Un estudio de variantes del Método del Simplex en la resolución de Problemas de Flujos en Redes

A study of variants of the Simplex Method in the resolution of Network Flows Problems

Tania María Santana Guerra

Trabajo de Fin de Grado

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 12 de julio de 2016

Dr. D. **Carlos González Martín**, con N.I.F. 78.387.342-F catedrático de Estadística e Investigación Operativa adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"*Un estudio de variantes del Método del Simplex en la resolución de Problemas de Flujos en Redes.*"

ha sido realizada bajo su dirección por Dña. **Tania María Santana Guerra**, con N.I.F. 45.343.051-T.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 12 de julio de 2016

Agradecimientos

A esas personas que son un pilar de mi vida
y a mi tutor por su ayuda incondicional

Resumen

El objetivo de este trabajo es la aplicación de distintas variantes del Método del Simplex para la resolución de problemas de Flujo en Redes, concretamente al problema general de Flujo de Costo Mínimo.

Realizamos un estudio fundamentado de distintas variantes (Primal, Dual, Autodual,...) que son aplicadas a distintos casos particulares. Se completa el estudio con la ilustración del proceso de resolución sobre hojas de cálculo.

El trabajo se estructura en cuatro capítulos. En el capítulo 1 se hace un resumen de los conceptos y propiedades esenciales para la aplicación del Método del Simplex a problemas de Programación Lineal, tanto en su versión Primal como Dual.

En el capítulo 2 se hace un estudio del Método Simplex Primal para redes, combinando los casos sin capacidades y con capacidades.

El capítulo 3 se dedica al Método Simplex Dual para redes resolviendo problemas sin capacidades. Para el mismo tipo de problemas, acaba este capítulo con el Método Autodual Paramétrico.

El capítulo 4 se dedica a la resolución de distintos ejemplos usando los complementos de optimización disponibles en hojas de cálculo.

Palabras clave: Problemas de Flujos en Redes, Programación Lineal, Método Simplex Primal, Método Simplex Dual y Método Autodual Paramétrico

Abstract

The objective of this work is the application of different variants of the Simplex Method for the resolution of Network Flows problems, specifically to the general Minimum Cost Flow Problem.

We realize to a study grounded on different variants (Primal, Dual, Autodual,...) which are applied to different particular cases. The study is completed with the illustration of the resolution process within spreadsheets.

This paper is divided into four chapters. In the first chapter we have a summary of concepts and essential properties for the application of the Simplex Method to Linear Programming problems, in both versions, Primal and Dual.

In Chapter 2 we study the Primal Simplex Method for networks, combining cases with capacities and without capacities.

The chapter 3 is dedicated to the Dual Simplex Method for networks solving problems without capacities. For the same type of problems, this chapter ends with the Parametric Autodual Method.

The chapter 4 is dedicated to the resolution of different examples using the complements of optimization that are available in spreadsheets.

Keywords: *Network Flows problems, Linear Programming, Primal Simplex Method, Dual Simplex Method, Parametric Autodual Method*

Índice general

Capítulo 1

Problemas de Programación Lineal. Método del Simplex

Introducción. Ejemplos. Conceptos y propiedades básicos. El Método del Simplex. El Método Simplex Dual. Problemas con capacidades.

1.1. Introducción

En el reparto y/o distribución de recursos (en general, escasos) necesarios para el ordinario desarrollo de la vida de las personas y el deseado bienestar individual y colectivo, surgen multitud de situaciones conflictivas de las que derivan un gran número de problemas. Una cantidad significativa de estos problemas se pueden modelizar matemáticamente. Entre ellos son relevantes los problemas de optimización.

En este trabajo tenemos interés en los problemas de Optimización Lineal, más concretamente, en los de este tipo que se pueden catalogar como de *flujos sobre redes.*

El estudio de la Optimización Lineal (Programación Lineal) es la puerta de entrada al estudio de la Optimización (Programación Matemática) y a la Investigación Operativa. Para profundizar en la materia se pueden consultar libros como el de R. J. Vanderbei [1] o, también M. S. Bazaraa [2]

Con diversos antecedentes históricos, el inicio efectivo de este campo del conocimiento se sitúa en el verano de 1947, cuando George Bernard Dantzig (matemático y estadístico estadounidense de origen ucraniano) introdujo el Método del Simplex, el segundo algoritmo más utilizado del siglo XX y uno de los más relevantes hitos científicos de este siglo.

Los grafos y las redes son objetos conceptuales o físicos de uso habitual en Ciencias, Ingeniería, Gestión, Comunicaciones,etc. Un grafo está formado por un conjunto de puntos (vértices, nodos, nudos,...) y un conjunto de conexiones entre pares de estos puntos (aristas, arcos,...).

Las redes son grafos en los que los vértices y/o conexiones tienen asociadas magnitudes (disponibilidades, ofertas, demandas, costos, distancias, tiempos, capacidades, entre otras) y en los que circulan uno o más flujos.

Ejemplos de redes son las de abastecimiento (agua,luz), distribución (alimentos, servicios), comunicación (de carreteras, ferroviarias, marítimas, aéreas), informáticas, telemáticas, sociales,etc.

Frecuentemente, la exigencia de eficiencia en el funcionamiento de estas redes, motiva la aparición de problemas cuya modelización, en un número relevante de casos, se puede realizar en el ámbito de la Optimización (ver, por ejemplo, Ahuja, Magnanti, Orlin [3]).

En este contexto, centramos nuestro interés en algunos casos modelizables como problemas de Programación Lineal. Concretamente, en los Problemas de Flujos de Coste Mínimo.

El Algoritmo del Simplex, tanto en su versión Primal como Dual, se puede adaptar a la resolución de Problemas de Flujos de Costo Mínimo, de los cuales derivan problemas también importantes como el de Transporte, Asignación, Caminos Mínimos,...

1.2. Ejemplos

1.2.1. *Problema de producción (dietas, mochila múltiple,...)*

Para producir tres productos (A, B y C), se utilizan los recursos I y II. Los datos que se manejan aparecen en la tabla siguiente:

	A	B	C	Disponibilidad de recursos
Consumo de	1	-2	2	30
recursos por unidad	2	4	-2	40
Costo por unidad	4	2	2	

Se pide plantear el modelo de Programación Lineal para determinar los niveles de producción de A, B y C que, consumiendo todos los recursos, minimicen los costos globales.
Sean:

$$x_1 = \textit{cantidad de aparatos tipo A que se han de producir}$$

$$x_2 = \textit{cantidad de aparatos tipo B que se han de producir}$$

$$x_3 = \textit{cantidad de aparatos tipo C que se han de producir}$$

El problema se plantea como:

$$\min \;\; 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \;\; \text{(Función objetivo)}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 30 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

1.2.2. *Problema de transporte*

Tres almacenes ofertan un determinado producto que se consume en seis mercados. Las ofertas de los almacenes, las demandas de los mercados y los costos por unidad transportada entre almacenes y mercados aparecen en la siguiente tabla:

Almacén/Mercados	1	2	3	4	5	6	Ofertas
1	10	13	6	8	21	6	32
2	7	9	11	7	8	10	54
3	13	8	9	10	7	8	45
Demandas	23	14	39	20	21	17	

Determinar una solución de mínimo coste.
Sea:

$$x_{ij} = \textit{cantidad de producto que se transporta de } i \textit{ a } j$$

El correspondiente modelo es:

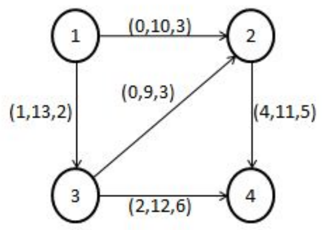
$$\begin{aligned} \min \;\; & 10x_{11} + 13x_{12} + 6x_{13} + 8x_{14} + 21x_{15} + 6x_{16} + 7x_{21} + 9x_{22} + 11x_{23} + \\ & 7x_{24} + 8x_{25} + 10x_{26} + 13x_{31} + 8x_{32} + 9x_{33} + 10x_{34} + 7x_{35} + 8x_{36} \end{aligned}$$

Sujeto a:

$$\begin{gathered} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{16} = 32 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} = 54 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} = 45 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 23 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 14 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 39 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 21 \\ x_{16} + x_{26} + x_{36} = 17 \\ x_{ij} \geq 0, \;\; i = 1, 2, 3, \;\; j = 1, ..., 6 \end{gathered}$$

1.2.3. *Problema de flujo de costo mínimo (con capacidades)*

Se deben trasportar 15 toneladas de materia prima desde la ciudad 1 hasta la ciudad 4. Las posibles rutas son:



Además, en este grafo se añade una terna con el flujo mínimo y máximo que soporta cada ruta, así como el costo por unidad. Se pretende minimizar el costo de transporte de estas 15 toneladas de materia prima. Sea:

$$x_{ij} = cantidad\ de\ flujo\ del\ nodo\ i\ al\ j$$

Función objetivo:

$$\min \quad 3x_{12} + 2x_{13} + 3x_{32} + 5x_{24} + 6x_{34}$$

Sujeto a:

$$\begin{gathered} x_{12} + x_{13} = 15 \\ -x_{12} - x_{32} + x_{24} = 0 \\ -x_{13} + x_{32} + x_{34} = 0 \\ -x_{24} - x_{34} = 15 \\ 0 \leq x_{12} \leq 10 \\ 1 \leq x_{13} \leq 13 \\ 0 \leq x_{32} \leq 9 \\ 4 \leq x_{24} \leq 11 \\ 2 \leq x_{34} \leq 12 \end{gathered}$$

Sobre el modelo general de este problema se trabajará a partir del capítulo 2 de este proyecto.

1.3. Conceptos y propiedades básicos

En los ejemplos anteriores aparecen modelos matemáticos del tipo:

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

o

$$\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

En un contexto definido por:

$$
\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
... \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \\
x_j \geq 0, \ l_j \leq x_j \leq u_j, \ \forall j
\end{array}
$$

Además de la igualdad, también podemos encontrar las desigualdades $\leq$ y $\geq$. En notación matricial y su forma estándar, el problema se escribe como:

$$
\begin{array}{c}
\min \ \ c^t x \\
s.a: \ \ Ax = b \\
x \geq 0
\end{array}
$$

siendo c un vector columna de R^n, b un vector columna de R^m, A una matriz de orden $m \times n$, de los coeficientes del conjunto de restricciones, cuyo rango es m. Denominamos S a la región factible, tal que, $S = \{x \in R^n / Ax = b, x \geq 0\}$.

Definición 3.1: Llamamos base a toda submatriz invertible de orden $m \times m$. Dada una base B, podemos expresar la matriz A como $A = (B\ N)$ donde N es una submatriz formada por las columnas que no son básicas, es decir, que no están en B. De la misma forma, podemos reescribir los vectores c y x, obteniéndose que:

$$
c^t = (c_B^t, \ c_N^t) \quad , \quad x^t = (x_B^t, \ x_N^t)
$$

Por tanto, el modelo estándar queda como sigue:

$$
\begin{array}{c}
\min \ c_B^t x_B + c_N^t x_N \\
\text{s.a: } Bx_B + Nx_N = b \\
x_B, x_N \geq 0
\end{array}
$$

Usamos B y N para referirnos indistintamente a las columnas correspondientes de A o a los índices de las mismas.

Definición 3.2: Una solución $x^t = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ es factible si pertenece a la región factible S.

Definición 3.3: La solución particular $x^t = (x_B^t, x_N^t)$, con $x_B = \overline{b} = B^{-1}b$ y $x_N = 0$, se denomina solución básica asociada a B.

