y, entonces, la ecuación que resulta es:

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x)\right) = E \tag{3.29}$$

donde $S(x) = S(x, \underline{x}_0)$ puede ser considerada como una función sobre Q y $\mathrm{E} = K(\underline{x}_0)$ es una constante. Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Hamilton-Jacobi.

Aunque la última ecuación es un caso simplificaso de la ecuación más general, veremos que podemos obtener información de las soluciones de la ecuaciones de Hamilton., como se refleja en el siguiente teorema.

Teorema 3.6. *Sea Q una variedad simpléctica, $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Hamiltoniana. Entonces, son equivalentes:*

1. $H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = E$.
2. *Si $x(t)$ es una solución de:*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \tag{3.30}$$

entonces:

$$(x(t), p(t)) = \left(x(t), \frac{\partial S}{\partial x}\right) \tag{3.31}$$

es solución de las ecuaciones de Hamilton.

La idea ahora es reescribir este teorema en forma intrínseca, en el contexto de la geometría diferencial, y probar el mismo.

Sea Q una variedad diferenciable y consideremos T^*Q con su estructura simpléctica canónica. Supongamos que $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltoniano. Entonces, la ecuación de Hamilton-Jacobi se escribe intrínseca como:

$$H \circ dS = E \tag{3.32}$$

con $S : Q \longrightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(Q)$ y E una constante. Para la prueba del Teorema 3.6 necesitaremos el siguiente lema:

Lema 3.7. *Sea Q variedad diferenciable y $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Si $\Pi_Q : T^*Q \longrightarrow Q$ es la proyección canónica, ω_Q es la estructura simpléctica de T^*Q y $q \in Q$ entonces:*

$$(\omega_Q)_{dS(q)} \left(T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)X, Y\right) = (\omega_Q)_{dS(q)} \left(X, Y - T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)Y\right) \tag{3.33}$$

para todo $X, Y \in T_{dS(q)}(T^*Q)$.

Demostración. Nótese que:

$$T_{dS(q)}\big(dS \circ \Pi_Q\big)(X), T_{dS(q)}\big(dS \circ \Pi_Q\big)(Y) \in T_{dS(q)}(T^*Q) \tag{3.34}$$

ya que $\Pi_M \circ dS = id$. Además, de la Proposición 2.26, se deduce que

$$(dS)^*(\omega_Q) = (dS)^*(-d\lambda_M) = -d((dS)^*\lambda_M) = -d^2 S = 0 \tag{3.35}$$

Puesto que $(dS \circ \Pi_Q)^*(\omega_Q) = \Pi_M^*(dS^*(\omega_Q))$, se sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\Pi_Q^*((dS)^*\omega_Q)\right]_{dS(q)} (X, Y) \\ &= \left[(dS \circ \Pi_Q)^*(\omega_Q)\right]_{dS(q)} (X, Y) \\ &= (\omega_Q)_{dS(q)}\Big(T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)(X), T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)(Y)\Big) \end{aligned} \tag{3.36}$$

Por tanto, la ecuación (3.33) es equivalente a:

$$(\omega_Q)_{dS(q)}(X - T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)X, Y - T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)Y) = 0 \tag{3.37}$$

Sea $(U, \psi = (x^1, \ldots, x^m))$ una carta local en Q, y $(\Pi_Q^{-1}(U), \underline{\psi} = (\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^m, p_1, \ldots, p_m))$ la carta inducida en el fibrado cotangente. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \left[X - T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)X\right](\underline{x}^i) &= X(\underline{x}^i) - (T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)X)(\underline{x}^i) \\ &= X(\underline{x}^i) - X(\underline{x}^i \circ dS \circ \Pi_Q) \\ &= X(\underline{x}^i) - X(x^i \circ (\Pi_Q \circ dS) \circ \Pi_Q) \\ &= X(\underline{x}^i) - X(x^i \circ \Pi_Q) = X(\underline{x}^i) - X(\underline{x}^i) = 0 \end{aligned}$$

