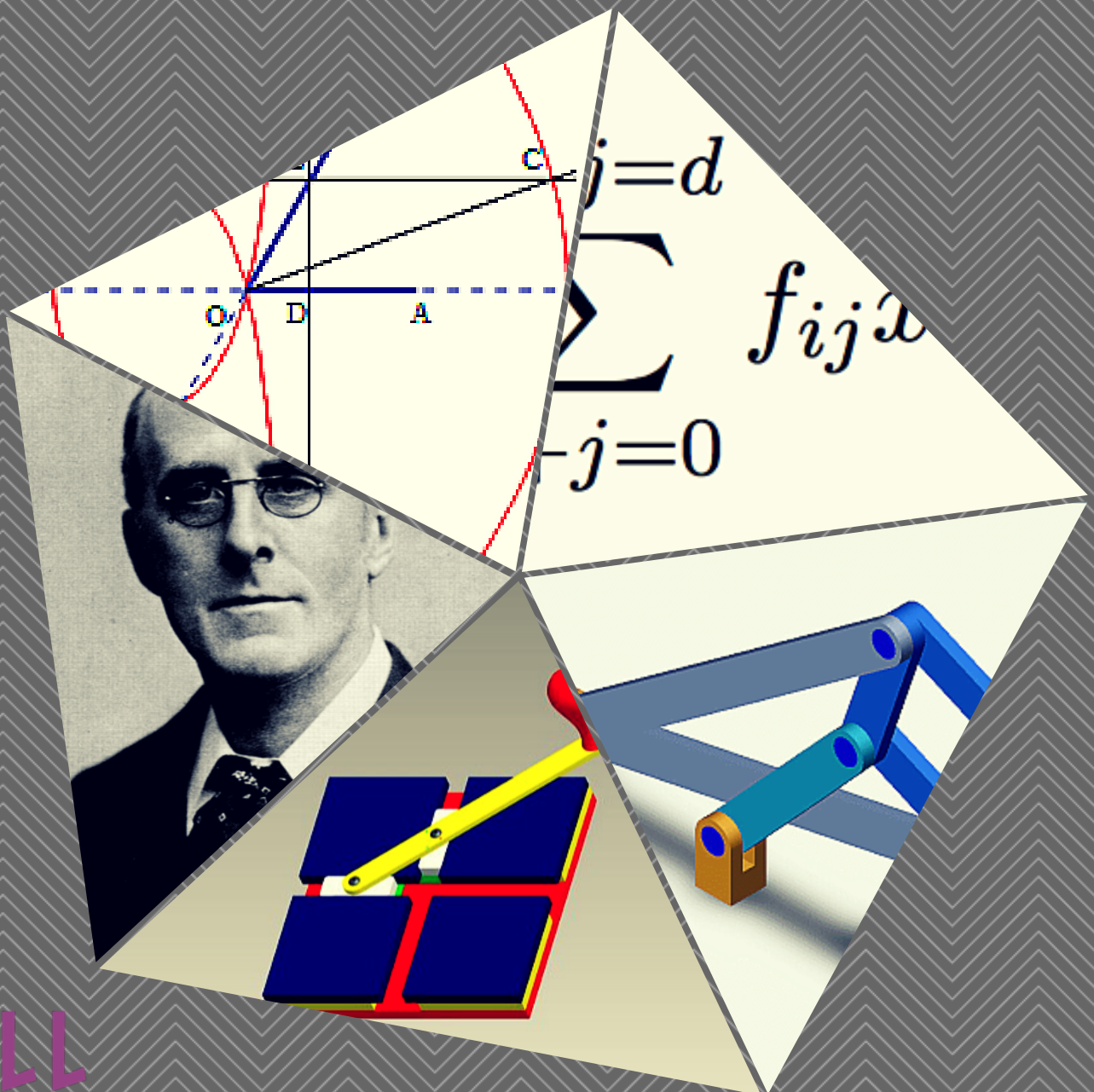


# DIBUJANDO

## CURVAS ALGEBRAICAS PLANAS MEDIANTE SISTEMAS ARTICULADOS



Universidad  
de La Laguna

**CYNTHIA BOLAÑOS FLORIDO**





Universidad  
de La Laguna

---

# Dibujando curvas algebraicas planas mediante sistemas articulados

*Drawing plane algebraic curves through articulated systems*

Cynthia Bolaños Florido

*Trabajo de Fin de Grado*

Geometría y Topología

Sección de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

---

La Laguna, 14 de julio de 2016



Dr. **Dña. M<sup>a</sup> Edith Padrón Fernández**, con N.I.F. 43.608.891-V profesor Titular de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

## **C E R T I F I C A**

Que la presente memoria titulada:

*“Dibujando curvas algebraicas planas mediante sistemas articulados”*

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Cynthia del Carmen Bolaños Florido**, con N.I.F. 54.094.427-Z.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 14 de julio de 2016



## Agradecimientos

A M<sup>o</sup> Edith Padrón Fernández  
no solo por su dedicación, esfuerzo  
y compromiso durante tantos meses;  
sino también por la ilusión que ha conseguido  
impregnar en cada una de las siguientes páginas.





## Resumen

*El objetivo de esta Memoria es presentar el teorema de A. Kempe sobre sistemas articulados planos. Este teorema muestra que para cualquier punto de una curva algebraica plana, existe un mecanismo articulado que permite dibujar un en torno de la curva desde un movimiento rectilíneo de uno de sus vértices.*

*En primer lugar analizamos algunos problemas clásicos que originaron la aparición de ciertos sistemas articulados. Posteriormente, mostramos el Teorema de Kempe, presentamos un ejemplo de la construcción de un sistema articulado para una elipse determinada y exponemos para esta misma curva mecanismos más eficientes. Por último, desarrollamos una serie de conclusiones y algunas preguntas abiertas que podrían plantearse entorno a esta temática.*

**Palabras clave:** Sistemas articulados planos, Teorema de Kempe, Curvas algebraicas.



## Abstract

The aim of this essay is to present A. Kempe's theorem on plane articulated systems. This theorem shows that for any point of a plane algebraic curve, there exists an articulated mechanism that allows to draw a neighbourhood of the curve from a rectilinear movement of one of its vertices.

We first analyze some classic problems that originated the appearance of some articulated systems. Then, we show Kempe's Theorem, let's sense beforehand an example of the construction of an articulated system for a particular ellipse and we expose for the same curve more efficient mechanisms. Finally, we collect some conclusions and let's sense beforehand some open issues that might appear environment to this subject matter.

**Keywords:** *Plain articulated systems, Kempe's Theorem, Algebraic curves.*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Origen de los sistemas articulados</b>	<b>5</b>
1.1. La Geometría de la regla y el compás . . . . .	5
1.2. Cuadratriz . . . . .	6
1.3. Sistemas articulados planos . . . . .	9
1.3.1. Mecanismo de Platón para el cálculo de raíces cúbicas . . . . .	9
1.3.2. Mecanismo articulado para la creación de la curva concoide . . . . .	10
<b>2. Teorema de Kempe</b>	<b>15</b>
2.1. Mecanismos articulados elementales . . . . .	15
2.1.1. Multiplicador de ángulos . . . . .	17
2.1.2. Simetrizador . . . . .	19
2.1.3. Sumador de ángulos . . . . .	20
2.1.4. El trasladador . . . . .	21
2.1.5. Creador de segmentos . . . . .	22
2.2. Teorema de Kempe . . . . .	24
<b>3. Ejemplo de un mecanismo articulado construido con el Teorema de Kempe</b>	<b>29</b>
3.1. Desarrollo de la curva algebraica . . . . .	29
3.2. Obtención de las barras $OL$ . . . . .	31
3.2.1. Construcción de la barra $OL_1$ para $-\frac{3}{2}\cos(2\alpha)$ . . . . .	31
3.2.2. Construcción de la barra $OL_2$ para $-\frac{3}{2}\cos(2\beta)$ . . . . .	31
3.2.3. Construcción de la barra $OL_3$ para $-3\cos(\alpha + \beta)$ . . . . .	32
3.2.4. Construcción de la barra $OL_4$ para $5\cos(\alpha - \beta)$ . . . . .	32
3.3. Unificación de las barras $OL_i$ . . . . .	33
3.4. Revertir el sistema articulado . . . . .	34
3.5. Otros mecanismos que describen la elipse . . . . .	34
3.5.1. El mecanismo de Franz Von Schooten . . . . .	35
3.5.2. El elipsógrafo de Arquímedes . . . . .	36
3.5.3. El elipsógrafo a partir de un antiparalelogramo . . . . .	37
<b>Conclusiones</b>	<b>41</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>42</b>



# Introducción

Los mecanismos articulados aparecen en la Grecia Clásica como respuesta a problemas como la trisección de un ángulo o la cuadratura de un círculo, que con el paso de los años resultaron imposibles de resolver con regla y compás. El uso de la regla y el compás eran la garantía de no “contaminación” de las pruebas matemáticas en ese tiempo. Así que incluir este tipo de mecanismo fue el primer paso para avanzar contra del purismo geométrico de los matemáticos de la época.

La cuadratura del círculo estaba ligada al intento de calcular áreas de figuras planas limitadas por curvas, no poligonales. La trisección de un ángulo era el siguiente paso a dividir un ángulo en dos partes iguales con la bisectriz (que si era posible hacerla con regla y compas). La dificultad para probar estos dos problemas originó que algunos matemáticos, “profanando” el purismo de los que defendían la regla y el compás como únicos instrumentos permitidos, optaran por otros artilugios algo más sofisticados como los sistemas articulados. Un mecanismo articulado plano es un mecanismo compuesto por barras (segmentos) rígidas unidimensionales unidas por sus extremos mediante articulaciones de tal forma que el posicionamiento de una de ellas en el plano condiciona el del resto. Estas barras pueden tener railes que permitan mover puntos sobre ellas. Lo interesante, es que las ligaduras del mecanismo no deben impedir que el sistema se pueda mover sin obstáculos. Al mover uno de los vértices del mecanismo originamos distintos movimientos del resto de vértices. La elección del vértice que queremos mover y la del que queremos observar son datos que determinan curvas finales diferentes cuando colocamos en este último vértice un lápiz.

Estos mecanismos ya se usaron en épocas a.C. como el de Platón para el cálculo de las raíces cúbicas (ver, por ejemplo, [2]) o el de Nicomedes para la creación de la curva denominada conchoide que permite trisecar un ángulo (ver, por ejemplo, [7]). Existen otros mecanismos que han sido usados como elementos tecnológicos, como el ejemplo del pantógrafo: un sistema articulado que puede considerarse de alguna forma como el precursor de la fotocopiadora. Este mecanismo sirve para copiar dibujos aumentando o disminuyendo su tamaño (ver, por ejemplo, [16]).

El objetivo de esta Memoria es responder, al menos para ciertos casos, a la cuestión de si es posible construir un mecanismo articulado que desde un movimiento lineal genere, en otro de sus vértices, una curva dada. Las primeras curvas en las que uno puede pensar son la recta y las cónicas. P.L. Chebishev (1821-1894) fue uno de los primeros que in-

tentó analizar la posibilidad de construir un mecanismo articulado que generara un trozo de recta. Tras años de trabajo llegó a pensar que era imposible. Sin embargo, en 1873 en [6] C.N. Peaucellier (1832-1913) ideó el compás composé, un mecanismo que permitía construir circunferencias, rectas y cónicas. En el caso de estas últimas, ya existían diferentes sistemas articulados que pintaban este tipo curvas (algunos de ellos son el elipsógrafo de Arquímedes [22], el parabológrafo de Cavalieri [9] o el hiperbológrafo de Descartes [18]).

Este tipo de curvas son un caso particular de curvas algebraicas, esto es, curvas en el plano cuyas ecuaciones respecto de un sistema de referencia ortogonal es

$$f(x, y) = \sum_{i+j=d} f_{ij} x^i y^j,$$

con  $f_{ij}$  números reales.

En [6], Peaucellier observó que para diversas curvas algebraicas era capaz de encontrar mecanismos articulados que permitían pintar la curva desde un movimiento lineal. Esto le hace preguntarse si sería esperable que cualquier curva algebraica pueda ser dibujada por un sistema articulado. Este problema fue abordado en [1] por Alfred Bray Kempe (1849-1922), un matemático inglés, más conocido por una demostración fallida del Teorema de los cuatro colores.

Su resultado para los sistemas articulados y las curvas algebraicas establece que para cada punto de la curva algebraica plana en cuestión, existe un entorno y un mecanismo articulado que permite dibujar la curva en ese entorno desde uno de los vértices del sistema articulado mientras que de otro hacemos un movimiento rectilíneo. El problema de la demostración de Kempe se originó al no contemplar el hecho de que en la construcción del mecanismo existían paralelogramos que con el movimiento pasaban a transformarse en antiparalelogramos. Esto fue resuelto incluyendo barras intermedias que no permitieran cambiar de configuración. La demostración más completa del Teorema de Kempe quizás fue la dada por Kapovich and Millson en 2002 [5].

El objetivo de esta Memoria, estructurada en tres capítulos, es presentar el Teorema de Kempe y su demostración. En el primer capítulo se justifica históricamente la necesidad de introducir los sistemas articulados. Para ello previamente explicamos qué entendemos por construcciones con regla y compás, y ponemos algunos ejemplos que han dado lugar a problemas clásicos (a los que se han dado respuestas después de muchos años) como la trisección en un ángulo. En la segunda parte de este capítulo, se introduce la noción de sistema articulado plano y se analizan algunos ejemplos de estos sistemas que dan solución a problemas como la trisección de un ángulo.

En el segundo capítulo se presenta el Teorema de Kempe y su demostración. Previamente se recuerdan algunas propiedades de los paralelogramos y antiparalelogramos, dos elementos claves en la construcción de mecanismos articulados elementales que son fun-



damentales en la demostración de Kempe. Estos mecanismos permiten sumar, crear y trasladar vectores y hallar el simétrico de un punto respecto a una recta.

La pregunta natural que nos hacemos es si esta demostración es constructiva, esto es, si es posible implementar el mecanismo siguiendo los pasos de la misma. En el tercer y último capítulo se realiza este proceso con una elipse particular y se comprueba que el sistema articulado obtenido es muy complejo. Mecanismos más simples, menos complejos, que permiten construir elipses desde un movimiento lineal son presentados al final de capítulo como el elipsógrafo de Arquímedes, el mecanismo de Franz Von Schooten y el elipsógrafo antiparalelogramo.

