La medida y la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$

The measure and the integral of Lebesgue in $\mathbb{R}$

Dácil Esther Batista García

Trabajo de Fin de Grado

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

La Laguna, 11 de julio del 2016

Dr. D. **Antonio Bonilla Ramírez**, con N.I.F. 42914071-G profesor Titular de Universidad adscrito al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"*La medida y la integral de Lebesgue en* $\mathbb{R}$"

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Dácil Esther Batista García**, con N.I.F. 78857252-G.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firma la presente en La Laguna a 11 de julio del 2016.

Resumen

El objetivo de este trabajo es mostrar las ventajas que presenta la integral de Lebesgue respecto a la integral de Riemann para funciones acotadas definidas sobre intervalos cerrados y acotados. La integral de Riemann de una función acotada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *se define de la siguiente manera: Una partición de Riemann del intervalo* $[a, b]$ *es un conjunto finito* $P = \{x_0, x_1, ..., x_h\}$ *de números que verifican* $a = x_0 < x_1 < ... < x_h = b$.
Se consideran las siguientes sumas:

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{h} (x_k - x_{k-1}) inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{h} (x_k - x_{k-1}) sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Al conjunto de todas las particiones de Riemann de $[a, b]$ *lo denotamos por* $\mathbb{P}$. *El*

$$sup\{s(f, P) : P \in \mathbb{P}\} \qquad e \qquad inf\{S(f, P) : P \in \mathbb{P}\}$$

se llaman, respectivamente, integral inferior e integral superior de f en el sentido de Riemann. La llamaremos integral de Riemann, cuando ambas integrales coinciden. En dicho caso, se dirá que f es Riemann integrable.
Es fácil comprobar que una condición necesaria y suficiente para que f sea Riemann integrable es que para cada $\delta > 0$ *exista una partición P tal que* $S(f, P) - s(f, P) < \delta$.
La función característica de los racionales definida en el intervalo $[0, 1]$ *no es Riemann integrable, puesto que es 0 la integral inferior y 1 la integral superior. Para la función característica de los irracionales sucede exactamente lo mismo.*
Las funciones consideradas anteriormente no se comportan bien respecto a la integral de Riemann por ser muy discontinuas. El siguiente teorema nos da una caracterización, en términos de la continuidad, de las funciones acotadas que son Riemann integrables.
Teorema. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada, y sea D el conjunto de los puntos en los que f no es continua. Entonces, f es Riemann integrable si, y sólo si, D tiene medida cero.*
Que las funciones muy discontinuas resulten no integrables es un primer inconveniente de la integral de Riemann.
Además la integral de Riemann tiene un comportamiento anormal respecto del paso al límite. El siguiente ejemplo muestra que existen sucesiones de funciones integrables cuya función límite no lo es.
Sea $\{r_k\}$ *una numeración de los racionales de un intervalo I. Para cada k se considera la función característica* f_k *del conjunto finito* $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$. f_k *es Riemann integrable por tener pocas discontinuidades y, claramente, su integral es cero. Sin embargo, el límite de la sucesión* $\{f_k\}$ *es la función característica de los racionales de I, la cual no es Riemann integrable.*
Las funciones medibles son la base para el desarrollo de la teoría de Lebesgue de la integración. La función medible más sencilla es la función característica de un conjunto E de medida finita. Su integral, en el sentido de Lebesgue, es la medida de E. Una combinación

lineal finita de funciones características de conjuntos de medida finita se llama función simple. Su integral se define por extensión lineal de la anterior.
Dada una función medible no negativa f, es posible obtener una sucesión monótona creciente $\{a_k\}$ *de funciones simples que aproximan a f en casi todo punto. La integral de f se define entonces como el límite (finito o infinito) de la sucesión monótona de las integrales de las* a_k. *Finalmente, para una función medible arbitraria f, consideramos* f^+ *y* f^-, *que son respectivamente la parte positiva y la parte negativa de f. Siendo* f^+ *y* f^- *funciones medibles no negativas. Cuando la diferencia de las integrales de una y otra está definida (es decir, ambas funciones no son infinitas) se dice que f es integrable en el sentido de Lebesgue, y tal diferencia es su integral.*
El método de aproximación de una función medible no negativa f por funciones simples consiste, en ir ampliando sucesivamente el dominio de definición de éstas, al tiempo que se afina la aproximación al hacer que sus valores sean cada vez más próximos entre sí y más próximos a los de f, y varíen en un intervalo cada vez mayor. Una imagen muy gráfica que establece la comparación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue es ésta: si se tratara de medir dinero que supone una gran cantidad de monedas colocadas sobre una mesa, Riemann trocearía la mesa en rectángulos y contaría en cada uno de ellos, mientras que Lebesgue clasificaría las monedas y después las contaría. Con esto se aprecia la rigidez que suponen las particiones de Riemann, y se indica que las funciones simples que aproximan a una función no negativa f, mediante las cuales se obtiene su integral, son constantes en conjuntos en los que f tiene una pequeña oscilación.
Otra deficiencia de la integral de Riemann es que si f' *existe en cada punto de* $[a, b]$ *y es acotada, uno esperaría que* f' *fuese integrable y* $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ *para cada* $x \in [a, b]$. *Sin embargo, esto no es cierto, existen funciones diferenciables con derivada acotada pero no Riemann integrables.*

Abstract

The aim of this notes is to show the advantages of Lebesgue integral with respect to Riemann integral for bounded functions defined on bounded closed intervals. The Riemann integral of a bounded function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is defined in the following way: Let P be a Riemann partition of the interval [a,b], that it, a finite set $P = \{x_0, x_1, ..., x_h\}$ of numbers satisfying $a = x_0 < x_1 < ... < x_h = b$.
The following amounts are considered:

$$s(f,P) = \sum_{k=1}^{h}(x_k - x_{k-1}) inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{h}(x_k - x_{k-1}) sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

Denote $\mathbb{P}$ the set of all partitions of Riemann of [a, b]. It is defined, the lower integral of Riemann by

$$sup\{s(f,P) : P \in \mathbb{P}\}$$

and the upper integral of Riemann by

$$inf\{S(f,P) : P \in \mathbb{P}\}$$

A function f is called Riemann integrable if the lower and upper integral coincide.
It is easy to see that a necessary and sufficient condition for a function f to be Riemann integrable is that for each $\delta > 0$ there is a partition P such that $S(f,P) - s(f,P) < \delta$.
The characteristic function on rational numbers defined on [0,1] is not integrable Riemann. Indeed, the lower integral is 0 and the upper integral is one. For the characteristic function of irrational quite the same. However, these two functions should be very different from the point of view of integration.
The functions previously considered are no well behaved with respect to the Riemann integral for being very discrete. The following theorem gives a characterization in terms of continuity of functions that are bounded Riemann integrable.
Theorem. Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function, and D be the set of points where f is not continuous. Then f is Riemann integrable if and only if D has zero measure.
That highly discontinuous functions inadaptable result is a first drawback of the Riemann integral. The Riemann integral has an abnormal behavior regarding passage to the limit. The following example shows that there exist sequences of integrable functions whose limit function is not.
Let $\{r_k\}$ be numbering rational an interval I. For each k we consider the characteristic function f_k of finite set $\{r_1, r_2, ..., r_k\}$. It is clear, that f_k is Riemann integrable with value zero. However, the limit of the sequence $\{f_k\}$ is the characteristic function of rationals be longing to I, which is not Riemann integrable.
The measurable functions are the basis for the development of the theory of Lebesgue integration. The simplest measurable function is the characteristic function of a set E of finite measure. Its integral, in the sense of Lebesgue, is the measure of E. A finite linear combination of characteristic functions of finite sets is called simple function. Its integral is defined by linear extension of the previous one.
Given a nonnegative measurable function f, it is possible to obtain a monotonically non-

decreasing sequence $\{a_k\}$ of simple functions that approximate f almost everywhere. The integral of f is then defined as the (finite or infinite) limit of the monotonous sequence of the integrals of the a_k. Finally, for an arbitrary measurable function f, we consider f^+ and f^-, which are respectively the positive and negative parts of f. Since f^+ and f^- nonnegative measurable functions. When both integrals are not infinite states that f is integrable in the sense of Lebesgue, and that difference is its integral.

The method of approximation of a non-negative measurable function f by simple functions, consest on expanding the domain of definition of these, while the approximation is refined to make their values are increasingly closer together and closer to the f, and vary in an increasing interval. A very graphic image that sets the comparison between the Riemann integral and Lebesgue is the following: if it were to measure money involved a lot of coins placed on a table, Riemann split the table into rectangles and count on each them while Lebesgue rate currencies and then the count. This stiffness involving partitions Riemann seen, and indicates that the simple functions that approximate a non-negative function f, whereby its integral is obtained are constant in sets where f is a small oscillation.

Another shortcoming of the Riemann integral is that if f' exists at each point $[a, b]$ and is bounded, one would expect that f' be integrable and $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ for each $x \in [a, b]$. However, this is not true, there are differentiable functions with bounded derivative but not Riemann integrable.

Índice general

1. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ **1**
- 1.1. Definición y propiedades 1
- 1.2. El conjunto y la función de Cantor 10
  - 1.2.1. El conjunto de Cantor 10
  - 1.2.2. La función de Cantor y consecuencias 13

2. Funciones medibles **19**
- 2.1. Definición y propiedades 19
- 2.2. Teorema de Egoroff 24
- 2.3. Aproximación por funciones simples 25

3. La integral de Lebesgue de funciones acotadas **27**
- 3.1. Definición y propiedades 27
- 3.2. Teorema de la convergencia acotada 33
- 3.3. Caracterización de las funciones Riemann integrable 35

4. Teorema Fundamental del Cálculo **39**
- 4.1. El conjunto Smith-Volterra-Cantor 39
- 4.2. La función de Volterra 41
- 4.3. Teorema Fundamental del Cálculo 50

A. La integral de Lebesgue de funciones medibles **53**
- A.1. Definición y propiedades 53
- A.2. Teoremas de intercambio del límite con la integral 56

Bibliografía **60**

Capítulo 1

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

1.1. Definición y propiedades

Para cualquier intervalo I (abierto, cerrado, semiabierto) con extremos a y b ($a < b$), la longitud de I se define por $\ell(I) = b - a$. En particular, la longitud de cualquier intervalo no acotado es infinita. Sin embargo, hay situaciones en las que es necesario medir conjuntos diferentes de intervalos. Una extensión de unión de intervalos es simple, pero una extensión para conjuntos arbitrarios es menos obvia. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es una de las muchas aproximaciones a la solución de este problema. Por tanto pediremos que esta medida se comporte fundamentalmente de la misma forma que lo hace la longitud. Esto es, si A es un conjunto de números reales, entonces la medida de Lebesgue de A, que denotaremos por $m(A)$, debe poseer las siguientes propiedades:

a) Si I es un intervalo, entonces $m(I) = \ell(I)$.

b) Si A es un subconjunto de B, $m(A) \leq m(B)$.

c) Invariancia por traslaciones. Esto es, si x_0 es una constante y definimos $A + x_0 = \{x + x_0 : x \in A\}$, entonces $m(A + x_0) = m(A)$.

d) Si A y B son dos conjuntos disjuntos, entonces $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Además, para una sucesión de conjuntos disjuntos $\{A_i\}$, $\displaystyle m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ (aditividad numerable).

Una vez hecha la lista de propiedades deseadas, podemos comenzar a construir la medida de Lebesgue.

El concepto esencial de como la medida de Lebesgue determina la longitud de un conjunto es la noción de recubrimiento numerable por intervalos.

Definición 1 *Un recubrimiento numerable por intervalos de A es una colección numerable de intervalos abiertos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ cuya unión contiene a A, es decir, $\displaystyle A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Para colecciones finitas admitiremos que I_n puede ser $\emptyset$ y que su longitud es cero.*

Dado que podemos calcular fácilmente la longitud de los intervalos, podemos utilizar la noción de recubrimiento numerable por intervalos para medir la longitud de un conjunto. La medida exterior de Lebesgue determina la longitud de un conjunto indirectamente, tomando la suma de las longitudes de los intervalos de cada posible recubrimiento numerable por intervalos y tomando el ínfimo. La siguiente definición formaliza esta idea.

Definición 2 *Sea $E \subset \mathbb{R}$. La medida exterior de Lebesgue de E, que denotaremos por $m^*(E)$, se define como*

$$m^*(E) = inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : \{I_k\}_{k=1}^{\infty} \text{ es un recubrimiento numerable por intervalos de } E\}.$$

La medida exterior de Lebesgue, a pesar de que verifica alguna de las propiedades deseadas no lo hace con todas. El problema es que la medida exterior no es numerablemente aditiva, sino numerablemente subaditiva, es decir, la medida de la unión de conjuntos disjuntos puede ser menor que la suma de sus medidas individuales. El siguiente teorema pone de relieve las características que posee la medida exterior.

Teorema 1 *La medida exterior de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:*

i) Si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $m^*(E_1) \leq m^*(E_2)$.

ii) Si E es numerable, entonces $m^*(E) = 0$.

iii) $m^*(\emptyset) = 0$.

iv) $m^*(E)$ es invariante por traslaciones.

v) m^* es numerablemente subaditiva, es decir, dado una sucesión $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ de conjuntos,

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i).$$

vi) Si I es un intervalo, entonces $m^*(I) = \ell(I)$.

Demostración.

i) Se obtiene directamente de la definición de medida exterior.

ii) Supongamos que el conjunto $E = \{x_k : k \in \mathbb{Z}^+\}$ es infinito. Dado $\delta > 0$ y $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k = \frac{\delta}{2}$, tenemos que $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (x_k - \delta_k, x_k + \delta_k)$, luego por la definición de medida exterior obtenemos que $m^*(E) < \delta$. Por lo tanto, podemos concluir que $m^*(E) = 0$. Por otro lado, si fuese E finito lo tendríamos por i).

iii) Se obtiene de los dos anteriores.

iv) Dado un recubrimiento numerable por intervalos de E obtenemos un recubrimiento numerable por intervalos con la misma longitud de $E+x_0$ mediante traslación, y viceversa, luego concluimos que $m^*(E+x_0) = m^*(E)$.

v) Es trivial para el caso en que $\sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) = \infty$. Comprobemos el caso en que la suma es finita. Dado $\delta > 0$, existirá para cada i, una sucesión $\{I_k^i\}$ de intervalos abiertos, de modo que $E_i \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^i) < m^*(E_i) + \delta/2^i$. Nos queda $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^i$ y

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k^i) < \sum_{i=1}^{\infty}(m^*(E_i) + \delta/2^i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + \delta$$

Por tanto, $m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + \delta$.

vi) Partiremos de un intervalo I = [a,b] cerrado y acotado. Dado $\delta > 0$, tenemos que

$$[a,b] \subseteq (a,b) \cup (a - \frac{\delta}{4}, a + \frac{\delta}{4}) \cup (b - \frac{\delta}{4}, b + \frac{\delta}{4}),$$

luego, $m^*(I) \leq b - a + \delta$, por lo que obtenemos que $m^*(I) \leq \ell(I)$. Para probar la otra desigualdad, cogemos una sucesión $\{I_k\}$ de intervalos abiertos que cubren a I. Debido a que I es compacto, vamos a elegir una subsucesión de $\{I_k\}$ que cubre a I y es de la forma $\{J_i : 1 \leq i \leq n\}$, verificando que:

$$a \in J_1 = (a_1, b_1),\ b_1 \in J_2 = (a_2, b_2),\ b_2 \in J_3 = (a_3, b_3), \ldots,\ b_{n-1} \in J_n = (a_n, b_n),$$

donde $b_{n-1} \leq b < b_n$. De esto obtenemos:

$$\begin{aligned} b - a < b_n - a_1 &= \sum_{i=2}^{n}(b_i - b_{i-1}) + (b_1 - a_1) \\ &< \sum_{i=2}^{n}(b_i - a_i) + (b_1 - a_1) = \sum_{i=1}^{n} \ell(J_i) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k). \end{aligned}$$

Por tanto, $\ell(I) \leq m^*(I)$. Con esto hemos demostrado el enunciado para intervalos cerrados y acotados.
Supongamos ahora I = (a,b) un intervalo abierto y acotado. Como $m^*(I) \leq \ell(I)$ y

$$b - a = m^*([a,b]) \leq m^*((a,b)) + m^*(a) + m^*(b) = m^*((a,b))$$

Por lo que, $\ell(I) \leq m^*(I)$. La demostración para intervalos semiabiertos se resuelve de modo similar.