Esto significa que los vectores $W_{X_i} = X_i - T_{dS(q)}(dS \circ \Pi_Q)X_i$ se escriben de la forma:

$$W_{X_i} = \sum_{j=1}^{m} (W_{X_i})(p_j) \cdot \frac{\partial}{\partial p_j}\Big|_{dS(q)} \tag{3.38}$$

siendo $X_1 = X$ y $X_2 = Y$. Por tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned}(\omega_Q)_{dS(q)}(W_X, W_Y) &= \sum_{i=1}^{m} (d\underline{x}^i \wedge dp_i)(W_X, W_Y) = \\ &= \sum_{i=1}^{m} d\underline{x}^i(W_X) \cdot (dp_i)(W_Y) - d\underline{x}^i(W_Y) \cdot (dp_i)(W_X) \\ &= 0\end{aligned} \tag{3.39}$$

ya que $d\underline{x}^i(W_X) = d\underline{x}^i(W_Y) = 0$.

$\square$

Ahora estamos en disposición de dar un enunciado intrínseco del Teorema 3.6 y de probar el mismo. Este es el principal motivo del trabajo.

Teorema 3.8. *Sea (T^*Q, ω_Q, X_H) un sistema Hamiltoniano y $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces son equivalentes:*

1. *Si $\gamma : I \longrightarrow Q$ es una curva integral del campo de vectores X_H^S sobre Q definido por:*
$$X_H^S(q) = (T_{dS(q)}\Pi_M)(X_H(dS(q)))\,, \tag{3.40}$$
para todo $q \in Q$, entonces, $dS \circ \gamma : I \longrightarrow T^*Q$ es una curva integral de X_H, esto es, una solución de las ecuaciones de Hamilton para H.
2. *S satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi: $H \circ dS = E$.*

Demostración. Sea $\gamma(t)$ una curva integral de X_H^S. Consideremos la curva $\Gamma(t) = dS(\gamma(t))$ en T^*Q. Tenemos que:

$$\begin{aligned}\dot{\Gamma}(t) = (T_t\Gamma)\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) &= (T_t(dS \circ \gamma))\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right) \\ &= (T_{\gamma(t)}dS)\left[(T_t\gamma)\left(\frac{d}{dt}\Big|_t\right)\right] \\ &= (T_{\gamma(t)}dS)(\dot{\gamma}(t)) = (T_{\gamma(t)}dS)\left[X_H^S(\gamma(t))\right] \\ &= (T_{\gamma(t)}dS)\left[(T_{dS(\gamma(t))}\Pi_M)(X_H(dS(\gamma(t))))\right]\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$= T_{dS(\gamma(t))}(dS \circ \Pi_M)\,[X_H(dS(\gamma(t)))]$$

$$= T_{\Gamma(t)}(dS \circ \Pi_M)\,[X_H(\Gamma(t))] \in T_{\Gamma(t)}(T^*M)\,,$$

Usando el Lema 3.7, para todo $X \in T_{\Gamma(t)}(T^*M)$ tenemos:

$$(\omega_Q)_{\Gamma(t)}(\dot{\Gamma}(t), X) = (\omega_Q)_{\Gamma(t)}(\,T_{\Gamma(t)}(dS \circ \Pi_Q)\,[X_H(\Gamma(t))]\,, X\,)$$

$$= (\omega_Q)_{\Gamma(t)}(X_H(\Gamma(t)), X - (T_{\Gamma(t)}(dS \circ \Pi_Q))(X))$$

$$= (\omega_Q)_{\Gamma(t)}(X_H(\Gamma(t)), X) - (\omega_Q)_{\Gamma(t)}(X_H(\Gamma(t)), (T_{\Gamma(t)}(dS \circ \Pi_Q))(X)) \tag{3.42}$$

$$= (\omega_Q)_{\Gamma(t)}(X_H(\Gamma(t)), X) - dH(\Gamma(t))((T_{\Gamma(t)}(dS \circ \Pi_Q))(X))$$

$$= (\omega_Q)_{\Gamma(t)}(X_H(\Gamma(t)), X) - d(H \circ dS)(\gamma(t))\,\big[(T_{\Gamma(t)}\Pi_Q)(X)\big]$$