Terminamos la Memoria con las conclusiones del trabajo y algunas preguntas que abren la puerta a trabajar en otros aspectos relacionados con los sistemas articulados.

Esta Memoria va acompañada de un libro de geogebra donde se han implementado algunos de los mecanismos considerados en la Memoria así como algunos tutoriales donde se explica la construcción de ciertos mecanismos. Para acceder al libro de geogebra es necesario descargarse el software.

- Link de descarga del software geogebra: <https://www.geogebra.org/download>
- Libro de Geogebra: <http://ggbm.at/KghNhy8Z>
- Canal de videos tutoriales: <https://www.youtube.com/channel/UCvrD3ZIpf0sk6MQsa9KX9cw>



# Capítulo 1

## Origen de los sistemas articulados

En este primer capítulo de la Memoria analizaremos algunos de los elementos que motivaron la aparición de los sistemas articulados. Para ello, nos remontaremos hasta la Geometría clásica griega y las construcciones con regla y compás.

El capítulo se estructura en dos secciones. En una primera sección, puntualizaremos qué se entiende por construcción con regla y compás, y presentaremos un problema clásico, la trisección del ángulo, que no puede ser resuelto con estos instrumentos. En la segunda sección, mostraremos cómo los sistemas articulados planos pueden ayudar a resolver este problema y algunos otros de similar índole.

### 1.1. La Geometría de la regla y el compás

Las construcciones mediante regla y compás surgen en la Geometría clásica griega. Cuando se habla de este tipo de construcciones tenemos que tener en cuenta que la concepción sobre estos instrumentos era diferente a la actual. Para ellos

- Un compás es un instrumento que permite trazar circunferencias de cualquier radio dado y no tiene ninguna marca que permita repetir una abertura predeterminada.
- La regla es infinita, solo tiene un borde y además carece de marcas que permitan medir con ella.

Para los griegos hacer demostraciones geométricas con regla y compás era una forma de no “contaminarlas”. Con el uso de estas herramientas era posible hacer las operaciones elementales de magnitudes geométricas (suma, resta, multiplicación y división) además de la raíz cuadrada. En nuestro actual lenguaje algebraico las operaciones permitidas se relacionan con la construcción de magnitudes de la forma  $a + b\sqrt{c}$ , siendo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  números racionales y  $c > 0$ .

A continuación, se recoge algunas de las construcciones permitidas mediante regla y compás.

- Segmento de recta que une dos puntos dados.
- Círculo con centro un punto dado y cuya circunferencia toca otro punto dado.

- Punto en el que se cortan dos rectas no paralelas.
- Punto, o pareja de puntos, donde se corta una circunferencia y una recta.
- Composición de los elementos anteriores produciendo triángulos equiláteros, pentágonos regulares...
- Construcción de la bisectriz de un ángulo.

Pero... ¿es posible resolver todo tipo de problemas geométricos en el plano con regla y compás? Hoy sabemos que la respuesta es negativa.

A continuación, presentamos un problema de la geometría del plano que no se puede resolver de esta manera.

La *trisección del ángulo*. Consiste en dividir un ángulo dado en tres ángulos del mismo tamaño. Hay ángulos que se pueden trisecar con regla y compás. Sin embargo, otros no. Este es el caso del ángulo de  $60^\circ$ . Nótese que

$$\frac{1}{2} = \cos(60) = 4\cos^3(20) - 3\cos(20).$$

Tomando  $\cos(20) = y$ , la ecuación que deberíamos resolver es  $8y^3 - 6y - 1 = 0$ . Realizando el cambio de variable  $x = 2y$  se tiene la ecuación  $x^3 - 3x - 1 = 0$ . En consecuencia, el problema de la trisección del ángulo está relacionado con la solución de una ecuación cúbica, una operación no permitida con regla y compás.

En la Geometría clásica griega, los geómetras pensaban que estos problemas podían ser resueltos mediante regla y compás. El estudio realizado por Hipócrates de Quios sobre la cuadratura de las lúnulas, figuras obtenidas de la intersección de dos círculos, reafirmó más esta idea.

Sin embargo, estos problemas sobrevivieron sin ser resueltos hasta el siglo XIX. Fue Pierre Wantzel en su artículo [8] de 1837 quien demostró, mediante la Teoría de Galois, la no existencia de una solución con regla y compás.

Durante el proceso de búsqueda de una solución al problema de la trisección de un ángulo aparece una curva mecánica denominada cuadratriz que permite resolver este problema. A día de hoy, aún no se conoce el origen exacto de esta curva. Proclo en sus comentarios a los *Elementos de Euclides, Libro II, Cap IV*, atribuyó a Hippias la invención de esta curva. Sin embargo, algunos historiadores creen que su creador fue Dinostrato hacia el año 390 a.C.

## 1.2. Cuadratriz

Dada una dirección AD en el plano, la construcción de la curva cuadratriz viene dada por el lugar geométrico de los puntos del plano que son intersección de dos rectas que cumplen

las siguientes propiedades:

- Una recta es paralela a  $AD$  y se mueve a velocidad constante en dirección vertical.
- La otra recta gira con velocidad constante respecto al punto  $A$  por el que pasa.
- En el instante inicial ambas rectas son perpendiculares y en el instante final coinciden.

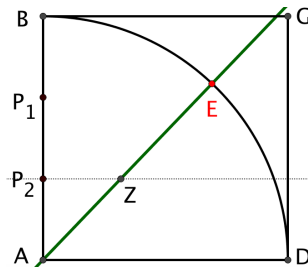


Figura 1.1: Construcción de un punto de la curva cuadratriz

Nótese que en la descripción de esta curva no sólo tenemos elementos geométricos sino que precisamos de datos mecánicos como el tiempo de movimiento de las dos rectas. Esto fue lo que ocasionó que los griegos la denominaran curva mecánica y no geométrica.

Entre los minutos 0,48 y 1,18 de [15], puede verse un video explicativo de la construcción de la curva cuadratriz.

Fijado un sistema ortonormal determinado por la dirección  $AD$ , una recta ortogonal a  $AD$  que pasa por  $A$  y dos vectores unitarios  $AD$  y  $AB$ , veamos cuál es la ecuación de la curva cuadratriz.

Sea  $Z = (x, y)$  un punto de la cuadratriz, donde  $y \in ]0, 1[$ . Consideramos  $\theta$  el ángulo determinado por los segmentos  $AZ$  y  $AD$ . (Ver Figura 1.1). Teniendo en cuenta la tercera propiedad de la cuadratriz tenemos que  $\theta = \frac{\pi}{2}y$ .

De este modo,  $\cot \theta = \frac{x}{y}$ . Por consiguiente,

$$\cot \left( \frac{\pi y}{2} \right) = \frac{x}{y}.$$

En consecuencia, la curva cuadratriz tiene por ecuación

$$x = \cot \left( \frac{\pi y}{2} \right) y.$$

A continuación, pasamos a detallar la solución del problema de la trisección de un ángulo mediante el uso de esta curva.

### Trisección del ángulo mediante la cuadratriz

Supongamos que tenemos dibujada la curva cuadratriz asociada a una dirección fija  $AD$ . Considerando un ángulo  $\theta_0$  respecto a esta dirección, veamos cómo dividir este ángulo en tres partes iguales.

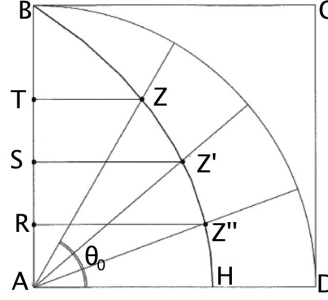


Figura 1.2: Trisección de un ángulo  $\theta_0$

1. Denotamos el punto  $Z$  como la intersección de la recta que delimita el ángulo  $\theta_0$  con la cuadratriz.
2. Definimos  $T$  como la intersección entre el segmento  $\overline{AB}$  y la recta paralela al segmento  $\overline{AD}$  que pase por  $Z$ .
3. Usamos el Teorema de Tales para dividir el segmento  $\overline{AT}$  en tres partes iguales y determinar sobre  $AB$  los puntos  $R$  y  $S$ . Por ellos trazamos dos rectas paralelas al segmento  $\overline{AD}$ .
4. Tomamos las rectas que pasan por  $A$  y  $Z'$ , y por  $A$  y  $Z''$ , donde  $Z'$  y  $Z''$  son los puntos de intersección entre la cuadratriz y las rectas del paso anterior.

De esta manera  $\angle HAZ''$ ,  $\angle Z''AZ'$  y  $\angle Z'AZ$  trisecan  $\theta_0 = \angle HAZ$ .

En efecto, por un lado tenemos que existe un  $y_{\theta_0} \in ]0, 1[$  tal que  $Z = \left( \cot\left(\frac{\pi y_{\theta_0}}{2}\right) y_{\theta_0}, y_{\theta_0} \right)$ .

Por otro lado,  $T = (0, y_{\theta_0})$ ,  $S = (0, \frac{2}{3}y_{\theta_0})$  y  $R = (0, \frac{1}{3}y_{\theta_0})$ .

En consecuencia,  $Z' = \left( \frac{2}{3}\cot\left(\frac{\pi y_{\theta_0}}{3}\right) y_{\theta_0}, \frac{2}{3}y_{\theta_0} \right)$  y por tanto el segmento  $\overline{AZ'}$  delimita el ángulo  $\frac{2\theta_0}{3}$ .

Análogamente,  $Z'' = \left( \frac{1}{3}\cot\left(\frac{\pi y_{\theta_0}}{6}\right) y_{\theta_0}, \frac{1}{3}y_{\theta_0} \right)$  y el segmento  $\overline{AZ''}$  delimita el ángulo  $\frac{\theta_0}{3}$ .

La capacidad de este tipo de curva para resolver problemas irresolubles hasta el momento, motivó la búsqueda de otras curvas con similares propiedades. La cuadratriz tenía

para los geómetras griegos un problema: era una curva mecánica. Así que la idea de buscar una curva geométrica que solventara estos mismos problemas les resultaba sugerente. De esta manera aparecen las curvas generadas por mecanismos articulados.

Los primeros sistemas articulados planos, diferentes de la regla y el compás, se deben a los geómetras griegos del siglo V a.C. Estos sistemas estaban destinados a resolver algunos problemas relativos a cónicas y ecuaciones de tercer grado.

### 1.3. Sistemas articulados planos

Antes de presentar alguno de estos sistemas, precisemos qué entendemos por un mecanismo articulado.

**Definición 1.3.1.** Un sistema articulado plano es un mecanismo compuesto por barras rígidas unidas por sus extremos mediante articulaciones.

Para el funcionamiento de estos sistemas se debe aplicar una fuerza en uno de sus vértices mediante una traslación o una rotación. En consecuencia, cualquier otro vértice genera una curva en el plano.

Nótese que un mismo mecanismo puede originar diversas curvas sin más que cambiar el vértice final o introducir la fuerza en otro vértice.

#### 1.3.1. Mecanismo de Platón para el cálculo de raíces cúbicas

El aparato atribuido a Platón está formado por tres barras que denominaremos  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$ . La barra  $b_1$  y la barra  $b_2$  se encuentran rígidamente unidas por el extremo  $B$ , formando un ángulo recto. La barra  $b_3$  permanece paralela a  $b_1$  y se puede desplazar a lo largo de  $b_2$  mediante el extremo  $C$ . (Ver Figura 1.3).

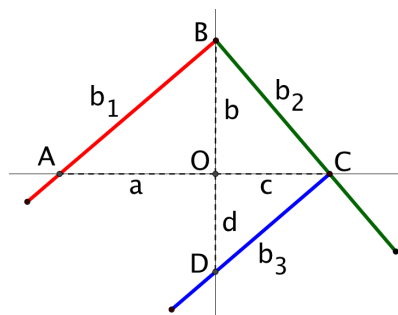


Figura 1.3: Mecanismo atribuido a Platón

En [21] se puede ver un vídeo de la movilidad del mecanismo.

Veamos cómo debemos mover el mecanismo para obtener el valor de la raíz cúbica de  $\frac{d}{a}$ , con  $a$  y  $d$  enteros.

Tomando un sistema ortogonal de coordenadas de centro  $O$ , se hace pasar la barra  $b_1$  por el punto  $A = (-a, 0)$  y la barra  $b_3$  por el punto  $D = (0, -d)$ .

A continuación, hay que colocar el vértice  $B$  en el eje  $y$ , y el vértice  $C$  sobre el eje  $x$ . Denotamos por  $b = d(O, B)$  y  $c = d(O, C)$ .

Aplicando el Teorema de las alturas a los triángulos  $\triangle ABC$  y  $\triangle BCD$  se tiene que:

$$b^2 = ac \quad y \quad c^2 = bd.$$

En consecuencia,

$$b^4 = a^2c^2 = a^2bd.$$

Operando resulta

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{d}{a}.$$

Por tanto, se tiene que  $\sqrt[3]{\frac{d}{a}} = \frac{b}{a}$ .

### 1.3.2. Mecanismo articulado para la creación de la curva concoide

No existe un sistema articulado que defina la cuadratriz, pero si existen algunos sistemas articulados que nos permiten construir otras curvas con las que podemos trisecar cualquier ángulo. Este es el caso del mecanismo articulado de Nicomedes que nos permite crear la concoide.

Este sistema consta de tres barras,  $b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$ . La barra  $b_1$  forma un ángulo recto con  $b_2$  y se encuentra unida a esta por su punto medio. Estas dos barras están fijas. Además,  $b_1$  posee un rail por donde desliza un pivote  $P$  de la barra  $b_3$ . Este pivote se encuentra a distancia  $a$  de su extremo  $X$ , que será el punto que describa el lugar geométrico que estamos buscando.

La barra  $b_3$  posee un rail a partir de la mitad de la misma. De este modo, dicha barra se desliza por un pivote fijo  $B$  que posee  $b_2$  a distancia  $b$  de la barra  $b_1$ .

La Figura 1.4 muestra el mecanismo descrito.