Para terminar, si I es un intervalo no acotado y $M > 0$. Existe $J \subseteq I$ un intervalo acotado tal que $m^*(J) = \ell(J) = M$ y $m^*(I) \geq m^*(J) = M$. Como M es arbitrario, tenemos que $m^*(I) = \infty = \ell(I)$.

□

Definición 3 *Un conjunto de números reales E es medible Lebesgue si para cada conjunto de números reales A,*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Para cualquier conjunto E medible Lebesgue, su medida de Lebesgue, denotada por $m(E)$, es igual a su medida exterior de Lebesgue $m^*(E)$.

Alguna de las propiedades de los conjuntos medibles vienen recogidas en el siguiente teorema

Teorema 2 *La colección de conjuntos medibles Lebesgue tiene las siguientes propiedades:*

i) Los conjuntos $\emptyset$ y $\mathbb{R}$ son medibles, con medida 0 y ∞, respectivamente.

ii) Si E es un conjunto medible, entonces E^c también lo es.

iii) Cualquier conjunto con medida exterior 0 es medible.

iv) Si dos conjuntos A y B son medibles, entonces $A \cap B$ y $A \cup B$ también lo son. Además, la intersección y unión numerables de conjuntos medibles también es medible.

v) Si E es medible, entonces $E + x_0$, es medible, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración.

Los apartados i), ii) y iii) son casi inmediatos.

iv) Cogemos un conjunto $E \subseteq R$. Sabemos que:

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B)$$

Haciendo uso de las Leyes de Morgan y la subaditividad tenemos:

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \\ &= m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c \cap B) + m^*(E \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c) \end{aligned}$$

Por tanto, $A \cup B$ es medible. Como $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, obtenemos que $A \cap B$ es también medible.

v) Iniciamos la demostración cogiendo un conjunto $A \subseteq R$ y hacemos:

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A\cap E) + m^*(A\cap E^c) \\ &= m^*((A\cap E)+x_0) + m^*((A\cap E^c)+x_0) \\ &= m^*((A+x_0)\cap(E+x_0)) + m^*((A+x_0)\cap(E^c+x_0)) \\ &= m^*((A+x_0)\cap(E+x_0)) + m^*((A+x_0)\cap(E+x_0)^c) \end{aligned}$$

De aquí, obtenemos:

$$m^*(A) = m^*(A+x_0) = m^*(A\cap(E+x_0)) + m^*(A\cap(E+x_0)^c)$$

por lo que, $E+x_0$ es medible.

□

Teorema 3 *Los intervalos son medibles.*

Demostración.

Cogemos $a \in \mathbb{R}$. Vamos a comprobar que el intervalo (a,∞) es medible, el resto de intervalos se podrán comprobar haciendo uso de las propiedades del teorema anterior. Suponemos $A \subseteq \mathbb{R}$, y tomamos $A_1 = A\cap(-\infty,a]$ y $A_2 = A\cap(a,\infty)$. Queremos demostrar que:

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$$

En el caso en que $m^*(A) = \infty$ sería trivial. Lo vamos a probar para $m^*(A) < \infty$. Dado $\delta > 0$, por definición va a existir una sucesión I_k de intervalos abiertos, tal que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < m^*(A) + \delta$. Para cada k, cogemos $I_k^1 = I_k \cap (-\infty,a]$ y $I_k^2 = I_k \cap (a,\infty)$. Hemos conseguido, I_k^1 y I_k^2, dos sucesiones de intervalos que recubren A_1 y A_2, y:

$$m^*(I_k^1) + m^*(I_k^2) = \ell(I_k^1) + \ell(I_k^2) = \ell(I_k)$$

Por lo que,

$$m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k^1) + \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) < m^*(A) + \delta.$$

Como δ es arbitrario nos queda, $m^*(A_1) + m^*(A_2) \leq m^*(A)$.

□

Teorema 4 *Si* $\{E_i\}_{i=1}^n$ *es una colección finita de conjuntos medibles disjuntos, entonces*

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

Demostración.

Lo probaremos mediante inducción. Para el caso $n = 1$, el resultado es trivial. Asumamos que $m(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i) = \sum_{i=1}^{k-1} m(E_i)$ para un entero positivo $k > 1$. Entonces, se sigue por la hipótesis de inducción que:

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{i=1}^{k} E_i) &= m((\bigcup_{i=1}^{k} E_i) \cap E_k) + m((\bigcup_{i=1}^{k} E_i) \cap E_k^c) \\ &= m(E_k) + m(\bigcup_{i=1}^{k-1} E_i) \\ &= m(E_k) + \sum_{i=1}^{k-1} m(E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m(E_i). \end{aligned}$$

Luego el resultado queda probado para cualquier n entero positivo.

□

Podemos usar el caso de sumas finitas para probar que la medida de Lebesgue es numerablemente aditiva.

Teorema 5 *Si E_i es una sucesión de conjuntos medibles, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ son conjuntos medibles.*

Demostración.

Cogemos $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, $H_1 = E_1$ y $H_n = E_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i$ para cada $n \geq 2$. Entonces, H_n es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Para cada n tenemos que, $E^c \subseteq (\bigcup_{i=1}^{n} H_i)^c$. Vamos a hacer uso del teorema anterior, cogiendo $A \subseteq R$,

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} H_i)) + m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} H_i)^c) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap H_i) + m^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

De aquí tenemos,

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap H_i) + m^*(A \cap E^c)$$

Como $A \cap E = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A \cap H_i)$, nos queda:

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap H_i) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A).$$

Por tanto, E es un conjunto medible. Ya que $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = (\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i)^c)^c$, el conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$ es medible.

□

Corolario 1 *Los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados en* $\mathbb{R}$ *son medibles.*

Demostración.

Todo conjunto abierto es medible porque se puede escribir como unión numerable de intervalos.

□

Teorema 6 *Si* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una colección numerable de conjuntos medibles disjuntos, entonces*

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Demostración.

Por el teorema anterior, sabemos que para cada entero positivo n

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i) = m(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leq m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i).$$

Sin embargo, ya que por la subaditividad numerable de la medida exterior de Lebesgue y la medibilidad de la unión numerable de conjuntos medibles, también sabemos que

$$m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i).$$

Cuando se combina la desigualdad anterior con el hecho de que la siguiente sucesión de sumas parciales $\sum_{i=1}^{n} m(E_i)$ converge a $\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$ si esta suma es finita, o tiende a ∞ en el caso de que $\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) = \infty$, llegamos a la igualdad deseada.

$\square$

Por lo tanto, nos encontramos con que la medida de Lebesgue satisface las cuatro condiciones establecidas al inicio de la sección. Aunque la medida tiene muchas más propiedades interesantes, vamos a mostrar una propiedad sobre el límite de uniones e intersecciones de conjuntos medibles que utilizaremos posteriormente.

Teorema 7 *Sea $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles.*

i) Si $E_n \subseteq E_{n+1}$ para todo n y $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

ii) Suponemos que $m(E_1)$ es finita. Si $E_{n+1} \subseteq E_n$, para todo n y $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces $m(E) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.

Demostración.

Si suponemos que $m(E_n) = \infty$ para algún n, el apartado i) se verifica. Supongamos que $m(E_n) < \infty$ para todo n. Cogemos $H_1 = E_1$ y $H_k = E_k \setminus E_{k-1}$ para $k \geq 2$. Por esto, H_k es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos de manera que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$. Teniendo en cuenta que $E_k = H_k \cup E_{k-1}$ tenemos que $m(H_k) = m(E_k) - m(E_{k-1})$ para $k \geq 2$. Por el Teorema 6,

$$m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(H_k) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=2}^{n} (m(E_k) - m(E_{k-1})) + m(E_1)) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

ii) Tenemos que $\{m(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente de números no negativos. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} m(E_n)$ existe. Sea ahora $A_k = E_k \setminus E_{k+1}$, para todo k. Entonces $\{A_k\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos con $E_1 \setminus E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Entonces, se sigue que $m(E_1 \setminus E) = m(E_1) - m(E)$ y $m(A_k) = m(E_k) - m(E_{k+1})$, para todo k, de aquí se observa que:

$$\begin{aligned}
m(E_1) - m(E) = m(E_1 \setminus E) &= \sum_{k=1}^{\infty} m(A_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (m(E_k) - m(E_{k+1})) \\
&= \lim_{n\to\infty} (m(E_1) - m(E_n)) \\
&= m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n)
\end{aligned}$$

De aquí, se concluye que $m(E) = \lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)$.

$\square$

La definición de ser medible Lebesgue es un poco extraña y también difícil de captar intuitivamente. La razón es que el concepto de no ser medible golpea en el corazón de los fundamentos de la matemática moderna. Es muy difícil de imaginar y visualizar dos conjuntos E y A para los cuales $m^*(A) \neq m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^c)$. Esto significaría que E es un conjunto no medible. Durante mucho tiempo, la existencia de conjuntos no medibles fue controvertida ya que su construcción se basa en la utilización del axioma de elección, uno de los diez axiomas fundamentales en los que está basada la matemática moderna, que se conocen colectivamente como la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel con axioma de la elección, o ZFC. Además, se comprobó, finalmente, en 1964, que el axioma de elección es independiente de los otros nueve axiomas de Zermelo-Fraenkel, lo que significa que los axiomas son consistentes, independientemente de si adoptamos el axioma de elección o su negación. Hoy en día, una gran mayoría de matemáticos acepta el axioma de la elección.

Teorema 8 *Existen conjuntos que no son medibles Lebesgue.*

Demostración.

Comenzaremos definiendo una relación $\sim$ sobre $\mathbb{R}$ dada por, $x \sim y$ si $x - y$ es racional. No es difícil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia. Los conjuntos de la forma $\{x + r : r \in \mathbb{Q}\}$ están contenidos en la misma clase de equivalencia. Puesto que cada clase de equivalencia contiene un punto en $[0,1]$, haciendo uso del axioma de elección, definimos $E \subseteq [0,1]$ como un conjunto que consta de un punto en cada clase de equivalencia. Denotemos por $\{r_i\}_{i\in\mathbb{Z}^+}$ una enumeración de los racionales en $[-1,1]$ y por $E_i = E + r_i$. Probemos que

$$[0,1] \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq [-1,2].$$

Es fácil ver que $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \subseteq [-1,2]$ ya que cada uno de los puntos de los E_i es la suma de dos elementos de $[0,1]$ y $[-1,1]$ respectivamente. Para la primera inclusión tomemos $x \in [0,1]$, entonces existe $y \in E$ tal que $x - y \in \mathbb{Q}$. Ya que $-1 \leq x - y \leq 1$, existe algún índice j verificando que $x - y = r_j$. Así que, $x = y + r_j \in E_j \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$. Observamos que si i y j son distintos entonces $E_i \cap E_j = \emptyset$, de lo contrario existiría $y, z \in E$ tal que $y + r_i = z + r_j$, lo que implica que $y \sim z$, llegando a una contradicción.

Supongamos ahora que el conjunto E es medible. Esto conllevaría a que cada E_i es medible y que $m(E_i) = m(E + r_i) = m(E)$. Como los conjuntos E_i son disjuntos, tendríamos que

$$1 \leq m(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(E) \leq 3,$$

lo cuál sería imposible ya que si $m(E) = 0$, entonces $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E) = 0$ y si $m(E) > 0$ tendríamos que $\infty = \sum_{k=1}^{\infty} m(E) \leq 3$.

$\square$

En realidad se puede probar algo más general:

Teorema 9 *Si A es un conjunto medible con medida positiva, entonces A contiene un subconjunto no medible.*

1.2. El conjunto y la función de Cantor

1.2.1. El conjunto de Cantor

Todo conjunto numerable tiene medida de Lebesgue cero. A continuación, veremos que también existen conjuntos no numerables de medida cero.

Sea C_0 el intervalo cerrado $[0, 1]$ de la recta real. Dividimos este intervalo en tres subintervalos

$$[0, \frac{1}{3}], (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), [\frac{2}{3}, 1].$$

El primer paso, para la construcción del conjunto de Cantor, consiste en eliminar el subintervalo abierto intermedio, o sea quitamos $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Sea C_1 la unión de los intervalos restantes, es decir $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

El segundo paso, consiste en repetir el mismo proceso a cada uno de los intervalos que componen C_1. En otras palabras, a cada intervalo que conforma C_1 lo dividimos en tres partes de igual tamaño generándose los siguientes subintervalos

$$[0, \frac{1}{9}], (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \text{ y } [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}], (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}), [\frac{8}{9}, 1].$$

Como antes, ahora quitamos los subintervalos abiertos intermedios, quedando así la siguiente unión de intervalos

$$[0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1],$$

que denotaremos como C_2.

Para obtener C_3 repetimos el proceso, es decir, a cada uno de los intervalos que componen C_2 (que tienen longitud $\frac{1}{9}$), lo dividimos en tres partes de igual tamaño y quitamos los tercios medios. Con esto obtendríamos el tercer paso de la construcción que consiste en el conjunto:

$$C_3 = [0, \frac{1}{27}] \cup [\frac{2}{27}, \frac{3}{27}] \cup [\frac{6}{27}, \frac{7}{27}] \cup [\frac{8}{27}, \frac{9}{27}] \cup [\frac{18}{27}, \frac{19}{27}] \cup [\frac{20}{27}, \frac{21}{27}] \cup [\frac{24}{27}, \frac{25}{27}] \cup [\frac{26}{27}, 1].$$

Este proceso se sigue indefinidamente. Es decir, para obtener C_{m+1}, se dividen en tres partes todos los intervalos que componen a C_m y se suprimen los intermedios.

Figura 1.1: Construcción del conjunto de Cantor C.

Finalmente el **Conjunto de Cantor**, que durante todo este trabajo se le denotará por la letra C, se define como la intersección de todos los conjuntos C_m. Esto es,

$$C = \bigcap_{m=0}^{\infty} C_m.$$

Proposición 1 *C_m es la unión de 2^m intervalos cerrados y disjuntos.*

Demostración.

Haremos esta prueba por inducción:

Claramente C_1 está formada por $2 = 2^1$ intervalos cerrados y disjuntos. Supongamos ahora que C_m está formado por 2^m intervalos cerrados y disjuntos. Sabemos que C_{m+1} se obtiene de C_m a partir de dividir cada uno de los intervalos cerrados que conforman a C_m en tres partes iguales y retirar el abierto de en medio. Entonces de cada intervalo de C_m obtenemos dos intervalos disjuntos entre si. De modo que C_{m+1} tiene el doble de intervalos que C_m. Concluyendo, como C_m tiene 2^m, C_{m+1} está formado por $2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$ intervalos cerrados y disjuntos.

$\square$

Teorema 10 *El conjunto de Cantor tiene medida de Lebesgue cero.*

Haremos dos demostraciones de este resultado:

Demostración 1.

Calcularemos la medida de cada uno de los conjuntos C_n y haciendo uso de las propiedades del límite de la medida de intersecciones de conjuntos obtendremos la medida de C. Observemos que el n-ésimo paso de la construcción de C, C_n, está formado por 2^n intervalos disjuntos, cada uno de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^n$. Recordando que la medida de un intervalo es su longitud y la medida de una colección de conjuntos disjuntos es simplemente la suma de sus medidas individuales, tenemos que $m(C_n) = 2^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Entonces, como $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ donde C_n es una sucesión de conjuntos encajados,

$$m(C) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Concluimos así que el conjunto de Cantor tiene medida 0.

□

Demostración 2.

En esta segunda demostración, restaremos a la medida de $[0,1]$ la medida de los intervalos que quitamos en la construcción de C. Observamos que en el primer paso, eliminamos un intervalo de longitud $\frac{1}{3}$, en el segundo 2 intervalos de longitudes $\frac{1}{9}$, en el tercero 4 intervalos de longitudes $\frac{1}{27}$ y así sucesivamente. Entonces, usando propiedades de series geométricas obtenemos que

$$\begin{aligned} m(C) &= m([0,1] \setminus (m([0,1] \setminus C))) = \\ &= 1 - (1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \cdots) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \\ &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

□

Definición 4 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

i) El conjunto A es perfecto si es cerrado y cada punto de A es un punto límite.

ii) A es nunca denso si $\bar{A}$ no contiene intervalos abiertos.