[1 ⇒ 2] Supongamos que $\Gamma(t)$ es curva integral de X_H, luego:

$$X_H(\Gamma(t)) = \dot{\Gamma}(t) \tag{3.43}$$

Comparando con (3.42) obtenemos:

$$d(H \circ dS)(\gamma(t))\,\big[(T_{\Gamma(t)}\Pi_Q)(X)\big] = 0 \tag{3.44}$$

para todo $X \in T_{\Gamma(t)}(T^*M)$. Puesto que, para todo punto q de Q, existe una curva integral $t \longrightarrow \gamma(t)$ de X_H^S con condición inicial q y, además, la aplicación lineal $T_{\Gamma(t)}\Pi_M$ es sobre, se sigue que $d(H \circ dS) = 0$, o equivalentemente, $H \circ dS = E$, para algún $E \in \mathbb{R}$.

[2 ⇒ 1] Supongamos ahora que S satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi, esto es, $H \circ dS = E$. Entonces, usando (3.42) y el carácter no degenerado de ω_Q, se tiene:

$$\dot{\Gamma}(t) = X_H(\Gamma(t)) \tag{3.45}$$

esto es, $\Gamma = dS \circ \gamma$ es curva integral de X_H.

□

El anterior teorema admite generalización en el sentido de que no es necesario una función generatriz S, sino que es sufiente disponer de una 1-forma cerrada en Q:

Teorema 3.9. *Sea (T^*Q, ω_Q, X_H) un sistema Hamiltoniano y $\alpha : Q \longrightarrow T^*Q$ una 1-forma cerrada sobre Q. Entonces son equivalentes:*

1. *Si $\gamma : I \longrightarrow Q$ es una curva integral del campo de vectores X_H^α sobre M definido por:*

$$X_H^\alpha(q) = (T_{\alpha(q)}\Pi_Q)(X_H(\alpha(q))), \tag{3.46}$$

   para todo $q \in Q$. Entonces, $\alpha \circ \gamma : I \longrightarrow T^*Q$ es curva integral de X_H, es solución de las ecuaciones de Hamilton.

2. *S satisface la ecuación de Hamilton-Jacobi: $H \circ \alpha = E$.*

Demostración. La demostración es análoga al teorema anterior usando nuevamente que $\alpha^*(\omega_Q) = 0$.

□

3.4. Dinámica de una partícula en un campo central en el plano

En esta sección aplicaremos los resultados anteriores a un sistema bastante estudiado en física, la dinámica de una partícula bajo la acción de un campo central. En este caso, el espacio de configuración es $Q = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y, por tanto, $T^*Q \cong Q \times \mathbb{R}^2$. En coordenadas polares (r, θ) sobre $Q \times \mathbb{R}^2$ el Hamiltoniano del sistema es dado por:

$$H(r, \theta, p_r, p_\theta) = \frac{1}{2m} \cdot \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + V(r) \tag{3.47}$$

con V: $T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que sólo depende de la coordenada radial y m una constante positiva.