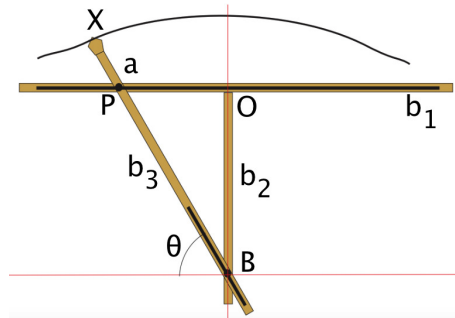


Figura 1.4: Aparato atribuido a Nicomedes para la construcción de la conchoide

En [19] se puede ver un vídeo de la movilidad del mecanismo de Nicomedes para la construcción de la curva conchoide.

Pasamos a determinar la ecuación de la curva conchoide. Para ello, calcularemos la ecuación de la curva en polares.

Consideramos un sistema de referencia ortogonal donde el eje  $y$  está determinado por la barra  $b_2$  y el origen es el punto  $B$ . Entonces, se tiene que  $\text{sen } \theta = \frac{b}{y_\theta}$ , donde  $y_\theta = d(B, P)$ . (ver Figura 1.4).

En consecuencia, la curva en polares es,

$$\rho = y_\theta + a = \frac{b}{\text{sen}\theta} + a. \tag{1.1}$$

Para obtener la ecuación en cartesianas debemos recordar que  $\text{sen } \theta = \frac{y}{\rho}$  y que  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Sustituyendo en (1.1) y operando se tiene que

$$y\sqrt{x^2 + y^2} = b\sqrt{x^2 + y^2} + ya.$$

Elevando al cuadrado resulta la ecuación de la conchoide

$$(x^2 + y^2)(y - b)^2 = y^2a^2.$$

A continuación, mostramos cómo resolver el problema de la trisección del ángulo mediante la conchoide.

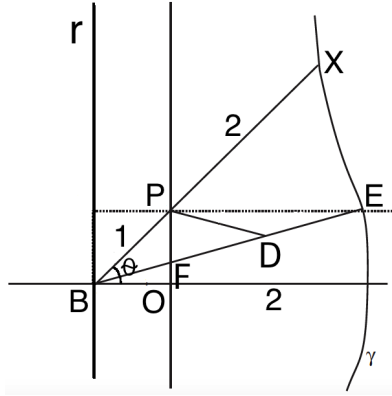


Figura 1.5: Trisección del ángulo  $\theta$

Para obtener la trisección de un ángulo  $\theta$  procedemos como sigue:

1. Dibujamos la concoide con  $a = 2$  y  $b_3 = 1$ .
2. Señalamos el ángulo  $\theta$  que queremos trisecar con las barras  $b_3$  y  $b_2$  de la concoide.
3. Hallamos el punto  $E$  como intersección de la concoide con la recta paralela a la barra  $\overline{BO}$  que pasa por el punto  $P$ .

De este modo se tiene que el ángulo  $\angle OBE$  es una tercera parte de  $\theta$ .

Ahora, comprobamos que el algoritmo es correcto. Consideramos los puntos  $F$  y  $D$  dados por estas propiedades:

- El punto  $F$  es la intersección del segmento  $\overline{BE}$  y la recta  $r$ . De este modo, el segmento  $\overline{FE}$  mide 2 puesto que  $E$  pertenece a la concoide.
- El punto  $D$  es el punto medio del segmento  $\overline{FE}$ .

Esto implica que los triángulos,  $\triangle BPD$  y  $\triangle PDE$  son isósceles. En efecto, el triángulo  $\triangle ECF$  es la mitad de un rectángulo donde el segmento  $\overline{FE}$  es la diagonal. En consecuencia, se tiene que los segmentos  $\overline{CD}$ ,  $\overline{FD}$  y  $\overline{DE}$  miden 1.

Sabemos que un triángulo isósceles tiene dos ángulos iguales y el que es diferente es el determinado por los lados iguales. Por tanto, los ángulos  $\angle DBP$ ,  $\angle PDB$  y  $\angle DPE$ ,  $\angle PED$  son iguales entre sí, respectivamente.

Además, se tiene que  $\angle EDP + \angle PDB = \pi$ .

En consecuencia

$$2\angle DPE + \angle EDP = \pi = \angle EDP + \angle PDB.$$

De este modo, se tiene que

$$\angle DBP = \angle PDB = 2\angle DPE.$$

Ahora,

$$\theta = \angle DBP + \angle OBD = 2\angle DPE + \angle OBD.$$

Finalmente, dado que el triángulo  $\triangle DEP$  es isósceles, tenemos la siguiente relación

$$\angle OBD = \angle PED = \angle DPE.$$

Esto implica que  $\theta = 3\angle OBE$ .



## Capítulo 2

### Teorema de Kempe

En este capítulo mostraremos el principal resultado de esta Memoria, el Teorema de Kempe. Este resultado establece que para cualquier curva algebraica existe un sistema articulado que dibuja localmente a la curva desde un movimiento rectilíneo.

En las primeras secciones, analizaremos algunos mecanismos articulados elementales necesarios para construir y darle movilidad al sistema articulado que buscamos en el Teorema de Kempe. Finalizaremos el capítulo con el enunciado y la demostración del teorema.

#### 2.1. Mecanismos articulados elementales

En esta sección todos los mecanismos articulados que se mostrarán están formados principalmente por paralelogramos y antiparalelogramos. En cada caso veremos, por un lado, la utilidad del mecanismo y su proceso de construcción, y por otro lado, comprobaremos matemáticamente que el mecanismo ejerce correctamente su función.

Antes de comenzar presentamos algunas definiciones y propiedades que nos ayudarán a comprender lo que sigue en esta Memoria.

**Definición 2.1.1.** Un *paralelogramo* es un cuadrilátero convexo cuyos pares de lados opuestos son iguales y paralelos dos a dos. Un *antiparalelogramo* es un cuadrilátero que tiene dos pares de lados opuestos de igual longitud, pero en el que los lados de un par se cruzan entre sí.

**Proposición 2.1.1.** *Todos los antiparalelogramos comparten las siguientes propiedades:*

- *Tienen un eje de simetría que pasa por su punto de cruce.*
- *Tienen dos pares de ángulos y lados iguales.*
- *Los lados de mayor longitud son los que se cruzan.*

Una vez aclarado estos conceptos pasamos a describir la construcción de un paralelogramo y un antiparalelogramo conocidos dos puntos  $O$  y  $Q$ .

Para construir un paralelogramo  $[OAQB]$  de lados de longitud  $a$  y  $b$  procedemos como sigue:

- Construimos una circunferencia de centro  $O$  y radio  $a$ .
- Construimos una circunferencia de centro  $Q$  y radio  $b$ .
- Consideramos el punto  $A$ , intersección de las dos circunferencias anteriores.
- Añadimos dos rectas paralelas a los segmentos  $\overline{OA}$  y  $\overline{QA}$  que pasen por  $Q$  y  $O$ , respectivamente.
- Consideramos el punto  $B$ , intersección de las dos rectas anteriores.
- Trazamos los segmentos  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{QB}$  y  $\overline{BO}$ .

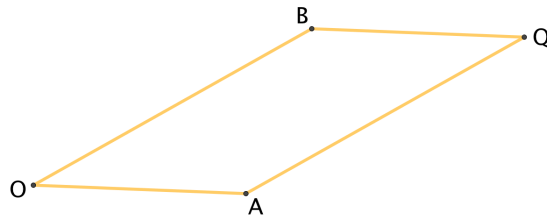


Figura 2.1: Paralelogramo

En [13] hemos preparado un video donde se explica detalladamente la construcción de este mecanismo mediante el software Geogebra.

Para construir un antiparalelogramo  $[OAQB]$  de lados de longitud  $a$  y  $b$  el procedimiento a seguir es el siguiente:

- Construimos una circunferencia de centro  $O$  y radio  $a$ .
- Construimos una circunferencia de centro  $Q$  y radio  $b$ .
- Consideramos el punto  $A$ , intersección de las dos circunferencias anteriores.
- Construimos una circunferencia de centro  $O$  y radio  $b$ .
- Construimos una circunferencia de centro  $Q$  y radio  $a$ .
- Consideramos el punto  $B$ , intersección de las dos circunferencias anteriores.
- Trazamos los segmentos  $\overline{OA}$ ,  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{QB}$  y  $\overline{BO}$ .

Nótese que un antiparalelogramo determina un triángulo isósceles con  $A$ ,  $B$  y el punto de intersección de los dos lados mayores del antiparalelogramo.

En [10] hemos preparado a un video donde se explica detalladamente la construcción de este mecanismo mediante el software Geogebra.

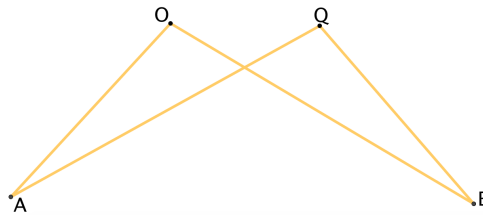


Figura 2.2: Antiparalelogramo

A continuación, introduciremos mecanismos articulados elementales que nos serán de gran utilidad durante la demostración del Teorema de Kempe.

### 2.1.1. Multiplicador de ángulos

El multiplicador de ángulos es un sistema articulado plano que consigue construir a partir de un ángulo dado  $\alpha \leq \pi$ , otro de amplitud  $k\alpha$ , con  $k$  un número natural. Comenzaremos viendo el proceso de construcción del sistema articulado que duplica un ángulo  $\alpha$ .

El proceso de construcción de este sistema consiste en la composición de dos antiparalelogramos. (Ver Figura 2.3).

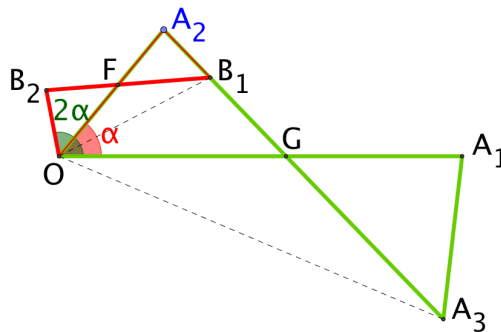


Figura 2.3: Duplicador de ángulos

A continuación, describimos la construcción de este sistema articulado. Partiremos de dos barras de longitudes  $a_1$  y  $a_2$  tal que  $a_1 \geq a_2$  y procederemos como sigue:

- Construimos el antiparalelogramo  $[OA_1A_3A_2]$  de lados de longitud  $a_1$  y  $a_2$ . Fijamos para ello los puntos  $O$  y  $A_1$  tal que la distancia entre ellos es  $a_1$ .
- El antiparalelogramo siguiente tiene como lado mayor el lado  $OA_2$ . La longitud  $a_3$  de su otro lado es tal que  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3}$ . Además, la barra correspondiente tiene a uno de sus vértices en  $A_2$  y descansa sobre el lado  $A_3A_2$ . Nótese que  $a_3 = \frac{(a_2)^2}{a_1} \leq a_2$ .

- La movilidad del mecanismo se produce cuando actuamos sobre  $A_2$  para que se mueva en un arco de amplitud  $\pi$  respecto de  $OA_1$ .

Esta condición implica que el ángulo  $\alpha$  del que queremos hallar el doble no puede ser mayor que  $\pi$ . Más adelante comprobaremos por qué se requiere esta restricción.

**Observaciones 2.1.1.** La composición de antiparalelogramos que hemos utilizado en el algoritmo se rige bajo las siguientes condiciones:

- Todos los antiparalelogramos tienen un vértice común, el punto  $O$ .
- Los dos antiparalelogramos deben guardar la siguiente relación:

$$\frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OA_2}{A_2B_1},$$

Esto implica que los triángulos  $\triangle B_1B_2O$  y  $\triangle OA_2B_1$  son iguales y semejantes a los triángulos, también iguales,  $\triangle OA_2A_3$  y  $\triangle A_3A_1O$ .

- La barra  $OA_2$  es común a los antiparalelogramos. Por tanto, ambos tienen otro punto en común, el punto  $A_2$ .
- El barra  $A_2B_1$  se encuentra sobre la barra  $A_2A_3$ .

Para calcular el doble de cualquier ángulo  $\alpha$  dado, debemos mover el punto  $A_2$  de manera que ángulo  $\angle A_1OA_2$  sea igual a  $\alpha$ . En consecuencia, tendremos que  $\angle A_1OB_2 = 2\alpha$ .

Nótese que el ángulo  $\angle A_1OA_2$  no puede ser mayor que  $\pi$  puesto que el antiparalelogramo  $[OA_1A_3A_2]$  desaparecería.

Con el fin de comprobar que el algoritmo que hemos utilizado es correcto, veamos que el ángulo  $\angle A_1OB_2 = 2\alpha$ .

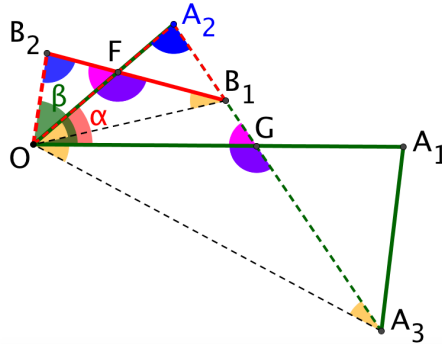


Figura 2.4: Demostración del duplicador de ángulos

Teniendo en cuenta la Figura 2.4, como los triángulos  $\triangle B_1B_2O$ ,  $\triangle OA_2B_1$ ,  $\triangle OA_2A_3$  y  $\triangle A_3A_1O$  son semejantes por construcción, se tiene que

$$\Gamma = \angle B_1OA_2 = \angle B_2B_1O = \angle A_2A_3O = \angle A_3OA_1.$$



Estos ángulos son los que están pintados de amarillo en la Figura 2.4.

Además, usando que la suma de los ángulos de un triángulo es  $\pi$  y que  $\angle OFB_1$  y  $\angle OGA_3$  son ángulos exteriores a un triángulo, se puede deducir que

$$2\Gamma = \angle OFB_1 = \angle OGA_3,$$

donde los puntos  $F$  y  $G$  son la intersección de los lados mayores de cada antiparalelogramo.

Por otro lado, puesto que los triángulos  $\triangle B_1B_2O$  y  $\triangle OA_2B$  son semejantes se tiene que

$$\angle OB_2B_1 = \angle OA_2B_1.$$

En consecuencia, los triángulos  $\triangle OB_2F$  y  $\triangle OA_2G$  tienen dos de sus ángulos iguales, y por tanto, también el tercero, esto es,  $\angle B_2OA_1 = 2\alpha$  como queríamos comprobar.