Propiedad 3.1: El conjunto de soluciones básicas factibles es finito y, además, está acotado por el número combinatorio $\binom{n}{m}$, donde n es el número de variables del problema y m es el conjunto de restricciones.

Definición 3.4: La solución básica, se denomina "solución básica factible", si $x_B \geq 0$.

Definición 3.5: La solución básica factible se denomina "solución factible básica no degenerada" si todas las variables de x_B son positivas. Por el contrario, tendríamos una "solución factible básica degenerada" si alguna componente de x_B es nula.

Definición 3.6: Un conjunto $S \subseteq R^n$ se llama *cono* si $\forall y \in S$, se tiene que $\lambda y \in S$, $\forall \lambda \geq 0$. Si además S es convexo, se llama *cono convexo*.

Definición 3.7: Sea $S \subseteq R^n$ convexo. El cono característico de S es el conjunto:

$$car(S) = \{y / \exists x \in S / x + \lambda y \in S, \forall \lambda \geq 0\}$$

Si $y \in Car(S)$, y es una solución de S en algún $x \in S$.

Definición 3.8: Sea $S \subseteq R^n$ convexo. El vector $y \in car(S)$ se llama dirección extrema si no es posible expresar "y" como combinación lineal no negativa de otros vectores del cono característico.

Propiedad 3.2: El conjunto de direcciones extremas (DE) es finito, pues, $|DE| \leq (n-m)\binom{n}{m}$.

Propiedad 3.3: Cualquier punto de la región factible se puede expresar como la suma de una combinación lineal convexa de soluciones básicas factibles más una combinación lineal no negativa de direcciones extremas.

1.4. El Método del Simplex

1.4.1. *El Método Simplex Primal*

Este algoritmo se inicia con una solución básica factible primal y, salvo que se detecte la no acotación del problema, genera iterativamente soluciones básicas factibles primales mejores hasta obtener la optimalidad.

Consideremos el siguiente problema en su forma estándar:

$$\begin{array}{c} \min \;\; z = c^t x \\ s.a: \;\; Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

o equivalentemente:

$$\begin{array}{c} \min \; c_B^t x_B + c_N^t x_N \\ \text{s.a:} \;\; Bx_B + Nx_N = b \\ x_B, x_N \geq 0 \end{array}$$

Multiplicando la restricción por B^{-1} tenemos:

$$x_B + B^{-1} N x_N = \overline{b}$$

Despejamos x_B y la sustituimos en la primera restricción quedando:

$$z + 0x_B + (c_B^t B^{-1} N - c_N^t)x_N = c_B^t B^{-1} b$$

$$(c_N^t - c_B^t B^{-1} N)x_N - z = -c_B^t B^{-1} b$$

Y esto es equivalente a:

$$\bar{c}_N^t x_N - z = -c_B^t b$$

Por tanto, obtenemos la siguiente tabla del Simplex:

V.B	x_B^t	x_N^t	$-z$	Constantes
x_B	I	$B^{-1}N$	0	$\bar{b}$
$-z$	0	$\bar{c}_N^t$	1	$-c_B^t \bar{b}$

Notemos que $\bar{c}_N$ es el vector de costos relativos de las variables no básicas e $y^j = B^{-1} a^j$ para cualquier columna j de A.
Una vez obtenida la tabla del Simplex se debe realizar el siguiente test de optimalidad:

- Si $\bar{c}_j \geq 0, \ \forall j \in N$,entonces la solución presente es óptima. En caso de que algún $\bar{c}_j$ sea 0, pueden existir óptimos alternativos.
- Si $\bar{c}_j < 0$ para algún $j \in N$, y para la misma j, $y_{ij} \leq 0$, $\forall i = 1, ..., m$, entonces el problema es no acotado.
- Si no se da ninguno de los dos puntos anteriores, construimos una nueva tabla con otra solución básica factible que mejora el valor de la función objetivo. Para conseguir esto se debe seleccionar una variable no básica de la siguiente manera:

Se elige la columna s-ésima y la fila r-ésima, tales que: $s = min\{\bar{c}_j : \bar{c}_j < 0\}$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rs}} = min_{1 \leq i \leq m}\{\frac{\bar{b}_i}{y_{is}} : y_{is} > 0\}$$

El elemento pivote es y_{rs}. La nueva tabla se obtiene dividiendo por y_{rs} los coeficientes actuales de la fila r. De esta forma, el elemento pivote pasa a ser 1, y el resto de valores de la columna pasan a valer 0. Por tanto, la variable básica x_r es sustituida por x_s.

Una vez realizado este paso, repetimos el test de optimalidad hasta alcanzar la solución óptima o detectar la no acotación. Veamos un ejemplo:

Ilustramos lo anterior resolviendo el problema:

$$\begin{gathered}\min\ \ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3\\ s.a:\ \ 6x_2 + x_3 = 4\\ x_1 - x_2 = 2\\ x_i \geq 0\ \forall i\end{gathered}$$

Construimos la tabla inicial:

V.Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_3	0	6	1	0	4
x_1	1	-1	0	0	2
$-z$	4	-2	2	1	0

Si, en la tabla anterior, multiplicamos por dos la primera fila, se la sumamos a la segunda multiplicada por 4 y, lo restamos a la tercera fila, obtenemos:

V.Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_3	0	6	1	0	4
x_1	1	-1	0	0	2
$-z$	0	-10	0	1	-16

Notemos que, en la última fila, los coeficientes de las variables básicas, son nulos, mientras que los correspondientes a las variables no básicas son los costos relativos. Además, la tabla nos proporciona el valor de la función objetivo, cambiado de signo, para esa solución básica encontrada.

Por el test de optimalidad sabemos que la variable no básica x_2, con costo relativo -10, entra en la base sustituyendo a x_3. Por tanto, debemos obtener en la columna x_2 los valores que en la tabla anterior están a la columna asociada a x_3, resultando la siguiente tabla:

V.Básicas	x_1	x_2	x_3	$-z$	Constantes
x_2	0	1	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{8}{3}$
$-z$	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{28}{3}$

Como todos los costos relativos de las variables no básicas son mayores o iguales que 0, la solución es óptima.

1.4.2. Búsqueda de una solución básica factible primal inicial

Una forma sencilla de obtener una solución básica factible inicial consiste en añadir variables artificiales, tantas como sean necesarias para que exista una variable básica en cada ecuación. Estas variables artificiales deben, obviamente, ser eliminadas (si es posible), sobre el correspondiente problema modificado, usando alguno de los dos métodos siguientes: *Método de Penalización y Método de las Dos Fases.*

El **Método de Penalización** trabaja con el problema modificado en el que las variables artificiales son penalizadas con costos iguales a M (constante suficientemente grande) o a $-M$, dependiento de que el problema inicial sea de mínimo o máximo, respectivamente. Esta forma de actuar, implica que, si es posible, las variables artificiales tenderán a convertirse en no básicas, con valores iguales a cero. Cuando esto último no es posible, se detecta la no factibilidad del problema inicial.

Por otro lado, **el Método de las Dos Fases**, como su propio nombre indica está compuesto de dos fases. Una primera, en la que se trata de eliminar las variables artificiales añadidas, convirtiendolas en variables no básicas, y para ello, toma como función objetivo el mínimo de la suma de esas variables. Una vez conseguido que la suma sea cero, obtenemos una solución básica factible con la que se inicia la *Fase II*. Aquí se incorpora la función objetivo del problema inicial y se eliminan las variables artificiales. Si la *Fase I* acaba con valor objetivo mayor que cero, el problema inicial es no factible.

1.5. El Método Simplex Dual

Dado el siguiente problema:

$$\begin{array}{rc} & \min \ c^t x \\ s.a: & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (P)$$

Podemos obtener su problema dual:

$$\begin{array}{rc} & \max \ b^t y \\ s.a: & A^t y \leq c \end{array} \quad (D)$$

debido a la relación existente entre los elementos de ambos, pues teniendo definido uno de ellos, se puede deducir el otro.

Además, si contamos con una solución factible de (P) tendríamos una cota superior sobre el problema (D). Por otro lado, una solución factible de (D) aporta una cota inferior del primero. También, si hallamos dos soluciones $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tales que:

$$c^t\overline{x} = b^t\overline{y}$$

habremos encontrado una solución óptima de sus respectivos problemas. Por el *Teorema de la Dualidad*, si (P) tiene solución óptima, (D) tiene solución óptima y los valores óptimos coinciden. Lo recíproco también es cierto. Para ampliar conocimientos sobre la dualidad ver Hillier, Lieberman [4].

1.5.1. *El Método Simplex Dual*

Este algoritmo se inicia con una solución básica factible dual y, salvo que se detecte la no factibilidad del problema, genera iterativamente soluciones básicas factibles duales mejores hasta obtener la optimalidad y, por tanto, una solución factible primal y factible dual.

Dado un problema de Programación Lineal estándar de mínimo, con n variables y m restricciones, y una descomposición de $A = (B\ N)$, sabemos que la correspondiente solución básica es factible dual si $\bar{c}_j \geq 0,\ \forall j \in N$.

Ejemplo:

$$\begin{gathered}\min\ \ 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ s.a:\ -4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = -20 \\ -2x_1 + 4x_2 - 4x_3 + x_5 = -16 \\ x_i \geq 0\ \forall i\end{gathered}$$

Cuya tabla es:

V.Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Constantes
x_4	-4	-6	2	1	0	0	-20
x_5	-2	4	-4	0	1	0	-16
$-z$	5	12	4	0	0	1	0

Como los costos relativos de las variables no básicas son mayores o iguales que cero, la solución básica es factible dual. Pero no es factible primal, ya que las variables básicas toman valores negativos.

La actuación del Método Simplex Dual se hace de la forma siguiente: elegimos la variable x_4 "que toma el valor más negativo" como candidata a salir de la base. El siguiente paso, elegir la columna pivote, se debe realizar sobre un coeficiente negativo de la fila actualizada a la fila asociada a x_4.

En este caso, las columnas candidatas son las de la variable x_1 y x_2. Si en la fila actualizada de la variable que tiene que dejar de ser básica no hay ningún coeficiente negativo, el problema planteado es no factible.

Para preservar la factibilidad dual de la siguiente solución básica, la variable que debe sustituir a x_4 en la base es la que corresponde al cálculo del siguiente:

$$max\left\{\frac{5}{-4}, \frac{12}{-6}\right\} = -\frac{5}{4}$$

Por tanto, x_1 entra en la base y, transformamos la columna x_1 en la columna que antes tenía x_4, obteniendo lo siguiente:

V.Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Constantes
x_1	1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	5
x_5	0	7	-5	$-\frac{1}{2}$	1	0	-6
$-z$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1	-25

Repitiendo el mismo argumento anterior, x_5 debe abandonar la base. Para saber qué variable la sustituye calculamos:

$$max\left\{\frac{\frac{13}{2}}{-5}, \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{1}{2}}\right\} = -\frac{13}{10}$$

Luego x_3 entra en la base. La nueva tabla es:

V.Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	Constantes
x_1	1	$\frac{4}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{28}{5}$
x_3	0	$-\frac{7}{5}$	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
$-z$	0	$\frac{68}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{13}{10}$	1	$-\frac{164}{5}$

Esta solución básica es óptima.

1.6. Problemas con capacidades

A menudo, en el mundo real, las variables que se emplean poséen cotas. En general, existe una cota inferior y una superior para los valores que toman (al final del apartado dos del presente capítulo se muestra un ejemplo de cómo podría ser un problema de este tipo).

Por tanto, la formulación del modelo estándar queda expresada como:

$$\begin{array}{c} \min \;\; c^t x \\ s.a: \;\; Ax = b \\ l \leq x \leq u \end{array}$$

donde "l" es la cota inferior de la variable x, y "u" es la cota superior. El resto de componentes se definen de igual forma que lo expuesto anteriormente para problemas sin variables acotadas.