Sea $S : Q = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces,

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right) d\theta \tag{3.48}$$

De este modo, utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi (3.32):

$$E = (H \circ dS)(r, \theta) = \frac{1}{2m} \cdot \left(\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \right) + V(r) \tag{3.49}$$

con $(r, \theta) \in Q$. Despejamos la derivada, y obtenemos:

$$\frac{\partial S}{\partial r}\Big|_{(r,\theta)} = \sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \frac{\mu^2}{r^2}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial S}{\partial \theta}\Big|_{(r,\theta)} = \mu \tag{3.50}$$

Por lo tanto, sustituyendo en (3.48):

$$dS = \sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \frac{\mu^2}{r^2}}\, dr + \mu \, d\theta \tag{3.51}$$

El objetivo es calcular el campo de vectores X_H^S, para ello es necesario primero calcular X_H. En virtud de (3.11) tenemos:

$$
\begin{aligned}
X_H &= -\frac{\partial H}{\partial r}\cdot\frac{\partial}{\partial p_r} - \frac{\partial H}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial}{\partial p_\theta} + \frac{\partial H}{\partial p_r}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial H}{\partial p_\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta} = \\
&= -\left(\frac{dV}{dr} + \frac{p_\theta^2}{mr^3}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial p_r} + \frac{p_r}{m}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{p_\theta}{mr^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}
\tag{3.52}
$$

En consecuencia:

$$
X_H(dS(r,\theta)) = -\left(\frac{dV}{dr} + \frac{\mu^2}{mr^3}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial p_r} + \sqrt{\frac{2\big(E - V(r)\big)}{m} - \frac{\mu^2}{m^2\cdot r^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mu}{mr^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}
$$

Así, usando (2.85) y (2.86), obtenemos:

$$
\begin{aligned}
X_H^S(r,\theta) &= (T_{dS(r,\theta)}\mathit{\Pi}_Q)(X_H(dS(r,\theta))) \\
&= \sqrt{\frac{2\big(E - V(r)\big)}{m} - \frac{\mu^2}{m^2\cdot r^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mu}{mr^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

Si $\gamma(t) = (r(t), \theta(t))$ es una curva integral de $X_H^S(t)$, resulta que:

$$
\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\cdot\sqrt{\big(E - V(r)\big) - \frac{\mu^2}{2mr^2}} \quad \text{y} \quad \dot{\theta} = \frac{\mu}{mr^2}
\tag{3.54}
$$

La solución de este sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden nos proporciona las curvas integrales de X_H^S. Por tanto, por el Teorema (3.9), tenemos que la curva integral del campo X_H, y de esta forma, la solución de las ecuaciones de Hamilton es:

$$
\hat{\gamma}(t) = (r(t),\, \theta(t),\, m\cdot\dot{r}(t),\, \mu)
\tag{3.55}
$$

Casos particulares de la situación previa son el oscilador armónico ($V(r) = k\cdot r^2$ donde k es una constante positiva) y el problema de Kepler ($V = k/r$, con $k \in \mathbb{R}$) ambos en el plano.

Conclusiones

En esta memoria, usando la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente T^*Q de una variedad diferenciable Q, se presenta una descripción geométrica de las soluciones parciales de la ecuación de Hamilton-Jacobi para un sistema Hamiltoniano sobre T^*Q.

Previamente, introducimos la noción de variedad simpléctica y probamos el teorema de Darboux para tales variedades, el cual garantiza la existencia de coordenadas locales en las que la expresión de la forma simpléctica es sencilla. Las coordenas fibradas sobre el fibrado cotangente son coordenadas de Darbaoux para la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente.

Finalmente, aplicamos los resultados obtenidos a la dinámica de una partícula en el plano moviéndose bajo la influencia de un potencial central.

Una extensión de la teoría desarrollada en esta memoria es aquella dada por las soluciones completas de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Tales soluciones permiten integrar totalmente las ecuaciones de Hamilton y, además, están estrechamente relacionadas con la integrabilidad completa del sistema Hamiltoniano en el sentido Arnold-Lioville (veáse [2]).

Por otra parte, generalizaciones de la teoría geométrica de Hamilton-Jacobi a otros ámbitos interesantes(sistemas mecánicos lagrangianos, dependientes del tiempo, con ligaduras no-holónomas, reducidos bajo la acción de un grupo de Lie de simetrías, problemas de control óptimo, ...) han sido ampliamente desarrollados en recientes años y constituyen un área de investigación pujante en la actualidad.