**Observaciones 2.1.2.** En general, si queremos multiplicar  $k$  veces un ángulo dado, debemos añadir  $k - 2$  antiparalelogramos al proceso anterior y proceder bajo un razonamiento análogo.

Así, si quisiéramos multiplicar por 3 el ángulo dado, construiríamos el mecanismo articulado añadiendo al anterior mecanismo, el antiparalelogramo  $[OB_2C_1C_2]$ , que tiene lado mayor  $OB_2$  y el otro lado tiene longitud  $a_4$  tal que  $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4}$ . Esta barra se coloca con vértice en  $B_2$  y sobre el lado  $B_2B_1$ . Entonces  $C_2OA_1$  determina el ángulo  $\gamma = 3\alpha$ .

En [11] hemos preparado un video donde se explica detalladamente la construcción de este mecanismo mediante el software Geogebra.

### 2.1.2. Simetrizador

El simetrizador es un mecanismo articulado que tiene por finalidad dibujar el simétrico de un punto respecto de un eje de simetría. [17].

Este mecanismo esta formado por una barra  $e$ , que pasa por un punto fijo  $A$ , y por un rombo articulado  $[ACBD]$  de longitud  $a$ , donde el vértice  $B$  se desplaza por la barra  $e$ . Puesto que un rombo tiene todos sus lados de igual longitud y sus diagonales se cortan perpendicularmente, podemos asegurar que el punto  $D$  es el simétrico de  $B$ .

Cuando queremos calcular el simétrico de un punto  $O$  respecto de una recta  $r$  debemos colocar la recta  $e$  sobre  $r$  haciendo coincidir, por un lado, el punto  $A$  con el centro de giro del punto  $O$  que se encuentra sobre  $e$ , y por otro lado, el punto  $C$  con el punto  $O$ . Esto implica que la longitud del rombo  $[ACBD]$  viene determinada por el radio de la circunferencia sobre la que se mueve el punto  $O$ . De esta manera el vértice  $D$  es el simétrico del punto  $O$  respecto de  $r$ .

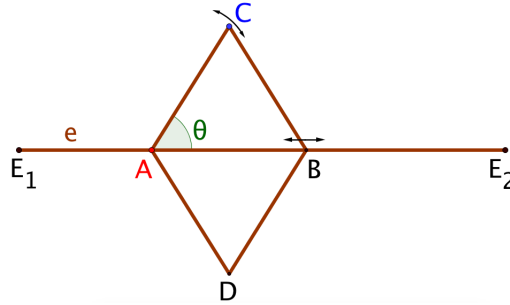


Figura 2.5: Simetrizador del punto C.

**Observaciones 2.1.3.** Para que el mecanismo mantenga su configuración debe cumplirse por un lado que  $d(A, B) \leq 2a$ , siendo  $a$  la longitud del rombo, y por otro lado,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , siendo  $\theta$  la pendiente de la barra  $AC$ .

Nótese que la recta que pasa por A y B divide al ángulo  $\angle DAB$  en dos partes iguales. Este hecho es importante para el mecanismo que sigue.

### 2.1.3. Sumador de ángulos

Calcular  $2\alpha$  es calcular  $\alpha + \alpha$ . Así, resulta natural preguntarse si se puede obtener la suma  $\alpha + \beta$  mediante el mecanismo multiplicador de ángulos. El siguiente sistema articulado da respuesta a esta cuestión.

Dados dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , con  $\alpha < \beta$ , la idea para el cálculo de la suma  $\alpha + \beta$  respecto a una dirección fijada, es hallar el ángulo doble de  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  mediante el mecanismo duplicador de ángulos.

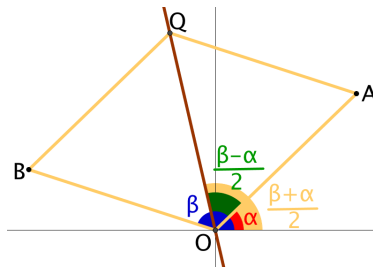


Figura 2.6: Suma de ángulos

Fijada una dirección y un punto  $O$ , consideramos un paralelogramo  $[OAQB]$  para señalar los dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  respecto a la dirección fijada. Seguidamente, para obtener el ángulo  $\frac{\alpha + \beta}{2}$ , añadimos al paralelogramo una barra que parte de  $O$  y pasa por  $Q$ . De esta

manera, la barras OA y OQ forman un ángulo  $\frac{\beta-\alpha}{2}$  entre sí y en consecuencia, la barra OQ forma el ángulo  $\alpha + \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}$  respecto de la dirección elegida. (Ver Figura 2.6).

**Observaciones 2.1.4.** Para que el mecanismo no pierda su configuración, nótese que la longitud de la barra que pasa por los puntos O y Q debe ser mayor o igual que la suma de las longitudes de las barras OA y AQ.

Para engarzar el duplicador de ángulos con este mecanismo, colocamos la barra  $OA_2$  del duplicador sobre la barra que parte de O y pasa por Q del nuevo mecanismo. Nótese que si  $\alpha = \beta$  aplicamos directamente el duplicador. Además, debe cumplirse que  $\alpha + \beta < 2\pi$ .

En la demostración del Teorema de Kempe necesitamos calcular el ángulo  $\alpha - \beta$ . Para ello, consideramos un paralelogramo determinado por los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  como en el caso de la suma de ángulos. A continuación, agregamos el mecanismo elemental simetrizador que nos permita calcular el simétrico  $B'$  de B respecto del eje x. Por último, construimos el paralelogramo  $[OAQ'B']$  junto con la barra que tiene uno de sus vértices en O y el punto  $Q'$  se mueve sobre ella. Esta barra señala el ángulo  $\frac{\alpha-\beta}{2}$  respecto del eje x. Ahora solo queda meter un duplicador de ángulos y proceder de manera análoga al caso de la suma.

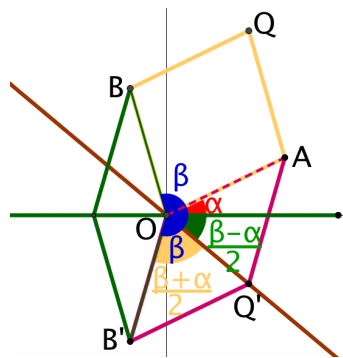


Figura 2.7: Diferencia de ángulos

### 2.1.4. El trasladador

El trasladador es un sistema articulado que permite trasladar un segmento usando un vector de traslación. Su construcción se basa en el uso de cuatro paralelogramos de igual longitud. (Ver Figura 2.8).

Dadas las longitudes  $a$  y  $b$  de cada uno de los paralelogramos tal que  $a \leq b$ , el mecanismo trasladador permite realizar traslaciones de un segmento de longitud menor que  $2a$  por un vector con módulo menor que  $2b$ . Para su construcción debemos trazar los paralelogramos  $[ABED]$ ,  $[BCFE]$ ,  $[DEHG]$  y  $[EFIH]$  cuyas longitudes de los lados desiguales son  $a$  y  $b$ .

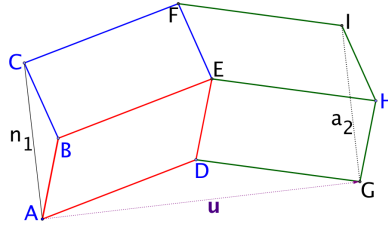


Figura 2.8: El trasladador

Para obtener la traslación de un segmento dado, debe colocarse el punto  $A$  en uno de los extremos del segmento y el punto  $C$  en el otro. El punto  $A$  debe ser el origen del vector de traslación y su extremo debe estar en  $G$ . De este modo, el trasladado del segmento  $\overline{AC}$  es el segmento  $\overline{GI}$ .

En efecto, teniendo en cuenta la Figura 2.8 se nota que cada dos paralelogramos están unidos por un lado común y se cumple que  $\overline{AB} = \overline{BC}$ .

De esta manera se consigue garantizar que

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GH}, \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HI},$$

y en consecuencia

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HI} = \overrightarrow{GI}.$$

Por tanto, concluimos que  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GI}$  como queríamos demostrar.

En [14] hemos preparado un video donde se explica detalladamente la construcción de este mecanismo mediante el software Geogebra.

### 2.1.5. Creador de segmentos

El mecanismo de Evans es un sistema articulado que permite crear un segmento perpendicular a uno dado [3].

Tomando como dato la longitud  $m$  del segmento dado, la construcción del mecanismo procede de la siguiente manera:

- Fijamos la barra azul de longitud  $m$  y extremos  $E$  y  $L$ .
- Colocamos la barra roja de longitud  $\frac{m}{2}$  en el extremo  $E$ , y el otro extremo  $H$  se mueve en el arco de centro  $E$  y ángulo  $\frac{\pi}{2}$ .

- Si  $F$  es un punto variable sobre  $EL$ , colocamos la barra verde de longitud  $m$ , pasando por  $F$  y  $H$ . Nótese que en tal caso  $H$  está en el punto medio de la barra verde ya que  $H$  se mueve en una circunferencia de radio  $\frac{m}{2}$ .

En la siguiente figura se muestra el mecanismo

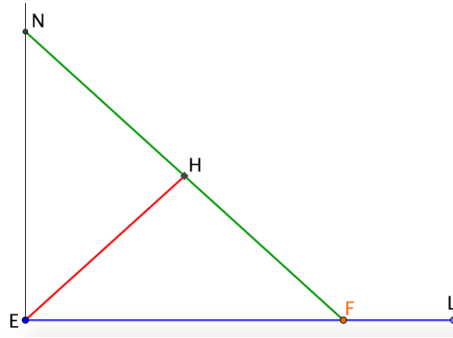


Figura 2.9: Mecanismo de Evans

Al mover el punto  $F$  sobre la barra azul se consigue que el punto  $N$  dibuje un segmento perpendicular.

En efecto, teniendo en cuenta la Figura 2.9, se nota que  $\overline{EH} = \overline{NH} = \overline{HF}$ .

Además, por construcción  $\overrightarrow{HF} = -\overrightarrow{HN}$  y se verifica que:

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EN} = (\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HF}) \cdot (\overrightarrow{EH} - \overrightarrow{HF}) = (\overrightarrow{EH})^2 - (\overrightarrow{HF})^2 = 0$$

De este modo,  $N$  pinta un segmento que es perpendicular al determinado por los puntos  $E$  y  $L$ .

**Observaciones 2.1.5.** Nótese que las longitudes de las tres barras se han tomado para asegurar que el mecanismo no pierda su configuración, es decir, que siempre exista  $\triangle EHF$ .

En [12] hemos preparado un video donde se explica detalladamente la construcción de este mecanismo mediante el software Geogebra.

Para impedir que los mecanismos articulados planos pierdan su configuración, debemos asegurar que los paralelogramos y antiparalelogramos no se desarticulen. Para ello, en el caso del paralelogramo debemos colocar una barra intermedia como se ve en la Figura 2.10.

En el caso de un antiparalelogramo para evitar su desconfiguración debe añadirse cuatro barras siguiendo la estructura que se presenta en la siguiente Figura 2.11.

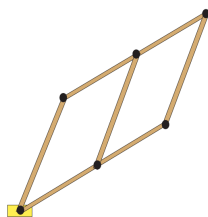


Figura 2.10: Barra intermedia para evitar la desconfiguración de un paralelogramo

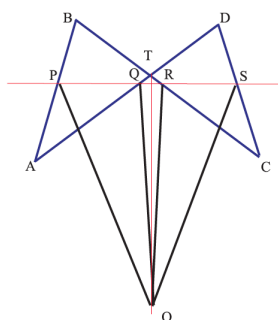


Figura 2.11: Barras para evitar la desconfiguración de un antiparalelogramo

## 2.2. Teorema de Kempe

Esta sección contiene el principal resultado de la memoria: el Teorema de Kempe. Este resultado involucra un tipo especial de curvas que se denominan curvas algebraicas planas.

**Definición 2.2.1.** Una *curva algebraica plana* es una curva que respecto a un sistema de coordenadas ortonormal está determinada por la ecuación  $f(x, y) = 0$ , con

$$f(x, y) = \sum_{\substack{i+j=d \\ i+j=0}} f_{ij} x^i y^j,$$

con  $f_{ij}$ , números reales.

La clave en la demostración del Teorema del Kempe es el uso de los mecanismos articulados definidos en la anterior sección.

**Teorema 2.2.1.** Dada una curva algebraica real plana  $f(x, y) = 0$  y un punto  $P$  de ella, existen un entorno  $U_p$  de  $P$  y un sistema articulado  $S$  tal que, mientras un punto de  $S$  recorre un segmento, otro punto de  $S$  describe la intersección de la curva con  $U_p$ .

*Demostración.* Para demostrar el teorema partiremos de un punto arbitrario  $Q = (x, y)$  tal que  $f(x, y) = 0$  y demostraremos que existe un punto  $K_Q$  del plano, enlazado con  $Q$

mediante un sistema articulado, que se mueve en línea recta a medida que  $Q$  se mueve en un trozo de la curva que contiene al punto  $P$ .

La prueba del teorema parte de la ecuación de la curva que satisface el punto  $Q = (x, y)$

$$f(x, y) = \sum_{i+j=d} f_{ij} x^i y^j = 0,$$

donde  $f_{ij}$  son constantes.

Fijamos  $a$  y  $b$  tal que

$$a < b. \quad (2.1)$$

$$b - a < d(OP) < a + b. \quad (2.2)$$

Estas dos magnitudes  $a$ ,  $b$  van a ser las longitudes de los lados de un paralelogramo que tiene a  $\overline{OP}$  por diagonal. Aquí hemos usado la propiedad de que el lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos.

Consideramos, el cambio de variable siguiente

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y = a \sin \alpha + b \sin \beta \end{cases}.$$

Geoméricamente, este cambio de variable se representa mediante un paralelogramo que une el origen de coordenadas cartesianas con el punto  $P$  de la curva.

Tomando los puntos  $D$ ,  $F$  y  $E$  como las proyecciones sobre los ejes de coordenadas del punto  $A$  y la proyección del punto  $Q$  sobre el eje de abscisas, respectivamente, se tiene que

$$\begin{cases} x = d(OE) = d(OD) + d(DE) = d(OA) \cos \alpha + d(AB) \cos \beta = a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y = d(EP) = d(EF) + d(FP) = d(OA) \sin \alpha + d(AB) \sin \beta = a \sin \alpha + b \sin \beta \end{cases}$$

Hay que tener en cuenta que no existe la unicidad en este tipo de transformaciones puesto que para cada paralelogramo o antiparalelogramo hay cuatro configuraciones distintas que nos proporciona un cambio de coordenadas diferente en cada caso.

