HABLAMOS DE MATEMÁTICAS

JULIÁN GARRIDO GARRIDO: *Verdad Matemática.* Nivola Libros, Ciencia Abierta, Madrid, 2003.

Este es un libro acerca de la verdad, acerca de los fundamentos últimos de la que tradicionalmente ha sido considerada la ciencia más exacta y a la vez fundamento de las demás: las matemáticas. En él se cuestionan, de una manera lo suficientemente rigurosa como para ser interesante, sin por ello dejar de ser un libro ameno para los «no-iniciados», los postulados básicos sobre los que se asienta nuestro conocimiento matemático. A través de un rápido, pero iluminador recorrido histórico se muestran las dificultades a las que los matemáticos se han enfrentado para dar validez a sus afirmaciones, para demostrar la verdad de los enunciados matemáticos y las soluciones que en cada momento han sido dadas a estos problemas.

De una manera general, y antes de pasar a analizar brevemente los contenidos del libro, podemos decir que se trata de un trabajo altamente recomendable para aquellos que sientan interés por los fundamentos del conocimiento matemático (y en última instancia del científico), por los problemas de la verdad de dicho conocimiento o, expresado de otro modo, por las vías de justificación de los enunciados que tradicionalmente consideramos como los máximos exponentes de objetividad y validez. El autor consigue exponer de una manera sorprendentemente clara las distintas posiciones y teorías surgidas a lo largo de la historia, haciendo especial hincapié en la teoría de conjuntos y en sus paradojas.

Cualquier persona con una formación científica básica puede seguir el hilo conductor sin dificultad, aunque en ciertos momentos de la exposición (sobre todo en la segunda parte del libro, dedicada a la axiomatización de la teoría de conjuntos) su lectura requerirá algo más de tiempo para poder ser comprendida. Así mismo, en la primera parte del libro (especialmente en los capítulos 3, 4 y 5) sería conveniente cierto conocimiento de álgebra de números reales y de análisis real, pero ésta no es una condición necesaria para su lectura y comprensión. Resulta inevitable, en este tipo de libros acerca de problemáticas relacionadas con la ciencia (especialmente en el caso de las matemáticas) que aquellos con conocimientos, aunque sean básicos, acerca del tema a tratar tengan una gran ventaja de partida para su comprensión y, en última instancia, saquen un mayor provecho de los textos, ya que serán capaces de ver las implicaciones reales de los problemas o las ideas analizadas.

En cualquier caso, el libro que aquí estamos tratando posee la extraña, pero importante virtud, de ser todo lo claro que cabría esperar de un trabajo de divulgación que intenta a su vez conservar aspiraciones de cierta rigurosidad teórica. Incluso en las partes en las que se hace necesario utilizar un aparato lógico y matemático mayor, el único requisito para poder entenderlas y apreciarlas es poseer cierta dosis de paciencia para seguir las demostraciones (por parte del lector no acostumbrado al lenguaje formal), sentido común y, por supuesto, interés por el tema tratado.

El libro está destinado por lo tanto a acercar la problemática de la verdad matemática a lectores sin conocimientos en dicha ciencia, aunque también es de interés para aquellos con conocimientos matemáticos o lógicos ya que ofrece una visión panorámica, de conjunto, lo cual es generalmente difícil de obtener en libros más especializados, que habitualmente se centran en un sólo aspecto del problema, para poder tratarlo con profundidad y detenimiento. Es importante señalar que el autor no intenta en ningún momento exponer o desarrollar ideas nuevas u originales (aunque, y esto no es en ningún caso una crítica, su opinión se puede fácilmente leer entre líneas durante prácticamente todo el texto). Además, cabría destacar también como aspecto favorable que se trata de un libro muy ameno, de fácil lectura.

Por último, éste es un libro muy ambicioso, el espectro de temas y problemáticas a tratar es muy amplio, ¡su objetivo es nada menos que analizar el problema de los fundamentos de la matemática, la ciencia «más fundamental» y además desde una perspectiva histórica! (y sin hacer uso excesivo de formalizaciones). Ello justifica y explica que el autor no se detenga en exceso en las implicaciones filosóficas (ni matemáticas, en realidad) que el debate acerca de la verdad matemática conlleva. Se limita a mencionarlas y a exponerlas muy brevemente. Entrar con más detalle en el debate filosófico habría supuesto, tal y como el autor mismo admite, escribir al menos otro libro dedicado a ello.

Tan sólo en el primer apéndice, dedicado al platonismo en las matemáticas, el autor peca, en mi opinión, de intentar exponer ideas que necesitarían mucho más espacio para ser siquiera apreciadas (esta «crítica» podría ser también extensible al último capítulo, también de carácter más filosófico, en el que se analizan las respuestas dadas a las contradicciones de la teoría de conjuntos). A pesar de ser un apéndice y por lo tanto no formar parte del cuerpo central de la argumentación ni tener el mismo peso que el resto del libro, en mi opinión, las ideas allí expuestas acerca del platonismo y sus posibles alternativas adolecen de una excesiva simplicidad e ingenuidad, por lo que, en todo caso, tendrían que haber sido introducidas como una serie de cuestiones abiertas, unas posibles líneas de investigación por parte del lector, más que como un intento de exponer las tesis propiamente dichas (esto hubiese implicado, al menos, otro libro). De cualquier forma, a la hora de leerlo no debemos olvidar que se trata de un libro 'meramente introductorio'. Pero pasemos mejor a analizar su estructura general.

