Aplicaciones de los Polinomios Simétricos

Applications of Symmetric Polynomials

Luis Felipe Fumero

Trabajo de Fin de Grado

Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa

Sección de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

La Laguna, 15 de septiembre de 2016

Dr. D. **Guillermo Fleitas Morales**, con N.I.F. 41.950.899-A profesor de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"*Aplicaciones de los Polinomios Simétricos.*"

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Luis Felipe Fumero**, con N.I.F. 45.865.397-Q.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 15 de septiembre de 2016

Agradecimientos

A mi familia, por estar siempre ahí apoyándome en todo momento, y especialmente a mi madre y a mi abuelo, sin los cuales nada de esto habría sido posible.

A una chica de Eslovaquia sin la cual no habría hecho lo que hice.

Y a mi tutor D.Guillermo Fleitas Morales, que me ha ayudado muchísimo con la realización de esta memoria.

Resumen

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado ha sido estudiar las aplicaciones de los polinomios simétricos en distintos campos, haciendo un especial uso del Teorema Fundamental de las Funciones Simétricas, el cual nos dice que todo polinomio simétrico P con coeficientes enteros en las variables $x_1, ..., x_n$ se obtiene desarrollando un polinomio Q con coeficientes enteros en las funciones elementales simétricas $e_1, ..., e_n$.

Primero hacemos un análisis de los resultados que nos harán falta, para después proceder al desarrollo de las aplicaciones. Empezamos este desarrollo analizando el método de resolución de ecuaciones de grado 3 y de grado 4 de Lagrange. Luego, estudiamos aplicaciones de Estadística, haciendo especial énfasis en la construcción de los estadísticos k de Fisher. Estudiamos también el cálculo de ciertas funciones simétricas de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones algebraicas con dos incógnitas; nos limitaremos al caso en que el grado de las ecuaciones es dos. Finalmente estudiamos los discriminantes Δ de los polinomios de grado 3 y de grado 4, que por el teorema fundamental se pueden escribir como polinomios en los coeficientes de $p(x)$. Veremos cómo el discriminante de la ecuación de grado cuatro se puede calcular como el discriminante de una ecuación de grado tres.

Palabras clave: Polinomios Simétricos, Polinomios Simétricos Elementales, Resultante, Discriminante, Estadísticos k.

Abstract

The objective of this Final Degree Work is to study applications in different fields of the theory of Symmetric Polynomials, in particular of the Fundamental Theorem of Symmetric Functions: Any symmetric polynomial with integer coefficients in n variables $x_1, ..., x_n$ can be expressed as a polynomial with integer coefficients in the elementary symmetric functions $e_1, ..., e_n$.

First we analyze the results that we will need, then we proceed to the development of applications. We begin by analyzing the method of solving equations of degree 3 and degree 4 of Lagrange. Then we give some statistical applications, with particular emphasis on the construction of the k statistics of Fisher. We also study the calculation of certain symmetric functions of the solutions of a system of two algebraic equations with two unknowns; we confine ourselves to the case where the degree of the equations is two. Finally, we study the discriminant Δ of a polynomial p(x) of degree 3 and degree 4, that by the fundamental theorem can be written as a polynomial in the coefficients of p(x). We'll see how the discriminant of the equation of degree four can be calculated as the discriminant of an equation of degree three.

Keywords: *Symetric Polynomials, Elementary Symmetric Polinomials, Resultant, Discriminant, k Statistics.*

Índice general

Capítulo 1

Motivación y objetivos

Nos proponemos elucidar las construcciones algebraicas en que se basan varias aplicaciones de la teoría de las funciones simétricas.
En el capítulo 2 resumiremos los resultados de esta teoría que usaremos en este trabajo, y daremos varias definiciones.
En el capítulo 3 estudiaremos el método de Lagrange para calcular las raíces de un polinomio de grado 3 o de grado 4 con coeficientes complejos ([4], pp. 217-222 y p. 266).
En el capítulo 5 estudiaremos cómo la teoría de las funciones simétricas expuesta en el capítulo 2 permite el cálculo de un nuevo tipo de funciones simétricas, que son funciones simétricas de puntos, y no de las coordenadas de los puntos. Para ello usaremos la teoría de la resultante de Euler ([1], p. 246) e ideas de Poisson ([5], p.201).
En el capítulo 6 veremos como el discriminante de una ecuación de grado 4 se puede calcular a partir de una resolvente de Lagrange de grado 3.
En los capítulos 3,5 y 6 haremos varios ejemplos numéricos. El propósito de estos ejemplos es fijar las ideas de la teoría.
En los capítulos 3,5 y 6 usaremos el programa de Álgebra simbólica Maxima para hacer sustituciones de variables en polinomios, y para desarrollar estos polinomios.