En este tipo de problemas, $\overline{x}$ será una solución básica si existe una base B para la matriz A, tal que $A = (B\ N_1\ N_2)$, de forma que $\overline{x}_{N_1} = l_{N_1}$ (están en su cota inferior), $\overline{x}_{N_2} = u_{N_2}$ (están en su cota superior) y $\overline{x}_B = \overline{b} - B^{-1}N_1 l_{N_1} - B^{-1}N_2 u_{N_2} = \hat{b}$.

Además, una solución básica será factible primal si, $l_B \leq \overline{x}_B \leq u_B$. Por el contrario, será una solución básica factible dual si $\overline{c}_{N_1} \geq 0$ y $\overline{c}_{N_2} \leq 0$.

Los problemas con capacidades tienen la propiedad de que, si existe, el óptimo se alcanza en una solución básica factible primal.

Al igual, que en los problemas anteriores, se debe cumplir una condición de optimalidad. Si partimos del valor de la función objetivo de una solución básica factible primal, es decir, partimos de:

$$c^t\overline{x} = c_B^t\overline{x}_B + c_{N_1}^t\overline{x}_{N_1} + c_{N_2}^t\overline{x}_{N_2}$$

tras una serie de cambios, al sustituir $\overline{x}_B$, $\overline{x}_{N_1}$ y $\overline{x}_{N_2}$ por su valor correspondiente, obtenemos:

$$c_B^t\hat{b} + \overline{c}_{N_1}^t l_{N_1} + \overline{c}_{N_2}^t u_{N_2}$$

Para cualquier solución factible x se tiene que:

$$x_B = \overline{b} - B^{-1}N_1x_{N_1} - B^{-1}N_2x_{N_2};\ x_{N_1} = l_{N_1} + y_{N_1};$$

$$x_{N_2} = u_{N_2} - y_{N_2}\ ,\ y_{N_1}, y_{N_2} \geq 0.$$

Sustituyendo:

$$c^tx = c^t\overline{x} + \overline{c}_{N_1}^t y_{N_1} - \overline{c}_{N_2}^t y_{N_2}$$

Por tanto, $\overline{x}$ es óptima si $\overline{c}_{N_1} \geq 0$ y $\overline{c}_{N_2} \leq 0$.

1.6.1. *El Método Simplex Primal para variables acotadas*

Para finalizar el capítulo, introduciremos el algoritmo del Simplex para variables acotadas, así como un ejemplo, a modo de ilustración.

El método parte de una solución básica factible inicial cuya descomposición asociada de la matriz A es $(B\ N_1\ N_2)$.

Mientras no se dectecte la optimalidad o la no acotación, se debe calcular el índice s donde:

$$s = argmin\{\overline{c}_j\ j \in N_1, \overline{c}_j < 0\} \cup \{-\overline{c}_j\ j \in N_2, \overline{c}_j > 0\}$$

Si $s \in N_1$, x_s debe incrementar su valor actual. Si $s \in N_2$, x_s debe disminuir su valor actual. El correspondiente trabajo (respetando también las cotas asociadas a las diferentes variables) conduce a detectar la no acotación, a la optimalidad o a una nueva solución básica mejor que la anterior, hasta conseguir una solución óptima.

<u>Nota:</u> Para los problemas de máximo, s se define como:

$$s = argmax\{\overline{c}_j\ j \in N_1, \overline{c}_j > 0\} \cup \{\overline{c}_j\ j \in N_2, \overline{c}_j < 0\}$$

. Ejemplo:

$$\begin{gathered}\min \quad -6x_1 + 4x_2 + x_3 \\ s.a: \; -2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ 1 \le x_1 \le 6,\ 0 \le x_2 \le 5,\ 1 \le x_3 \le 4,\ 0 \le x_4,\ 0 \le x_5\end{gathered}$$

La primera tabla del Simplex es:

	1	5	1	-	-			
V.Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	C.T	Constantes
x_4	-2	2	-1	1	0	0	8	1
x_5	2	-1	1	0	1	0	6	8
$-z$	-6	4	1	0	0	1	0	-15

A la tabla anterior se le ha añadido lo siguiente: la primera fila, con las cotas de las correspondientes variables no básicas y la última columna que contiene los nuevos valores de las constantes. La columna anterior, se convierte en una columna de trabajo. Para este ejemplo, consideremos $B = \{4,5\}$, $N_1 = \{1,3\}$ y $N_2 = \{2\}$.

Como $s = 1 \in N_1$, el valor de x_s debe ser incrementado en $\lambda \ge 0$ ($x_1 = 1 + \lambda$). A partir de la tabla anterior, observamos que x_4 debería valer $1 + 2\lambda \ge 0$ y $x_5 = 8 - 2\lambda \ge 0$. Además, $x_1 = 1 + \lambda \le 6$. Estas condiciones permiten obtener, respectivamente, $\lambda_2 = \infty$, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_3 = 5$. Como el menor de los λ es λ_1, hacemos $\overline{\lambda} = \lambda_1 = 4$. Esto quiere decir que la variable x_1 entra en la base sustituyendo a x_5 y ésta, pasa a no básica en su cota inferior.

Actualizando la descomposición de A obtenemos que: $B = \{1,4\}$, $N_1 = \{3{,}5\}$ y $N_2 = \{2\}$.
Ahora la tabla es:

	-	5	1	-	0			
V.Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	C.T	Constantes
x_4	0	1	0	1	1	0	14	9
x_1	1	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3	5
$-z$	0	1	4	0	3	1	18	9

Ahora $s = 2$. Razonando de forma similar a como lo hicimos anteriormente, $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = \infty$, $\lambda_3 = 5$. Como el menor de los λ es λ_3, hacemos $\overline{\lambda} = \lambda_3 = 5$. Por tanto, la variable x_2 pasa a su cota inferior. Actualizando, de nuevo, la descomposición: $B = \{1,4\}$, $N_1 = \{2,3,5\}$ y $N_2 = \{\emptyset\}$.
Ahora la tabla es:

	-	0	1	-	0			
V.Básicas	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$-z$	C.T	Constantes
x_4	0	1	0	1	1	0	14	14
x_1	1	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3	$\frac{5}{2}$
$-z$	0	1	4	0	3	1	18	14

Tenemos que esta tabla es óptima.

La búsqueda de una solución básica inicial se realiza, en este caso, de forma similar a lo comentado anteriormente.

Capítulo 2

Problemas de flujos de costo mínimo. El Método del Simplex para redes

Introducción. Ejemplo. Conceptos y propiedades básicos. El Método del Simplex para redes.

2.1. Introducción

Sea la red conexa (V, A), donde V es el conjunto de n vértices y A es el conjunto de m arcos, los cuales conectan vértices de V. Supongamos que cada arco tiene una disponibilidad $b_i, \forall i \in V$, y además, $\forall (i,j) \in A$, existe un coste por unidad de flujo, una capacidad mínima y una máxima, respectivamente, c_{ij}, l_{ij} y u_{ij}. Si x_{ij} es la cantidad de flujo que ha de circular por (i,j) y, para cada vértice, el flujo que sale es igual al que llega más la propia disponibilidad (conservación del flujo), el problema de determinar la cantidad de flujo que debe circular por cada arco de la red, de manera que se minimicen los costos globales (problema de flujo de coste mínimo), se formaliza como:

$$min \sum_{i \in V} \sum_{j \in Suc(i)} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.a: \sum_{j \in Suc(i)} x_{ij} - \sum_{j \in Pred(i)} x_{ji} = b_i \ \forall i \in V \quad (PFCM)$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \ \ \forall (i,j) \in A$$

Tengamos en cuenta que

$$Suc(i) = \{j \in V/(i,j) \in A\}, \ \ Pred(i) = \{j \in V/(j,i) \in A\}$$

El sistema $\sum_{j\in Suc(i)} x_{ij} - \sum_{j\in Pred(i)} x_{ji} = b_i \ \forall i \in V$ representa las ecuaciones de *conservación del flujo*, que hacen que estemos trabajando en una *red normalizada*.

El dual de este problema es:

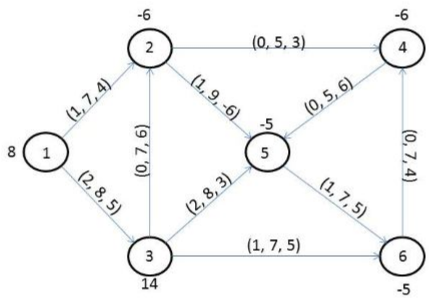
$$\begin{aligned} & max \sum_{i\in V} b_i y_i + \sum_{(i,j)\in A} l_{ij} w'_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} u_{ij} w''_{ij} \\ s.a:\ & y_i - y_j + w'_{ij} - w''_{ij} \leq c_{ij} \ \ \forall (i,j) \in A \quad (DPFCM) \\ & w'_{ij}, w''_{ij} \geq 0 \ \ \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

Como $\sum_{i\in V}\sum_{j\in Suc(i)} x_{ij}$ y $\sum_{i\in V}\sum_{j\in Pred(i)} x_{ji}$ suman la misma cantidad (la suma de todos los flujos que circulan por los arcos de la red), a partir del problema (PFCM), como $\sum_{i\in V}\sum_{j\in Suc(i)} x_{ij} = \sum_{i\in V}\sum_{j\in Pred(i)} x_{ji} + \sum_{i\in V} b_i$, está claro que debe ocurrir que $\sum_{i\in V} b_i = 0$. Esta consecuencia se denomina *condición de consistencia*.

2.2. Ejemplo

$$\begin{gathered} min\ 4x_{12} + 5x_{13} + 6x_{32} + 3x_{24} - 6x_{25} + 3x_{35} + 5x_{36} + 6x_{45} + 5x_{56} + 4x_{64} \\ s.a: x_{12} + x_{13} = 8 \\ -x_{12} - x_{32} + x_{24} + x_{25} = -6 \\ -x_{13} + x_{32} + x_{35} + x_{36} = 14 \\ -x_{24} + x_{45} - x_{64} = -6 \\ -x_{25} - x_{35} - x_{45} + x_{56} = -5 \\ -x_{36} - x_{56} + x_{64} = -5 \\ 1 \leq x_{12} \leq 7 \ \ , \ \ 2 \leq x_{13} \leq 8 \\ 0 \leq x_{32} \leq 7 \ \ , \ \ 0 \leq x_{24} \leq 5 \\ 1 \leq x_{25} \leq 9 \ \ , \ \ 2 \leq x_{35} \leq 8 \\ 1 \leq x_{36} \leq 7 \ \ , \ \ 0 \leq x_{45} \leq 5 \\ 1 \leq x_{56} \leq 7 \ \ , \ \ 0 \leq x_{64} \leq 7 \end{gathered}$$

Asociando a cada vértice su disponibilidad y a cada arco la terna (l_{ij}, u_{ij}, c_{ij}), la correspondiente red es:



Con una simple comprobación, se confirma que se da la condición de consistencia. El correspondiente problema dual resulta:

$$max\ 8y_1 - 6y_2 + 14y_3 - 6y_4 - 5y_5 - 5y_6 + w'_{12} + 2w'_{13} + w'_{25} + 2w'_{35} + w'_{36} + w'_{56} - 7w''_{12} - 8w''_{13} - 7w''_{32} - 5w''_{24} - 9w''_{25} - 8w''_{35} - 7w''_{36} - 5w''_{45} - 7w''_{56} - 7w''_{64}$$

$$\begin{gathered}
s.a: y_1 - y_2 + w'_{12} - w''_{12} \leq 4 \\
y_1 - y_3 + w'_{13} - w''_{13} \leq 5 \\
y_3 - y_2 + w'_{32} - w''_{32} \leq 6 \\
y_2 - y_4 + w'_{24} - w''_{24} \leq 3 \\
y_2 - y_5 + w'_{25} - w''_{25} \leq -6 \\
y_3 - y_5 + w'_{35} - w''_{35} \leq 3 \\
y_3 - y_6 + w'_{36} - w''_{36} \leq 5 \\
y_4 - y_5 + w'_{45} - w''_{45} \leq 6 \\
y_5 - y_6 + w'_{56} - w''_{56} \leq 5 \\
y_6 - y_4 + w'_{64} - w''_{64} \leq 4 \\
w'_{ij}, w''_{ij} \geq 0
\end{gathered}$$

De este modelo general derivan problemas importantes como el problema de la ruta más corta, el problema del transporte (formulado en el capítulo anterior), el problema de asignación, el problema de flujo máximo,...