Teorema 11 *El conjunto C de Cantor es no vacío, perfecto y nunca denso de medida cero.*

Demostración.

Ya que $m(C) = 0$, no puede contener intervalos. Por lo que, C es nunca denso. Para probar que C es perfecto, debemos probar que cada punto en C es un punto límite. Cogemos $x \in C$ y $\delta > 0$. Elegimos un entero n tal que $3^{-n} < \delta$. Como $x \in C_n$, existe un intervalo cerrado I de longitud 3^{-n} tal que $x \in I \subseteq C_n$. Tomamos a un punto final de I, que es distinto de x y tenemos que $a \in C$ y $0 < |x - a| < \delta$. Por tanto, x es un punto límite de C.

□

Corolario 2 *C es no numerable.*

Demostración.

Es consecuencia del hecho de que todo conjunto perfecto es no numerable.

□

1.2.2. La función de Cantor y consecuencias

Nuestro objetivo es definir una función continua $F : [0,1] \to [0,1]$ cuya construcción está basada en el conjunto de Cantor y que presenta varias propiedades curiosas. Recordemos que el conjunto de Cantor $C \subset [0,1]$ y $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, donde C_k es unión disjunta de 2^k intervalos de longitud $\dfrac{1}{3^k}$.

Consideremos las sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ cuyos términos generales vienen dados por $f_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}$ y $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$, respectivamente. Por ejemplo, $f_0 = 1$, $F_0(x) = x$, $F_1(x)$ es una función continua creciente en $[0,1]$ que viene dada por

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3x-2), & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

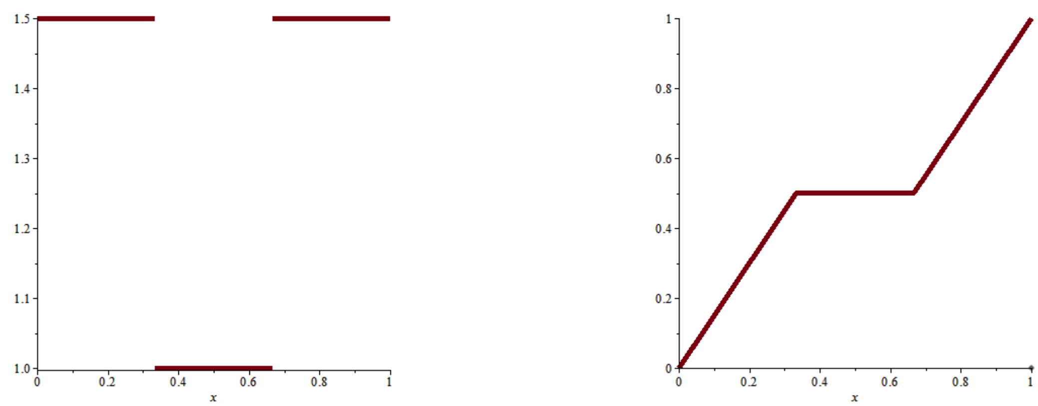

Figura 1.2: Las funciones f_1 y F_1.

De la misma manera, $F_2(x)$ es continua y creciente y viene dada por

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4}, & \text{si } \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(9x-2), & \text{si } \frac{2}{9} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(9x-6), & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{9} \\ \frac{3}{4}, & \text{si } \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9} \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(9x-8), & \text{si } \frac{8}{9} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

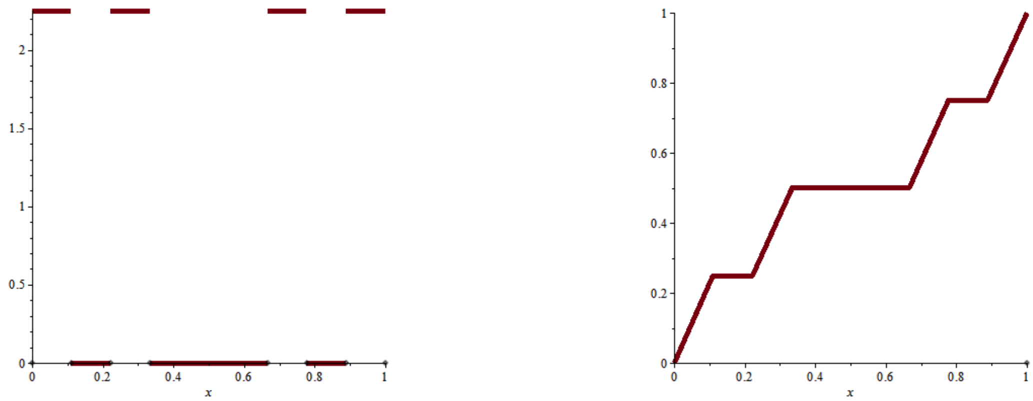

Figura 1.3: Las funciones f_2 y F_2.

Observemos que si $[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_j+1}{3^n}]$ es uno de los intervalos que forman C_n:

$$\int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} f_{n+1}(t)dt = \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} (\frac{3}{2})^{n+1}\chi_{C_{n+1}}(t)dt = \frac{1}{2^n} = \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} (\frac{3}{2})^{n}\chi_{C_n}(t)dt = \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} f_n(t)dt.$$

Por tanto obtenemos que $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas y crecientes donde su término general verifica

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ \frac{j+1}{2^n}, & \text{si } \frac{a_j+1}{3^n} \leq x \leq \frac{a_{j+1}}{3^n} \text{ para } j = 0, \cdots, 2^n - 2 \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

y los escalones de la función los unimos de forma lineal. Notemos también que si $x \in [0,1] \setminus C_{n-1}$ entonces $F_n(x) = F_{n-1}(x)$.

Proposición 2 *Sean $F_n(x)$ las funciones que acabamos de definir. Entonces:*

i) $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \ \ x \in [0,1]$.

ii) $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy uniforme en* $[0,1]$.

Demostración.

i)

$$\begin{aligned}
|F_{n+1}(x) - F_n(x)| &= \left| \int_0^x (\frac{3}{2})^{n+1}\chi_{C_{n+1}}(t) - (\frac{3}{2})^n \chi_{C_n}(t)dt \right| \\
&= \left| \int_{\frac{a_j}{3^n}}^x (\frac{3}{2})^{n+1}\chi_{C_{n+1}}(t) - (\frac{3}{2})^n \chi_{C_n}(t)dt \right| \\
&\leq \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} (\frac{3}{2})^{n+1}\chi_{C_{n+1}}(t)dt + \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} (\frac{3}{2})^n \chi_{C_n}(t)dt = \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

ii) Sea $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$, se tiene que $|F_m(x) - F_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$. Fijemos $\varepsilon > 0$, y tomemos n_0 de forma que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Sean $m, n > n_0$, y supongamos que $m > n$, entonces, aplicando el apartado anterior,

$$\begin{aligned}
|F_m(x) - F_n(x)| &= |F_m(x) - F_{m-1}(x) + F_{m-1}(x) - F_{m-2} + \cdots + F_{n+1}(x) - F_n(x)| \\
&\leq |F_m(x) - F_{m-1}(x)| + |F_{m-1}(x) - F_{m-2}| + \cdots + |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \\
&\leq \frac{1}{2^{m-2}} + \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Hemos demostrado por tanto que $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy uniforme.

□

El espacio de las funciones continuas en $[0,1]$ con la norma uniforme es completo, luego, toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir, $F_n(x) \to F(x)$ cuando $n \to \infty$. A esta función la llamaremos *Función de Cantor*.

Teorema 12 *La función de Cantor, F, es continua y creciente.*

Demostración.

Como $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones crecientes, tenemos que, para cualquier n y todo $x, y \in [0,1]$, con $x < y$, $F_n(x) \leq F_n(y)$. Tomando límites cuando $n \to \infty$ a ambos lados, llegamos a que $F(x) \leq F(y)$. Por tanto, F es creciente. Además, como $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy y $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ son funciones continuas, tenemos que $F(x)$ es una función continua.

□

También, por construcción de la función de Cantor, es fácil observar que:

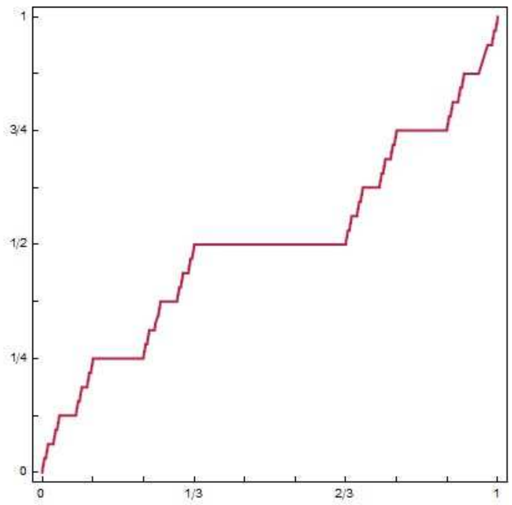

Figura 1.4: La funcion de Cantor F.

- F(0)=0.
- F(1)=1.
- F es constante en cada intervalo del complementario del conjunto de Cantor. Por tanto, $F' = 0$ en casi todo punto.

Haciendo uso de la función de Cantor es posible obtener varias propiedades interesantes de la medida de Lebesgue. Para ello necesitamos el siguiente lema.

Lema 1 *La aplicación* $g : [0,1] \to [0,2]$ *definida por* $g(x) = F(x) + x$ *es un homeomorfismo.*

Demostración.

1. g es inyectiva, porque es estrictamente creciente, puesto que si $x < y$ entonces $F(x) \leq F(y)$ obteniendo que $g(x) = F(x) + x < F(y) + y = g(y)$.
2. g es continua, porque F lo es.
3. g es sobreyectiva, dado que $g(0) = 0$, $g(1) = 2$ y g es continua, por el Teorema del Valor Intermedio, g toma cualquier valor entre 0 y 2.
4. g tiene inversa continua. En efecto, sea $h = g^{-1}$ y U un subconjunto abierto de $[0,1]$. Entonces $[0,1] \setminus U$ es cerrado y acotado, por tanto compacto. Puesto que g es continua, $g([0,1] \setminus U)$ es compacto. Ahora
$$g([0,1] \setminus U) = h^{-1}([0,1] \setminus U) = [0,2] \setminus h^{-1}(U).$$
Así que, $[0,2] \setminus h^{-1}(U)$ es compacto, luego cerrado y acotado. Entonces, $h^{-1}(U)$ es abierto. Concluyendo que h es continua.

Por consiguiente, g es un homeomorfismo.

□

Lema 2 *$g(C)$ tiene medida de Lebesgue igual a 1.*

Demostración.

Recordemos que F es constante en cualquier intervalo de $[0,1] \setminus C$, por consiguiente para todo intervalo $(a,b) \subset [0,1] \setminus C$

$$m(g(a), g(b)) = g(b) - g(a) = F(b) + b - F(a) - a = b - a.$$

Sea $\{E_{n,k}\}_{k=1}^{2^{n-1}}$ la colección de intervalos eliminados en el paso n en la construcción del conjunto de Cantor. Entonces

$$\begin{aligned} m([0,2] \setminus g(C)) &= m(g([0,1] \setminus C)) = m(g(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} E_{n,k})) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} g(E_{n,k})) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} m(g(E_{n,k})) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} m(E_{n,k}) = 1, \end{aligned}$$

puesto que, la medida total de los intervalos eliminados es 1. Dado que $[0,2]$ es unión disjunta de $g(C)$ y de $[0,2] \setminus g(C)$, entonces

$$2 = m([0,2]) = m(g(C)) + m([0,2] \setminus g(C)) = m(g(C)) + 1.$$

Luego la medida de $g(C)$ es 1.

□

Lema 3 *Existe un conjunto medible $A \in [0,1]$ tal que $g(A)$ es no medible.*

Demostración.

Puesto que la medida de $g(C)$ es mayor que 0, existe un conjunto no medible E contenido en $g(C)$. Sea $A = g^{-1}(E)$, puesto que A está contenido en C y C tiene medida de Lebesgue 0, A es medible Lebesgue pero $g(A)$ es igual a E que es no medible.

□

Como consecuencia de los lemas anteriores obtenemos:

Corolario 3 *Ser de medida cero no es una propiedad topológica.*

Corolario 4 *Ser medible no es una propiedad topológica.*

Capítulo 2

Funciones medibles

2.1. Definición y propiedades

Nuestro objetivo es definir un proceso de integración que tenga mejores propiedades que la integral de Riemann. Ya que las funciones son los objetos de estudio en la teoría de integración, tendremos que determinar que funciones vamos a utilizar. Queremos garantizar que los conjuntos que surgen cuando trabajamos con dichas funciones son medibles. En este caso, así como en muchos otros, las imágenes inversas de los conjuntos son más útiles que las imágenes de los conjuntos. Por ejemplo, una función es continua, si y solo si, la imagen inversa de cada conjunto abierto es abierta. Una variación de esto nos da el concepto de función medible. Una función es medible, si y solo si, la imagen inversa de cada conjunto abierto es medible. La clase de las funciones medibles es muy variada y constituye la base de la integral de Lebesgue. En este capítulo, vamos a mostrar algunas propiedades de las funciones medibles.

Definición 5 *Una función $f : E \to \mathbb{R}$ es medible si E es un conjunto medible y para cada número real r, el conjunto $\{x \in E : f(x) > r\}$, es también medible.*

Como se indica en la definición, el dominio de una función medible debe ser un conjunto medible. De hecho, siempre vamos a suponer que el dominio de la función (medible o no) es un conjunto medible, a no ser que se expecifique lo contrario. De esta definición, es evidente que las funciones continuas y las funciones monótonas son medibles. Al igual, que hay conjuntos no medibles, también hay funciones no medibles.

Sea E un conjunto medible con medida positiva y sea $A \subseteq E$. La función χ_A representa la función característica de A. Por lo tanto, $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ y $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$. El conjunto $\{x \in E : \chi_A(x) > r\}$ es $\emptyset$, A o E, de este modo χ_A es una función medible, si y solo si, A es un conjunto medible.

Teorema 13 *Sea E un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$. Son equivalentes:*

i) Para cada número real r, el conjunto $\{x \in E : f(x) > r\}$ es medible.

ii) Para cada número real r, el conjunto $\{x \in E : f(x) \geq r\}$ es medible.

iii) Para cada número real r, el conjunto $\{x \in E : f(x) < r\}$ es medible.

iv) Para cada número real r, el conjunto $\{x \in E : f(x) \leq r\}$ es medible.

Demostración.

Para comprobar que $i) \Rightarrow ii)$, simplemente vemos que:

$$\{x \in E : f(x) \geq r\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > r - \frac{1}{n}\}$$

para cada número real r. Ahora haciendo uso de que la intersección numerable de conjuntos medibles es medible, obtenemos el resultado deseado. Las restantes implicaciones se comprueban haciendo uso de que el complementario de un conjunto medible es también medible.

$\square$

Cuando trabajamos con funciones, los conjuntos de medida cero con frecuencia son ignorados. Una propiedad se dice que se verifica en casi todo punto, si lo verifican todos los puntos excepto un conjunto con medida cero. Por ejemplo, las funciones $f : E \to \mathbb{R}$ y $g : E \to \mathbb{R}$ son iguales en casi todo punto, si y solo si, el conjunto $\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida cero. Decir que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en casi todo punto de [a,b] significa que hay un conjunto $A \subseteq [a, b]$ con $m(A) = 0$, de tal modo que f tiene derivada en cada punto de $[a, b] \setminus A$.

Teorema 14 *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible y $g : E \to \mathbb{R}$. Si $f = g$ para casi todo punto en E, entonces g es medible.*

Demostración.

Sea $r \in \mathbb{R}$, dado $A = \{x \in E : f(x) > r\}$ y $B = \{x \in E : g(x) > r\}$. Por hipótesis, tenemos que el conjunto A es medible y además sabemos que $A \setminus B$ y $B \setminus A$ tienen medida cero. Entonces,

$$B = (B \setminus A) \cup (B \cap A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus (A \setminus B))$$

es un conjunto medible. De esto se deduce que g es una función medible.