Capítulo 2

Resumen de los resultados que se van a usar sobre funciones simétricas

2.1. Polinomios simétricos. Polinomios simétricos elementales. Corchetes

Consideramos polinomios en n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ cuyos coeficientes son enteros, por ejemplo:

$$6x_1x_2 - 3x_1^4x_2 + x_3$$

Diremos que un polinomio en n variables con coeficientes enteros es simétrico si después de hacer cualquier permutación en las n variables obtenemos el mismo polinomio inicial. Por ejemplo, $x_1x_2 + x_3^2$, no es simétrico pues la permutación $x_1 \to x_2,\ x_2 \to x_3,\ x_3 \to x_1$ de las variables cambia este polinomio a $x_2x_3 + x_1^2$ que no es igual al inicial. Otro ejemplo de polinomio no simétrico en tres variables es:

$$x_1x_2 - x_1x_3$$

En cambio un ejemplo de polinomio simétrico en cuatro variables donde no todos los términos tienen el mismo grado es:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

Definimos n polinomios simétricos elementales $e_1, ..., e_n$ en n variables $x_1, ..., x_n$ de la siguiente forma:

$$e_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n} \qquad k = 1, 2, ...n \tag{2.1}$$

Por ejemplo, los tres polinomios elementales simétricos en tres variables x_1, x_2, x_3 son:
$e_1 = x_1 + x_2 + x_3$
$e_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
$e_3 = x_1x_2x_3$

Un caso particular de polinomio simétrico se obtiene partiendo de un monomio en $x_1, ..., x_n$ y sumándole todos los monomios diferentes entre si que se pueden obtener a partir de él mediante permutaciones en $x_1, ..., x_n$.
Por ejemplo, si n=3, y partimos del monomio $x_1^2x_2$, entonces obtenemos el polinomio simétrico: $x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_3^2x_2$.
Otro ejemplo: si n=3 y partimos del monomio $x_1^2x_2x_3$ entonces obtenemos el polinomio simétrico: $x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_1x_2$.
En general, si partimos del monomio $x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_n^{i_n}$, entonces escribiremos el polinomio simétrico obtenido a partir de él como $(x_1^{i_1}x_2^{i_2}...x_n^{i_n} + ...)$.
A este tipo de polinomio simétrico lo llamaremos corchete.

2.2. Teorema Fundamental

Todo polinomio simétrico P con coeficientes enteros en las variables $x_1, x_2, ...x_n$ se obtiene desarrollando un polinomio Q con coeficientes enteros en $e_1, e_2, ...e_n$.

Ejemplos:
1. $x_1^2x_2 + x_2^2x_1 = (x_1 + x_2)x_1x_2 = e_1e_2$
2. $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = e_1^3 - 3e_1e_2$
3. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = e_1^2 - 2e_2$

El polinomio Q se puede calcular a partir del polinomio P mediante un algoritmo de Gauss [3]. Usaremos ese algoritmo para hacer los cálculos del capítulo 3.
Se tiene también dos versiones más generales de ese teorema:
Si K es un anillo conmutativo y $P \in K[x_1, x_2, ...x_n]$ es simétrico en $x_1, x_2, ...x_n$ entonces P se obtiene desarollando un polinomio $Q \in K[e_1, e_2, ...e_n]$.
Si K es un anillo conmutativo y $P \in K[x_1, x_2, ...x_n, y_1, y_2, ..., y_m]$ es simétrico en $x_1, x_2, ...x_n$ y también en $y_1, y_2, ..., y_m$, entonces existe $Q \in K[e_1, e_2, ...e_n, f_1, f_2, ..., f_m]$, donde $e_1, e_2, ...e_n$ son las funciones elementales simétricas en $x_1, x_2, ...x_n$ y $f_1, f_2, ..., f_m$ son las funciones elementales simétricas en $y_1, y_2, ..., y_m$, tal que P se obtiene desarrollando Q.

Observaciones:
1. Si x_1, x_2 son las raíces de un polinomio con coeficientes complejos $x^2 + bx + c$ entonces

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$

de donde resulta:

$e_1 = x_1 + x_2 = -b$

$e_2 = x_1x_2 = c$

2. Si x_1, x_2, x_3 son las raíces del polinomio con coeficientes complejos $x^3 + bx^2 + cx + d$, entonces:

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

donde,

$b = -e_1$
$c = e_2$
$d = -e_3$

3. En general si $x_1, ..., x_n$ son las raíces de una ecuación

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$$

donde los a_i son complejos, entonces:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = (x - x_1)...(x - x_n)$$

de donde se obtienen las relaciones de Cardano-Vieta:
$a_1 = -e_1$
$a_2 = e_2$
$a_3 = -e_3$
.
.
.
$a_n = (-1)^n e_n$

El Teorema Fundamental nos dice que podemos calcular cualquier función polinomial simétrica de las raíces $x_1, ..., x_n$ a partir de los coeficientes $a_1, ..., a_n$ de la ecuación sin necesidad de conocer quiénes son las raíces $x_1, ..., x_n$.