Los problemas de flujo de coste mínimo son un caso particular de los problemas de Programación Lineal con variables acotadas. Se pueden expresar como:

$$\begin{gathered}
min\ c^t x \\
Mx = b \\
l \leq x \leq u
\end{gathered}$$

donde M es la matriz de incidencia, vértice-arco. Los componentes de M únicamente pueden tomar tres valores posibles 1, -1 y 0. Para los dos primeros casos, el signo dependerá de la dirección del arco entre los nodos i y j. Toma el valor 0 cuando hay ausencia de arco. Por ejemplo, para el problema anterior, la matriz de incidencia es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es totalmente unimodular. Esta propiedad hace posible que la aplicación del Método del Simplex genere soluciones básicas enteras cuando las disponibilidades y las capacidades son números enteros.

2.3. Conceptos y propiedades básicos

Para una red (V, A), conexa, con n vértices y m arcos.

Definición 3.1: Un *ciclo* es una cadena que empieza y acaba en el mismo nodo. Si no existe ninguno, se dice que la red es acíclica.

Definición 3.2: Un *árbol* es un grafo conexo y sin ciclos.

Definición 3.3: Un *árbol generador*, T, es un árbol que conecta todos los vértices de la red.

Propiedad 3.1: El rango de M es $n-1$. Para comprobar esto observemos que, por un lado, tenemos que, por la condición de consistencia, el $rang(M) \leq n-1$ y, por otro lado, de cualquier árbol generador de la red, T, se tiene que $rang(M_T) = n-1$, donde M_T es la submatriz de M que corresponde a T.

Propiedad 3.2: Existe una relación biunívoca entre árboles generadores y soluciones básicas.

Definición 3.4: Decimos que una solución $x = (B, N_1, N_2)$ es una solución básica si cumple que $x_{N_1} = l_{N_1}$ y $x_{N_2} = u_{N_2}$.

Definición 3.5: Decimos que una solución $x = (B, N_1, N_2)$ es una solución básica factible primal si es una solución básica y, además, $l_B \leq x_B \leq u_B$.

Definición 3.6: Una solución es básica factible dual, para el caso de mínimo, si $\overline{c}_{N_1} \geq 0$ y $\overline{c}_{N_2} \leq 0$.

2.4. El Método del Simplex para redes

El Método Simplex Primal para redes parte de una solución básica factible primal. Mientras no se verifique la condición de optimalidad o la no acotación, genera una solución básica factible primal mejor que la anterior.

Una vez obtenida una solución básica factible primal, debemos saber si ésta es óptima o no. Para ello realizamos el test de optimalidad, el cual recurre al problema dual resolviendo:

$$y_i - y_j = c_{ij} \;\; \forall (i,j) \in A_T$$

A_T es el conjunto de arcos de la red que forman el árbol T.

De esta forma, obtenemos los denominados potenciales asociados a la solución básica factible primal actual. Posteriormente, haciendo uso de estos valores obtenemos los costos relativos:

$$\bar{c}_{ij} = c_{ij} - (y_i - y_j) \;\; \forall (i,j) \in A$$

Si los costos relativos de los arcos no básicos verifican la condición de optimalidad (factibilidad dual) hemos encontrado una solución óptima. En caso contrario, se debe escoger un arco, $(p,q) \in N_1$, con costo relativo negativo, o un $(p,q) \in N_2$, con costo relativo positivo, para aumentar su flujo en λ unidades, si (p,q) está en su cota inferior, es decir, $(p,q) \in N_1$ o, disminuir en λ unidades, si (p,q) está en su cota superior, $(p,q) \in N_2$.

La consecuencia de considerar este arco, provoca la formación de un ciclo en el grafo. Además, al aumentar o disminuir el flujo una cierta cantidad λ, ésta afecta a los arcos adyacentes de (p,q). Por tanto, debemos escoger un λ de tal forma que sea lo más grande posible, asegurando que el resto de flujos estén entre las correspondientes cotas.

Al realizar esta operación, nos encontramos con que al menos uno de los flujos de los arcos adyacentes se hace igual a una de sus cotas. Tomando el arco modificado en λ unidades y eliminando el arco citado al final del párrafo anterior, obtenemos una nueva solución básica factible.

2.4.1. El Método Simplex Primal para redes

La Programación Lineal establece que la solución óptima del problema PFCM se alcanza, en su caso, en una solución básica. La búsqueda de una de estas soluciones básicas (cuyo número es finito) se puede acometer a través del siguiente esquema para problemas de mínimo con capacidades:

<u>Inicio</u> Encontrar una solución básica factible inicial, es decir, un árbol generador inicial.

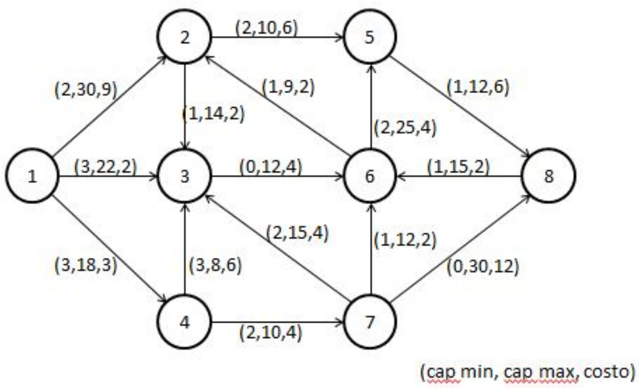
<u>Mientras</u> no se detecte la no acotación, la no factibilidad o la no optimalidad, se elige un arco para formar parte de la base actual y se calcula el flujo máximo que puede pasar por ese arco. Por último, según se especifica anteriormente, se elimina uno de los arcos que componen el ciclo.

Ejemplo:

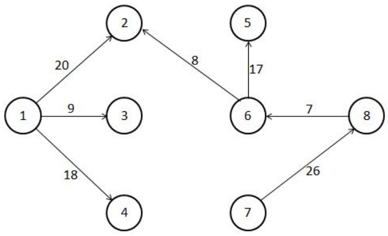
$$min\ 9x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 2x_{23} + 6x_{25} + 4x_{36} + 6x_{43} + 4x_{47} + 6x_{58} + 2x_{62} + 4x_{65} + 4x_{73} + 2x_{76} + 12x_{78} + 2x_{86}$$

$$s.a: x_{12} + x_{13} + x_{14} = 47$$
$$-x_{12} + x_{32} - x_{62} + x_{25} = -25$$
$$-x_{13} - x_{23} + x_{36} - x_{37} - x_{34} = -15$$
$$-x_{14} + x_{43} + x_{47} = -13$$
$$-x_{25} - x_{65} + x_{58} = -18$$
$$-x_{36} + x_{62} + x_{65} - x_{86} = 17$$
$$-x_{47} + x_{73} + x_{76} + x_{78} = 27$$
$$-x_{58} + x_{86} - x_{78} = -20$$
$$2 \leq x_{12} \leq 30 \quad , \quad 3 \leq x_{13} \leq 22$$
$$3 \leq x_{14} \leq 18 \quad , \quad 1 \leq x_{23} \leq 14$$
$$3 \leq x_{43} \leq 8 \quad , \quad 2 \leq x_{25} \leq 10$$
$$1 \leq x_{62} \leq 9 \quad , \quad 0 \leq x_{36} \leq 12$$
$$2 \leq x_{73} \leq 15 \quad , \quad 2 \leq x_{47} \leq 10$$
$$2 \leq x_{65} \leq 25 \quad , \quad 1 \leq x_{76} \leq 12$$
$$1 \leq x_{58} \leq 12 \quad , \quad 1 \leq x_{86} \leq 15$$
$$0 \leq x_{78} \leq 30$$

Cuya red es:



Partimos de la siguiente solución básica factible inicial:



Donde $B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(6,2),(6,5),(8,6),(7,8)\}$,
$N_1 = \{(2,3),(4,3),(2,5),(3,6),(7,3),(7,4),(7,6),(5,8)\}$ $N_2 = \{\emptyset\}$
Calculamos los potenciales de cada nodo, fijando $y_1 = 0$ resultando:

$$y_2 = -9 \; y_3 = -2 \; y_4 = -3 \; y_5 = -11 \; y_6 = -7 \; y_7 = 7 \; y_8 = -5$$

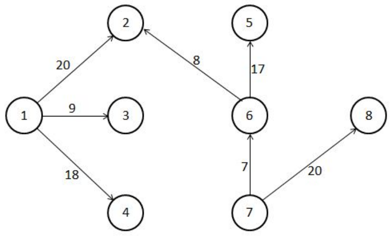
Ahora, con ayuda de estos resultados, calculamos los costos relativos de los arcos no básicos:

$$\overline{c}_{23} = 2-(-9+2) = 9 \quad \overline{c}_{43} = 6-(-3+2) = 7 \quad \overline{c}_{25} = 6-(-9+11) = 4$$

$$\overline{c}_{36} = 4-(-2+7) = -1 \quad \overline{c}_{73} = 4-(7+2) = -5 \quad \overline{c}_{47} = 4-(-3-7) = 14$$

$$\overline{c}_{58} = 6-(-11+5) = 12 \quad \overline{c}_{76} = 2-(7+7) = -12$$

Dado que el costo relativo más negativo es el del arco $(7,6)$, este debe aumentar su flujo en $\lambda = 6$ unidades y formar parte de la solución básica, haciendo que el arco $(8,6)$ pase a su cota inferior y abandone la base. Es decir,



Ahora $B = \{(1,2),(1,3),(1,4),(6,2),(6,5),(7,6),(7,8)\}$,
$N_1 = \{(2,3),(4,3),(2,5),(3,6),(7,3),(7,4),(5,8),(8,6)\}$ $N_2 = \{\emptyset\}$
Volvemos a calcular los potenciales y los costos relativos obteniendo:

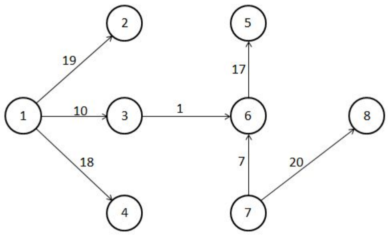
$$y_1 = 0 \; y_2 = -9 \; y_3 = -2 \; y_4 = -3 \; y_5 = -11 \; y_6 = -7 \; y_7 = -5 \; y_8 = -17$$

$$\overline{c}_{23} = 2-(-9+2) = 9 \quad \overline{c}_{43} = 6-(-3+2) = 7 \quad \overline{c}_{25} = 6-(-9+11) = 4$$

$$\overline{c}_{36} = 4-(-2+7) = -1 \quad \overline{c}_{47} = 4-(-3+5) = 2 \quad \overline{c}_{73} = 4-(-5+2) = 7$$

$$\overline{c}_{58} = 6 - (-11 + 17) = 0 \quad \overline{c}_{86} = 2 - (-17 + 7) = 12$$

En esta iteración el arco $(3, 6)$ quiere ser básico. Para ello aumentamos su flujo en $\lambda = 1$ unidad, lo que provoca que el arco $(6, 2)$ deje de ser básico. La nueva solución básica es:



Ahora $B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 6), (6, 5), (7, 6), (7, 8)\}$,
$N_1 = \{(2, 3), (4, 3), (2, 5), (7, 3), (7, 4), (5, 8), (8, 6)\}$ $N_2 = \{(6, 2)\}$
Repetimos el proceso anterior para obtener los potenciales y los costos relativos:

$$y_1 = 0 \; y_2 = -9 \; y_3 = -2 \; y_4 = -3 \; y_5 = -10 \; y_6 = -6 \; y_7 = -4 \; y_8 = -16$$

$$\overline{c}_{23} = 2 - (-9 + 2) = 9 \quad \overline{c}_{43} = 6 - (-3 + 2) = 7 \quad \overline{c}_{62} = 2 - (-6 + 9) = -1$$

$$\overline{c}_{36} = 6 - (-9 + 10) = 5 \quad \overline{c}_{73} = 4 - (-4 + 2) = 6 \quad \overline{c}_{47} = 4 - (-3 + 4) = 3$$

$$\overline{c}_{58} = 6 - (-10 + 16) = 0 \quad \overline{c}_{86} = 2 - (-16 + 6) = 12$$

Como se verifica la condición de optimalidad, se encuentra la solución óptima del problema.