$\square$

Teorema 15 *Dadas $f : E \to \mathbb{R}$ y $g : E \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $k \in \mathbb{R}$. Entonces, $f + k$, kf, $f + g$, $|f|$, f^2 y fg son funciones medibles. Además, f/g es una función medible si $g(x) \neq 0$, para todo $x \in E$.*

Demostración.

Vamos a demostrar la de $f+g$, por ser la menos obvia. Sea r un número real cualquiera. Si $f(x)+g(x)>r$, entonces existirá un número racional q tal que $r-g(x)<q<f(x)$. De donde obtenemos que,

$$\{x \in E : (f+g)(x) > r\} = \bigcup_{q \in Q} (\{x \in E : f(x) > q\} \cap \{x \in E : g(x) > r-q\})$$

Por lo que, $f+g$ es una función medible. Para demostrar que fg es una función medible habría que utilizar que $4fg=(f+g)^2-(f-g)^2$.

□

Teorema 16 *Sea E un conjunto medible. Si* $f: E \to \mathbb{R}$ *es continua en casi todo punto de E, entonces f es medible.*

Demostración.

Sea D el conjunto de las discontinuidades de f en E. Ya que $m(D)=0$, todos los subconjuntos de D son medibles. Cogemos $r \in \mathbb{R}$ y tenemos:

$$\{x \in E : f(x) > r\} = \{x \in E \setminus D : f(x) > r\} \cup \{x \in D : f(x) > r\}.$$

Es suficiente probar que el conjunto $C = \{x \in E \setminus D : f(x) > r\}$ es medible. Puesto que f es continua en cada punto de C, para cada $x \in C$ existe un δ_x tal que $f(t) > r$, si $t \in \{z \in E : |z-x| < \delta_x\}$, cogemos $U = \bigcup_{x \in C} \{z : |z-x| < \delta_x\}$. Entonces U es un conjunto medible, (de hecho, es un conjunto abierto), y como consecuencia obtenemos que $C = U \cap (E \setminus D)$ es un conjunto medible.

□

Teorema 17 *Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones medibles definidas en E, entonces:*

i) $g_1(x) = sup\{f_n(x) : n \in Z^+\}$

ii) $g_2(x) = inf\{f_n(x) : n \in Z^+\}$

iii) $g_3(x) = \lim_{n\to\infty} sup\{f_n(x)\}$

iv) $g_4(x) = \lim_{n\to\infty} inf\{f_n(x)\}$

son funciones medibles.

Demostración.
Vamos a observar las siguientes igualdades:

$$\{x \in E : g_1(x) > r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) > r\}$$

$$\{x \in E : g_2(x) < r\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) < r\}$$

$$g_3(x) = inf\{sup\{f_n(x) : n \geq k\} : k \in Z^+\}$$

$$g_4(x) = sup\{inf\{f_n(x) : n \geq k\} : k \in Z^+\}$$

y utilizando propiedades de los conjuntos medibles, tendríamos la demostración.

□

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en un conjunto E y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en casi todo punto de E. Queremos demostrar que la función f es medible. La función límite f, está definida solo en los puntos $x \in E$ en los cuales, existe el límite $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Por lo tanto, el dominio de f no es todo E. Supongamos que $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en casi todo punto de $[a, b]$. El dominio de la función g' incluye solo los puntos de $[a, b]$ donde existe el límite.

Corolario 5 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E y $f : E \to \mathbb{R}$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en casi todo punto de E, entonces f es medible.*

Teorema 18 *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable en casi todo punto de $[a, b]$, entonces la función f' es medible.*

Demostración.

La función f es medible por el Teorema 16. Extendiendo f a $[a, b+1)$, siendo $f(x) = f(b)$ para $x \in (b, b+1)$. Cogemos $\{\delta_n\}$ una sucesión en $(0, 1)$ que converge a 0. Para cada n, definimos $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ como:

$$f_n(x) = \frac{f(x+\delta_n)-f(x)}{\delta_n}$$

f_n es medible y $\{f_n\}$ converge puntualmente a f' en casi todo punto de [a,b]. Por el corolario anterior, f' es una función medible.

□

Una colección de conjuntos $\mathcal{A}$, es un álgebra si verifica:

i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

ii) Si $E \in \mathcal{A}$, entonces $E^c \in \mathcal{A}$

iii) $\mathcal{A}$ es cerrado bajo finitas uniones (y por tanto, bajo intersecciones finitas)

Un álgebra $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra si es cerrado bajo uniones numerables (y por tanto, bajo intersecciones numerables). La colección de todos los subconjuntos de números reales es un σ-álgebra. Por los teoremas mencionados anteriormente, tenemos que la colección de los conjuntos medibles Lebesgue es un σ-álgebra. Es fácil ver que la intersección de σ-álgebras es un σ-álgebra. Denotamos por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra que se obtiene por la intersección de todas las σ-álgebras que contienen los conjuntos abiertos. Por lo tanto, $\mathcal{B}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a todos los conjuntos abiertos. De los teoremas ya vistos sabemos que todo conjunto que se encuentra en $\mathcal{B}$ es medible. A un conjunto de $\mathcal{B}$ se le llama conjunto de Borel. Son conjuntos de Borel, los conjuntos numerables, los intervalos, los conjuntos abiertos y los conjuntos cerrados.

El siguiente teorema nos proporciona una caracterización de las funciones medibles:

Teorema 19 *Sea E un conjunto medible y $f : E \to \mathbb{R}$. f es medible ,si y solo si, $f^{-1}(B)$ es medible, para todo B un conjunto de Borel.*

Demostración

Supongamos que f es una función medible. Definimos la colección de conjuntos:

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : f^{-1}(A) \text{ es medible}\}$$

Es fácil ver que $\emptyset \in \mathcal{A}$. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces también A^c, pues:

$$f^{-1}(A^c) = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus A) = f^{-1}(\mathbb{R}) \setminus f^{-1}(A) = E \setminus f^{-1}(A).$$

Sea $\{A_n\}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$, entonces

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

es un conjunto medible. Se deduce por tanto, que $\mathcal{A}$ es un σ-álgebra. Cogemos (a, b) un intervalo abierto y tenemos que:

$$f^{-1}((a, b)) = f^{-1}((a, \infty)) \cap f^{-1}((-\infty, b))$$

es un conjunto medible. Por definición de $\mathcal{B}$, sabemos que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces, $f^{-1}(B)$ es medible para todo B conjunto de Borel. La demostración inversa es trivial.

□

Definición 6 *Una función $f : E \to \mathbb{R}$ es medible Borel si E es un conjunto de Borel y para cada número real r, el conjunto $\{x \in E : f(x) > r\}$ es un conjunto de Borel.*

Teorema 20 *Sean $f : E \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es medible y g es medible Borel, entonces $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ es medible.*

Demostración.

Para cada número real r, tenemos

$$\{x \in E : g(f(x)) > r\} = (g \circ f)^{-1}((r, \infty)) = f^{-1}(g^{-1}((r, \infty))).$$

Este es un conjunto medible por el Teorema 19, ya que $g^{-1}((r, \infty))$ es un conjunto de Borel.

□

Teorema 21 *La σ-álgebra de Borel es un subconjunto propio de los conjuntos medibles Lebesgue.*

Demostración.

Todo conjunto de Borel es medible Lebesgue, veamos que existen conjuntos medibles Lebesgues que no son de Borel. Dada $g = x + F(x)$, donde F es la función de Cantor, $h = g^{-1}$ es continua y por tanto medible. Supongamos que el conjunto que usamos en la prueba del Lema 3, A es un conjunto de Borel, puesto que h es medible entonces $h^{-1}(A) = g(A) = E$ es medible, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, A no puede ser un conjunto de Borel.

□

2.2. Teorema de Egoroff

El próximo teorema establece que sobre conjuntos de medida finita la convergencia puntual es casi convergencia uniforme.

Teorema 22 (Teorema de Egoroff) *Sea E un conjunto medible con medida finita y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en E. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente en casi todo punto de E a una función f, entonces para cada $\eta > 0$ existe un conjunto medible $H \subseteq E$ tal que $m(E \setminus H) < \eta$ y $\{f_n\}$ convergen uniformemente a f en H.*

Demostración.

La función f es medible por el Corolario 5. Sea B el conjunto de todos los puntos $x \in E$ para los cuales $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$. Sea k un entero positivo. Para cada entero positivo p, tenemos que:

$$B_k^p = \{x \in B : |f_n(x) - f(x)| < 1/k \text{ para todo } n \geq p\}.$$

Entonces, cada B_k^p es un conjunto medible y

$$B_k^p \subseteq B_k^{p+1}, \quad B = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_k^p, \quad \text{y } \lim_{p\to\infty} m(B - B_k^p) = 0.$$

Ahora elegimos un p_k tal que $m(B \setminus B_k^{p_k}) < \eta/2^k$. Se obtiene entonces una sucesión $\{B_k^{p_k}\}$ de subconjuntos de B. Sea $H = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^{p_k}$. Tenemos

$$B \setminus H = B \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k^{p_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B \setminus B_k^{p_k}),$$

obteniendo que:

$$m(E \setminus H) = m(B \setminus H) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(B \setminus B_k^{p_k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta}{2^k} < \eta.$$

Hemos probado que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en H, puesto que si $\delta > 0$ y elegimos un entero j tal que $1/j < \delta$. Supongamos que $n \geq p_j$ y $x \in H$, entonces $x \in B_j^{p_j}$ y por lo tanto $|f_n(x) - f(x)| < 1/j < \delta$.

$\square$

La hipótesis de que E tiene medida finita es esencial. Esto se observa fácilmente considerando la sucesión $\{\chi_{[n,n+1)}\}$ sobre $E = [0, \infty)$.

La convergencia definida por la conclusión del Teorema de Egoroff se llama convergencia casi uniforme. Observemos que este concepto es diferente de la convergencia uniforme salvo un conjunto de medida cero. Por ejemplo, sea $\{r_n\}$ una enumeración de los números racionales en $[0, 1]$. Para cada n, definimos:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = r_1, \ldots, r_n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a $\chi_{\mathbb{Q}}$ en $[0, 1]$, además la convergencia es uniforme en el conjunto de los irracionales en $[0, 1]$. Esto es, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a $\chi_{\mathbb{Q}}$ salvo en un conjunto de medida cero.

Por otro lado, si consideramos $g_n = \chi_{(0,\frac{1}{n})}$ para cada n. La sucesión $\{g_n\}$ converge puntualmente a la función cero en $[0, 1]$, luego por el Teorema de Egoroff hay convergencia casi uniforme. Sin embargo, la sucesión $\{g_n\}$ no converge uniformemente a cero fuera de algún conjunto de medida cero.

2.3. Aproximación por funciones simples

En la teoría de la integral de Riemann, las funciones escalonadas juegan un papel importante. Estas son funciones con rango finito que toman valores constantes en intervalos. En la integral de Lebesgue, las funciones escalonadas se sustituyen por funciones simples, que asumen valores constantes en conjuntos medibles.

Definición 7 *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible. La función f es una función simple si tiene un rango finito. Esta función se puede escribir como $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ donde los conjuntos E_i son medibles y disjuntos dos a dos, los c_i son distintos, y $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$.*

La representación de la definición, es la representación canónica de una función simple. Es obvio, que las funciones escalonadas son un tipo especial de funciones simples. Sea $f : E \to \mathbb{R}$. Las funciones f^+ y f^- están definidas del siguiente modo:

$$f^+(x) = max\{f(x), 0\} \qquad \text{y} \qquad f^-(x) = max\{-f(x), 0\}$$

Las funciones f^+ y f^- son medibles cuando f es medible, $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Teorema 23 *Sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible.*

i) Si f es no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente $\{s_n\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a f en E.

ii) Existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a f en E.

iii) Si f está acotada, entonces existe una sucesión $\{s_n\}$ de funciones simples que convergen uniformemente a f en E.

iv) Existe una sucesión $\{s_n\}$ de medibles, con rango numerable que convergen uniformemente a f en E.

Demostración.

Supongamos que f es no negativa. Para cada entero positivo n, sea

$$A_n = \{x \in E : f(x) \geq n\} \qquad \text{y} \qquad B_n^k = \{x \in E : (k-1)2^{-n} \leq f(x) < k2^{-n}\}$$

para $k = 1, 2, ..., n2^n$. Todos estos conjuntos son medibles y disjuntos dos a dos. Sea

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{B_n^k} + n\chi_{A_n}.$$

Es fácil comprobar que $\{s_n\}$ es una sucesión creciente que converge puntualmente a f en E.

Para una función arbitraria f, sea $f = f^+ - f^-$ y usando la primera parte de la demostración tenemos las sucesiones $\{s_n^+\}$ y $\{s_n^-\}$ de funciones simples que convergen puntualmente a f^+ y f^-, respectivamente. La sucesión $\{s_n\}$ donde $s_n = s_n^+ - s_n^-$ es una sucesión de funciones simples que converge puntualmente a f. Con esto hemos probado ii).

De la prueba de i), es fácil ver que la sucesión $\{s_n\}$ converge uniformemente a f si f está acotada. Esto prueba iii). Para el apartado iv), definimos los conjuntos B_n^k para $k = 1, 2, ...$ y sea

$$s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^n} \chi_{B_n^k}.$$

Entonces, $\{s_n\}$ es una sucesión de medibles, con rango numerable que convergen uniformemente a f en E.

$\square$

Capítulo 3

La integral de Lebesgue de funciones acotadas

3.1. Definición y propiedades

La integral de Riemann suele estar motivada por el estudio del área. Dada una función continua, no negativa en el intervalo [a,b], se toma una partición de dicho intervalo y se consideran los rectángulos inscritos y circunscritos a la curva. Las sumas de dichos rectángulos nos dan una aproximación superior e inferior de esta área bajo la curva. Cuanto más fina sea la partición del intervalo, mas exacta será la aproximación al área que queremos estudiar. Como la integral de Riemann, por definición es el área que se encuentra bajo la curva, obtendremos su valor al calcular el límite de estas estimaciones. Las dificultades comienzan cuando queremos estudiar funciones que no son continuas. Las funciones continuas a trozos tampoco son problema, pero funciones discontinuas como $\chi_{\mathbb{Q}}$ (función característica de los números racionales), no poseen integral de Riemann en [0,1]. Su interpretación se complica, aunque no es difícil darse cuenta que su área debería ser 0. Lo que quiere decir, que una función tan simple como $\chi_{\mathbb{Q}}$ debería ser integrable. La incapacidad de la integral de Riemann a hacer frente a funciones discontinuas lleva a desarrollar una nueva integral.

Al darnos cuenta que los rectángulos mencionados pueden ser considerados funciones escalonadas, hemos encontrado el puente entre las integrales de Riemann y Lebesgue. Ya que al cambiar las funciones escalonadas por funciones simples obtenemos la integral de Lebesgue.

Definición 8 *Una función $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada si existe una colección finita $\{I_k : 1 \leq k \leq n\}$ de intervalos abiertos disjuntos en (a, b) tal que $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{I_k}$, siendo ϕ constante en cada I_k.*

La representación de una función escalonada no es única. La más eficiente se da cuando las discontinuidades de ϕ en (a,b) coincide con los extremos de los intervalos I_k. A menudo, escribimos una función escalonada de la siguiente manera: $\phi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}$. Esta representación no es del todo correcta, pues ignora el valor de la función en un número finito de puntos. Sin embargo, los problemas que ocasionarían el valor de estos puntos, hace que no valga la pena tenerlos en cuenta.

Definición 9 *Sea $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada, con $\phi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}$. La integral de Riemann de ϕ en $[a,b]$ está definida por $\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^{n} c_k \ell(I_k)$.*

Definición 10 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. La integral superior e inferior de Riemann de f en $[a,b]$ están definidas del siguiente modo:*

$$\overline{\int_a^b} f = inf \left\{ \int_a^b \psi : \psi \geq f, \psi \text{ función escalonada} \right\}$$

$$\underline{\int_a^b} f = sup \left\{ \int_a^b \phi : \phi \leq f, \phi \text{ función escalonada} \right\}$$

Si estas dos integrales son iguales, entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$ y la representaremos como $\int_a^b f$.