2.3. Suma de potencias. Relaciones de Newton

Para cada par de enteros $k \geq 1$ y $n \geq 1$ definimos la suma de potencias:

$$s_k = s_k(x_1, ..., x_n) = x_1^k + ... + x_n^k$$

Para el polinomio simétrico $P = s_k$, el polinomio Q en $e_1, ..., e_n$ del Teorema Fundamental se obtiene fácilmente por inducción a partir de las relaciones de Newton:

$$\begin{aligned} s_k + a_1s_{k-1} + ... + ka_k = 0, &\quad \text{si } k \leq n \\ s_k + a_1s_{k-1} + ... + a_ns_{k-n} = 0, &\quad \text{si } k > n \end{aligned}$$

Recíprocamente, a partir de estas mismas relaciones de Newton se obtiene por inducción que cada $e_k = (-1)^k a_k$ se puede escribir como un polinomio en $s_1, ..., s_k$ con coeficientes racionales. De aquí, y del Teorema Fundamental se deduce que todo polinomio en $x_1, ..., x_n$ con coeficientes racionales se obtiene desarrollando un polinomio en $s_1, ..., s_n$ con coeficientes racionales.

2.4. Discriminante

El discriminante

$$\Delta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2 \tag{2.2}$$

es un polinomio simétrico en $x_1, ..., x_n$ y por tanto se puede calcular a partir de los coeficientes $e_1, ..., e_n$ de la ecuación. Sin embargo, este polinomio en $e_1, ..., e_n$ resulta complicado para n grande. En el capítulo 6 recordamos la expresión de este polinomio en $e_1, ..., e_n$ para, n=3, y, siguiendo ideas de Lagrange, veremos cómo el discriminante de una ecuacióndе grado 4 es igual al discriminante de una ecuación de grado 3 que se obtiene a partir de la ecuación de grado 4 mediante un método de Lagrange.

Capítulo 3

Método de resolución de las ecuaciones de grado 3 y de grado 4 por Lagrange

3.1. Método de Lagrange para ecuaciones de grado 3

Sea la ecuación:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

donde los a_i son números complejos.
Sean x_1, x_2, x_3 las tres raíces de la ecuación. O sea:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Sea $w = e^{2\pi i/3}$. Entonces $1, w, w^2$ son las tres raíces de la ecuación $w^3 - 1 = 0$ y w, w^2 son las dos raíces de la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Sea $b_1 = x_1 + wx_2 + w^2x_3$.
Entonces:

$b_1 = x_1 + wx_2 + w^2x_3$
$wb_1 = x_3 + wx_1 + w^2x_2$
$w^2b_1 = x_2 + wx_3 + w^2x_1$

Sea $c_1 = b_1^3 = (w^2b_1)^3 = (wb_1)^3$.

Sea $b_2 = x_1 + wx_3 + w^2x_2$.
Entonces:

$b_2 = x_1 + wx_3 + w^2x_2$
$wb_2 = x_2 + wx_1 + w^2x_3$

$w^2b_2 = x_3 + wx_2 + w^2x_1$

Sea $c_2 = b_2^3 = (w^2b_2)^3 = (wb_2)^3$
Entonces, tanto $c_1 + c_2$ como c_1c_2 no varían al hacer cualquier permutación de x_1, x_2, x_3 y cualquier permutación de w, w^2.
Por el Teorema Fundamental de los polinomios simétricos tanto $c_1 + c_2$ como c_1c_2 se pueden expresar como polinomios en los coeficientes de la ecuación $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ y en los coeficientes de la ecuación $w^2 + w + 1 = 0$.

Por tanto, tanto $c_1 + c_2$ como c_1c_2 se pueden expresar como polinomios con coeficientes enteros en a_1, a_2 y a_3.
Calculamos estos polinomios:

$c_1 = b_1^3 = (x_1 + wx_2 + w^2x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3wx_1^2x_2 + 3wx_2^2x_3 + 3wx_3^2x_1 + 3w^2x_1^2x_3 + 3w^2x_2^2x_1 + 3w^2x_3^2x_2$
$c_2 = b_2^3 = (x_1 + wx_3 + w^2x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1x_2x_3 + 3wx_1^2x_3 + 3wx_2^2x_1 + 3wx_3^2x_2 + 3w^2x_1^2x_2 + 3w^2x_2^2x_3 + 3w^2x_3^2x_1$

Luego, $c_1 + c_2 = b_1^3 + b_2^3 = 2(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 12x_1x_2x_3 - 3(x_1^2x_2 + ... + x_2x_3^2)$ de donde $c_1 + c_2 = 2e_1^3 - 9e_1e_2 + 27e_3$ y $c_1c_2 = b_1^3b_2^3 = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)]^3$ de donde $c_1c_2 = (e_1^2 - 3e_2)^3$.