Capítulo 3

El Método Simplex Dual. El Método Auto-Dual Paramético

3.1. El Método Simplex Dual

Este método parte de una solución básica factible dual, y en cada iteración, mientras no se detecte la no factibilidad, se encuentra una solución mejor que la anterior, hasta encontrar la solución óptima, es decir, factible primal y factible dual.

3.1.1. El Método Simplex Dual para PFCM

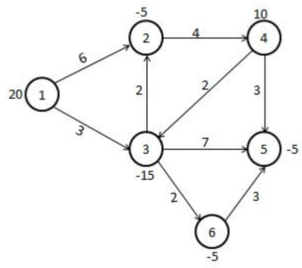
Inicio Comenzamos el método con un árbol generador factible dual.

Mientras no se detecte la no factibilidad o la optimalidad, elegir un arco básico con flujo negativo. La no consideración de este arco determina dos componentes conexas en el árbol básico actual. Se elige, para entrar en la base, el arco no básico que sea arco puente entre esas dos componentes conexas, con sentido distinto del arco básico mencionado más arriba, y con menor costo relativo.

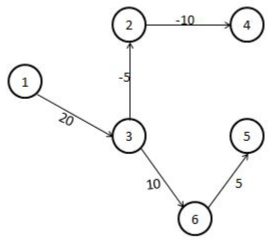
Ejemplo para problemas sin capacidades. Resolver el siguiente problema de mínimo:

$$\min \;\; 6x_{12} + 3x_{13} + 2x_{32} + 4x_{24} + 2x_{43} + 3x_{45} + 7x_{35} + 2x_{36} + 3x_{65}$$
$$s.a: \;\; x_{12} + x_{13} = 20$$
$$-x_{12} - x_{32} + x_{24} = -5$$
$$-x_{13} + x_{32} - x_{43} + x_{35} + x_{36} = -15$$
$$-x_{24} + x_{43} + x_{45} = 10$$
$$-x_{35} - x_{45} - x_{65} = -5$$
$$-x_{36} + x_{65} = -5$$
$$x_{ij} \geq 0$$

Para esta red, las disponibilidades y los costos asociados se muestran en la siguiente figura:



Partimos de la siguiente solución básica inicial:



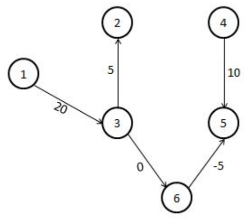
Calculamos los potenciales de cada nodo (inicializando $y_1 = 0$) y los costos relativos de los arcos no básicos obteniéndose:

$$y_1 = 0,\ y_2 = -5,\ y_3 = -3;\ y_4 = -9,\ y_5 = -8,\ y_6 = -5,$$

$$\bar{c}_{12} = 6 - (0 + 5) = 1,\ \bar{c}_{43} = 2 - (-9 + 3) = 8,$$

$$\bar{c}_{45} = 3 - (-9 + 8) = 4,\ \bar{c}_{35} = 7 - (-3 + 8) = 2$$

El arco $(2, 4)$ es candidato a dejar el árbol generador debido a que su flujo es negativo. Como arcos a entrar en la base y, por tanto, con sentidos distintos al que sale de ella, tenemos los arcos $(4, 3)$ y $(4, 5)$, cuyos costos relativos son, respectivamente, 8 y 4. Debemos escoger el de menor costo, es decir, el arco $(4, 5)$. La nueva solución básica es:



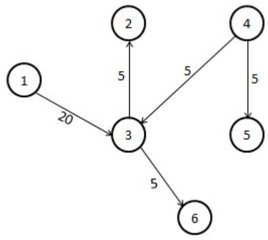
Volvemos a calcular los potenciales y los costos relativos, resultando:

$$y_1 = 0,\ y_2 = -5,\ y_3 = -3;\ y_4 = -5,\ y_5 = -8,\ y_6 = -5,$$

$$\bar{c}_{12} = 6 - (0 + 5) = 1,\ \bar{c}_{24} = 4 - (-5 + 5) = 4,$$

$$\bar{c}_{43} = 2 - (-5 + 3) = 4,\ \bar{c}_{35} = 7 - (-3 + 8) = 2$$

Razonando de forma análoga a la iteración anterior, el arco $(6, 5)$ deja de ser básico y, en su lugar, entra el arco $(4, 3)$ (puesto que es el único arco con sentido distinto al $(6, 5)$) y su costo relativo es 4.
La nueva solución básica es:



Los nuevos potenciales y costos relativos son:

$$y_1 = 0,\ y_2 = -5,\ y_3 = -3;\ y_4 = -1,\ y_5 = -4,\ y_6 = -5,$$

$$\bar{c}_{12} = 6 - (0 + 5) = 1,\ \bar{c}_{24} = 4 - (-5 + 1) = 8,$$

$$\bar{c}_{35} = 7 - (-3 + 4) = 6,\ \bar{c}_{65} = 3 - (-5 + 4) = 4$$

Esta solución ya es óptima.

3.2. El Método Auto-Dual paramétrico ([1])

Este método se emplea cuando la solución básica inicial no es factible primal ni factible dual. Se recurre a la transformación del problema "perturbando" el flujo que circula por los arcos y los correspondientes costos para forzar la optimalidad. Para el caso de mínimo, dicha perturbación consiste en aumentar una cierta cantidad $\mu \geq 0$. La finalidad del método es conseguir eliminar esa perturbación y volver al problema inicial ($\mu = 0$). Para ello combina iteraciones del Método Simplex Primal y Simplex Dual, ambos ya explicados, hasta llegar a la solución óptima.

3.2.1. El Método Auto-Dual

El método comienza con una solución básica, es decir, un árbol generador. Si el árbol básico no es óptimo, entonces no es factible primal o no es factible dual o no es ni factible primal ni dual.

Para forzar la optimalidad, se perturban costos y flujos negativos, sumando una cantidad $\mu \geq 0$ (caso de mínimo).

Como consecuencia de esta acción, se obtiene un intervalo $[\mu_{min}, \mu_{max}]$ en el que el árbol actual es óptimo. Si $\mu < \mu_{min}$, se ejecuta una iteración del Simplex Primal o Simplex Dual, según corresponda.

El método finaliza al encontrar, en su caso, un intervalo en el que $0 \in [\mu_{min}, \mu_{max}]$, ya que, para $\mu = 0$ se tiene el problema inicial.

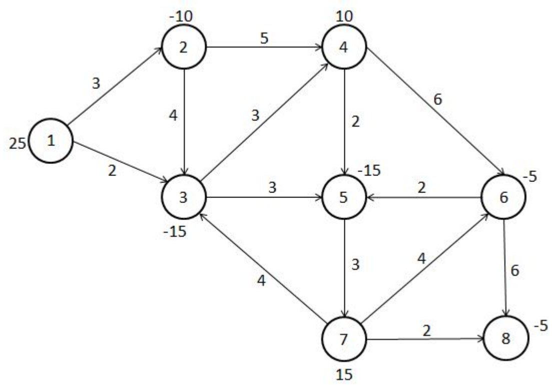
A continuación mostramos el método con un ejemplo:

Sea el siguiente problema:

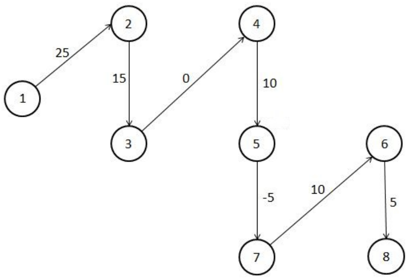
$$\min \quad 3x_{12} + 2x_{13} + 4x_{23} + 5x_{24} + 3x_{34} + 3x_{35} + 2x_{45} + 6x_{46} + 3x_{57} + 2x_{65} + 6x_{68} + 4x_{76} + 2x_{78} + 4x_{73}$$

$$\begin{gathered}
s.a: \; x_{12} + x_{13} = 25 \\
-x_{12} + x_{23} + x_{24} = -10 \\
-x_{13} - x_{23} + x_{34} + x_{35} - x_{73} = -15 \\
-x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{46} = 10 \\
-x_{35} - x_{45} - x_{65} + x_{57} = -15 \\
-x_{46} + x_{65} - x_{76} + x_{68} = -5 \\
x_{73} - x_{57} + x_{76} + x_{78} = 15 \\
-x_{68} - x_{78} = -5 \\
x_{ij} \geq 0
\end{gathered}$$

Su red es:



Partimos de la siguiente solución básica inicial:



Calculamos los potenciales de cada nodo, al igual que los costos relativos de los arcos no básicos.

$$y_1 = 0,\ y_2 = -3,\ y_3 = -7;\ y_4 = -10,\ y_5 = -12,\ y_6 = -19\ y_7 = -15,$$

$$y_8 = -25,\ \overline{c}_{13} = 2 - (0+7) = -5,\ \overline{c}_{24} = 5 - (-3+10) = -2,$$

$$\overline{c}_{35} = 3-(-7+12) = -2,\ \overline{c}_{73} = 4-(-15+7) = 12,\ \overline{c}_{46} = 6-(-10+19) = -3,$$

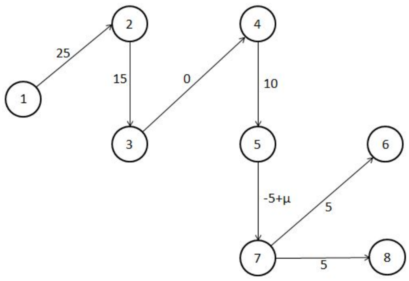
$$\overline{c}_{65} = 2 - (-19+12) = 9,\ \overline{c}_{78} = 2 - (-15+25) = -8$$

Ahora perturbamos aquellos flujos y costos que sean negativos, sumando una cantidad μ:

$$x_{12} = 25,\ x_{23} = 15,\ x_{34} = 0,\ x_{45} = 10,\ x_{57} = -5+\mu,\ x_{76} = 10,\ x_{68} = 5,$$

$$\overline{c}_{13} = -5+\mu,\ \overline{c}_{24} = -2+\mu,\ \overline{c}_{35} = -2+\mu,\ \overline{c}_{46} = -3+\mu,\ \overline{c}_{78} = -8+\mu$$