Bibliografía

[1] R. Abraham, J. E. Marsden: *Foundations of mechanics.* Second edition, revised and enlarged. With the assistance of T.Ratin and R.Cushman, Benjamin. Publishing Co., Inc, Advanced Book Program, Reading, Mass, 1978.

[2] V. I. Arnold: *Mathematical methods of classical mechanics.* Translated from Russian by K.Votmann and A.Weinstein, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlog, New York, 1989.

[3] C. Godbillon: *Géométrie différentielle et mécanique analytique.* (French). Hermann, Paris, 1969

[4] M. de León, P. R. Rodriguez: *Methods of differential geometry in analytical mechanics.* North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.

[5] P. Libermann, Ch. M. Marle: *Symplectic geometry and analytical mechanics.* Translated from French by Bertram Eugene Schwarzbach. Mathematics and its applications, 35. D Reidel Publishing Co.m Dordrecht, 1987.

Lista de símbolos y abreviaciones

$\boldsymbol{V^*}$	Espacio vectorial dual a V
$\bigwedge^{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{V^*}$	Espacio vectorial de las p-formas sobre V
$\wedge$	Producto exterior entre dos formas de igual o distinto orden.
$\boldsymbol{\hat{F}}$	Aplicación F escrita en coordenadas
$\boldsymbol{T_x M}$	Espacio tangente a M en un punto x de M.
$\boldsymbol{T_x f}$	Aplicación tangente a f en el punto x de M.
$\boldsymbol{TM}$	Fibrado tangente: $\cup_{\boldsymbol{x \in M}} \boldsymbol{T_x M}$
$\boldsymbol{\tau_M}$	Proyección canónica del fibrado tangente.
$\boldsymbol{T_x^* M}$	Espacio cotangente a M en x de M.
$\boldsymbol{T^* M}$	Fibrado cotangente: $\cup_{\boldsymbol{x \in M}} \boldsymbol{T_x^* M}$
$\boldsymbol{\Pi_M}$	Proyección canónica del fibrado cotangente.
$\boldsymbol{\mathfrak{X}(M)}$	Conjunto de campos de vectores sobre M.
$\boldsymbol{\Omega^k(M)}$	Conjunto de k-formas diferenciables sobre M
$[,]$	Corchete de Lie de dos campos de vectores
$\dot{\boldsymbol{\gamma}}$	Vector tangente a la curva $\boldsymbol{\gamma}$

Geometrical study of Hamilton-Jacobi equation

Samuel Quintero González
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100966510.edu.es

1. Abstrac

USING the canonical symplectic structure on the cotangent bundle T^*Q of a manifold Q, we present a geometric description of the partial solutions of the Hamilton-Jacobi equation associated with a Hamiltonian function on T^*Q. We also apply this result to describe the dynamics of a partice in the plane subjects to a central potential.

2. Symplectic manifolds

- Let ω be a 2-form over a smooth manifold. For each $x \in M$, this form induces a linear map:

$$\flat_{\omega_x} : T_xM \longrightarrow T_x^*M \tag{1}$$

defined as:

$$[\flat_{\omega_x}(X)]\,(Y) \coloneqq \omega_x(X,Y) \quad X,Y \in T_xM \tag{2}$$

If for each $x \in M$ this map is biyective, then we will say that ω is a non-degenerate 2-form. Futhermore, if ω is a closed form, we will say that ω is a symplectic form and the pair (M,ω) is called symplectic manifold.

- The linear map induced by ω can be extended to a isomorphism of C^∞-modules:

$$\flat_\omega : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \Omega^1(M) \tag{3}$$

as follows:

$$[\flat_\omega(X)]_x\,(Y) = [\flat_{\omega_x}(X(x))]\,(Y(x)) = \omega_x(X(x),Y(y)) \tag{4}$$

where $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$.