Los números $c_1 + c_2$ y c_1c_2 se calculan entonces como polinomios en los coeficientes $-e_1, e_2,\ y\ -e_3$ de la ecuación $x^3 - e_1x^2 + e_2x - e_3 = 0$
Una vez calculados estos números, calculamos $c_1\ y\ c_2$ resolviendo la ecuación de 2º grado: $u^2 - (c_1 + c_2)u + c_1c_2 = 0$.
De esta forma obtenemos c_1 y c_2, y de aquí obtenemos $b_1 = \sqrt[3]{c_1}$ y $b_2 = \sqrt[3]{c_2}$.

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones:
$b_1 = x_1 + wx_2 + w^2x_3$
$b_2 = x_1 + wx_3 + w^2x_2$
$e_1 = x1 + x_2 + x_3$
obtenemos las tres raíces x_1, x_2, x_3 de la ecuación de grado 3 inicial:

$$x^3 - e_1x^2 + e_2x - e_3 = 0$$

como

$$x_1 = \tfrac{b_1+b_2+e_1}{3},\ \ x_2 = \tfrac{w^2b_1+wb_2+e_1}{3},\ \ x_3 = \tfrac{wb_1+w^2b_2+e_1}{3}$$

Ejemplo:

Aplicación del método para calcular las soluciones de la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$.

En esta ecuación tenemos que:
$e_1 = 0$
$e_2 = -1$
$e_3 = -1$

Luego, $c_1 + c_2 = 2e_1^3 - 9e_1e_2 + 27e_3 = -27$ y $c_1c_2 = (e_1^2 - 3e_2)^3 = 27$.
Así, la ecuación de segundo grado que se forma será:

$$u^2 + 27u + 27 = 0$$

Luego, $u = \frac{-27\pm\sqrt{621}}{2}$ de donde $c_1 = -1{,}0400642$ y $c_2 = -25{,}9599358$.
Así, $b_1 = \sqrt[3]{c_1} = -1{,}01318025$ y $b_2 = \sqrt[3]{c_2} = -2{,}96097362$.
A continuación formamos el correspondiente sistema de ecuaciones:

$b_1 = x_1 + wx_2 + w^2x_3$
$b_2 = x_1 + wx_3 + w^2x_2$
$e_1 = x1 + x_2 + x_3$
de donde sustituyendo nos queda que:

$-1{,}01318025 = x_1 + wx_2 + w^2x_3$
$-2{,}96097362 = x_1 + wx_3 + w^2x_2$
$0 = x_1 + x_2 + x_3$

De aquí, teniendo en cuenta que $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ se puede ver fácilmente que las raíces de la ecuación inicial son:

$x_1 = \frac{b_1+b_2}{3} = \frac{-1{,}01318025-2{,}96097362}{3} = -1{,}32471796$
$x_2 = \frac{w^2b_1+wb_2}{3} = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}(1{,}01318025 - 2{,}96097362)i = 0{,}66235898 - 0{,}56227951i$
$x_3 = \frac{wb_1+w^2b_2}{3} = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}(-1{,}01318025 + 2{,}96097362)i = 0{,}66235898 + 0{,}56227951i$

3.2. Método de Lagrange para ecuaciones de grado 4

Sea la ecuación:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$$

donde los a_i son números complejos.
Sean x_1, x_2, x_3, x_4 las cuatro raíces de la ecuación. O sea:

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

Sea:
$y_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$

$y_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2$
$y_3 = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2$

Entonces:

1. $y_1 + y_2 + y_3$
2. $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$
3. $y_1y_2y_3$

son polinomios simétricos de x_1, x_2, x_3, x_4.

Por tanto, cada uno de los polinomios $y_1 + y_2 + y_3,\ y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3,\ y_1y_2y_3$ se puede expresar como un polinomio en los coeficientes de la ecuación $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$.

Mediante el algoritmo de Gauss, y haciendo los cálculos con el Maxima obtenemos:
1. $y_1 + y_2 + y_3 = 3e_1^2 - 8e_2$
2. $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 3e_1^4 + 16e_2^2 - 16e_1^2e_2 + 16e_1e_3 - 64e_4$
3. $y_1y_2y_3 = e_1^6 - 8e_1^4e_2 + 16e_1^3e_3 + 16e_1^2e_2^2 + 64e_3^2 - 64e_1e_2e_3$

Ahora, formamos la ecuación de grado 3:

$$z^3 - (y_1 + y_2 + y_3)z^2 + (y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3)z - (y_1y_2y_3) = 0$$

denominada Cúbica Resolvente de Lagrange, cuyas raíces son y_1, y_2, y_3.