La solución anterior es óptima para $\mu \geq 8$.
Si $\mu < 8$, el arco $(7,8)$ entra a formar parte de la base aplicando el Simplex Primal, puesto que el arco entrante es externo al árbol generador actual. Entonces aumentamos $\mu = 5$ unidades el flujo de $(7,8)$, como consecuencia el arco $(6,8)$ sale de la base. Obtenemos:



Volvemos a calcular los potenciales y los costos relativos:

$$y_1 = 0,\ y_2 = -3,\ y_3 = -7;\ y_4 = -10,\ y_5 = -12,\ y_6 = -19\ y_7 = -15,$$

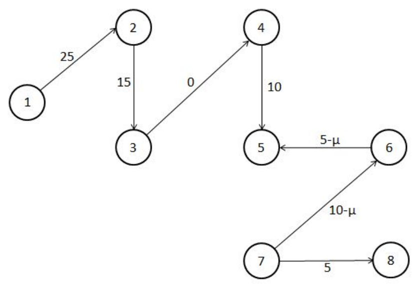
$$y_8 = -17-\mu,\ \overline{c}_{13} = 2 - (0+7) = -5,\ \overline{c}_{24} = 5 - (-3+10) = -2,$$

$$\bar{c}_{35} = 3-(-7+12) = -2,\ \bar{c}_{73} = 4-(-15+7) = 12,\ \bar{c}_{46} = 6-(-10+19) = -3,$$
$$\bar{c}_{65} = 2-(-19+12) = 9,\ \bar{c}_{68} = 6-(-19+17+\mu) = 8-\mu$$

Tendremos que:

$$x_{12} = 25,\ x_{23} = 15,\ x_{34} = 0,\ x_{45} = 10,\ x_{57} = -5+\mu,\ x_{76} = 5,\ x_{78} = 5,$$
$$\bar{c}_{13} = -5+\mu,\ \bar{c}_{24} = -2+\mu,\ \bar{c}_{35} = -2+\mu,\ \bar{c}_{46} = -3+\mu,\ \bar{c}_{68} = 8-\mu$$

Tomando $\mu \in [5,8]$ la solución es óptima.
Si $\mu < 5$, el arco $(5,7)$ abandona la base mediante una iteración del Simplex Dual. Entonces, es sustituido por el arco $(6,5)$ con costo 2, aumentando su flujo $\mu = 5-\mu$. Obtenemos el siguiente árbol:



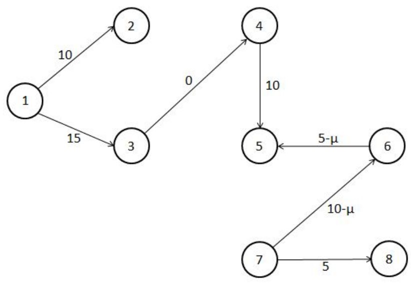
Repetimos el proceso de calcular los potenciales y los costos relativos:

$$y_1 = 0,\ y_2 = -3,\ y_3 = -7;\ y_4 = -10,\ y_5 = -12,\ y_6 = -10\ y_7 = -6,$$
$$y_8 = -8-\mu,\ \bar{c}_{13} = 2-(0+7) = -5,\ \bar{c}_{24} = 5-(-3+10) = -2,$$
$$\bar{c}_{35} = 3-(-7+12) = -2,\ \bar{c}_{73} = 4-(-6+7) = 3,\ \bar{c}_{46} = 6-(-10+10) = 6,$$
$$\bar{c}_{57} = 3-(-12+6) = 9,\ \bar{c}_{68} = 6-(-10+8+\mu) = 8-\mu$$

Ahora tenemos:

$$x_{12} = 25,\ x_{23} = 15,\ x_{34} = 0,\ x_{45} = 10,\ x_{65} = 5-\mu,\ x_{76} = 10-\mu,$$
$$x_{78} = 5,\ \bar{c}_{13} = -5+\mu,\ \bar{c}_{24} = -2+\mu,\ \bar{c}_{35} = -2+\mu,\ \bar{c}_{68} = 8-\mu$$

Esta solución es óptima para $\mu \in [5,8]$.
Si $\mu < 5$ el arco $(1,3)$ entra, a través del Simplex Primal, a la base. Aumentando $\mu = 15$ unidades, el flujo de dicho arco, deja de ser básico el arco $(2,3)$. Y se obtiene:



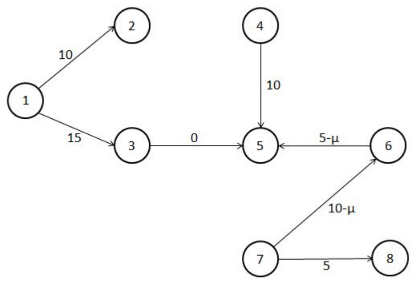
Tras esta iteración tenemos que:

$$y_1 = 0,\ y_2 = -3,\ y_3 = -2-\mu,\ y_4 = -5-\mu,\ y_5 = -7-\mu,\ y_6 = -5-\mu,$$
$$y_7 = -1-\mu,\ y_8 = -3-2\mu,\ \overline{c}_{23} = 4-(-3+2+\mu) = 5-\mu,$$
$$\overline{c}_{24} = 5-(-3+5+\mu) = 3-\mu,\ \overline{c}_{35} = 3-(-2-\mu+7+\mu) = -2,$$
$$\overline{c}_{73} = 4-(-1-\mu+2+\mu) = 3,\ \overline{c}_{46} = 6-(-5-\mu+5+\mu) = 6,$$
$$\overline{c}_{57} = 3-(-7-\mu+1+\mu) = 9,\ \overline{c}_{68} = 6-(-5-\mu+3+2\mu) = 8-\mu$$

En este momento:

$$x_{12} = 10,\ x_{23} = 15,\ x_{34} = 0,\ x_{45} = 10,\ x_{65} = 5-\mu,\ x_{76} = 10-\mu,$$
$$x_{78} = 5,\ \overline{c}_{23} = 5-\mu,\ \overline{c}_{24} = 3-\mu,\ \overline{c}_{35} = -2+\mu,\ \overline{c}_{68} = 8-\mu$$

Esta solución es óptima para $\mu \in [2, 5]$.
Si $\mu < 2$, se realiza una iteración del Simplex Primal sobre el arco $(3, 5)$. En este caso no podemos aumentar el flujo de este arco, pues en caso contrario, el flujo de $(3, 4)$ pasaría a ser negativo, entonces tomamos $\mu = 0$, provocando la eliminación del arco $(3, 4)$.

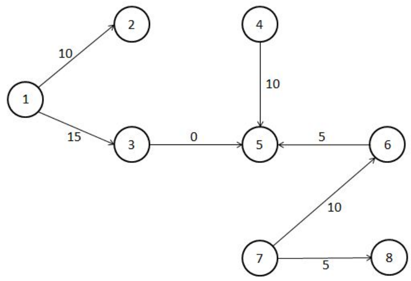


Calculamos de nuevo los potenciales y los costos relativos:

$$y_1 = 0,\ y_2 = -3,\ y_3 = -2-\mu,\ y_4 = -3-2\mu,\ y_5 = -5-2\mu,\ y_6 = -3-2\mu,$$
$$y_7 = -1-2\mu,\ y_8 = -1-3\mu,\ \overline{c}_{23} = 4-(-3+2+\mu) = 5-\mu,$$

$\overline{c}_{24} = 5 - (-3 + 3 + 2\mu) = 5 - 2\mu,\ \overline{c}_{34} = 3 - (-2 - \mu + 3 + 2\mu) = 2 - \mu,$
$\overline{c}_{73} = 4 - (1 - 2\mu + 2 + \mu) = 1 + \mu,\ \overline{c}_{46} = 6 - (-3 - 2\mu + 3 + 2\mu) = 6,$
$\overline{c}_{57} = 3 - (-5 - 2\mu - 1 + 2\mu) = 9,\ \overline{c}_{68} = 6 - (-3 - 2\mu + 1 + 3\mu) = 8 - \mu$
Esta nueva solución es óptima para $\mu \leq 2$.

El grafo siguiente muestra la solución óptima haciendo $\mu = 0$.



Capítulo 4

Resolución de problemas de Programación Lineal con hojas de cálculo

Resolución computacional. Generalidades sobre hojas de cálculo. Complementos de Excel. Resolviendo problemas de Flujos en Redes con hojas de cálculo.

4.1. Resolución computacional

El uso práctico de la Programación Lineal es, esencialmente, computacional. Existen programas que, bajo distintas denominaciones y marcas comerciales, dan soporte a la resolución de diferentes problemas de Programación Lineal, en particular a los problemas de Flujos en Redes. Las dimensiones de dichos problemas exigen el uso del software con la potencia y eficiencia adecuadas.

Las hojas de cálculo son herramientas de uso generalizado para realizar distintas actividades. Además de hacer más potentes las tareas de las calculadoras electrónicas, incorporan, entre otras, herramientas gráficas y de análisis de datos que las convierten en útiles estadísticos básicos. De la misma forma, disponen de complementos que permiten resolver algunos problemas de optimización. En particular, problemas de Programación Lineal.

Por tanto, la existencia de dichos complementos en estas herramientas de uso universal, también se puede tomar como indicador de la popularidad atribuida a la Programación Lineal.

4.2. Generalidades sobre hojas de cálculo

Son, esencialmente, tablas de doble entrada cuyas celdas pueden contener datos alfanuméricos o fórmulas (que involucran distintas operaciones matemáticas y/o funciones elegidas de un menú de opciones). Permiten usar volúmenes importantes de información y son muy útiles para ejecutar con efectividad distintas tareas científicas, técnicas, comerciales,…

Entre las hojas de cálculo actuales, una de las más populares es EXCEL, integrada en el paquete Microsoft Office. También son de uso generalizado Spreadsheet (DOCS de Google) y CALC del paquete Open Office. Las dos últimas son de acceso gratuito.

Generalmente, en una hoja de cálculo se distinguen filas y columnas en la forma:

	A	B	C	D	E	F	G	…
1								
2								
3								
4								
…								

Entre las múltiples operaciones que se pueden realizar fácilmente con una hoja de cálculo, interesa señalar, exclusivamente, la suma de los productos, término a término, de dos matrices de igual dimensión. En el caso de matrices fila o columna, esta operación se reduce al cálculo del producto escalar de dos vectores.

4.3. Complementos de Excel

En la resolución de problemas de Programación Lineal es muy útil trabajar con Excel, concretamente con el complemento de *Solver* añadido en la pestaña de "Datos".

Los datos que *Solver* necesita son, esencialmente, las constantes (coeficientes tecnológicos, costos y recursos) que definen un problema de Programación Lineal. Cada uno de estos se escriben, conformando los respectivos vectores y matrices, en celdas de una hoja de Excel. Luego se han de especificar celdas con fórmulas relacionadas con la función objetivo, así como las restricciones propias del problema. También hay que reservar celdas para escribir los valores alcanzados por las variables. El método que se emplea para la resolución es el *Método del Simplex.*

Además del *Solver*, contamos con otra herramienta compatible con Excel, *Microsoft Solver Fundation (MSF).* A diferencia de la anterior, ésta no viene incluida dentro del paquete de Excel, sino que precisa de una instalación.

La programación que incluye este complemento es el Simplex, tanto Primal como Dual, programación estocástica y técnicas metaheurísticas, entre otras. Una vez resuelto el problema, *MSF*, genera una serie de informes sobre los resultados incluyendo la sensibilidad.