Supongamos que ϕ y ψ son funciones escalonadas definidas en [a,b]. Si $\phi(x) \leq \psi(x)$ para todo $x \in [a,b]$, entonces se tiene que $\int_a^b \phi \leq \int_a^b \psi$. De esto obtenemos que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Además, siendo M una cota de f, tenemos:

$$-M(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b-a).$$

En cuanto a la interpretación del área, cada número $\int_a^b \phi$ representa el área de un conjunto de rectángulos inscritos y cada número $\int_a^b \psi$ representa el área de un conjunto de rectángulos circunscritos. Por supuesto, esta interpretación es válida sólo para funciones continuas, no negativas.

Definición 11 *Sea $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función simple, tal que $s = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ es la representación canónica de s. La integral de Lebesgue de s en $[a,b]$ está definida por $\displaystyle\int_a^b s = \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k)$. Si A es un subconjunto medible de $[a,b]$, entonces:*

$$\int_A s = \int_a^b s\chi_A = \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k \cap A).$$

La integral de Lebesgue de una función simple s, está definida en términos de su representación canónica. Veamos que la integral es independiente de la representación particular de la función simple:

Sea $s=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{E_k}$ la representación canónica de s y sea $s=\displaystyle\sum_{j=1}^{l} a_j\chi_{A_j}$, donde los A_k son subconjuntos medibles y disjuntos de [a,b] pero los a_k pueden no ser distintos. Para cada k, sea $\pi_k=\{j : a_j=c_k\}$. Entonces, $E_k=\displaystyle\bigcup_{j\in\pi_k} A_j$ y

$$\sum_{j=1}^{l} a_j m(A_j)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in\pi_k} a_j m(A_j)=\sum_{k=1}^{n} c_k\sum_{j\in\pi_k} m(A_j)=\sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k).$$

Esto será utilizado en la demostración del teorema que viene a continuación, donde se describen las propiedades básicas de la integral de Lebesgue para funciones simples.

Teorema 24 *Sean r y s funciones simples definidas en* $[a,b]$ *y sean A y B subconjuntos medibles de* $[a,b]$. *Entonces:*

i) Para cada número real c, se verifica $\int_a^b cs = c\int_a^b s$

ii) Se cumple la igualdad $\int_a^b (r+s)=\int_a^b r+\int_a^b s$

iii) Si $r\le s$ *en casi todo punto de* $[a,b]$, *entonces* $\int_a^b r\le\int_a^b s$

iv) Si r=s en casi todo punto de $[a,b]$, *entonces* $\int_a^b r=\int_a^b s$

v) $|\int_a^b s|\le\int_a^b |s|$

vi) Si A y B son disjuntos, entonces $\int_{A\cup B} s=\int_A s+\int_B s$

vii) Si s es no negativa y $A\subseteq B$, *entonces* $\int_A s\le\int_B s$.

Demostración.

i) Se deduce de la propia definición.

ii) Cogemos las representaciones canónicas de r y s, $r=\displaystyle\sum_{j=1}^{l} a_k\chi_{A_k}$ y $s=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k\chi_{B_k}$. Para cada par j y k, tenemos $E_{jk}=A_j\cap B_k$. Estos son conjuntos disjuntos y se verifica:

$$r+s=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}(a_j+b_k)\chi_{E_{jk}}.$$

Entonces por lo visto anteriormente, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_a^b (r+s)&=\sum_{j=1}^{l}\sum_{k=1}^{n}(a_j+b_k)m(E_{jk})=\sum_{j=1}^{l} a_j\sum_{k=1}^{n} m(E_{jk})+\sum_{k=1}^{n} b_k\sum_{j=1}^{l} m(E_{jk})\\ &=\sum_{j=1}^{l} a_j m(A_j)+\sum_{k=1}^{n} b_k m(B_k)=\int_a^b r+\int_a^b s.\end{aligned}$$

Las demostraciones de los demás apartados son sencillas, teniendo en cuenta las siguientes aclaraciones. Para el apartado iii), empezaremos por considerar $s = 0$ y usando la linealidad obtendremos el resultado general. iv) se obtiene a partir de iii), considerando $r \leq s$ y $s \leq r$. v) Sea $s = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ la representación canónica de s, entoces $|s|$ tiene como representación canónica a $s = \sum_{k=1}^{n} |c_k| \chi_{E_k}$. Por tanto,

$$|\int_a^b s| = |\sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k)| \leq \sum_{k=1}^{n} |c_k| m(E_k) = \int_a^b |s|$$

vi) y vii) se deducen de que $\displaystyle\int_A s = \int s\chi_A$ y de ii) y iii) respectivamente.

□

Definición 12 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. La integral superior e inferior de Lebesgue de f en $[a,b]$ están definidas por:*

$$\overline{\int_a^b} f = inf \left\{ \int_a^b s : s \geq f, s \text{ función simple} \right\}$$

$$\underline{\int_a^b} f = sup \left\{ \int_a^b r : r \leq f, r \text{ función simple} \right\}$$

Si estas dos integrales son iguales, entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y la integral se representa por $\int_a^b f$. La función f es integrable Lebesgue en un conjunto medible $E \subseteq [a,b]$ si la función $f\chi_E$ es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y $\int_E f = \int_a^b f\chi_E$.

Del apartado iii) del teorema anterior, sabemos que $\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$. Por lo que, sólo falta comprobar $\underline{\int_a^b} f \geq \overline{\int_a^b} f$, para ver que f es integrable Lebesgue en E. Como toda función escalonada es una función simple, es fácil ver que toda función integrable Riemann es integrable Lebesgue y sus integrales son iguales.
El criterio de Cauchy para la integrabilidad de Lebesgue es correcto. Una función f es integrable Lebesgue en [a,b], si y sólo si, para cada $\delta > 0$ existen r y s funciones simples, tales que $r \leq f \leq s$ en [a,b] y que $\int_a^b (s - r) < \delta$.

Teorema 25 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable Lebesgue en $[a,b]$, si y sólo si, f es una función medible.*

Demostración.

En primer lugar vamos a suponer que f es medible, y sea M una cota de f. Para cada entero positivo n, consideramos:

$$E_n^k = \left\{ x \in [a,b] : \frac{M(k-1)}{n} < f(x) \leq \frac{Mk}{n} \right\}$$

para $-n \leq k \leq n$. Cada E_n^k es medible, los conjuntos son disjuntos para un n determinado, y $[a,b] = \bigcup_{k=-n}^{n} E_n^k$. Definiendo las funciones simples:

$$r_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{M(k-1)}{n} \chi_{E_n^k} \quad y \quad s_n = \sum_{k=-n}^{n} \frac{Mk}{n} \chi_{E_n^k}.$$

tenemos que $r_n \leq f \leq s_n$ en [a,b] para cada n y

$$\int_a^b (s_n - r_n) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{M}{n} m(E_n^k) = \frac{M}{n}(b-a).$$

Debido a que esto es válido para todo n, la función f es integrable Lebesgue en [a,b] por el criterio de Cauchy mencionado anteriormente.

Ahora vamos a suponer que f es integrable Lebesgue en [a,b]. Para cada entero positivo n, existen las funciones simples r_n y s_n tal que $r_n \leq f \leq s_n$ en [a,b] que verifican que $\int_a^b (s_n - r_n) < 1/n$.

Las funciones:

$$r(x) = sup\{r_n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\} \quad y \quad s(x) = inf\{s_n(x) : n \in \mathbb{Z}^+\}$$

son medibles y $r \leq f \leq s$ en [a,b]. Sea $D = \{x \in [a,b] : s(x) > r(x)\}$, teniendo en cuenta que $r = f = s$ para cada punto de $[a,b] \setminus D$. Si D tiene medida cero, entonces $f = r$ en casi todo punto de [a,b] y por tanto es medible. Para cada par de enteros positivos k y n, tenemos

$$D_n^k = \{x \in [a,b] : s_n(x) - r_n(x) > 1/k\}.$$

Entonces $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^k \right)$ y para cada par de enteros positivos k y n:

$$\frac{1}{n} > \int_a^b (s_n - r_n) \geq \int_{D_n^k} (s_n - r_n) \geq \frac{1}{k} m(D_n^k).$$

Fijamos k. Para cada n,

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^k \right) \leq m(D_n^k) < \frac{k}{n}$$

de esto, se deduce que $m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n^k \right) = 0$. Ya que esto es válido para cada k, tenemos que $m(D) = 0$.

□

Como consecuencia de este teorema, tenemos que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable Lebesgue en [a,b], entonces f es integrable Lebesgue en cualquier subconjunto medible de [a,b]. En particular, las funciones f^+ y f^- son integrables Lebesgue en [a,b].

Teorema 26 *Sean f y g integrable Lebesgue en $[a,b]$ y sean A y B subconjuntos medibles de $[a,b]$. Entonces:*

i) Para cada $k \in \mathbb{R}$, kf es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y $\int_a^b kf = k\int_a^b f$

ii) f+g es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

iii) Si $f \leq g$ en casi todo punto de $[a,b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

iv) Si $f = g$ en casi todo punto de $[a,b]$, entonces $\int_a^b f = \int_a^b g$

v) $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$

vi) Si A y B son disjuntos, entonces $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B g$

vii) Si f es no negativa y $A \subseteq B$, entonces $\int_A f \leq \int_B f$.

Demostración.

i) Puesto que f es integrable dado $\delta > 0$ existen r_n y s_n funciones simples tal que $r_n \leq f \leq s_n$, verificando que:

$$\int r_n \leq \int f \leq \int s_n \qquad y \qquad \int s_n - \int r_n < \frac{\delta}{k}$$

Si $k > 0$, $kr_n \leq kf \leq ks_n$

$$k\int r_n = \int kr_n \leq \int kf \leq \int ks_n = k\int s_n$$

y,

$$\int kr_n - \int ks_n < \delta.$$

Por tanto, para todo $\delta > 0$, como $k\displaystyle\int r_n \leq \int kf \leq k\int s_n$, y $k\displaystyle\int r_n \leq k\int f \leq k\int s_n$. Obtenemos que $|\int kf - k\int f| < \delta$, y por tanto $\int kf = k\int f$.

Si $k = -1$, entonces $-s_n \leq -f \leq -r_n$ y por tanto, para todo $\delta > 0$, tenemos

$$-\int s_n = \int -s_n \leq \int -f \leq \int -r_n = -\int r_n$$

Obtenemos que $|-\int f - \int(-f)| < \delta$ y por tanto $\int -f = -\int f$.

A partir de los dos casos anteriores se deduce el caso general.

ii) Para la demostración de este apartado es suficiente observar que dado $\delta = \frac{1}{n}$, existen r_n y s_n funciones simples con $r_n \leq f \leq s_n$, $\int f - \frac{1}{2n} \leq \int r_n$ y $\int s_n \leq \int f + \frac{1}{2n}$, y funciones simples r'_n y s'_n con $r'_n \leq g \leq s'_n$, tal que:

$$\int g - \frac{1}{2n} \leq \int r'_n \qquad y \qquad \int s'_n \leq \int g + \frac{1}{2n}$$

Ahora,

$$\int f + \int g - \frac{1}{n} \leq \int r_n + \int r'_n = \int r_n + r'_n \leq \int f + g$$

$$\int f + g \leq \int s_n + s'_n = \int s_n + \int s'_n \leq \int f + \int g + \frac{1}{n}$$

Por tanto, $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$.

iii) Si $(f-g) \leq 0$, entonces $\displaystyle\int (f-g) \leq 0$. Además, $\displaystyle\int (f-g) = \int f - \int g \leq 0$, por lo que $\displaystyle\int f \leq \int g$.

iv) Esta demostración se deduce de iii).

v)

$$|\int_a^b f| = |\int_a^b (f^+ - f^-)| = |\int_a^b f^+ - \int_a^b f^-| \leq |\int_a^b f^+| + |\int_a^b f^-| =$$

$$= \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- = \int_a^b (f^+ + f^-) = \int_a^b |f|.$$

vi) Se deduce de que:

$$\int_{A \bigcup B} f = \int f\chi_{A \bigcup B} = \int (f\chi_A + f\chi_B) = \int f\chi_A + \int f\chi_B = \int_A f + \int_B f.$$

vii) Si $f \geq 0$ y $A \subseteq B$ entonces $f\chi_A \leq f\chi_B$ y por iii) obtenemos que $\displaystyle\int_A f \leq \int_B f$.

□

3.2. Teorema de la convergencia acotada

En este punto, las integrales de Riemann y Lebesgue están definidas en funciones acotadas en un intervalo [a,b]. Por lo que, toda función integrable Riemann va a ser integrable Lebesgue y además ambas integrales son iguales. Este hecho es útil cuando necesitamos evaluar la integral, ya que si la función es Riemann integrable podemos utilizar todos los teoremas de la integración de Riemann. Pero ejemplos simples, como el de $\chi_{\mathbb{Q}}$ nos muestra que una función integrable Lebesgue no tiene porque ser Riemann integrable. Además de

resolver mayor cantidad de integrales, la integral de Lebesgue consigue resolver dos deficiencias de la integral de Riemann.
La primera se refiere al límite puntual de una sucesión de funciones integrables. Sea $\{r_n\}$ una sucesión de los números racionales en [0,1]. Para cada n, sea

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = r_1, ..., r_n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Cada una de las funciones f_n es Riemann integrable en [0,1], pero la función límite $\chi_{\mathbb{Q}}$ no es Riemann integrable en [0,1]. Por lo tanto, el límite puntual de una sucesión uniformemente acotada de funciones Riemann integrable no es Riemann integrable. Este problema lo soluciona la integral de Lebesgue.

Teorema 27 (Teorema de convergencia acotada) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión uniformemente acotada de funciones integrables Lebesgue, definidas en $[a,b]$. Si $\{f_n\}$ converge puntualmente en casi todo punto en $[a,b]$ a f, entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración.

Definimos f en [a,b], tal que $f(x) = 0$ en los puntos en que $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ no existe. Ya que f es medible y acotada en [a,b], es integrable Lebesgue en [a,b] por el Teorema 25. Sea $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M$ para todo n y para todo $x \in [a,b]$, y $\delta > 0$. Por el Teorema de Egoroff, existe un conjunto medible $E \subseteq [a,b]$ tal que $m([a,b] \setminus E) < \delta/4M$ y $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en E. Ahora consideremos $B = [a,b] \setminus E$ y elegimos un entero N que verifique:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\delta}{2(b-a)}$$

para todo $n \geq N$ y para todo $x \in E$. Entonces para todo $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| &\leq \int_a^b |f_n - f| \\ &= \int_E |f_n - f| + \int_B |f_n - f| \\ &< \frac{\delta m(E)}{2(b-a)} + 2Mm(B) < \delta. \end{aligned}$$

$\square$

3.3. Caracterización de las funciones Riemann integrable

Definición 13 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, se definen las funciones m_f y M_f en $[a,b]$ del siguiente modo:*

$$m_f(x) = \lim_{r\to 0^+} inf\{f(t) : t \in (x-r, x+r) \cap [a,b]\}$$
$$M_f(x) = \lim_{r\to 0^+} sup\{f(t) : t \in (x-r, x+r) \cap [a,b]\}$$

Se verifica que $m_f(x) \leq f(x) \leq M_f(x)$, para cada $x \in [a,b]$.

Vamos a poner dos ejemplos donde vemos de forma sencilla lo que acabamos de definir. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función $\chi_{\mathbb{Q}}$. Entonces, $m_f = 0$ y $M_f = 1$ en [0,1]. Sea E un subconjunto nunca denso de [0,1] y sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función χ_E, entonces $m_g = 0$ y $M_g = g$.

Teorema 28 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es continua en $x \in [a,b]$, si y solo si $m_f(x) = f(x) = M_f(x)$.*

Teorema 29 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada.*

i) Existe una sucesión decreciente $\{\psi_n\}$ de funciones escalonadas que convergen puntualmente en $[a,b]$, a la función M_f.

ii) Existe una sucesión creciente $\{\phi_n\}$ de funciones escalonadas que convergen puntualmente en $[a,b]$, a la función m_f.