Suponiendo calculadas estas tres raíces, resolvemos el sistema de ecuaciones:
$\sqrt{y_1} = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$
$\sqrt{y_2} = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$
$\sqrt{y_3} = (x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$
$e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

Sus soluciones son:
$x_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} + e_1)$
$x_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} + e_1)$
$x_3 = \frac{1}{4}(-\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} - \sqrt{y_3} + e_1)$
$x_4 = \frac{1}{4}(-\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3} + e_1)$
de donde obtenemos las cuatro raíces x_1, x_2, x_3, x_4 de la ecuación de grado 4:

$$x^4 - e_1x^3 + e_2x^2 - e_3x + e_4 = 0$$

Ejemplo:

Tenemos $x^4 - x^2 + x + 2 = 0$.

Como se puede ver, los polinomios elementales en este ejemplo son:
$e_1 = 0$

$e_2 = -1$
$e_3 = -1$
$e_4 = 2$

Ahora calculamos:
1. $y_1 + y_2 + y_3 = 3e_1^2 - 8e_2 = 8$
2. $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = 3e_1^4 + 16e_2^2 - 16e_1^2e_2 + 16e_1e_3 - 64e_4 = -112$
3. $y_1y_2y_3 = e_1^6 - 8e_1^4e_2 + 16e_1^3e_3 + 16e_1^2e_2^2 + 64e_3^2 - 64e_1e_2e_3 = 64$

Así, la cúbica que nos queda es:
$z^3 - 8z^2 - 112z - 64 = 0$, cuyas soluciones calculadas con la función *allroots* de Maxima son:
$y_1 = 15{,}49479961$
$y_2 = -0{,}598973651$
$y_3 = -6{,}895825958$

Luego, teniendo en cuenta que $e_1 = 0$, tenemos que las raíces de la ecuación de grado 4 serán:

$x_1 = \frac{1}{4}(\sqrt{15{,}49479961}+\sqrt{-0{,}598973651}+\sqrt{-6{,}895825958}) = 0{,}9840858578+0{,}849981088i$
$x_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{15{,}49479961}-\sqrt{-0{,}598973651}-\sqrt{-6{,}895825958}) = 0{,}9840858578-0{,}849981088i$
$x_3 = \frac{1}{4}(-\sqrt{15{,}49479961}+\sqrt{-0{,}598973651}-\sqrt{-6{,}895825958}) = -0{,}9840858578-0{,}463014147i$
$x_4 = \frac{1}{4}(-\sqrt{15{,}49479961}-\sqrt{-0{,}598973651}+\sqrt{-6{,}895825958}) = -0{,}9840858578+0{,}463014147i$

Capítulo 4

Aplicación estadística

Sean las variables $x_1, x_2, ..., x_n$
Consideramos polinomios de la forma:

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{s} q_i(n) P_i \tag{4.1}$$

donde $q_i(n)$ es una función racional de n y P_i es un corchete en $x_1, x_2, ..., x_n$ (ver definición de corchete en 2.1).

Por ejemplo $q_1(n)P_1 + q_2(n)P_2$ donde $q_1(n) = \frac{1}{n}$, $P_1 = (x_1^2 + ...) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $q_2(n) = \frac{n-1}{n}$ y $P_2 = (x_1x_2 + ...) = \sum_{i<j} x_i x_j$.

Consideramos otras variables $\mu_1, ..., \mu_m, ...$
A cada corchete $P_i = (x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} + ...)$ le hacemos corresponder el monomio $M_i = \mu_1^{S_1} \mu_2^{S_2} ... \mu_n^{S_n}$ donde S_k es el número de exponentes i_j que son iguales a k.
A cada polinomio $\sum_{i=1}^{s} q_i(n) P_i$ le hacemos corresponder el polinomio en $\mu_1, \mu_2, ...$ con coeficientes funciones racionales de n, que se define como $Q(\mu_1, \mu_2, ...) = \sum_{i=1}^{s} q_i(n) h(P_i) M_i$ donde $h(P_i)$ es el número de términos en el corchete P_i.
Escribimos $Q = \Phi(P)$.

Ejemplo:

Sea $P(x_1, ..., x_n) = \frac{n}{n-1}(x_1^2 + ...) + \frac{n-1}{n}(x_1x_2 + ...)$
Entonces $P_1 = (x_1^2 + ...), h(P_1) = n, P_2 = (x_1x_2 + ...)$ y $h(P_2) = \frac{n(n-1)}{2}$
$Q(\mu_1, \mu_2) = \frac{n}{n-1} h(P_1)\mu_2 + \frac{n-1}{n} h(P_2)\mu_1^2 = \frac{n}{n-1} n\mu_2 + \frac{n-1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\mu_1^2$

Ahora hacemos la construcción inversa de la anterior. O sea, partimos de un polinomio en los μ_i con coeficientes funciones racionales de n.