Las principales características de *MSF* se pueden englobar en estas secciones (para más información consultar Microsoft Solver Foundation (MSF)[5]):

- Editor de modelado, con un corrector de sintaxis y paneles de modelado.
- Resultados automáticos y generación de informes.
- La capacidad de importación y exportación, evitando tener que reescribir el código a la hora de trabajar con otros programas.

El lenguaje de programación en *MSF* es O.M.L.

4.4. Resolviendo problemas de Flujos en Redes con hojas de cálculo

En esta sección se pretende mostrar cómo resolver Problemas de Flujos de Redes haciendo uso de *MSF* y de *SOLVER*.

4.4.1. Datos del problema

Una forma de introducirlos es la siguiente:
en la hoja de Excel se asignan una serie de columnas a los datos del problema a estudiar. El orden de las columnas seguido en los ejemplos posteriores es, respectivamente, número de vértices (nver), disponibilidad de los vértices (disp), columna en blanco (posteriormente se definirán las fórmulas de estas celdas), número de arcos (narc), origen del arco correspondiente (desde), final del arco correspondiente (hasta), capacidad mínima del arco (capmin), capacidad máxima del arco (capmax) y costo del arco (costo).

Por ejemplo para el problema del capítulo 2, sección 2.4.1 (aplicando el Método Simplex Primal para Redes en *MSF*), la presentación de los datos queda como:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		nver	disp		narc	desde	hasta	capmin	capmax	costo		
3		1	47	0	1	1	2	2	30	9		
4		2	-25	0	2	1	3	3	22	2		
5		3	-15	0	3	1	4	3	18	3		
6		4	-13	0	4	2	3	1	14	2		
7		5	-18	0	5	2	5	2	10	6		
8		6	17	0	6	3	6	0	12	4		
9		7	27	0	7	4	3	3	8	6		
10		8	-20	0	8	4	7	2	10	4		
11					9	5	8	1	12	6		
12					10	6	2	1	9	2		
13					11	6	5	2	25	4		
14					12	7	3	2	15	4		
15					13	7	6	1	12	2		
16					14	7	8	0	30	12		
17					15	8	6	1	15	2		
18												
19												

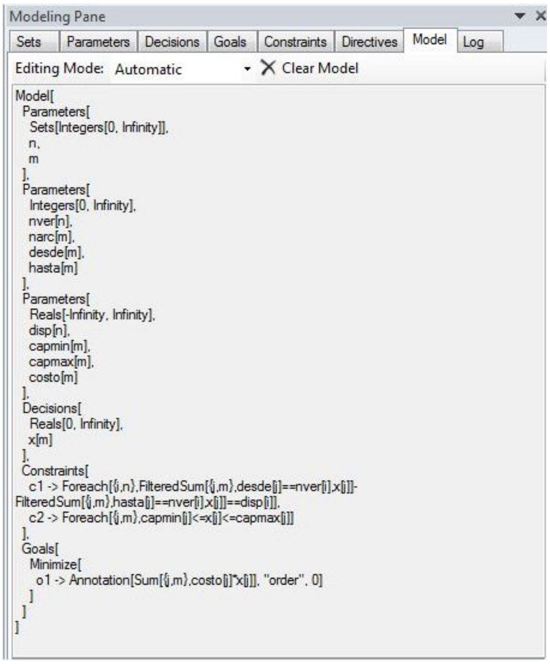
4.4.2. Construcción del modelo y resolución con *MSF*

Para crear el modelo, usando las sentencias adecuadas en O.M.L, nos podemos apoyar en un entorno en el que, siguiendo la secuencia de pestañas especificadas en la parte superior de un panel de modelización, debemos rellenar correctamente cada uno de los campos: Sets (indexación), Parameters (parámetros definidores del problema, como número de arcos, capacidad mínima y máxima, costos,...), Decisions (variables que toma los valores de la solución), entre otros.

En el campo "Goals" introducimos la función objetivo, es decir, minimizar (si el problema es de mínimo) la suma del producto del costo y el flujo de cada arco.

En el apartado "Constraints" se añaden las restricciones del problema, una para los límites de las variables, capacidad mínima y máxima, y otra para la condición de consistencia (todo lo que sale del nodo menos lo que entra igual a su disponibilidad).

El modelo para el ejemplo anterior es:



Una vez construido el modelo, si el chequeo indica que es correcto, pulsando SOLVE se crea una salida con la solución encontrada por *MSF*. Para el ejemplo del capítulo 2, la solución obtenida (resaltada en las últimas columnas) es:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L		M
1													
2	nver	disp		narc	desde	hasta	capmin	capmax	costo		**Solver Foundation Results**		
3	1	47	47	1	1	2	2	30	9		**Name**	**Value**	
4	2	-25	-25	2	1	3	3	22	2		Solution Type	Optimal	
5	3	-15	-15	3	1	4	3	18	3		o1	645	
6	4	-13	-13	4	2	3	1	14	2		x[0]	19	
7	5	-18	-18	5	2	5	2	10	6		x[1]	10	
8	6	17	17	6	3	6	0	12	4		x[2]	18	
9	7	27	27	7	4	3	3	8	6		x[3]	1	
10	8	-20	-20	8	4	7	2	10	4		x[4]	2	
11				9	5	8	1	12	6		x[5]	1	
12				10	6	2	1	9	2		x[6]	3	
13				11	6	5	2	25	4		x[7]	2	
14				12	7	3	2	15	4		x[8]	1	
15				13	7	6	1	12	2		x[9]	9	
16				14	7	8	0	30	12		x[10]	17	
17				15	8	6	1	15	2		x[11]	2	
18											x[12]	7	
19											x[13]	20	
20											x[14]	1	
21													

4.4.3. Resolución usando *Solver*

Al igual que para el complemento *MSF*, se deben estructurar los datos del problema. Para *Solver* usaremos el mismo esquema que aparece en la imagen de la subsección 4.4.1, añadiendo una segunda columna en blanco, ésta representa a la variable que toma los valores de la solución (x). Los datos del problema del capítulo 2, sección 2.4.1 quedan:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		nver	disp		narc	desde	hasta	capmin	capmax	costo	x		
3		1	47	0	1	1	2	2	30	9			
4		2	-25	0	2	1	3	3	22	2			
5		3	-15	0	3	1	4	3	18	3			
6		4	-13	0	4	2	3	1	14	2			
7		5	-18	0	5	2	5	2	10	6			
8		6	17	0	6	3	6	0	12	4			
9		7	27	0	7	4	3	3	8	6			
10		8	-20	0	8	4	7	2	10	4			
11					9	5	8	1	12	6			
12					10	6	2	1	9	2			
13					11	6	5	2	25	4			
14					12	7	3	2	15	4			
15					13	7	6	1	12	2			
16					14	7	8	0	30	12			
17					15	8	6	1	15	2			
18												<- Valor funcion objetivo	
19													

Una vez introducidos los datos, se definen las fórmulas, una para el valor objetivo (celda distinta a las ya reservadas) y, otra fórmula, para cada una de las celdas que forman la primera columna en blanco. Éstas reflejan las disponibilidades de cada nodo, es decir, el flujo que sale del nodo menos el entrante es igual a la disponibilidad del mismo.

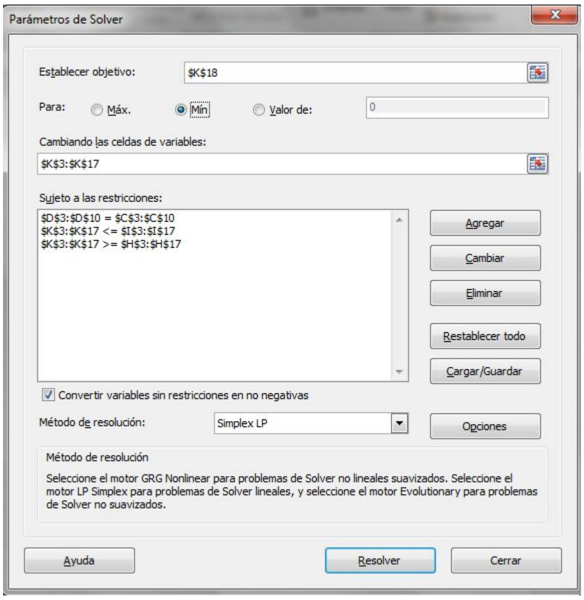
Por ejemplo, para el mismo problema que en la subsección anterior (ejemplo del capítulo 2, sección 2.4.1), la fórmula de la función objetivo es:

```
fx =SUMAPRODUCTO(J3:J17;K3:K17)
```

Y para la disponibilidad de los nodos de la red, son fórmulas del tipo:

```
fx =K3+K4+K5
```

El siguiente paso es obtener una solución con *Solver* en la pestaña Datos. Para obtenerla se deben cumplimentar cada uno de los campos que se muestran en la siguiente imagen. Para ello, se selecciona la celda objetivo, que en este ejemplo, es la k18. Posteriormente, se especifica si se trata de un problema de mínimo o de máximo (este ejemplo es de mínimo), y las celdas, donde se escriben los valores de las variables, esto es, las celdas de la columna k-ésima. Por último, se agregan las condiciones de disponibilidad de cada nodo (restricción del =) y las correspondientes a la capacidad máxima y mínima de cada arco (restricciones $\leq$ y $\geq$ respectivamente).



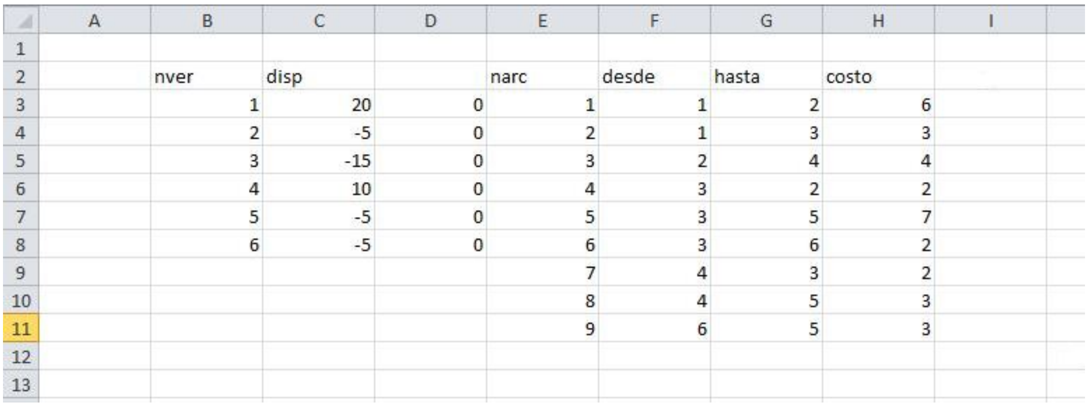
La solución encontrada por el complemento *Solver* aparece en la columna k encabezada por x:

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1											
2	nver	disp		narc	desde	hasta	capmin	capmax	costo	x	
3	1	47	47	1	1	2	2	30	9	19	
4	2	-25	-25	2	1	3	3	22	2	10	
5	3	-15	-15	3	1	4	3	18	3	18	
6	4	-13	-13	4	2	3	1	14	2	1	
7	5	-18	-18	5	2	5	2	10	6	2	
8	6	17	17	6	3	6	0	12	4	1	
9	7	27	27	7	4	3	3	8	6	3	
10	8	-20	-20	8	4	7	2	10	4	2	
11				9	5	8	1	12	6	1	
12				10	6	2	1	9	2	9	
13				11	6	5	2	25	4	17	
14				12	7	3	2	15	4	2	
15				13	7	6	1	12	2	7	
16				14	7	8	0	30	12	20	
17				15	8	6	1	15	2	1	
18										645	<- Valor funcion objetivo
19											
20											
21											

Como se puede observar, la solución obtenida por ambos complementos coincide. Para este caso, el valor objetivo es, de nuevo, 645 y las celdas marcadas en lila muestran el flujo que pasa por el arco correspondiente.