Estos cambios de configuración se producen tras el alineamiento de los cuatro vértices del paralelogramo, por tanto, debemos evitar que esto se produzca. Para ello debe cumplirse (2.1) y (2.2) no solo para el valor  $P$  sino para todo  $Q$  del entorno considerado.

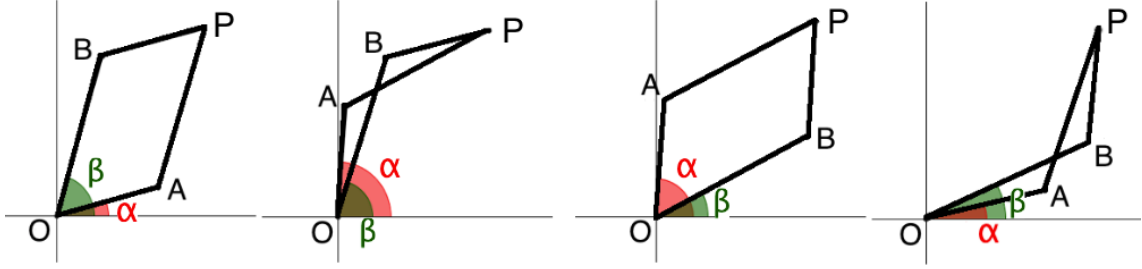


Figura 2.12: Juegos de coordenadas trigonométricas del mismo punto  $P$

Una vez realizado el cambio de coordenadas, la ecuación de la curva algebraica queda expresada de la siguiente manera

$$0 = f(x, y) = \sum_{i+j=d}^{i+j=d} f_{ij} (a \cos \alpha + b \cos \beta)^i (a \sin \alpha + b \sin \beta)^j.$$

Aplicando el binomio de Newton queda

$$0 = f(x, y) = \sum_{i+j=d}^{i+j=d} f_{ij} \left( \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} a^r b^{i-r} \cos^r \alpha \cos^{i-r} \beta \right) \left( \sum_{s=0}^j \binom{j}{s} a^s b^{j-s} \sin^s \alpha \sin^{j-s} \beta \right).$$

Operando tenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} & \sum_{i+j=d}^{i+j=d} f_{ij} \left( \sum_{r=0, s=0}^{r=i, s=j} \binom{i}{r} \binom{j}{s} a^{r+s} b^{i+j-r-s} \cos^r \alpha \cos^{i-r} \beta \sin^s \alpha \sin^{j-s} \beta \right) = \\ & = E + \sum_{i+j=1}^{i+j=d} \sum_{r=0, s=0}^{r=i, s=j} \binom{i}{r} \binom{j}{s} f_{ij} a^{r+s} b^{i+j-r-s} \cos^r \alpha \cos^{i-r} \beta \sin^s \alpha \sin^{j-s} \beta, \end{aligned}$$

donde  $E$  es una constante.

Nuestro siguiente objetivo es convertir el segundo sumando de esta expresión en una combinación lineal de cosenos. Para ello tenemos que tener en cuenta las siguientes relaciones trigonométricas.

$$\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \quad (2.3)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad (2.4)$$

■ Para  $n$  impar:

$$\cos^n \alpha = \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\alpha) \quad (2.5)$$



- Para  $n$  par:

$$\cos^n \alpha = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n}{k} \cos((n-2k)\alpha) \quad (2.6)$$

Haciendo uso de (2.3), (2.5) y (2.6), se obtiene la siguiente expresión.

$$f(x, y) = E + \sum_{i+j=d} \sum_{r=0, s=j}^{r=i, s=j} T_{rs} \cos(C_1 \alpha) \cos(C_2 \beta) \cos\left(C_3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) \cos\left(C_4 \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right),$$

donde  $C_1 = r - 2k_1$ ,  $C_2 = i - r - 2k_2$ ,  $C_3 = s - 2k_3$ ,  $C_4 = j - s - 2k_4$  y

$$T_{rs} = \binom{i}{r} \binom{j}{s} a^{r+s} b^{i+j-r-s}, \quad \text{siendo } k_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{constantes.}$$

Aplicando (2.4) se llega a la siguiente expresión

$$f(x, y) = E + \sum_{1 \leq r'+s' \leq d} [A_{rs} \cos(r'\alpha + s'\beta) + B_{rs} \cos(r'\alpha - s'\beta) + C_{rs} \cos(r'\alpha + s'\beta - \frac{\pi}{2}) + D_{rs} \cos(r'\alpha - s'\beta - \frac{\pi}{2})] = 0,$$

donde los coeficientes  $E$ ,  $A_{rs}$ ,  $B_{rs}$ ,  $C_{rs}$  y  $D_{rs}$  son polinomios en  $a$  y  $b$ .

Así, hemos conseguido transformar expresión de la curva algebraica en operaciones que tienen que ver con traslaciones y rotaciones que se puede considerar con mecanismos articulados.

Finalmente, lo que nos queda es construir un punto  $K_Q$  cuya primera coordenada sea

$$f(x, y) - E = \sum_{1 \leq r'+s' \leq d} [A_{rs} \cos(r'\alpha + s'\beta) + B_{rs} \cos(r'\alpha - s'\beta) + C_{rs} \cos(r'\alpha + s'\beta - \frac{\pi}{2}) + D_{rs} \cos(r'\alpha - s'\beta - \frac{\pi}{2})].$$

De este modo, hemos visto que para cualquier punto  $Q$  que recorre la curva  $f(x, y) = 0$ , existe un punto  $K_Q = (-E, t)$  que está por tanto en la recta  $x = -E$ .

Para poder concluir la prueba, queda por explicar cómo construir el sistema articulado que une el punto  $Q$ , que recorre la curva, con el punto  $K_Q$ . Para realizar este proceso utilizaremos las máquinas elementales analizadas en la Sección 2.1. El proceso de construcción del punto  $K_Q$ , y por tanto, del respectivo sistema articulado, se divide en dos partes.

En una primera parte, debemos hallar un segmento  $\overline{OL}$ , con uno de sus vértices en el origen, que represente cada uno de los sumandos que conforman la primera coordenada del

punto  $K_Q$ . Este segmento se toma de longitud dada por el coeficiente constante que tenga el coseno de cada sumando. La dirección del segmento está determinada por el ángulo que acompaña al coseno.

Por ejemplo, si tenemos como sumando  $\frac{1}{2}\cos(2\alpha)$ , en primer lugar, deberemos utilizar la máquina elemental denominada multiplicador de ángulos, explicada en la Sección 2.1.1. De este modo obtenemos una barra que forme con el eje x de coordenadas el ángulo  $2\alpha$ . Luego, construimos la respectiva barra  $\overline{OL}$  que se encuentre sobre la barra anterior y que diste  $\frac{1}{2}$  del origen  $O$ .

Si tenemos que multiplicar alguno de los ángulos por un entero, colocamos el primer antiparalelogramo del multiplicador en donde está delimitado el ángulo en el paralelogramo de cambio de coordenadas con origen en  $O$ . Si tenemos que sumar o restar dos ángulos colocamos el paralelogramo inicial sobre el paralelogramo de cambio de coordenadas.

En la segunda fase, primeramente debemos trasladar cada uno de los segmentos  $\overline{OL}$  mediante la máquina elemental denominada, el trasladador, explicada en la Sección 2.1.4. Con ello conseguimos que estas barras se coloquen una a continuación de las otras y por tanto podemos sumar la primera coordenada de cada una de ellas. De este modo, el último punto de esta traslación se mueve en  $x=-E$ . Finalmente, debemos hacer uso de la máquina elemental, denominada creador de segmentos, explicada en la Sección 2.1.5, que nos permite desplazar al punto  $K_Q$  sobre la recta  $x = -E$  y así revertir nuestra máquina. En consecuencia, se consigue describir la curva algebraica, a partir del punto  $P$ .  $\square$

## Capítulo 3

# Ejemplo de un mecanismo articulado construido con el Teorema de Kempe

En la primera parte de este capítulo analizaremos con detalle la construcción de un sistema articulado que describa la cónica

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Para ello, seguiremos la demostración del Teorema de Kempe estructurando el proceso en cuatro fases.

En la primera fase expresaremos la curva algebraica como una combinación lineal de cosenos. En una segunda fase representaremos cada sumando mediante el uso de los mecanismos articulados elementales presentados en la Secciones 2.1.1 y 2.1.3. De este modo, podremos construir una barra  $OL$  para cada sumando. En la tercera fase, unificaremos cada una de las barras  $OL$  anteriores mediante el mecanismo trasladador explicado en la Sección 2.1.4. En consecuencia, obtendremos un mecanismo que desde la elipse genera un movimiento lineal. Finalmente, en la cuarta fase daremos movilidad al sistema articulado mediante el mecanismo de Evans presentado en la Sección 2.1.5.

En la última sección de este capítulo, analizaremos la eficiencia del Teorema de Kempe estudiando otros mecanismos articulados planos que permiten construir la curva algebraica que hemos tomado como ejemplo.

### 3.1. Desarrollo de la curva algebraica

En esta sección, nuestro objetivo es expresar como combinación lineal de cosenos la siguiente curva algebraica

$$f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0.$$

Para ello, comenzaremos aplicando el siguiente cambio de variable

$$\begin{cases} x = \cos \alpha + \cos \beta \\ y = \sin \alpha + \sin \beta \end{cases},$$

donde se ha tomado a la unidad como valor de los parámetros  $a$  y  $b$  para simplificar los cálculos.

Geoméricamente, esto se reduce a construir un paralelogramo de lados  $a = b = 1$  que una el origen  $O$  con el punto  $P$  que recorre un entorno  $U_P$  de la curva. De este modo, obtenemos los valores de los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , y por tanto, podemos expresar la curva de la siguiente forma

$$f(\alpha, \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta + 4 \sin^2 \alpha + 4 \sin^2 \beta + 8 \sin \alpha \sin \beta - 4 = 0.$$

A continuación, analizamos cada sumando.

- Si aplicamos la relación trigonométrica  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ , se tiene que
  1.  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \cos(2\alpha) + \frac{1}{2}$ .
  2.  $\cos^2 \beta = \frac{1}{2} \cos(2\beta) + \frac{1}{2}$ .
  3.  $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ .
- Teniendo en cuenta, en primer lugar, que  $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ , y en segundo lugar, la relación trigonométrica aplicada anteriormente se tiene que
  1.  $4 \sin^2 \alpha = 2 \cos(\pi - 2\alpha) + 2$ .
  2.  $4 \sin^2 \beta = 2 \cos(\pi - 2\beta) + 2$ .
  3.  $8 \sin \alpha \sin \beta = 4 \cos(\pi - \alpha - \beta) + 4 \cos(-\alpha + \beta)$ .
- Como  $\cos(\pi - \gamma) = -\cos(\gamma)$ , se tiene que
  1.  $2 \cos(\pi - 2\alpha) = -2 \cos(2\alpha)$ .
  2.  $2 \cos(\pi - 2\beta) = -2 \cos(2\beta)$ .
  3.  $4 \cos(\pi - \alpha - \beta) = -4 \cos(\alpha + \beta)$ .

En consecuencia,

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= 1 + \frac{1}{2} \cos(2\alpha) + \frac{1}{2} \cos(2\beta) + \cos(\alpha + \beta) + 5 \cos(\alpha - \beta) - 2 \cos(2\alpha) \\ &\quad - 2 \cos(2\beta) - 4 \cos(\alpha + \beta) = 0. \end{aligned}$$

Sabiendo que  $\cos \alpha = \cos(-\alpha)$  y agrupando sumandos, llegamos a la siguiente expresión de la curva algebraica.

$$f(\alpha, \beta) - 1 = -\frac{3}{2} \cos(2\alpha) - \frac{3}{2} \cos(2\beta) - 3 \cos(\alpha + \beta) + 5 \cos(\alpha - \beta). \quad (3.1)$$

Para garantizar que este paralelogramo cumpla sus funciones de transformación de coordenadas, se permite que el vértice donde se sitúa  $P$  se mueva en un entorno pequeño de  $P$ , de tal manera que los lados del paralelogramo no se alineen. Los puntos  $Q$  de este entorno serán pensados en lo que sigue como coordenadas  $(\alpha, \beta)$ .

### 3.2. Obtención de las barras $OL$

En esta sección, obtendremos para cada sumando del segundo término de (3.1) una barra  $OL$  cuya longitud viene dada por el coeficiente del coseno, y su dirección viene representada por el ángulo asociado a cada coseno.

#### 3.2.1. Construcción de la barra $OL_1$ para $-\frac{3}{2} \cos(2\alpha)$

Por un lado, el coeficiente  $\frac{3}{2}$  representará la longitud de la barra  $OL_1$ , y por otro lado, el ángulo  $2\alpha$  indica su dirección.

El procedimiento a seguir para obtener el ángulo buscado, consiste en agregar un multiplicador de ángulos donde el lado  $OA_2$  (ver Figura 2.3) es también el lado del paralelogramo inicial que marca el ángulo  $\alpha$  en relación con el eje  $x$ . En consecuencia, la barra  $OB_2$  determina un ángulo  $2\alpha$  respecto al mismo eje.

De este modo, la barra  $OL_1$  tiene la misma dirección que la barra  $OB_2$ , y el punto  $L_1$  se encuentra en el cuadrante simétrico respecto del origen  $O$  debido al signo que acompaña al coeficiente  $\frac{3}{2}$ . En consecuencia, la barra  $OL_1$  de longitud  $\frac{3}{2}$  se encuentra sobre una barra auxiliar  $B_2L_1$  que mide  $\frac{3}{2} + d(O, B_2)$ .

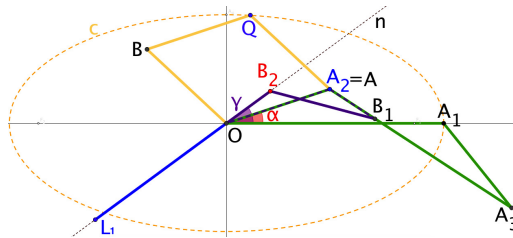


Figura 3.1: Obtención de la barra  $OL_1$  del primer sumando

#### 3.2.2. Construcción de la barra $OL_2$ para $-\frac{3}{2} \cos(2\beta)$

En este caso, por un lado, tenemos que la longitud de la barra  $OL_2$  es  $\frac{3}{2}$ , y por otro lado, el ángulo que indica su dirección es  $2\beta$ .