$Q(\mu_1, \mu_2, ...) = \sum_{i=1}^{s} r_i(n) M_i$ donde M_i es un monomio en $\mu_1, \mu_2, ...$ y $r_i(n)$ es una función racional de n y se encuentra $P(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{s} q_i(n) P_i$ tal que $\Phi(P) = Q$.
Ahora, para cada $M_i = \mu_1^{S_1} \mu_2^{S_2} ... \mu_n^{S_n}$ tal que $S_1 + ... + S_n \leq n$ definimos $P_i = (x_1^{i_1} x_2^{i_2} ... x_n^{i_n} + ...)$ donde el número de exponentes i_j que son iguales a k es S_k. Luego, definimos $q_i(n) = \frac{r_i(n)}{h(P_i)}$ ($h(P_i)$ es el número de términos en el corchete P_i).

Aplicamos ahora la construcción anterior para obtener los cuatro primeros estadísticos $k_1, ..., k_4$ de Fisher. Los μ_i son los momentos respecto al origen (en la notación de Fisher) de la distribución de una variable aleatoria dada. El conjunto $x_1, ..., x_n$ es una muestra aleatoria simple de la distribución. Para cada i, partimos de $Q = \kappa_i$ que es el cumulante i-ésimo de la distribución, y construimos el estadístico $P = k_i$ que propone Fisher para estimar κ_i. Las fórmulas de los cuatro primeros cumulantes son:

$\kappa_1 = \mu_1$
$\kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2$
$\kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$
$\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4$

Para cada $Q = \kappa_i$ con i=1,...,4 obtendremos el correspondiente polinomio simétrico $P(x_1, ..., x_n)$ siguiendo la construcción anterior. Luego, expresaremos este $P(x_1, ..., x_n)$ como un polinomio en las sumas de potencias $s_1, ..., s_n$ (véase el apartado 2.3) y comprobaremos que este polinomio en $s_1, ..., s_n$ coincide con el polinomio k_i de Fisher.

4.1. Construcción de $k_1, ..., k_4$

Construcción de k_1

$\kappa_1 = \mu_1$.
Luego, $Q = \mu_1$.
O sea $Q = r_1 M_1$, $M_1 = \mu_1$, $r_1 = 1$.
Luego,$P_1 = (x_1 + ...)$, $h(P_1) = n$.
Entonces, $P = r_1 \frac{1}{h(P_1)} P_1 = \frac{1}{n}(x_1 + ...)$.

Así, $k_1 = \frac{1}{n}(x_1 + ...) = \frac{1}{n} s_1$.

Construcción de k_2

$\kappa_2 = \mu_2 - \mu_1^2$.
Luego, $Q = \mu_2 - \mu_1^2$.
O sea $Q = r_1 M_1 + r_2 M_2$, $M_1 = \mu_2$, $r_1 = 1$, $M_2 = \mu_1^2$, $r_2 = -1$.
Luego, $P_1 = (x_1^2 + ...)$, $h(P_1) = n$, $P_2 = (x_1 x_2 + ...)$, $h(P_2) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Entonces $P = r_1 \frac{1}{h(P_1)} P_1 + r_2 \frac{1}{h(P_2)} P_2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + ...) - \frac{2}{n(n-1)}(x_1 x_2 + ...)$.

Tenemos que $s_1^2 = (x_1 + ...)^2 = (x_1^2 + ...) + 2(x_1 x_2 + ...) = s_2 + 2(x_1 x_2 + ...)$.
Así, se tiene que $(x_1 x_2 + ...) = \frac{s_1^2 - s_2}{2}$.

Ahora sustituyendo tenemos que:
$P = \frac{1}{n}s_2 - \frac{2}{n(n-1)}\frac{s_1^2-s_2}{2} = (\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)})s_2 - \frac{1}{n(n-1)}s_1^2 = \frac{1}{n-1}s_2 - \frac{1}{n(n-1)}s_1^2.$

O sea, $k_2 = \frac{1}{n-1}(s_2 - \frac{1}{n}s_1^2)$.