- **(Darboux's Theorem)** Let M be a smooth manifold of even dimension $m = 2n$. Then, ω is a symplectic structure on M iff for each $x \in M$ there exists a local chart in M denoted $(U, \psi = (x^1,\dots,x^n,p_1,\dots,p_n))$, such that:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dp_i \tag{5}$$

- Let M be a smooth manifold, T^*M its tangent bundle and $\Pi_M : T^*M \longrightarrow M$ the canonical projection. We define a 1-form on T^*M as:

$$\lambda_M : T^*M \longrightarrow T^*(T^*M) \tag{6}$$

given by:

$$\lambda_M(\alpha)(X) = \alpha((T_\alpha\Pi_M)(X)) \tag{7}$$

where $X \in T_\alpha(T^*M)$. The 1-form λ_M is called Liouville's 1-form. The 2-form $\omega_M = -d\lambda_M$ is known as the canonical symplectic structure of the cotangent bundle T^*M. It can be shown that ω_M defines a symplectic structure on T^*M.

3. Hamilton-Jacobi equation

- Let (M,ω) be a symplectic manifold and $H : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a real smooth function. Then, there exists a unique vector field over M, X_H, such that:

$$\flat_\omega(X_H) = dH \tag{8}$$

- Let Q be a smooth manifold and consider the cotangent bundle T^*Q with its canonical symplectic structure. Suppose that $H : T^*Q \longrightarrow \mathbb{R}$ is a Hamiltonian function. Then, the Hamilton-Jacobi equation can be written in an intrinsic form as:

$$H \circ dS = E \tag{9}$$

where $S : Q \longrightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(Q)$ and E is a constant.

- **Theorem** Let (T^*Q, ω_Q, X_H) be a Hamiltonian system and $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ a differentiable function. The following staments are equivalent:

1. If $\gamma : I \longrightarrow Q$ is an integral curve of the vector field X_H^S on Q which is defined as:

$$X_H^S(q) = (T_{dS(q)}\Pi_M)(X_H(dS(q))) \tag{10}$$

for each $q \in Q$, then, $dS \circ \gamma : I \longrightarrow T^*Q$ is an integral curve of X_H, i.e. a solution of the Hamilton equation for H.

2. S verifies the Hamilton-Jacobi equation: $H \circ dS = E$.

- **Application** The dynamics of a particle in the plane subject to a central potential.
$Q = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
The Hamiltonian function: $H(r,\theta,p_r,p_\theta) = \frac{1}{2m}\cdot\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + V(r)$
If $S : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ is a solution of Hamilton-Jacobi equation:

$$\left.\frac{\partial S}{\partial r}\right|_{(r,\theta)} = \sqrt{2m\big(E - V(r)\big) - \frac{\mu^2}{r^2}} \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial S}{\partial \theta}\right|_{(r,\theta)} = \mu \tag{11}$$

The integral curves of $X_H^S \in \mathfrak{X}(Q)$:

$$\dot r = \sqrt{\frac{2}{m}}\cdot\sqrt{\big(E - V(r)\big) - \frac{\mu^2}{2mr^2}} \quad \text{y} \quad \dot\theta = \frac{\mu}{mr^2} \tag{12}$$

Solutions of Hamilton equations:

$$t \longrightarrow \gamma(t) = (r(t),\, \theta(t),\, m\cdot\dot r(t),\, \mu) \tag{13}$$

References

[1] R. Abraham, J. E. Marsden: *Foundations of mechanics*. Second edition, revised and enlarged. With the assistance of T.Ratin and R.Cushman, Benjamin. Publishing Co., Inc, Advanced Book Program, Reading, Mass, 1978.

[2] V. I. Arnold: *Mathematical methods of classical mechanics*. Translated from Russian by K.Votmann and A.Weinstein, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlog, New York, 1989.

[3] M. de León, P. R. Rodriguez: *Methods of differential geometry in analytical mechanics*. North-Holland Mathematics Studies, 158. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989.