El objetivo primordial de la obra es la consideración de la denominada por el autor «tesis clásica de la verdad matemática», según la cual, «La deducción desde axiomas intuitivos es condición necesaria y suficiente de la verdad matemática»[1]. Esta tesis, que en algún momento el autor califica de «espontánea» acerca de la verdad matemática, ya que puede ser reformulada como «un enunciado es matemáticamente verdadero si y sólo si ese enunciado es deducible de axiomas intuitivos»[2], constituye un ideal regulador muy temprano de las matemáticas. Concretamente surge a raíz del desarrollo de la geometría euclídea, ya que fue entonces cuando la matemática adquirió el estatus de ciencia teórica. Euclides mostró que la verdad de todos los enunciados de la geometría estaba garantizada si unos pocos (los axiomas) podían ser considerados verdaderos (intuitivamente verdaderos).

A partir de estas consideraciones de partida, el autor hace un recorrido histórico del desarrollo del conocimiento matemático centrándose en las dos grandes crisis de la «tesis clásica de la verdad matemática». La primera crisis surgió con el desarrollo de las llamadas geometrías no euclídeas (tema 2 del libro). Los nuevos desarrollos de la geometría falsaron la creencia de que la deducción a partir de axiomas intuitivos fuese condición necesaria para la verdad de los enunciados matemáticos (aunque seguía en pie la creencia de que fuese una condición suficiente). Brevemente, las geometrías no euclídeas condujeron a aceptar que teorías no intuitivas (pero tampoco contradictorias) fuesen aceptadas como legítimas teorías matemáticas (dando lugar a las llamadas geometrías no euclídeas elíptica e hiperbólica) demostrando con ello que lo no intuitivo no es necesariamente contradictorio (y por lo tanto puede ser también verdadero).

La segunda y más importante crisis de la «tesis clásica de la verdad matemática» es una consecuencia directa de las contradicciones halladas en el seno de la teoría de conjuntos. Para entender la importancia de estas contradicciones es necesario comprender la importancia que la teoría de conjuntos tiene dentro de las matemáticas, entender que la teoría de conjuntos es (o al menos así es considerada en la actualidad) su fundamento último o que, en palabras del autor, «la matemática es cosa de conjuntos»[3].

Para ello, durante los capítulos de 2-7, el autor hace un recorrido por las distintas reducciones y transformaciones por las que han pasado las matemáticas. En la Grecia Clásica el fundamento último de las matemáticas se encontraba en la geometría pero durante la modernidad, con el surgimiento del análisis matemático, el lugar central pasa a estar ocupado por los números (lo que el autor llama «numerización del análisis»[4]),

1 *Verdad matemática,* p. 21.
2 *Ibid,* p. 21.
3 *Ibid,* p. 13.
4 *Ibid,* p. 33.

primero por los números reales y más tarde por los naturales. Finalmente, a finales del siglo XIX y comienzos de XX, cuando la aritmetización de los fundamentos estaba completada se llevó a cabo una nueva revolución conceptual, que dura hasta nuestros días, a través del desarrollo de la teoría de conjuntos y de la reducción a ellos de los números naturales.

Los siete capítulos siguientes del libro (hasta el 14) están dedicados al estudio de la teoría de conjuntos por medio del análisis de su axiomatización y de sus principales propiedades. En el capítulo 14 una vez han sido expuestas sus características principales se analizan, aunque de una manera más bien esquemática, las principales paradojas de la teoría de conjuntos (las planteadas por Russell, Cantor y Burali-Forti y la paradoja de la variable y). Estas paradojas darán lugar a las contradicciones que conducen al rechazo de la segunda de las afirmaciones de la «tesis clásica de la verdad matemática», a saber, que la deducción a partir de axiomas intuitivos es condición suficiente de la verdad matemática.

El descubrimiento de estas paradojas supuso un gran golpe para las aspiraciones formales de la matemática ya que implican la existencia de contradicciones en el seno de sus fundamentos últimos. Por ello, especialmente en la primera mitad del siglo XX, se originó un acalorado debate acerca de cuál debía ser la noción de verdad que aplicásemos a las matemáticas. En la tercera y última parte del libro (especialmente el capítulo 16), el autor repasa brevemente las tres principales alternativas propuestas para resolver esta crisis (por lo tanto, tres alternativas a las tesis clásica de la verdad). Las tres alternativas son, el logicismo, el formalismo y el intuicionismo (o constructivismo).

En cualquier caso, tal y como recuerda el autor, estas tres 'soluciones' distan de ser perfectas, por lo que la opción de la tesis clásica sigue siendo, aún hoy en día, la adoptada por gran parte de la comunidad científica y filosófica (además de ser la que nos enseñan en el colegio). A modo de conclusión, y utilizando las palabras del autor que, en mi opinión, reflejan el sentir general respecto a este problema, «la tesis clásica de la verdad matemática no es cierta, pero a falta de otra cosa, y dadas las debilidades de las otras concepciones de verdad, operamos como si lo fuese. Tenemos muy sólidas razones para pensar que la matemática es verdadera. Pero estamos lejos de delimitar con precisión en qué consiste tal verdad. Y nos consideraríamos muy afortunados si pudiésemos justificar rigurosamente, no ya la verdad, sino al menos la consistencia de la aritmética»[5]. Es posible, al fin y al cabo, que la filosofía tenga aún mucho que decir.

MARÍA PONTE AZCÁRATE

[5] *Ibid*, p. 211.