Construcción de k_3

$\kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$.
Luego, $Q = \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3$.
O sea, $Q = r_1M_1 + r_2M_2 + r_3M_3$, $M_1 = \mu_3$, $r_1 = 1$, $M_2 = \mu_1\mu_2$, $r_2 = -3$, $M_3 = \mu_1^3$, $r_3 = 2$.
Luego, $P_1 = (x_1^3 + ...)$, $h(P_1) = n$, $P_2 = (x_1^2x_2 + ...)$, $h(P_2) = n(n-1)$, $P_3 = (x_1x_2x_3 + ...)$, $h(P_3) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.
Entonces, $P = r_1\frac{1}{h(P_1)}P_1 + r_2\frac{1}{h(P_2)}P_2 + r_3\frac{1}{h(P_3)}P_3 = \frac{1}{n}(x_1^3 + ...) - 3\frac{1}{n(n-1)}(x_1^2x_2 + ...) + 2\frac{6}{n(n-1)(n-2)}(x_1x_2x_3 + ...)$.

Tenemos que $s_1s_2 = (x_1 + x_2 + ...)(x_1^2 + x_2^2 + ...) = (x_1^3 + x_2^3 + ...) + (x_1x_2^2 + ...)$.
Así, se tiene que $(x_1^2x_2 + ...) = s_1s_2 - s_3$.
También tenemos que $s_1^3 = (x_1 + x_2 + ...)(x_1 + x_2 + ...)(x_1 + x_2 + ...) = (x_1^3 + x_2^3 + ...) + 3(x_1^2x_2 + ...) + 6(x_1x_2x_3 + ...)$.
Así, se tiene que $(x_1x_2x_3 + ...) = \frac{1}{6}[s_1^3 - s_3 - 3(s_1s_2 - s_3)] = \frac{1}{6}[s_1^3 + 2s_3 - 3s_1s_2]$.
Ahora sustituyendo tenemos que:
$P = \frac{1}{n}s_3 - 3\frac{1}{n(n-1)}(s_1s_2 - s_3) + \frac{2}{n(n-1)(n-2)}(s_1^3 + 2s_3 - 3s_1s_2) = (\frac{1}{n} + \frac{3}{n(n-1)} + \frac{4}{n(n-1)(n-2)})s_3 + (\frac{-3}{n(n-1)} - \frac{6}{n(n-1)(n-2)})s_1s_2 + \frac{2}{n(n-1)(n-2)}s_1^3 = \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}s_3 - \frac{3n}{n(n-1)(n-2)}s_1s_2 + \frac{2}{n(n-1)(n-2)})s_1^3.$

O sea, $k_3 = \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)}s_3 - \frac{3n}{n(n-1)(n-2)}s_1s_2 + \frac{2}{n(n-1)(n-2)})s_1^3$.

Construcción de k_4

$\kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4$.
Luego, $Q = \mu_4 - 3\mu_2^2 - 4\mu_1\mu_3 + 12\mu_1^2\mu_2 - 6\mu_1^4$.
O sea $Q = r_1M_1 + r_2M_2 + r_3M_3 + r_4M_4 + r_5M_5$, $M_1 = \mu_4$, $r_1 = 1$, $M_2 = \mu_2^2$, $r_2 = -3$, $M_3 = \mu_1\mu_3$, $r_3 = -4$, $M_4 = \mu_1^2\mu_2$, $r_4 = 12$, $M_5 = \mu_1^4$, $r_5 = -6$.
Luego, $P_1 = (x_1^4 + ...)$, $h(P_1) = n$, $P_2 = (x_1^2x_2^2 + ...)$, $h(P_2) = \frac{n(n-1)}{2}$, $P_3 = (x_1^3x_2 + ...)$, $h(P_3) = n(n-1)$, $P_4 = (x_1^2x_2x_3 + ...)$, $h(P_4) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$, $P_5 = (x_1x_2x_3x_4 + ...)$, $h(P_5) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.
Entonces, $P = r_1\frac{1}{h(P_1)}P_1 + r_2\frac{1}{h(P_2)}P_2 + r_3\frac{1}{h(P_3)}P_3 + r_4\frac{1}{h(P_4)}P_4 + r_5\frac{1}{h(P_5)}P_5 = \frac{1}{n}(x_1^4 + ...) - 3\frac{2}{n(n-1)}(x_1^2x_2^2 + ...) - 4\frac{1}{n(n-1)}(x_1^3x_2 + ...) + 12\frac{2}{n(n-1)(n-2)}(x_1^2x_2x_3 + ...) - 6\frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)}(x_1x_2x_3x_4 + ...)$.