Consecuentemente, las funciones M_f y m_f son medibles.

Demostración.

i) Para cada n entero positivo, sea $P_n = \{t_i = a + i(b-a)/2^n\}$ y definimos:

$$\psi_n(x) = \begin{cases} sup\{f(t) : t_{i-1} < t < t_i\}, & \text{si } x \in (t_{i-1}, t_i) \\ M_f(x), & \text{si } x = t_i, \end{cases}$$

Como podemos comprobar $\{\psi_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones escalonadas. Debido a que $\{\psi_n\}$ está acotada uniformemente en [a,b], va a existir una función g, tal que $\{\psi_n\}$ converge uniformemente a g en [a,b]. Vamos a probar que $g(x) = M_f(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Esta igualdad se verifica para $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, así que sea $x \in [a,b] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Para cada n, sea I_n el intervalo (t_{i-1}, t_i) elegido de P_n tal que $x \in (t_{i-1}, t_i)$. Por tanto,

$$M_f(x) \leq sup\{f(t) : t \in I_n\} = \psi_n(x)$$

de esto se deduce que $M_f(x) \leq g(x)$. Sea $\delta > 0$ y tomamos $r > 0$ tal que

$$sup\{f(t) : t \in (x-r, x+r) \cap [a,b]\} < M_f(x) + \delta.$$

Entonces, existe un entero q tal que $I_n \subseteq (x-r, x+r)$ para todo $n \geq q$, obteniendo:

$$g(x) \leq \psi_n(x) \leq \psi_q(x) = sup\{f(t) : t \in I_q\} < M_f(x) + \delta$$

Por tanto, $g(x) \leq M_f(x)$, ya que $\delta > 0$ es arbitrario.

La demostración de ii) se realiza de forma similar.

□

Teorema 30 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces:*

i) $(R)\overline{\int_a^b} f = (L)\int_a^b M_f$

ii) $(R)\underline{\int_a^b} f = (L)\int_a^b m_f$

Donde las integrales a la izquierda del signo igual son en el sentido Riemann y las de la derecha en el sentido Lebesgue.

Demostración.

i) Por el teorema anterior sabemos que existe una sucesión decreciente $\{\psi_n\}$ de funciones escalonadas que converge a M_f en [a,b]. Por el Teorema de convergencia acotada, la función M_f es integrable Lebesgue en [a,b] y además,

$$(R)\overline{\int_a^b} f = inf\left\{\int_a^b \psi : \psi \geq f \text{ es una función escalonada}\right\}$$

$$\leq inf\left\{\int_a^b \psi_n : n \in Z^+\right\} = \lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b \psi_n = (L)\int_a^b M_f$$

Sea $\psi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{I_k}$ cualquier función escalonada tal que $f \leq \psi$ en [a,b]. Ya que I_k son intervalos abiertos, para cada $x \in I_k$,

$$M_f(x) \leq sup\{f(t) : t \in I_k\} \leq sup\{\psi(t) : t \in I_k\} = \psi(x)$$

Entonces, $\psi \geq M_f$ en casi todo punto de [a,b] y $\int_a^b \psi \geq \int_a^b M_f$. Debido a que ψ es arbitrario, tenemos:

$$(R)\overline{\int_a^b} f \geq (L)\int_a^b M_f$$

combinando estas dos desigualdades se obtiene la igualdad que queríamos demostrar.

La demostración de ii) se realiza de forma similar.

□

Teorema 31 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. f es integrable Riemann en $[a,b]$, si y solo si, f es continua en casi todo punto de $[a,b]$.*

Demostración.

Supongamos que f es integrable Riemann en [a,b], del Teorema anterior obtenemos que $\int_a^b (M_f - m_f) = 0$. Ya que en caso contrario, la integral no es cero. Como $M_f - m_f \geq 0$ en [a,b], tenemos que $M_f = m_f$ en casi todo punto de [a,b]. En cada uno de estos puntos, la función f es continua. Con esto tenemos que f es continua en casi todo punto de [a,b]. Ahora supongamos que f es continua en casi todo punto de [a,b], entonces por el Teorema 28 , $M_f = m_f$ en casi todo punto de [a,b] y además,

$$(R)\overline{\int_a^b} f - (R)\underline{\int_a^b} f = \int_a^b (M_f - m_f) = 0.$$

Por tanto, f es integrable Riemann en [a,b].

$\square$

Capítulo 4

Teorema Fundamental del Cálculo

Una de las deficiencias de la integral de Riemann es que si f' existe en cada punto $[a, b]$ y es acotada, uno esperaría que f' fuese integrable y $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$ para cada $x \in [a, b]$. Sin embargo, esto no es cierto, existen funciones diferenciables con derivada acotada pero no Riemann integrables. A continuación, veremos dos ejemplos de ello. Para dar estos ejemplos necesitamos previamente introducir el conjunto Smith-Volterra-Cantor (SVC).

4.1. El conjunto Smith-Volterra-Cantor

Este conjunto no va a contener intervalos y sin embargo tendrá medida positiva, a diferencia del conjunto de Cantor. Análogamente, al conjunto de Cantor, comenzamos la construcción del conjunto SVC quitando un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{4}$ en el centro de [0,1] y denotando lo que queda como S_1. A continuación, eliminamos un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{16}$ de los dos intervalos restantes del paso anterior, denotaremos lo que queda como S_2, y continuamos este proceso hasta obtener una sucesión infinita de conjuntos $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$.

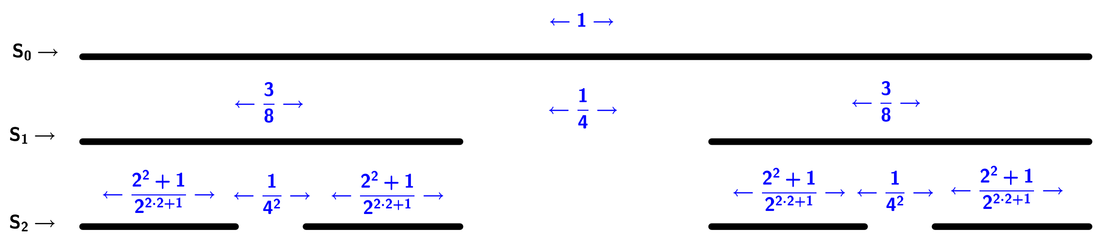

Figura 4.1: Construcción del conjunto SVC.

El conjunto SVC que denotaremos por S, viene definido

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n.$$

Teorema 32 *El conjunto de Smith-Volterra-Cantor tiene medida de Lebesgue* $\frac{1}{2}$.

Demostración 1.

Para probarlo calculemos las medidas de los primeros miembros de los S_n y hagamos uso del principio de inducción matemática para obtener una fórmula general para la medida de los S_n. Apoyándonos en la construcción observamos que

$$\{m(S_1), m(S_2), m(S_3), m(S_4), m(S_5), m(S_6), \cdots\} = \{\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{9}{16}, \frac{17}{32}, \frac{33}{64}, \frac{65}{128}, \cdots\},$$

lo cual nos lleva a conjeturar que

$$m(S_n) = \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}.$$

En efecto, para cada entero positivo n, el conjunto S_n esta compuesto por 2^n intervalos de igual longitud que denotaremos por s_i^n, $i = 1, 2, \ldots, 2^n$. Con el fin de demostrar la igualdad anterior para la medida de S_n, procederemos por inducción para probar que

$$m(s_i^n) = \frac{2^n + 1}{2^{2n+1}}.$$

En primer lugar, para $n = 1$, notamos que s_i^1, $i = 1, 2$ tiene medida $\frac{3}{8} = \frac{2^1+1}{2^{2\cdot 1+1}}$. A continuación, asumimos que para k un entero positivo se satisface que $m(s_i^k) = \frac{2^k+1}{2^{2k+1}}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, 2^k$. Entonces, para encontrar la medida de los s_i^{k+1} quitamos un intervalo de longitud $\frac{1}{4^{k+1}}$ centrado en el punto medio de s_i^k. Tomemos ahora un intervalo s_j^{k+1}, que proceda del intervalo s_i^k. Aplicando la hipótesis de inducción llegamos a

$$\begin{aligned} m(s_j^{k+1}) &= \frac{1}{2} \cdot \big(m(s_i^k) - \frac{1}{4^{k+1}}\big) = \frac{1}{2} \cdot \big(\frac{2^k + 1}{2^{2k+1}} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4^k}\big) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \big(\frac{2^k + 1}{4^k} - \frac{\frac{1}{2}}{4^k}\big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2^k + \frac{1}{2}}{4^k} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{k+1} + 1}{2 \cdot 4^k} = \frac{2^{k+1} + 1}{2^{2\cdot(k+1)+1}}. \end{aligned}$$

Concluimos que para todo entero positivo n,

$$m(s_i^n) = \frac{2^n + 1}{2^{2n+1}} \quad \text{y} \quad m(S_n) = 2^n \cdot m(s_i^n) = \frac{2^n + 1}{2^{n+1}}.$$

Usando esta expresión y la propiedad del límite de familias decrecientes de la medida de Lebesgue, llegamos a que la medida del SVC es

$$m(S) = \lim_{n\to\infty} m(S_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \big(1 + \frac{1}{2^n}\big) = \frac{1}{2}.$$

$\square$

Demostración 2.

Medimos lo que quitamos del intervalo $[0,1]$ a lo largo del proceso y recordando que en el primer paso, quitábamos un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$. En el segundo paso, eliminábamos 2 intervalos cada uno de longitud $\frac{1}{16}$. En el tercero, 4 de longitud $\frac{1}{64}$, y así sucesivamente. Observamos que la medida de $\{[0,1] \setminus S\}$ es

$$m([0,1] \setminus S) = \big(\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{4}{64} + \cdots\big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{4^n} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

y por tanto $m(S) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$\square$

Teorema 33 *El conjunto de Smith-Volterra-Cantor, S, es cerrado y nunca denso.*

Demostración.

Puesto que en la construcción del conjunto SVC, nosotros quitamos una colección numerable de intervalos abiertos, que a su vez forman un conjunto abierto, de $[0,1]$ concluimos que S es cerrado.

Dados x e y puntos distintos en S, asumamos sin pérdida de generalidad que $x < y$. Entonces elegimos un entero positivo n tal que $\frac{2^n+1}{2^{2n+1}} < y - x$. Ya que S_n está formado por 2^n intervalos de igual longitud y $m(S_n) = \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$, cada subintervalo en S_n tiene una medida de $\frac{2^n+1}{2^{2n+1}}$. Además, como la distancia entre x e y es mayor que $\frac{2^n+1}{2^{2n+1}}$, x e y no pueden pertenecer al mismo subintervalo y ya que los intervalos que forman a S_n son cerrados y disjuntos, debe haber algún punto $z \in S^c$ entre x e y. Puesto que la elección del x e y fue arbitraria, concluimos que entre dos puntos cualquiera de S existe un punto que no pertenece al SVC y por tanto, S no puede contener ningun intervalo.

$\square$

4.2. La función de Volterra

A continuación, vamos a dar dos ejemplos de funciones diferenciales con derivada acotada pero no Riemann integrable.

Ejemplo 1:

El primer ejemplo es la función de Volterra que construiremos a continuación:

La función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es esencial para la construcción de la función de Volterra, V. Observemos que g es diferenciable sobre $[0,1]$ pero su derivada g' no es continua en el 0 ya que

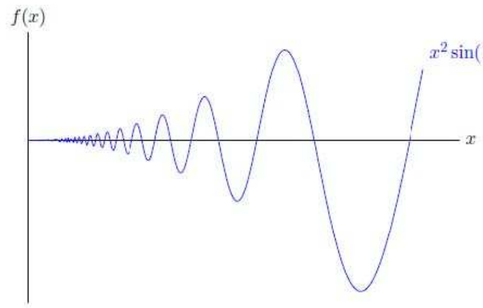

Figura 4.2: La función $g(x)$.

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Además la derivada de g, $g' : [0,1] \to \mathbb{R}$, viene dada por la siguiente expresión

$$g'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función g' no es continua en el 0 pues tomando la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por $x_n = \frac{1}{\pi n}$, vemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0 pero la sucesión $\{g'(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ no converge a $|g'(0)| = 0$, ya que $|g'(x_n)|$ es igual a 1 para todo n. Es fácil ver de la definición de g' que está acotada en $[0,1]$. Así, g es una función cuya derivada existe y es acotada en todo el dominio $[0,1]$, aunque no es continua en 0.

La construcción de la función de Volterra se hace en base al conjunto de SVC. Comencemos considerando

$$g(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sobre el intervalo $(0, \frac{1}{4})$. Denotemos por a_1 el mayor x entre 0 y $\frac{1}{8}$ tal que $g'(x) = 0$. Ahora, restringimos g al intervalo $(0, a_1)$, y en $[a_1, \frac{1}{4} - a_1]$ insertamos la función constante $g(a_1)$. Finalmente, en el intervalo $(\frac{1}{4} - a_1, \frac{1}{4})$ ponemos una reflexión de g, $g(\frac{1}{4} - x)$.

Llamando a esta función a trozos f_1,

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ g(x), & \text{si } 0 < x < a_1 \\ g(a_1), & \text{si } a_1 \leq x \leq \frac{1}{4} - a_1 \\ g(\frac{1}{4} - x), & \text{si } \frac{1}{4} - a_1 < x < \frac{1}{4} \\ 0, & \text{si } \frac{1}{4} < x \end{cases}$$

podemos ver de la definición que f_1 es diferenciable sobre $(0, \frac{1}{4})$ pero que su derivada f_1' es discontinua en 0 y $\frac{1}{4}$.

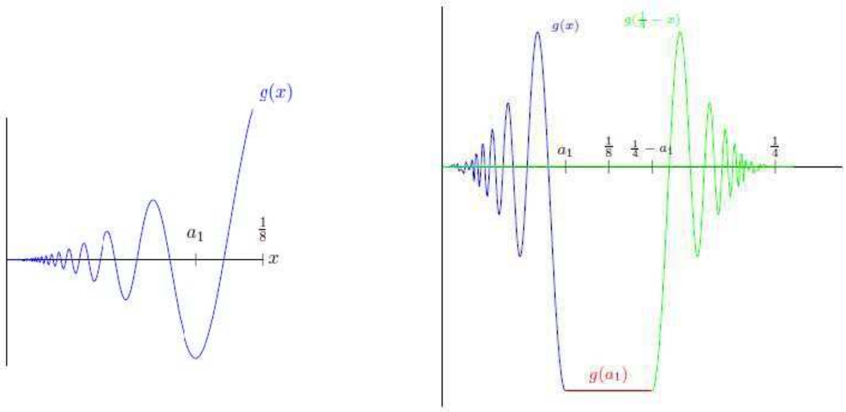

Figura 4.3: Las funciones g y f_1.

Nuestro siguiente paso es colocar esta función en el intervalo eliminado en el primer paso de la construcción del conjunto SVC, es decir, en $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$. Para hacerlo, definimos una nueva función h_1 que será la traslación de $\frac{3}{8}$ unidades a la derecha de f_1. Entonces h_1 vendrá dada por:

$$h_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \frac{3}{8} \\ g(x - \frac{3}{8}), & \text{si } \frac{3}{8} < x < \frac{3}{8} + a_1 \\ g(a_1), & \text{si } \frac{3}{8} + a_1 \leq x \leq \frac{5}{8} - a_1 \\ g(\frac{5}{8} - x), & \text{si } \frac{5}{8} - a_1 < x < \frac{5}{8} \\ 0, & \text{si } \frac{5}{8} < x \end{cases}$$

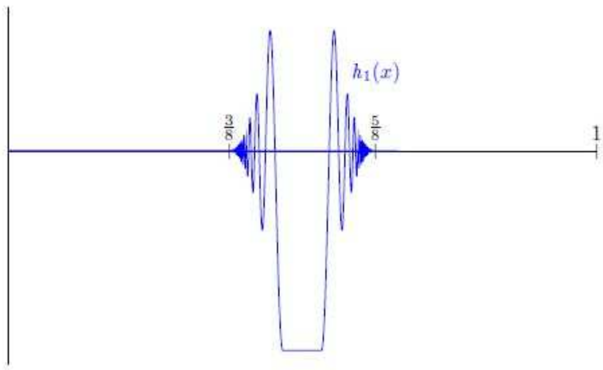

Figura 4.4: La función $h_1(x)$.