Así, para obtener la barra  $OL_2$ , añadimos un multiplicador de ángulos tal que la barra  $OA_2$  (ver la Figura 2.3) coincida con la barra del paralelogramo que señala el ángulo  $\beta$  con el eje  $x$ . De este modo se obtiene que la barra  $OB_2$  forma un ángulo  $2\beta$  respecto al mismo eje.

El punto  $L_2$  está colocado en el cuadrante simétrico respecto de  $O$  del punto  $B_2$ . La barra  $OL_2$  de longitud  $\frac{3}{2}$  se encuentra sobre una barra auxiliar  $B_2L_2$  que mide  $\frac{3}{2} + d(O, B_2)$ .

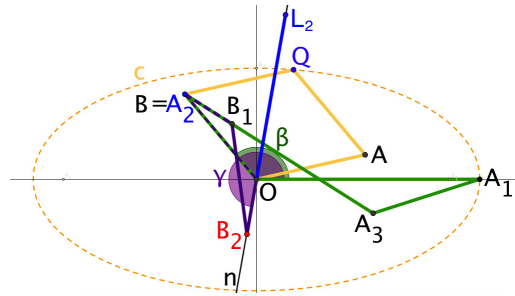


Figura 3.2: Obtención de la barra  $OL_2$  del segundo sumando

### 3.2.3. Construcción de la barra $OL_3$ para $-3 \cos(\alpha + \beta)$

Por una parte se tiene que la longitud de la barra  $OL_3$  es 3, y por otra parte, el ángulo que forma con el eje x es  $\alpha + \beta$ .

Para calcular  $L_3$  usaremos un sumador de ángulos (ver Figura 2.6) cuyo paralelogramo  $[AOBQ]$  coincidirá con el paralelogramo transformador de coordenadas. El siguiente paso es añadir el mecanismo duplicador de ángulos. Para ello colocamos la barra  $OA_2$  sobre la barra bisectriz y obtenemos que la barra  $OB_2$  forma un ángulo  $\alpha + \beta$  respecto al eje x.

De este modo, la barra  $OL_3$  tiene misma dirección que la barra  $OB_2$  en la Figura 2.6 y el punto  $L$  se encuentra en el cuadrante simétrico respecto del origen  $O$  debido al signo que acompaña al coeficiente 3. En consecuencia, la barra  $OL_3$  de longitud 3 se encuentra sobre una barra auxiliar  $B_2L_3$  que mide  $3 + d(O, B_2)$ .

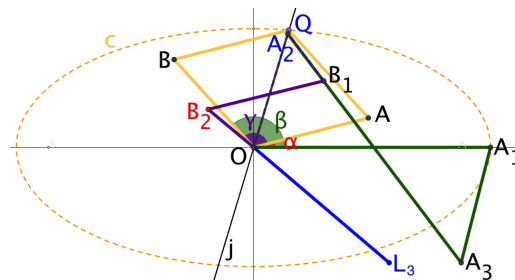


Figura 3.3: Obtención de la barra  $OL_3$  del tercer sumando

### 3.2.4. Construcción de la barra $OL_4$ para $5 \cos(\alpha - \beta)$

Se tiene por una parte que la longitud de la barra  $OL_4$  es 5, y por otra parte, el ángulo que determina la barra  $OL_4$  con el eje x debe ser  $\alpha - \beta$ .

Para conseguir colocar esta barra usaremos un sumador de ángulos junto con un sime-  
trizador como en la Figura 2.7. En este caso  $\alpha - \beta$  es el ángulo determinado por la barra  
 $OB_2$ . Ahora  $OL_4$  es una barra que mide 5 y que está sobre  $OB_2$ .

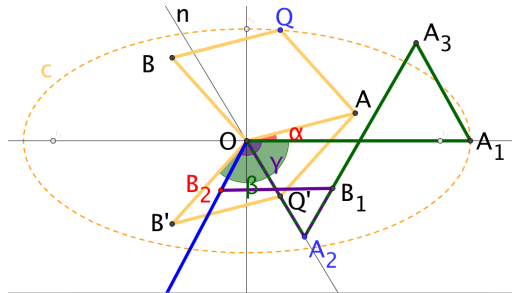


Figura 3.4: Obtención de la barra  $OL_4$  del cuarto sumando

### 3.3. Unificación de las barras $OL_i$

Cada una de las barras  $OL_i$  tiene una proyección en el eje x que es el correspondiente  
sumando del segundo término de la ecuación (3.1). Queremos un mecanismo que nos per-  
mita sumar todos estos coeficientes. Para ello, debemos trasladar las barras  $OL_i$  que tienen  
origen en O, de forma que la proyección de  $L_1$  sobre el eje x coincida con la proyección  
del trasladado de  $OL_2$  por el vector determinado por  $OL_1$ . Usamos un trasladador  
con el que conseguimos sumar los dos primeros sumandos del segundo miembro de (3.1). Se-  
guimos con los respectivos trasladadores. Así, al final de este proceso, la proyección sobre  
el eje x del trasladado del punto  $L_4$  nos da la suma (3.1) y un punto  $K_Q$  sobre el plano  
cuya primera coordenada tiene este valor. Si  $Q = (\alpha, \beta)$  se mueve en la curva, entonces  
 $f(\alpha, \beta) = 0$  y  $K_Q$  tiene por primera coordenada  $-1$  (ver (3.1)), esto es, se mueve en la  
recta  $x = -1$ . (Ver Figura 3.5).

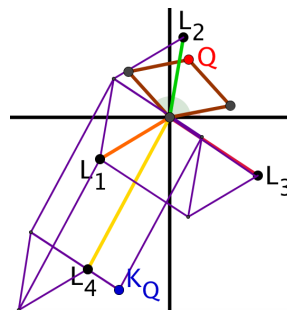


Figura 3.5: Unificación de las barras  $OL$

### 3.4. Revertir el sistema articulado

El mecanismo construido hasta ahora consigue un movimiento en un segmento cuando en otro vértice del sistema nos movemos en un entorno de la curva. Pero el proceso que queremos conseguir es el inverso.

Para ello, primeramente introduciremos un mecanismo que nos permita dibujar el trozo de segmento que describe el punto  $K_Q$  desde un movimiento lineal. Existen muchos sistemas articulados que hacen esto. Nosotros usaremos el mecanismo de Evans descrito en la Sección 2.1.5.

El tamaño de las barras mayores del mecanismo de Evans añadido a este sistema está determinado por el recorrido de  $K_Q$  cuando  $Q$  se mueve en el entorno de la curva.

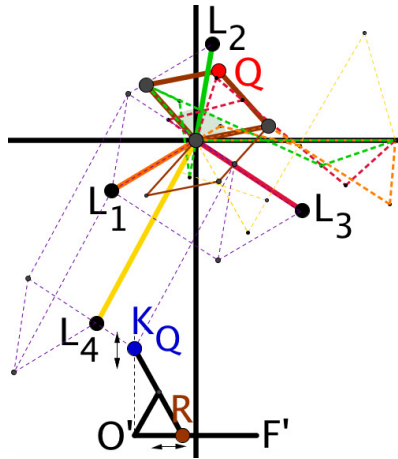


Figura 3.6: Sistema articulado obtenido por el Teorema de Kempe

Para finalizar la construcción del sistema articulado debemos invertir todos los procesos de manera que, al aplicar la fuerza en  $R$ , el punto  $K_Q$  se desplace en un segmento y, en consecuencia, el punto  $Q$  recorra el correspondiente tramo de la cónica  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

### 3.5. Otros mecanismos que describen la elipse

En la anterior sección, hemos obtenido un sistema articulado, ciertamente complejo, para dibujar la elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Nos preguntamos si existen otros mecanismos más simples (con menos barras) que consigan lo mismo: partiendo de un movimiento lineal, dibujar para cada punto de la elipse un entorno de la curva con este sistema articulado.

En esta sección veremos que en efecto existen otras posibilidades.



Inicialmente, estudiaremos el mecanismo de Franz Von Schooten y el elipsógrafo de Arquímedes. Ambos mecanismos permiten dibujar elipses mediante un movimiento rectilíneo. En particular permiten dibujar la curva algebraica  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  que hemos tomado como ejemplo. El primero de ellos lo hace salvo en cuatro puntos de la elipse.

En la última sección, analizaremos la construcción de un elipsógrafo diferente al de Arquímedes que nos permite dibujar el mismo tipo de curva desde un movimiento circular. Además, nos plantearemos la pregunta de si posible modificar ese mecanismo para que dibuje la curva desde un movimiento lineal.

### 3.5.1. El mecanismo de Franz Von Schooten

El mecanismo de Franz Von Schooten es un sistema articulado plano que dibuja elipses mediante un movimiento lineal.

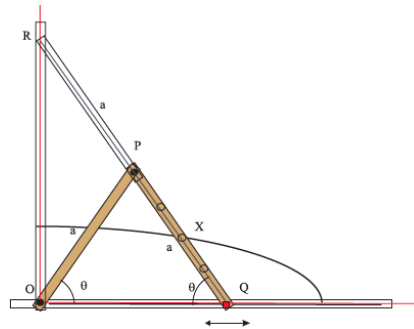


Figura 3.7: Mecanismo de Franz Von Schooten

Su estructura es como la del mecanismo de Evans. Esta es constituido por tres barras, dos de tamaño  $2a_1$  y una de tamaño  $a_1$ . Una de las barras de tamaño  $2a_2$  se coloca fija, la más pequeña de tamaño  $a_1$  está fija a uno de los vértices de la barra anterior, el vértice  $O$ , y el otro punto  $P$  en la mitad de la tercera barra. Esta última además tiene uno de sus vértices, el  $Q$ , deslizándose sobre la barra fija. La diferencia con el mecanismo de Evans es que sobre  $QP$  señalamos un punto  $X$  a distancia  $b$  de  $Q$ . Este sistema se mueve como el de Evans pero estamos interesados en saber el rastro del punto  $X$ . Denotemos por  $a = 2a_1 - b$ .

Fijado un sistema de referencia de centro  $O$  y dirección  $OQ$ , al mover el punto  $Q$  sobre el segmento fijo, el ángulo  $\theta$  que determina esta barra con la otra barra del mismo tamaño varía de  $0$  a  $\frac{\pi}{2}$ . Además, las coordenadas de  $x$  e  $y$  del punto  $X$  cumplen las relaciones

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{a} \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{x^2}{a^2} \\ \text{sen}\theta &= \frac{y}{b} \Rightarrow \text{sen}^2\theta = \frac{y^2}{b^2} \end{aligned}$$

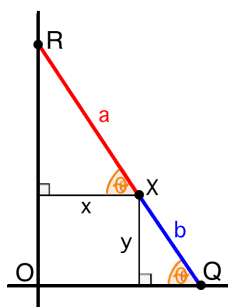


Figura 3.8: Demostración mecanismo de Franz Von Schooten

En consecuencia, el punto  $X$  describe la siguiente elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

Para construir la elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  mediante el mecanismo de Franz Von Schooten, simplemente tenemos que tomar  $a = 2$ ,  $b = 1$  y  $a_1 = \frac{3}{2}$ .

El mecanismo de Franz Von Schooten permite dibujar para cada punto de la elipse un entorno de la misma desde un movimiento rectilíneo, salvo en cuatro puntos (los puntos de intersección de la elipse con los ejes).

**Observaciones 3.5.1.** Si elegimos el punto  $X$  como  $P$ , entonces lo que obtenemos con el mecanismo de Franz Von Schooten es un arco de circunferencia.

### 3.5.2. El elipsógrafo de Arquímedes

El elipsógrafo de Arquímedes es un sistema articulado plano que permite dibujar localmente una elipse mediante un movimiento lineal.

Consideramos dos barras de longitudes  $2l_2$  y una de longitud  $2l_1 + 2l_2$ . Las dos barras de longitud  $2l_2$  están fijas y se cruzan formando una cruz simétrica como se indica en la Figura 3.9. Hallamos los puntos  $A_1$  y  $A_2$ . El punto  $A_1$  se mueve sobre la barra  $AB$  y el punto  $A_2$  es la intersección de la circunferencia de centro  $A_1$  y radio  $l_2$  con el segmento  $\overline{DE}$ . La barra de longitud  $2l_1 + 2l_2$  se coloca sobre estos dos puntos tal que  $A_1$  corresponde con el punto medio. Al mover esta barra con el punto  $A_1$  los extremos dibujan una elipse.

En efecto, fijamos como sistema de referencia las rectas determinadas por las dos barras fijas que se cruzan, se tiene que  $A_1 = (l_2 \cos\alpha, 0)$ , donde  $\alpha$  es el ángulo que forma la barra que se mueve con el eje  $x$ , y  $A_2 = (0, l_2 \sin\alpha)$  representa la intersección de la recta  $x = 0$  y la circunferencia de centro  $A_1$  y radio  $l_2$ .

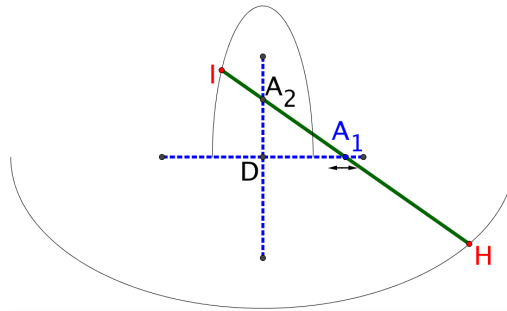


Figura 3.9: Elipsógrafo de Arquímedes

Hallamos los puntos  $I$  y  $H$  como intersección de la recta que pasa por los puntos  $A_1$  y  $A_2$  y la circunferencia  $(x - l_2 \cos \alpha)^2 + y^2 = l_1^2$ . Así, si consideramos la ecuación paramétrica de esta recta se tiene que

$$(l_2 \cos \alpha + \lambda l_2 \cos \alpha - l_2 \cos \alpha)^2 + (\lambda l_2 \sin \alpha)^2 = l_1^2$$

$$\lambda^2 (l_2^2 \cos^2 \alpha + l_2^2 \sin^2 \alpha) = l_1^2$$

$$\lambda = \pm \frac{l_1}{l_2}.$$

Los puntos  $I$  y  $H$  describen entornos de las elipses  $\frac{x^2}{(l_2+l_1)^2} + \frac{y^2}{l_1^2} = 1$  y  $\frac{x^2}{(l_2-l_1)^2} + \frac{y^2}{l_1^2} = 1$ , respectivamente.