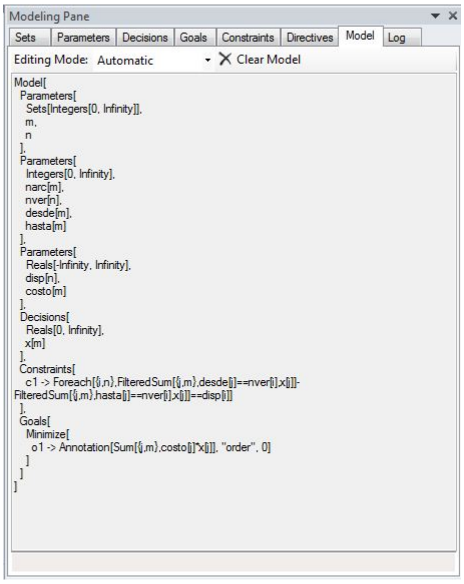
Ejemplo del Método Simplex Dual

Este ejemplo se expuso en el capítulo 3 en la sección 3.1.1 (aplicando el Método Simplex Dual para PFCM). Resolver el problema de mínimo con *MSF*:
Presentamos una primera imagen con los datos del problema: número de vértices, disponibilidad, columna en blanco, número de arcos, inicio del arco, final del arco y costo.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		nver	disp		narc	desde	hasta	costo	
3		1	20	0	1	1	2	6	
4		2	-5	0	2	1	3	3	
5		3	-15	0	3	2	4	4	
6		4	10	0	4	3	2	2	
7		5	-5	0	5	3	5	7	
8		6	-5	0	6	3	6	2	
9					7	4	3	2	
10					8	4	5	3	
11					9	6	5	3	
12									
13									

Se escribe el modelo según los datos de la imagen anterior, tal y como se explicó anteriormente, resultando:



Tras formar el modelo obtenemos la resolución con *MSF*. Además mostramos la salida obtenida con el complemento *Solver* (columna I), siguiendo los pasos ya descritos:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		nver	disp		narc	desde	hasta	costo	x		Solver Foundation Results		
3		1	20	20	1	1	2	6	0		Name	Value	
4		2	-5	-5	2	1	3	3	20		Solution Type	Optimal	
5		3	-15	-15	3	2	4	4	0		o1	105	
6		4	10	10	4	3	2	2	5		x[0]	0	
7		5	-5	-5	5	3	5	7	0		x[1]	20	
8		6	-5	-5	6	3	6	2	5		x[2]	0	
9					7	4	3	2	5		x[3]	5	
10					8	4	5	3	5		x[4]	0	
11					9	6	5	3	0		x[5]	5	
12									105	<- Valor funcion objetivo	x[6]	5	
13											x[7]	5	
14											x[8]	0	
15													

La celda de color naranja muestra el valor de la función objetivo, en este caso, igual a 105, mientras que las celdas de color lila claro representan el valor del flujo de cada arco.

Ejemplo del Método Auto-Dual

Este ejemplo se expuso en el capítulo 3 en la sección 3.2.1 (aplicando el Método Auto-Dual). Resolver el problema de mínimo con *MSF*:

La estructura de los datos del problema es la misma que para ejercicios anteriores:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		nver	disp		narc	desde	hasta	costo	
3		1	25	0	1	1	2	3	
4		2	-10	0	2	1	3	2	
5		3	-15	0	3	2	3	4	
6		4	10	0	4	2	4	5	
7		5	-15	0	5	3	4	3	
8		6	-5	0	6	3	5	3	
9		7	15	0	7	4	5	2	
10		8	-5	0	8	4	6	6	
11					9	5	7	3	
12					10	6	5	2	
13					11	6	8	6	
14					12	7	3	4	
15					13	7	6	4	
16					14	7	8	2	
17									
18									
19									

Atendiendo a estos datos, se crea el modelo correspondiente de forma análoga a lo explicado antes.

En la siguiente imagen se expone la resolución con *MSF* y la salida generada por *Solver* (columna i-ésima), resaltando nuevamente, de color naranja, el valor de la función objetivo y, en lila claro, la solución hallada por el *Solver*:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		nver	disp		narc	desde	hasta	costo	x		Solver Foundation Results		
3		1	25	25	1	1	2	3	10		Name	Value	
4		2	-10	-10	2	1	3	2	15		Solution Type	Optimal	
5		3	-15	-15	3	2	3	4	0		o1	140	
6		4	10	10	4	2	4	5	0		x[0]	10	
7		5	-15	-15	5	3	4	3	0		x[1]	15	
8		6	-5	-5	6	3	5	3	0		x[2]	0	
9		7	15	15	7	4	5	2	10		x[3]	0	
10		8	-5	-5	8	4	6	6	0		x[4]	0	
11					9	5	7	3	0		x[5]	0	
12					10	6	5	2	5		x[6]	10	
13					11	6	8	6	0		x[7]	0	
14					12	7	3	4	0		x[8]	0	
15					13	7	6	4	10		x[9]	5	
16					14	7	8	2	5		x[10]	0	
17									140	<- Valor funcion objetivo	x[11]	0	
18											x[12]	10	
19											x[13]	5	
20													
21													

Otro ejemplo

Para el siguiente ejemplo se toman más nodos y arcos que en los problemas planteados anteriormente.

Supongamos que tenemos el siguiente conjunto de datos, la descomposición de la red está en la siguiente figura:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		nver	disp		narc	desde	hasta	capmin	capmax	costo		
3		1	21	0	1	1	2	0	12	6		
4		2	-11	0	2	1	4	1	16	3		
5		3	-16	0	3	3	1	1	12	2		
6		4	4	0	4	4	3	1	10	4		
7		5	-10	0	5	4	2	2	8	1		
8		6	29	0	6	4	5	0	5	1		
9		7	-10	0	7	5	2	3	8	3		
10		8	14	0	8	2	6	0	9	1		
11		9	-5	0	9	5	6	4	10	4		
12		10	-7	0	10	5	7	0	22	1		
13		11	-6	0	11	7	6	4	7	3		
14		12	7	0	12	7	9	6	13	2		
15		13	-33	0	13	8	7	2	6	4		
16		14	-10	0	14	8	9	3	12	2		
17		15	33	0	15	8	10	5	10	0		
18					16	8	11	2	8	1		
19					17	9	10	5	7	4		
20					18	10	11	4	8	3		
21					19	3	12	0	9	1		
22					20	12	13	0	8	4		
23					21	12	15	2	10	2		
24					22	3	15	2	8	6		
25					23	15	13	1	23	5		
26					24	15	14	2	14	3		
27					25	14	13	3	11	3		
28												

Seguidamente construimos el modelo en *MSF*, rellenando correctamente cada campo, obteniendo así la siguiente solución:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2		nver	disp		narc	desde	hasta	capmin	capmax	costo
3		1	21	21	1	1	2	0	12	6
4		2	-11	-11	2	1	4	1	16	3
5		3	4	4	3	3	1	1	12	2
6		4	-10	-10	4	4	3	1	10	4
7		5	29	29	5	4	2	2	8	1
8		6	-16	-16	6	4	5	0	5	1
9		7	-10	-10	7	5	2	3	8	3
10		8	14	14	8	2	6	0	9	1
11		9	-5	-5	9	5	6	4	10	4
12		10	-7	-7	10	5	7	0	22	1
13		11	-6	-6	11	7	6	4	7	3
14		12	7	7	12	7	9	6	13	2
15		13	-33	-33	13	8	7	2	6	4
16		14	-10	-10	14	8	9	3	12	2
17		15	33	33	15	8	10	5	10	0
18					16	8	11	2	8	1
19					17	9	10	5	7	4
20					18	10	11	4	8	3
21					19	3	12	0	9	1
22					20	12	13	0	8	4
23					21	12	15	2	10	2
24					22	3	15	2	8	6
25					23	15	13	1	23	5
26					24	15	14	2	14	3
27					25	14	13	3	11	3
28										
29										
30										

Solver Foundation Results

Name	Value
Solution Type	Optimal
o1	450
x[0]	7
x[1]	16
x[2]	2
x[3]	1
x[4]	5
x[5]	0
x[6]	7
x[7]	8
x[8]	4
x[9]	18
x[10]	4
x[11]	6
x[12]	2
x[13]	4
x[14]	6
x[15]	2
x[16]	5
x[17]	4
x[18]	1
x[19]	6
x[20]	2
x[21]	2
x[22]	23
x[23]	14
x[24]	4

Una vez ejecutado el modelo creado en *MSF*, procedemos a obtener la solución con el complemento *Solver*, completando el panel de la subsección 4.4.3 resultando:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
2		nver	disp		narc	desde	hasta	capmin	capmax	costo	x	
3		1	21	21	1	1	2	0	12	6	7	
4		2	-11	-11	2	1	4	1	16	3	16	
5		3	4	4	3	3	1	1	12	2	2	
6		4	-10	-10	4	4	3	1	10	4	1	
7		5	29	29	5	4	2	2	8	1	5	
8		6	-16	-16	6	4	5	0	5	1	0	
9		7	-10	-10	7	5	2	3	8	3	7	
10		8	14	14	8	2	6	0	9	1	8	
11		9	-5	-5	9	5	6	4	10	4	4	
12		10	-7	-7	10	5	7	0	22	1	18	
13		11	-6	-6	11	7	6	4	7	3	4	
14		12	7	7	12	7	9	6	13	2	6	
15		13	-33	-33	13	8	7	2	6	4	2	
16		14	-10	-10	14	8	9	3	12	2	4	
17		15	33	33	15	8	10	5	10	0	6	
18					16	8	11	2	8	1	2	
19					17	9	10	5	7	4	5	
20					18	10	11	4	8	3	4	
21					19	3	12	0	9	1	1	
22					20	12	13	0	8	4	6	
23					21	12	15	2	10	2	2	
24					22	3	15	2	8	6	2	
25					23	15	13	1	23	5	23	
26					24	15	14	2	14	3	14	
27					25	14	13	3	11	3	4	
28											450	<- Valor funcion objetivo
29												
30												

Solver Foundation Results

Name	Value
Solution Type	Optimal
o1	450
x[0]	7
x[1]	16
x[2]	2
x[3]	1
x[4]	5
x[5]	0
x[6]	7
x[7]	8
x[8]	4
x[9]	18
x[10]	4
x[11]	6
x[12]	2
x[13]	4
x[14]	6
x[15]	2
x[16]	5
x[17]	4
x[18]	1
x[19]	6
x[20]	2
x[21]	2
x[22]	23
x[23]	14
x[24]	4

El valor de la función objetivo está resaltado en naranja, y los flujos de los arcos que forman la solución se muestran en un tono liláceo.

Bibliografía

[1] R.J Vanderbei, (2014) *Linear programming, Foundations and extensions.* 4ª ed. de Springer Verlaq

[2] M. S. Bazaraa, (2010) *Linear programming and Network Flows.* 4ª ed. de John Wiley & Sons

[3] Ahuja, Magnanti, Orlin, (1993) *Network Flows: Theory, Algorithms and Applications.* Ed. Prentice-Hall

[4] Hillier, Lieberman, (2010) *Introducción a la investigación de operadores.* 9ª ed. de McGraw-Hill

[5] Microsoft Solver Foundation (MSF) *https://msdn.microsoft.com/en-us/library/ff524497(v=vs.93).aspx*