Dado que en el segundo paso de la construcción del conjunto SVC eliminamos los intervalos $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$ y $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$, cada uno con una longitud de $\frac{1}{16}$, empezaremos definiendo a_2 como el mayor x menor que $\frac{1}{32}$ donde $g'(x) = 0$.

A continuación, construimos la función f_2 sobre el intervalo $(0, \frac{1}{16})$, de la siguiente forma:

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ g(x), & \text{si } 0 < x < a_2 \\ g(a_2), & \text{si } a_2 \leq x \leq \frac{1}{16} - a_2 \\ g(\frac{1}{16} - x), & \text{si } \frac{1}{16} - a_2 < x < \frac{1}{16} \\ 0, & \text{si } \frac{1}{16} < x. \end{cases}$$

Tenemos así una función diferenciable cuya derivada es discontinua en 0 y $\frac{1}{16}$. Nuestro siguiente paso es definir h_2 que será dos copias de f_2 en los intervales $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$ y $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$. Entonces, h_2 es diferenciable y su derivada h_2' es discontinua precisamente en los 4 extremos de los dos intervalos. Recordemos que esos puntos se encuentran en el SVC.

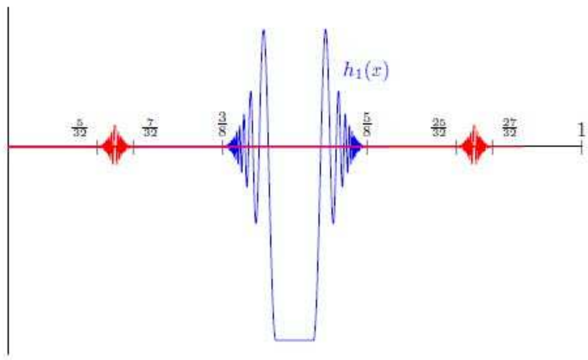

Figura 4.5: La función $h_1(x) + h_2(x)$.

Ahora, debemos repetir el proceso y crear h_3, $h_4, ...$ poniéndolas en sus correctos intervalos. Notemos que en el n-ésimo paso de la construcción del SVC, eliminamos 2^{n-1} intervalos abiertos de longitud $\frac{1}{4^n}$. Entonces, definimos a_n como el mayor x menor que $\frac{1}{2}4^{-n}$ donde $g'(x) = 0$. La función f_n es definida a trozos como sigue

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ g(x), & \text{si } 0 < x < a_n \\ g(a_n), & \text{si } a_n \leq x \leq \frac{1}{4^n} - a_n \\ g(\frac{1}{4^n} - x), & \text{si } \frac{1}{4^n} - a_n < x < \frac{1}{4^n} \\ 0, & \text{si } \frac{1}{4^n} < x \end{cases}$$

y h_n es la función a trozos que consiste en introducir f_n en los 2^{n-1} intervalos eliminados en el n-ésimo paso de la construcción del SVC.

Finalmente, podemos definir explícitamente la función de Volterra V,

Definición 14 *La función de Volterra,* $V : [0,1] \to \mathbb{R}$ *se define como*

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x).$$

A continuación, vamos a probar que la función de Volterra V, es diferenciable y su derivada es a la vez acotada y no Riemann integrable.

El conjunto SVC es perfecto, nunca denso y de él forman parte los extremos de los intervalos eliminados en el proceso de construcción y los límites puntuales de esos extremos. Debido a esto, podemos dividir el intervalo $[0,1]$ en dos conjuntos disjuntos, el SVC y los intervalos abiertos eliminados en el proceso de construcción. Entonces, tenemos

$$[0,1] \setminus S = \bigcup_{k=1}^{\infty} (u_k, v_k).$$

Tomemos uno de estos intervalos y denotémoslo por (u_n, v_n). Sea a_n un número en $(u_n, \frac{u_n+v_n}{2})$ tal que $g'(a_n) = 0$. Debe quedar claro que este es un punto similar a los anteriores a_n. Entonces, definiendo $b_n = u_n + v_n - a_n$, tenemos que $a_n - u_n = v_n - b_n$. Por último, si consideramos la función $f_n : (u_n, v_n) \to \mathbb{R}$ como sigue

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-u_n)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x-u_n}, & \text{si } u_n < x < a_n \\ (a_n-u_n)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{a_n-u_n}, & \text{si } a_n \leq x \leq b_n \\ (v_n-x)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{v_n-x}, & \text{si } b_n < x < v_n \end{cases}$$

se observa que si:

$$\begin{aligned} u_n < x < a_n &\Rightarrow |f_n(x)| \leq |x-u_n|^2 \leq |x-v_n|^2 \\ a_n \leq x \leq b_n &\Rightarrow |f_n(x)| \leq |a_n-u_n|^2 \leq |x-u_n|^2 \\ a_n \leq x \leq b_n &\Rightarrow |f_n(x)| \leq |b_n-v_n|^2 \leq |x-v_n|^2 \\ b_n < x < v_n &\Rightarrow |f_n(x)| \leq |x-v_n|^2 \leq |x-u_n|^2 \end{aligned}$$

Luego, $|f_n(x)|$ está acotado por $|x-u_n|^2$ y $|x-v_n|^2$. Ahora, puesto que $[0,1] \setminus S = \bigcup_{k=1}^{\infty} (u_k, v_k)$, para cada intervalo (u_k, v_k) podemos definir f_k como antes. Entonces, encontramos que la función de Volterra puede ser alternativamente definida como

$$V(x) = \begin{cases} f_k(x), & \text{si } u_k < x < v_k \\ 0, & \text{si } x \in S. \end{cases}$$

De la definición de cada f_n podemos ver que V es diferenciable para cualquier $c \notin S$. Veamos a continuación que también lo es para $c \in S$, para ello probaremos que

$$\lim_{x \to c^-} \frac{V(x) - V(c)}{x - c} = 0.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon$. Supongamos que $x \in (c-\delta, c)$. Si $x \notin S$ consideraremos $x \in (u_n, v_n) \subset (c-\delta, c)$ para algún n. Entonces, se sigue que

$$|\frac{V(x)-V(c)}{x-c}| \leq \frac{|f_n(x)|}{-(x-v_n)} \leq \frac{|x-v_n|^2}{|x-v_n|} = |x-v_n| < \varepsilon.$$

Por otro lado si $x \in S$, la desigualdad anterior es trivial. Además, con los cambios naturales se puede probar que $\lim\limits_{x\to c^+} \frac{V(x)-V(c)}{x-c} = 0$. Consiguientemente, V es diferenciable para todo $c \in S$ y $V'(c) = 0$ y como ya habíamos probado que lo era en $[0,1] \setminus S$, lo será en todo $[0,1]$.

Para demostrar que V' no es integrable Riemman, probaremos que V' tiene una discontinuidad en cada $c \in S$. Sea $c \in S$, entonces c es un límite puntual del conjunto de los extremos de los intervalos eliminados en la construcción del conjunto SVC y que denotaremos por E. Luego, puesto que c es un límite puntual del conjunto E, existe una sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ de puntos en E que converge a c. Por tanto para cada n, existirá un entero $q_n > n$ tal que

$$|V'(x_n)| = |f'_{k_n}(x_n)| = 1, \text{ donde } x_n = a_{k_n} + \frac{1}{q_n\pi}.$$

Ahora bien, como la sucesión $\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ converge a c y la sucesión $\{V'(x_n)\}_{k=1}^{\infty}$ converge a $1 \neq 0 = V'(c)$, se sigue que V' es discontinua en c. Por tanto, V' es discontinua en el conjunto de SVC, que es un conjunto con medida positiva, concluyendo que V' no es Riemann integrable.

Ejemplo 2:

Si se mira superficialmente la construcción de la función de Volterra, puede quedar la impresión de que la no integrabilidad de su derivada se debe a que la función en la que se basa su construcción, oscila infinitas veces alrededor del origen. Así que pasemos a ver el segundo ejemplo y observemos que esto no es así.

En cada intervalo abierto $(a,b) = E_k^i$ eliminado en la construcción del conjunto SVC, definimos la restricción de una función derivable $f_{a,b} : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que ella y su derivada $f'_{a,b}$ tomen el valor cero en los extremos a y b. Además, cuidaremos que siempre haya un punto (a,b) donde la derivada $f'_{a,b}$ tome el valor 1. En los puntos del conjunto SVC, a la función que llamaremos U la hacemos igual a cero.

Para construir $f_{a,b}$ en un intervalo $[a,b]$, partimos de la función

$$w(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

Primero tomamos de esta función la parte correspondiente al intervalo $[-1,1]$, luego extendemos esta parte al intervalo $[-2,2]$ considerando los trozos en los intervalos $[0,1]$ y $[-1,0]$ debidamente reflejados y trasladados. Dado que $w'(-1) = 1$ y $w'(1) = -1$, con los tres trozos obtenemos una curva suave. Observemos que la gráfica de la función resultante

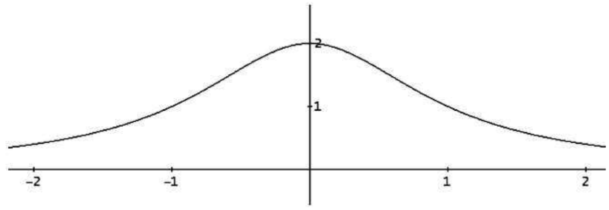

Figura 4.6: La función $w(x) = \frac{2}{1+x^2}$.

tiene tangentes horizontales en los puntos $(-2, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, 0)$ y explícitamente tendría la expresión

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)^2}{(x+2)^2+1}, & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2+1}, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

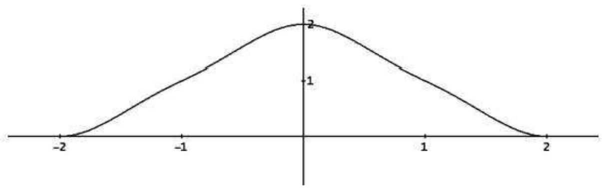

Figura 4.7: La función $g(x)$.

La derivada g' está dada por

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{4(x+2)}{(x^2+4x+5)^2}, & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ -\frac{4x}{(1+x^2)^2}, & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{4(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Observemos que $g'(-2) = g'(0) = g'(2) = 0$, $g'(-1) = 1$ y $g'(1) = -1$.

Mediante una composición adecuada, obtenemos una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, con las mismas cualidades de g, específicamente si $f(x) = g(4x - 2)$ obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{32x^2}{16x^2+1}, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{2}{1+(4x-2)^2}, & \text{si } \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ \frac{32(x-1)^2}{16(x-1)^2+1}, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La derivada de f se anula en los extremos del intervalo $[0, 1]$ y toma el valor 1 en el punto $\frac{1}{4}$.

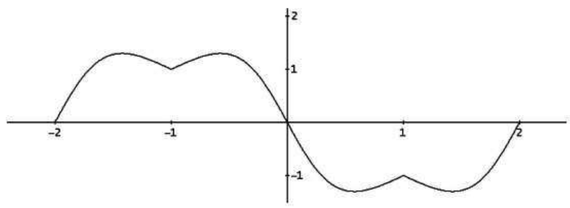

Figura 4.8: La función $g'(x)$.

Si $[a,b]$ es cualquier intervalo cerrado y acotado, definimos $f_{a,b} : [a,b] \to \mathbb{R}$ como $f_{a,b}(x) = (b-a)^2 f(\frac{x-a}{b-a})$, es decir

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} (b-a)^2 \frac{32(\frac{x-a}{b-a})^2}{16x^2+1}, & \text{si } a \leq x \leq a + \frac{b-a}{4} \\ (b-a)^2 \frac{2}{1+(4\frac{x-a}{b-a}-2)^2}, & \text{si } a + \frac{b-a}{4} < x < b - \frac{b-a}{4} \\ (b-a)^2 \frac{32(\frac{b-x}{b-a})^2}{16(\frac{b-x}{b-a})^2+1}, & \text{si } b - \frac{b-a}{4} \leq x \leq b \end{cases}$$

Esta función se anula en los extremos a y b y su derivada satisface $f'_{a,b}(a) = f'_{a,b}(b) = 0$ y $f'(\frac{3a+b}{4}) = 1$. Esencialmente, hemos llevado la función f definida en $[0,1]$ al intervalo $[a,b]$. El factor $(b-a)^2$ tiene la finalidad de comprimirla suficientemente, para que cuando la longitud del intervalo $[a,b]$ sea pequeña, la función U que vamos a definir resulte diferenciable.

Definamos ahora la función $U : [0,1] \to \mathbb{R}$ como sigue:

1. Si $x \in [0,1] \setminus S = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} E_n^j$, sea $E_k^i = (a,b)$ el único intervalo de esta familia, al cual pertenece x. Entonces,
$$U(x) = f_{a,b}(x).$$
2. Si $x \in S$, hacemos $U(x) = 0$.

Observemos que si $(a,b) \in \{E_n^j\}$ y $x \in (a,b)$, tendremos las siguientes desigualdades para la función U,

$$a \leq x \leq a + \frac{b-a}{4} \ \Rightarrow\ |U(x)| \leq 32(x-a)^2$$
$$a + \frac{b-a}{4} \leq x \leq b - \frac{b-a}{4} \ \Rightarrow\ |U(x)| \leq 2(a-b)^2$$
$$b - \frac{b-a}{4} \leq x \leq b \ \Rightarrow\ |U(x)| \leq 32(x-b)^2.$$

Veamos también que U es derivable. Para ello primero consideremos $t \in [0,1] \setminus S$. Sea $(a,b) \in \{E_k^i\}$ tal que $t \in (a,b)$. En todo punto x de este intervalo U es derivable y

$$U'(x) = f'_{a,b}(x) = (b-a)f'(\frac{x-a}{b-a}).$$

En particular, U es derivable en t.

Sea ahora $t \in S$. Por definición, $U(t) = 0$. Probemos que

$$U'(t) = \lim_{x \to t} \frac{U(x) - U(t)}{x - t} = \lim_{x \to t} \frac{U(x)}{x - t} = 0.$$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, sea $x \in [0, 1]$ tal que $0 < |x - t| < \delta$ para un cierto δ que debemos determinar. Si $x \in S$, entonces $\dfrac{U(x)}{x - t} = 0$. Por otro lado, si $x \in [0, 1] \setminus S$, x pertenece a algún intervalo abierto $(a, b) \in \{E_k^i\}$. Necesariamente uno de los extremos del intervalo (a, b) está en el entorno de radio δ. Este extremo está entre t y x y se puede probar que si es a, entonces

$$\left|\frac{U(x)}{x - t}\right| \leq \frac{|U(x)|}{|x - a|} \leq 32|x - a|.$$

Si b está entre t y x tenemos

$$\left|\frac{U(x)}{x - t}\right| \leq \frac{|U(x)|}{|x - b|} \leq 32|x - b|.$$

En ambos casos

$$\left|\frac{U(x)}{x - t}\right| \leq 32|x - t| < 32\delta,$$

y basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{32}$ para obtener que

$$\left|\frac{U(x)}{x - t}\right| < \varepsilon.$$

Esto prueba que $U'(t) = \lim\limits_{x \to t} \dfrac{U(x) - U(t)}{x - t} = 0$.

Hemos probado que U es derivable en $[0, 1]$ y que en todo punto x del conjunto de SVC, $U'(x) = 0$. Notemos además, que U' está acotada en el intervalo $[0, 1]$, de hecho $|U'(x)| \leq 2$ para todo $x \in [0, 1]$.

Ahora probemos que U' es discontinua en el conjunto SVC. Sea $x \in S$. Como S es perfecto, todo entorno $I_\delta = (x - \delta, x + \delta)$ de x tiene un punto y de S diferente de x. Por otra parte, en el intervalo $[x, y]$, necesariamente existe un punto $\alpha \in [0, 1] \setminus S$, pues en caso contrario S contendría un intervalo, y esto no puede ser posible ya que el conjunto SVC es nunca denso. Supongamos que $\alpha \in (a, b)$, con $(a, b) \in \{E_k^i\}$. Entonces, $(a, b) \subset (x, y)$, pues en caso contrario uno de los puntos x o y estaría en (a, b). Como la derivada de la función $f_{a,b}$ toma el valor 1 en algún punto de (a, b), existe un punto z en un entorno de radio δ de x tal que $U'(z) = 1$. Esto implica que U' es discontinua en x ya que $U'(x) = 0$.