En nuestro caso, para representar la elipse  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  tomaremos el punto  $H$  y las longitudes  $l_1 = 1$  y  $l_2 = 3$ .

Nótese que para dibujar un entorno de la curva en cada punto de la elipse desde un movimiento lineal es necesario cambiar de configuración el elipsógrafo modificando la colocación del punto  $A_1$  en la cruz.

### 3.5.3. El elipsógrafo a partir de un antiparalelogramo

Para finalizar, veremos que es posible construir la elipse del ejemplo con un sistema articulado que comience con un movimiento que no es lineal.

El elipsógrafo a partir de un antiparalelogramo es un sistema articulado plano que permite dibujar localmente una elipse desde un movimiento circular.

Construimos un antiparalelogramo de lados  $l_1$  y  $l_2$ , con  $l_2 \geq l_1$ . Denotamos por  $H$  al punto de corte de los dos lados mayores del antiparalelogramo. Fijamos el lado del antiparalelogramo  $AC$  y movemos el punto  $E'$  en una circunferencia. Entonces el punto  $H$

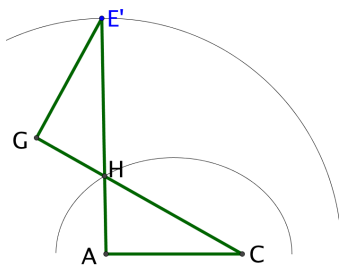


Figura 3.10: Elipsógrafo a partir de un antiparalelogramo.

dibuja una elipse.

En efecto, por las propiedades de los antiparalelogramos, se tiene que el triángulo  $\triangle E'HC$  es isósceles (ver Sección 2.1). Así,

$$d(E', H) = d(C, H).$$

En consecuencia, como  $d(A, E') = d(A, H) + d(H, E')$  se tiene que

$$d(A, H) + d(C, H) = d(A, E') - d(E', H) + d(C, H) = d(A, E') = l_2.$$

De este modo, la ecuación de la elipse es

$$d(A, H) + d(C, H) = l_2.$$

La elipse obtenida es la que tiene a  $A$  y a  $C$  como focos y la longitud del eje que pasa por estos focos es  $l_2$ .

Para trazar la curva  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  debemos tomar como focos  $A = (-\sqrt{3}, 0)$  y  $C = (\sqrt{3}, 0)$ , y las longitudes  $l_1 = 2\sqrt{3}$  y  $l_2 = 4$ .

¿Es posible modificar minimamente este mecanismo para poder dibujar localmente la elipse desde un movimiento lineal de uno sus vértices? La respuesta es afirmativa.

La idea es agregar alguna barra tal que desde un movimiento lineal se consiga mover el punto  $E'$  en un arco de circunferencia. Esta barra de longitud  $\frac{l_2}{2}$  tiene uno de sus vértices en el punto medio de la barra  $AE'$  y el otro vértice se desplaza por la barra  $AC$ .

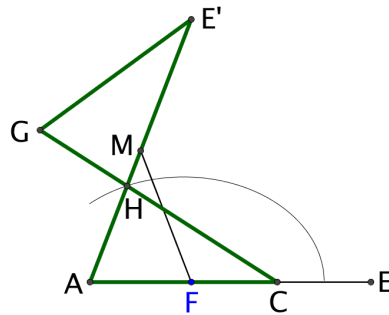


Figura 3.11: Elipsógrafo a partir de un antiparalelogramo utilizando un movimiento lineal

Nótese que con un razonamiento similar al del mecanismos de Fran Von Schooten (ver también Observación 3.5.1) el punto  $M$  se mueve en un arco de circunferencia de centro  $A$  y radio  $\frac{l_2}{2}$  y por consiguiente, el punto  $E_2$  se desplaza en un arco de circunferencia de centro  $A$  y radio  $l_2$ .



# Conclusión

En el desarrollo de esta Memoria se ha presentado el Teorema de Kempe y su demostración. En primer lugar, se ha realizado una breve introducción del origen de los sistemas articulados acompañada con algunos ejemplos motivadores desde el punto de vista histórico. A continuación, se ha expuesto el Teorema de Kempe junto a su demostración, necesitando para ello el estudio de algunos mecanismos elementales. Para una mejor comprensión del teorema se ha desarrollado un ejemplo tomando como curva la cónica  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Para una curva tan simple se ha probado que el mecanismo obtenido resulta ciertamente complejo. Es por ello que finalizamos la Memoria estudiando la eficiencia del sistema resultante, comparándolo con otros mecanismos como el mecanismo de Franz Von Schooten, el elipsógrafo de Arquímedes y el elipsógrafo antiparalelogramo. Estos sistemas articulados realizando la misma labor que el obtenido con el Teorema de Kempe, resultan tener menos barras y por tanto, más eficaces en este sentido.

Los sistemas articulados permitieron construir curvas como la conoide que resolvían problemas hasta entonces irresolubles como la trisección de un ángulo cualquiera. En la actualidad estos mecanismos abarcan un amplio abanico de aplicaciones que van desde la construcción de relojes, motores o robots hasta el estudio de la estructura de ciertas proteínas que se asemejan a este tipo de sistemas (ver [4]).

Para la elaboración de la Memoria ha sido de gran importancia el software educativo Geogebra. El uso de este programa nos ha permitido en cada uno de los mecanismos articulados estudiar de forma clara la movilidad del sistema y sus singularidades. Además, nos ha permitido realizar variaciones en los mecanismos articulados mediante las cuales hemos mejorado la eficiencia de estos.

Todos los ejemplos y mecanismos que se usan en el desarrollo de la Memoria han sido tomados en dos dimensiones, sin embargo, cabría preguntarse si los razonamientos llevados a cabo se pueden extender a dimensiones superiores. Bajo esta reflexión y atendiendo a [4] surge la pregunta de si se podría extender el Teorema de Kempe a dimensiones mayores.

Tal como comentamos anteriormente el Teorema de Kempe nos proporciona un complejo mecanismo que nos permite pintar un entorno de la curva. ¿Podemos elaborar estrategias para simplificar el mecanismo, obteniendo el mismo resultado?

Por último, el Teorema de Kempe es un teorema local. Si nos planteamos la construcción de mecanismos que dibujen las curvas completas, es posible que no todas las curvas

algebraicas admitan este tipo de sistemas articulados, ¿cuáles serían las obstrucciones para la no existencia de tales mecanismos?



# Bibliografía

## Libros y artículos

- [1] Kempe, A.B., On a general method of describing plane curves of the  $n$ th degree by linkwork. *Proc. London Math. Soc.* s1-7(1), 213-216 (1875).
- [2] Allman G.J., *On Greek Geometry from Thales to Euclid*. Dublin Univ. Press, Dublin. (1887).
- [3] Aroca, J.M., Sistemas articulados. Teorema de Kempe. *Rev. Semin, Iberoam. Mat.* fasc. II 19-53 (2013).  
Recuperado de [http://rsim.uva.es/files/2014/02/V4F2\\_Aroca.pdf](http://rsim.uva.es/files/2014/02/V4F2_Aroca.pdf).
- [4] Demaine, E. y O'Rourke, J., *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press. (2007). Recuperado de [http://www.langtoninfo.co.uk/web\\_content/9780521857574\\_frontmatter.pdf](http://www.langtoninfo.co.uk/web_content/9780521857574_frontmatter.pdf).
- [5] Kapovich, M. y Millson, J. J., Universality theorems for configuration spaces of planar linkages. *Topology*. 41(6),1051-1107 (2002).
- [6] Peaucellier, C.N., Note sur une question de géométrie de compas . *Nouvelles Annales de mathématiques*, vol. 12, série2, 71-78 (1873).
- [7] Rodríguez, Y.A. y Sarmiento, B.R., Trisección de un ángulo con la conoide de Nicomedes. *www.Matvirtual.com*, artículos de matemáticas en tecnología. Recuperado de [http://www.matvirtual.com/articulos/Trisectriz\\_Nicomedes.pdf](http://www.matvirtual.com/articulos/Trisectriz_Nicomedes.pdf).
- [8] Wantzel, P. L., Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 2,366-372 (1837).

## Videos y enlaces

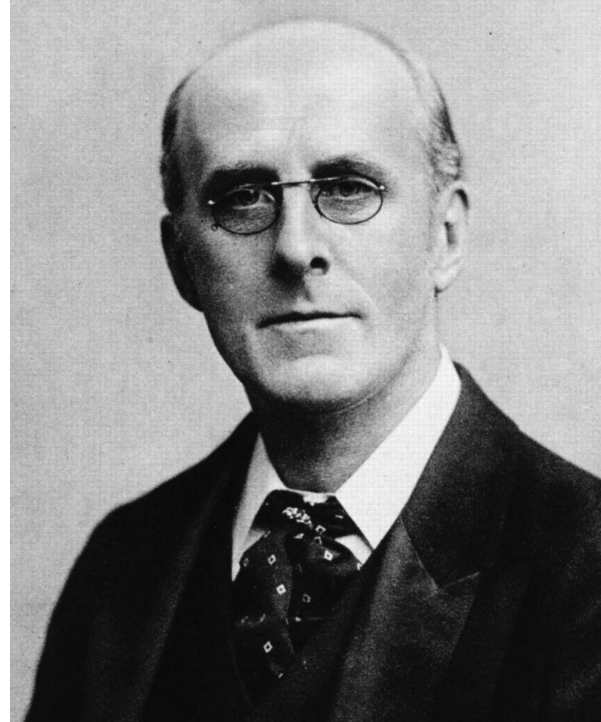
- [9] Associaziones Macchine Matematiche. Recuperado de [http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com\\_content&view=article&%20id=223&Itemid=304&lang=it%20](http://www.macchinematematiche.org/index.php?option=com_content&view=article&%20id=223&Itemid=304&lang=it%20)
- [10] Bolaños, C. (2016, junio 21). Antiparalelogramo. [Archivo de video]. Recuperado de <https://youtu.be/kRI01LVaaVs>

- [11] Bolaños, C. (2016, junio 21). Duplicador de ángulos. [Archivo de video]. Recuperado de <https://youtu.be/FEfUSkVehYw>.
- [12] Bolaños, C. (2016, junio 21). Mecanismo de Evans. [Archivo de video]. Recuperado de <https://youtu.be/j8rp4IQ7tTE>.
- [13] Bolaños, C. (2016, junio 21). Paralelogramo. [Archivo de video]. Recuperado de <https://youtu.be/NZIUF-4Ql9A>.
- [14] Bolaños, C. (2016, junio 21). Traslador. [Archivo de video]. Recuperado de <https://youtu.be/hCZzIY2ONnQ>.
- [15] Cripiens. (2013, diciembre 2). La cuadratriz, Trisección de un ángulo y Cuadratura del círculo. [Archivo de video]. Recuperado de [https://www.youtube.com/watch?v=\\_d7Mdd2x89Y](https://www.youtube.com/watch?v=_d7Mdd2x89Y).
- [16] How a Pantograph Works. Recuperado de <http://cs.smith.edu/orourke/DTS/HowaPantographWorks.html>.
- [17] IES Pius Fint i Quer Manresa. Simetrizador axial ortogonal de barras. Recuperado de [http://www.iespfq.cat/dep/mates/apartados/arxiu\\_pdf\\_cas/Simetrizador%20axial%20ortogonal%20de%20barras.pdf](http://www.iespfq.cat/dep/mates/apartados/arxiu_pdf_cas/Simetrizador%20axial%20ortogonal%20de%20barras.pdf).
- [18] Manzano, F.J. [F.J. Manzano]. (2016, marzo 10). Hiperbológrado de Descartes. [Archivo de video]. Recuperado de [https://www.youtube.com/watch?v=No7u\\_cn9BgY](https://www.youtube.com/watch?v=No7u_cn9BgY).
- [19] Manzano, F.J. [F.J. Manzano]. (2016, marzo 9). Mecanismo articulado para trazar la conoide. [Archivo de video]. Recuperado de [https://www.youtube.com/watch?v=kN\\_F\\_acH8Sg](https://www.youtube.com/watch?v=kN_F_acH8Sg).
- [20] Manzano, F.J. [F.J. Manzano]. (2016, marzo 9). Mecanismo de Evans. [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=Xv3sU0-pRHM>.
- [21] Manzano, F.J. [F.J. Manzano]. (2016, marzo 9). Mecanismo para el cálculo de raíces cúbicas. [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=0l9cCtLEzMs>.
- [22] [Pocket83]. (2011, agosto 19). Trammel of Archimedes-Ellipsograph [Archivo de video]. Recuperado de <https://www.youtube.com/watch?v=Hfw0yYur5S4>.

## Articulated systems

As it is impossible to solve some problems of the plane geometry with rule and compass, such as the angle trisection, some curves appear (as the quadratrix or the conchoid). It is possible to draw some of these curves with plane articulated mechanism. A *plane articulated system* is a mechanism built of one-dimensional rigid bars joined by their vertices through articulations such that, the position of one of them in the plane conditions the other ones.

## Kempe's Theorem



Given an plane algebraic curve

$$f(x, y) = \sum_{i+j=d} f_{ij}x^i y^j$$

and a point  $P$  of it, there exists a neighborhood  $U_p$  of  $P$  and an articulated system  $S$  such that, while a point of  $S$  moves over a segment, another point of  $S$  describes the intersection of the curve with  $U_p$ .

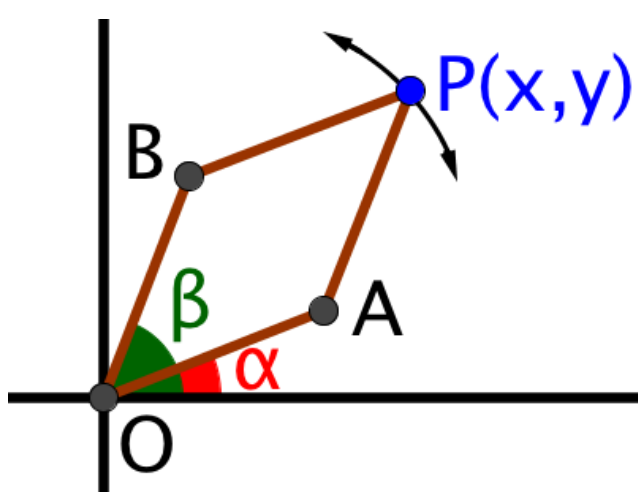
## Objective

To build an articulated mechanism that draws a plane algebraic curve from a lineal movement.

### Example: Mechanism for the conic $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

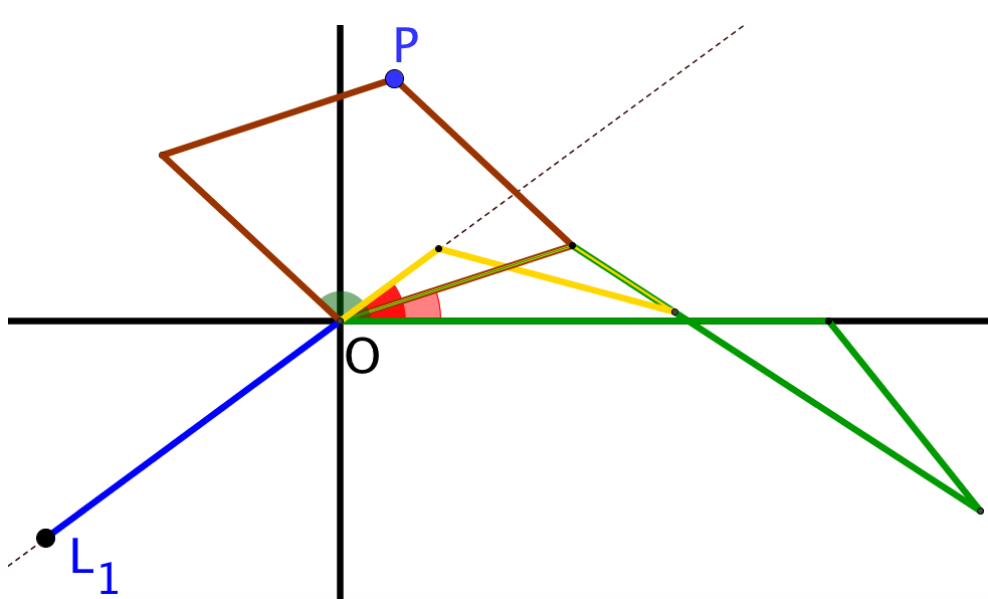
1. Change of coordinates

$$\begin{aligned} x &= a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y &= a \sin \alpha + b \sin \beta \end{aligned}$$



3. We build four segments  $OL$  for each term of second member of the equation.

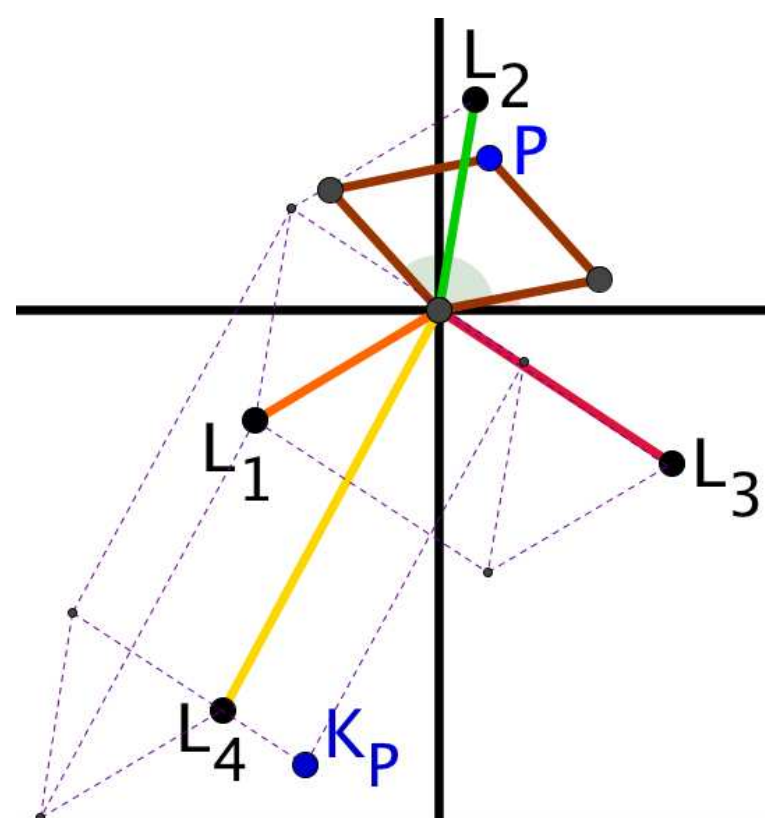
For example:  $OL_1 = -\frac{3}{2} \cos(2\alpha)$ .



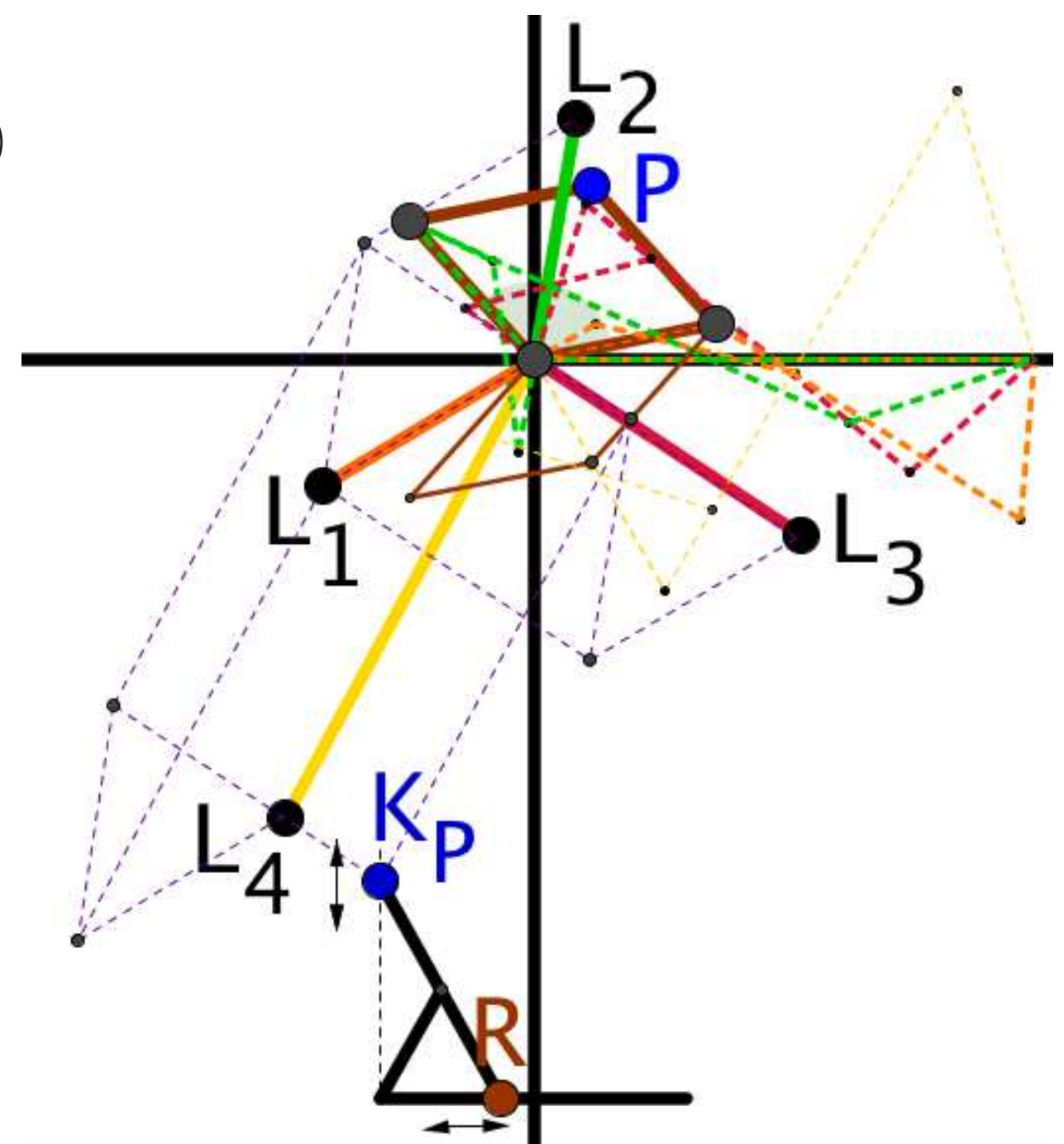
2. We operate the equation of the conic until we obtain the expression

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) - 1 &= -\frac{3}{2} \cos(2\alpha) - \frac{3}{2} \cos(2\beta) \\ &\quad - 3 \cos(\alpha + \beta) + 5 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

4. We join the  $OL_i$  segments.



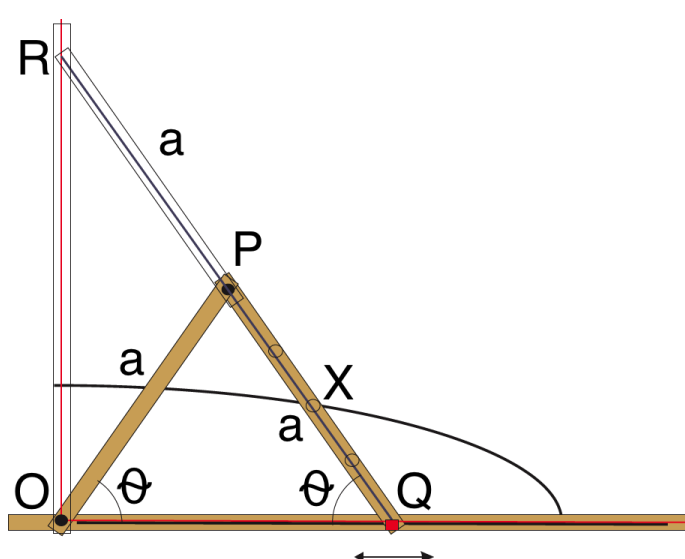
$$\begin{aligned} OL_1 &= -\frac{3}{2} \cos(2\alpha) \\ OL_2 &= -\frac{3}{2} \cos(2\beta) \\ OL_3 &= -3 \cos(\alpha + \beta) \\ OL_4 &= 5 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$



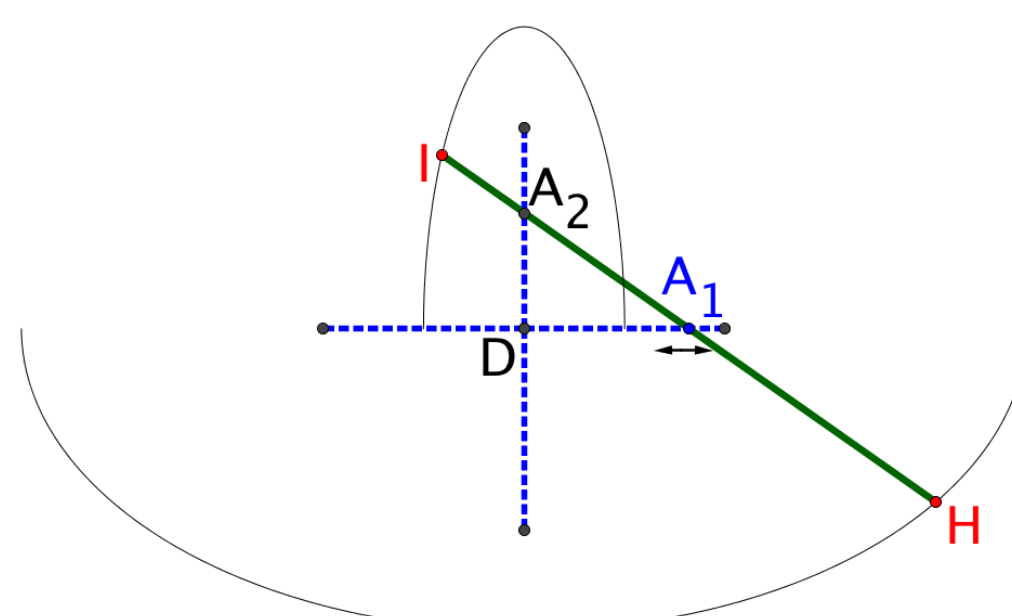
5. We build the Evans's mechanism and then we reverse the process.

## Some more efficient mechanisms

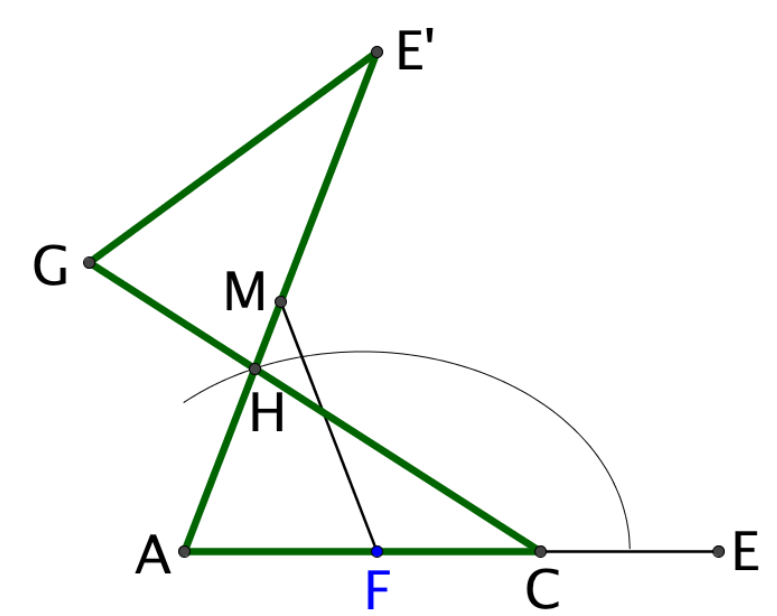
The next figures show three mechanisms more efficient of the conic  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .



Franz Von Schooten's mechanism



Archimedes's ellipsograph



Antiparallelogram ellipsograph

## Bibliography

Aroca, J.M., Sistemas articulados. Teorema de Kempe. [http://rsim.uva.es/files/2014/02/V4F2\\_Aroca.pdf](http://rsim.uva.es/files/2014/02/V4F2_Aroca.pdf)  
 Geogebra book: <http://ggbm.at/KghNhy8Z>