Hemos probado que U' es discontinua en el conjunto SVC, el cual tiene medida $\frac{1}{2}$, luego U' no es Riemman integrable.

Las figuras nos muestran las gráficas de algunas de las funciones $f_{a,b}$ y sus derivadas $f'_{a,b}$, con lo cual podemos tener una idea del aspecto que va adquiriendo la gráfica U durante su construcción, así como la de su derivada.

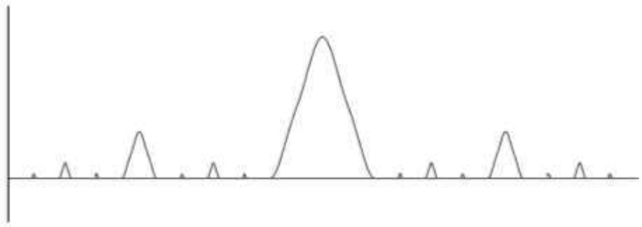

Figura 4.9: La función $f_{a,b}(x)$.

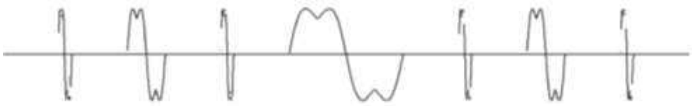

Figura 4.10: La función $f'_{a,b}(x)$.

4.3. Teorema Fundamental del Cálculo

Toda derivada acotada es Lebesgue integrable, pero no ocurre lo mismo con las derivadas no acotadas.

Teorema 34 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable en cada punto de $[a,b]$. Si f' es acotada en $[a,b]$, entonces f' es Lebesgue integrable en $[a,b]$ y $\int_a^x f' = f(x) - f(a)$ para cada $x \in [a,b]$.*

Demostración.

La función f es continua en [a,b], ya que es diferenciable en cada punto de [a,b]. La función f' es Lebesgue integrable en [a,b], debido a que es acotada y medible en [a,b]. Sea M una cota de f' y extendemos f a [a,b+1], siendo $f(x) = f'(b)(x-b) + f(b)$ para $x \in (b, b+1]$. Vemos que la extención de f es continua y diferenciable en [a,b+1]. Para cada entero positivo n, definimos $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$f_n(x) = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x)).$$

Por el Teorema del valor medio, para cada entero positivo n y para cada $x \in [a,b]$, existen $z_n^x \in (x, x + \frac{1}{n})$ tal que,

$$f_n(x) = \frac{f(x + \frac{1}{n}) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(z_n^x).$$

De aquí, deducimos que $|f_n(x)| \leq M$ para todo n y para todo $x \in [a,b]$. Ya que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f' en [a,b], por el Teorema de convergencia acotada tenemos

$$\int_a^b f' = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Como f es continua en [a,b+1], el Teorema del valor medio integral implica que:

$$\lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f = f(b).$$

Haciendo un cambio de variable, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_a^b f' &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(n \int_a^b f(t + \frac{1}{n})dt - n \int_a^b f(t)dt \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \int_b^{b+\frac{1}{n}} f - \lim_{n\to\infty} n \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

Un cálculo similar es válido para cada $x \in (a,b)$. □

Apéndice A

La integral de Lebesgue de funciones medibles

A.1. Definición y propiedades

La integral de Lebesgue sólo se ha definido para funciones medibles y acotadas definidas en un intervalo [a,b]. Queremos extender la definición de la integral de Lebesgue para incluir funciones medibles arbitrarias definidas en [a,b]. Hay que señalar, que es posible definir la integral de Lebesgue de una función en conjuntos medibles y no acotados.

Definición 15 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función medible no negativa. La integral de Lebesgue de f en $[a,b]$ está definida por:*

$$\int_a^b f = sup\left\{\int_a^b u : 0 \leq u \leq f \textit{ es una función medible y acotada}\right\}$$

Vemos que la integral puede valer infinito. La integral Lebesgue de f en un conjunto medible $E \subseteq [a,b]$ está definida por $\int_E f = \int_a^b f\chi_E$.

Teorema 35 *Sean f y g funciones medibles no negativas definidas en $[a,b]$, y sean A y B dos subconjuntos medibles de $[a,b]$. Entonces:*

i) Se verifica la igualdad $\int_a^b kf = k\int_a^b f$, para todo $k \geq 0$.

ii) Se verifica la igualdad $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

iii) Si $f \leq g$ en casi todo punto de $[a,b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

iv) Si $f = g$ en casi todo punto de $[a,b]$, entonces $\int_a^b f = \int_a^b g$.

v) Si A y B son disjuntos, entonces $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

vi) Si $A \subseteq B$, entonces $\int_A f \leq \int_B f$.

Demostración.

ii) Como consecuencia inmediata de la definición, tenemos que $\int_a^b (f+g) \geq \int_a^b f$. En el caso en que $\int_a^b f$ o $\int_a^b g$ sea infinito, sería trivial. Veamos el caso en que ambas son finitas. Sea $\delta > 0$ y cogemos u y v funciones medibles y acotadas tal que $0 \leq u \leq f$, $0 \leq v \leq g$,

$$\int_a^b f < \int_a^b u + \frac{\delta}{2} \quad \text{y} \quad \int_a^b g < \int_a^b v + \frac{\delta}{2}.$$

Entonces,

$$\int_a^b (f+g) \geq \int_a^b (u+v) > \int_a^b f - \frac{\delta}{2} + \int_a^b g - \frac{\delta}{2} = \int_a^b f + \int_a^b g - \delta$$

y por lo tanto $\int_a^b (f+g) \geq \int_a^b f + \int_a^b g$. Ahora, suponemos que $0 \leq u \leq f+g$, donde u es una función medible y acotada, y sea $u_1 = min\{f, u\}$ con $u_2 = u - u_1$. Obteniendo entonces $0 \leq u_1 \leq f$ y $0 \leq u_2 \leq g$, ya que:

$$u_2 = u - u_1 = u + max\{-u, -f\} = max\{0, u - f\} \leq g.$$

Las funciones u_1 y u_2 son medibles y acotadas, además

$$\int_a^b u = \int_a^b u_1 + \int_a^b u_2 \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

De aquí, se deduce que $\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$.

iii) Sea $E = \{x \in [a,b] : f(x) \leq g(x)\}$. Supongamos u una función medible y acotada tal que $0 \leq u \leq f$. Entonces, $u = u\chi_E$ en casi todo punto de [a,b], $u\chi_E \leq g$, y

$$\int_a^b u = \int_a^b u\chi_E \leq \int_a^b g.$$

Aplicando el supremo de u, nos queda $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

$\square$

Definición 16 *Una función medible y no negativa* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es integrable Lebesgue en* $[a,b]$ *si* $\int_a^b f < \infty$. *Una función medible arbitraria* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es integrable Lebesgue en* $[a,b]$ *si* $|f|$ *es integrable Lebesgue en* $[a,b]$. *En este caso, cada una de las funciones* f^+ *y* f^- *son integrables Lebesgue en* $[a,b]$ *y la integral Lebesgue f, está definida por:*

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$$

La función f es integrable Lebesgue en un conjunto medible $E \subseteq [a,b]$ si la función $f\chi_E$ es integrable Lebesgue en [a,b] y $\int_E f = \int_a^b f\chi_E$.

Sea $\{I_n\}$ una sucesión de intervalos abiertos disjuntos en [a,b] y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{l(I_n)}$ es finito. Definamos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{l(I_n)}, & \text{si } x \in I_n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces f no es acotada en [a,b] y $\displaystyle\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{l(I_n)}$. Ya que, $\int_a^b f < \infty$, la función f es integrable Lebesgue en [a,b]. Ahora sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ una serie convergente de números reales y definamos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \begin{cases} c_n/l(I_n), & \text{si } x \in I_n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces, $\displaystyle\int_a^b |g| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ y g es integrable Lebesgue en [a,b], si y sólo si, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge absolutamente.

Supongamos que f es integrable Lebesgue en [a,b]. La definición implica que f es integrable Lebesgue en todos los subconjuntos medibles de [a,b].

Teorema 36 *Sean f y g funciones integrables Lebesgue definidas en $[a, b]$ y sean, A y B subconjuntos medibles de $[a, b]$. Entonces:*

i) kf es integrable Lebesgue en $[a, b]$ y $\int_a^b kf = k \int_a^b f$, para cada $k \in \mathbb{R}$

ii) $f + g$ es integrable Lebesgue en $[a, b]$ y $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

iii) Si $f \leq g$ en casi todo punto de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$

iv) Si $f = g$ en casi todo punto de $[a, b]$, entonces $\int_a^b f = \int_a^b g$

v) Se verifica que $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$

vi) Si A y B son disjuntos, entonces $\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$

Demostración.

ii) Tenemos que:

$$0 \leq (f+g)^+ = \frac{|f+g| + (f+g)}{2} \leq \frac{|f| + f}{2} + \frac{|g| + g}{2} = f^+ + g^+$$

$$0 \leq (f+g)^- = \frac{|f+g| - (f+g)}{2} \leq \frac{|f| - f}{2} + \frac{|g| - g}{2} = f^- + g^-$$

Por el Teorema anterior, la función $f+g$ es integrable Lebesgue en [a,b]. Además, como:

$$f^+ - f^- + g^+ - g^- = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^-$$

tenemos que:

$$f^+ + g^+ + (f+g)^- = (f+g)^+ + f^- + g^-$$

Por tanto,

$$\int_a^b (f^+ + g^+ + (f+g)^-) = \int_a^b ((f+g)^+ + f^- + g^-)$$

Aplicando linealidad para funciones positivas:

$$\int_a^b f^+ + \int_a^b g^+ + \int_a^b (f+g)^- = \int_a^b (f+g)^+ + \int_a^b f^- + \int_a^b g^-$$

Por tanto,

$$\int_a^b (f+g)^+ - \int_a^b (f+g)^- = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- + \int_a^b g^+ - \int_a^b g^-$$

Luego,

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

□

A.2. Teoremas de intercambio del límite con la integral

A continuación, probaremos algunos teoremas de convergencia para integrales Lebesgue. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables Lebesgue definidas en [a,b] y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente en casi todo punto de [a,b] a la función f. ¿Es f integrable Lebesgue en [a,b]?, y si es así, ¿$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$?. En general, ambas preguntas pueden tener respuesta negativa. Para cada entero positivo n, sean

$$f_n(x) = \begin{cases} x^{-1}, & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$g_n(x) = \begin{cases} n, & \text{si } 0 < x < 1/n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente en [0,1] a la función f definida por $f(x) = x^{-1}$, para $0 < x \leq 1$ y $f(0) = 0$. La función f no es integrable Lebesgue en [0,1]. La sucesión $\{g_n\}$ converge puntualmente en [0,1] a la función g definida por $g(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. En este caso, el límite de la función g es integrable Lebesgue en [0,1], pero

$$\int_0^1 g = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n$$

El problema entonces es encontrar las hipótesis apropiadas para generar respuestas positivas. Para la integral de Riemann, la convergencia uniforme es una hipótesis suficiente. A continuación, se dan otros teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.

Lema 4 (Lema de Fatou) *Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en* $[a,b]$*, entonces*

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración.

La función $\liminf_{n\to\infty} f_n$ es medible y no negativa. Sea u, con $0 \leq u \leq \liminf_{n\to\infty} f_n$ una función medible y acotada. Para cada n, sea $u_n = min\{u, f_n\}$, tenemos que $\{u_n\}$ es una sucesión de funciones medibles uniformemente acotadas definidas en [a,b] y además converge puntualmente a u en [a,b]. Por el Teorema de Convergencia Acotada,

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

ya que $u_n \leq f_n$ para todo n. Cogiendo los supremos de todas las funciones u, tenemos:

$$\int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Para verificar que $\{u_n\}$ converge puntualmente a u en [a,b], sean $x \in [a,b]$ y $\delta > 0$. Por la definición de $\liminf f_n(x)$, existe un entero positivo N tal que $u(x) - \delta < f_n(x)$ para todo $n \geq N$. Por lo tanto,

$$u(x) - \delta = min\{u(x), u(x) - \delta\} \leq min\{u(x), f_n(x)\} = u_n(x) \leq u(x)$$

y resulta que $|u_n(x) - u(x)| < \delta$, para todo $n \geq N$.

□

Teorema 37 (Teorema de la Convergencia Monótona) *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión monótona creciente de funciones medibles no negativas definidas en* $[a,b]$*. Si* $\{f_n\}$ *converge puntualmente a* f *en* $[a,b]$*, entonces:*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración.

La sucesión monótona creciente $\{\int_a^b f_n\}$ tiene límite, aunque este sea infinito. Ya que $\int_a^b f_n \leq \int_a^b f$ para todo n, por el Lema de Fatou obtenemos,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \leq \int_a^b f = \int_a^b \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Queda demostrado que $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.

□

Corolario 6 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones integrables Lebesgue definidas en $[a,b]$ y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $[a,b]$. Si $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$ es finito, entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y se verifica:*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n.$$

Demostración.

Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ es monótona decreciente. La sucesión $\{f_1 - f_n\}$ es un sucesión monótona creciente de funciones no negativas que convergen puntualmente a $f_1 - f$. De esto obtenemos que:

$$\int_a^b (f_1 - f) = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f_1 - f_n)$$

Como el límite es finito, la función $f_1 - f$ es integrable Lebesgue en [a,b]. Si eliminamos de ambos lados $\int_a^b f_1$ nos queda el resultado que buscábamos.

□

Corolario 7 *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas en $[a,b]$, entonces:*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n.$$

Demostración.

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \int_a^b \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty}\int_a^b \sum_{n=1}^{N} f_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_a^b f_n = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado el Teorema de la convergencia monótona porque $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente.

□

Corolario 8 *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable Lebesgue en $[a,b]$ y sea E un subconjunto medible de $[a,b]$. Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces:*

$$\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f.$$

Demostración.

$$\int_E f = \int f\chi_E = \int f\chi_{\cup E_n} = \int \sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int f\chi_{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f$$

□

Teorema 38 (Teorema de Convergencia Dominada) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables Lebesgue definidas en $[a,b]$, sea g integrable Lebesgue en $[a,b]$ y supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en casi todo punto en $[a,b]$. Si $|f_n| \leq g$ en $[a,b]$ para todo n, entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.*

Demostración.

Redefiniendo todas las funciones como cero en el conjunto donde se verifique $f(x) \neq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Supongamos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en [a,b]. Ya que $|f| \leq g$ en [a,b], la función medible f es integrable Lebesgue en [a,b]. Las sucesiones $\{f_n + g\}$ y $\{g - f_n\}$ son no negativas en [a,b]. Por el Lema de Fatou,

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b (f_n + g) = \int_a^b g + \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g-f) \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b (g - f_n) = \int_a^b g - \limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b f_n \leq \int_a^b f \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Concluyendo que:

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

□

Bibliografía

[1] Miguel de Guzman y Baldomero Rubio. *Integración: Teoría y técnicas.* 1979.

[2] Russell A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock.* American Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics, Vol.4, 1994.

[3] R. Hardman. Pathological applications of lebesgue measure to the cantor set and non-integrability functions. *http://www.whitman.edu/mathemathics/SeniorProjectArchive/2012/Hardman.pdf.*

[4] R. Nelson. The cantor set-a brief introduction. https://www.cfa.harvard.edu/ dnelson/storage/dnelson.cantor-set.pdf.

[5] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* Third Edition, MacGraw-Hill, New York, 1976.

[6] S. Schiavone. A lebesgue measurable set that is not borel. http://www.cems.uvm.edu/ jwsands/333f12/nonborelmeasset.pdf.

[7] Juan Carlos Ponce Campuzano y Antonio Rivera Figueroa. Casos en los que no es aplicable la fórmula $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. *Miscelánea Matemática*, 48:59–74, 2009.