Tenemos que $s_1s_3 = (x_1 + x_2 + ...)(x_1^3 + x_2^3 + ...) = (x_1^4 + x_2^4 + ...) + (x_1^3x_2 + ...)$.
Así, se tiene que $(x_1^3x_2 + ...) = s_1s_3 - s_4$.
También tenemos que $s_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + ...)(x_1^2 + x_2^2 + ...) = (x_1^4 + x_2^4 + ...) + 2(x_1^2x_2^2 + ...)$
Así, se tiene que $(x_1^2x_2^2 + ...) = \frac{1}{2}(s_2^2 - s_4)$.
Además también tenemos que $s_1^2s_2 = (x_1 + x_2 + ...)(x_1 + x_2 + ...)(x_1^2 + x_2^2 + ...) =$

$(x_1^4 + x_2^4 + ...) + 2(x_1^3x_2 + ...) + 2(x_1^2x_2^2 + ...) + 2(x_1^2x_2x_3 + ...)$.
Así, se tiene que $(x_1^2x_2x_3 + ...) = \frac{1}{2}[s_1^2s_2 - s_4 - 2(s_1s_3 - s_4) - 2\frac{1}{2}(s_2^2 - s_4)] = \frac{1}{2}[2s_4 + s_1^2s_2 - 2s_1s_3 - s_2^2]$.
Y también tenemos que $s_1^4 = (x_1 + x_2 + ...)(x_1 + x_2 + ...)(x_1 + x_2 + ...)(x_1 + x_2 + ...) = (x_1^4 + x_2^4 + ...) + 4(x_1^3x_2 + ...) + 6(x_1^2x_2^2 + ...) + 12(x_1^2x_2x_3 + ...) + 24(x_1x_2x_3x_4 + ...)$.
Así, se tiene que $(x_1x_2x_3x_4 + ...) = \frac{1}{24}[s_1^4 - s_4 - 4(s_1s_3 - s_4) - 6\frac{1}{2}(s_2^2 - s_4) - 12\frac{1}{2}(2s_4 + s_1^2s_2 - 2s_1s_3 - s_2^2)] = \frac{1}{24}[s_1^4 - 6s_4 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_1^2s_2]$.
Ahora sustituyendo tenemos que:
$P = \frac{1}{n}s_4 - \frac{3}{n(n-1)}(s_2^2 - s_4) - 4\frac{1}{n(n-1)}(s_1s_3 - s_4) + 12\frac{1}{n(n-1)(n-2)}(2s_4 + s_1^2s_2 - 2s_1s_3 - s_2^2) - 6\frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)}(s_1^4 - 6s_4 + 8s_1s_3 + 3s_2^2 - 6s_1^2s_2) = (\frac{1}{n} + \frac{3}{n(n-1)} + \frac{4}{n(n-1)} + \frac{24}{n(n-1)(n-2)} + \frac{36}{n(n-1)(n-2)(n-3)})s_4 + (-\frac{3}{n(n-1)} - \frac{12}{n(n-1)(n-2)} - \frac{18}{n(n-1)(n-2)(n-3)})s_2^2 + (-\frac{4}{n(n-1)} - \frac{24}{n(n-1)(n-2)} - \frac{48}{n(n-1)(n-2)(n-3)})s_1s_3 + (\frac{12}{n(n-1)(n-2)} + \frac{36}{n(n-1)(n-2)(n-3)})s_1^2s_2 - \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)}s_1^4 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}s_4 - \frac{3}{(n-2)(n-3)}s_2^2 - \frac{4(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}s_1s_3 + \frac{12n}{n(n-1)(n-2)(n-3)}s_1^2s_2 - \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)}s_1^4$.

O sea, $k_4 = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)}s_4 - \frac{3}{(n-2)(n-3)}s_2^2 - \frac{4(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}s_1s_3 + \frac{12n}{n(n-1)(n-2)(n-3)}s_1^2s_2 - \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)}s_1^4$.

Comprobamos que las expresiones que hemos obtenido para cada $k_1, ..., k_4$ coinciden por las dadas por Fisher ([2], p. 203).

Capítulo 5

Aplicación a las Curvas Algebraicas

Obtendremos ciertas funciones simétricas de las coordenadas de los puntos de intersección de dos curvas algebraicas, siguiendo una técnica introducida por Poisson. Para ser más concretos haremos el estudio detallado en el caso de la intersección de dos cónicas. Primero estudiaremos la resultante de eliminar una de las dos variables de las dos ecuaciones dadas. Esta definición de la resultante se debe a Euler, y usa también polinomios simétricos.

Sean:

$\varphi(x,y) = x^2 - f_1x + f_2 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = 0$, donde $f_1 = f_1(y)$, $f_2 = f_2(y)$ son polinomios con coeficientes complejos en una variable y, y $\alpha_1 = \alpha_1(y)$, $\alpha_2 = \alpha_2(y)$ son las raíces de la ecuación de grado 2 en x que se obtiene para cada valor de y

$\psi(x,y) = x^2 - g_1x + g_2 = (x-\beta_1)(x-\beta_2) = 0$, donde $g_1 = g_1(y)$, $g_2 = g_2(y)$ son polinomios con coeficientes complejos en una variable y, y $\beta_1 = \beta_1(y)$, $\beta_2 = \beta_2(y)$ son las raíces de la ecuación de grado 2 en x que se obtiene para cada valor de y

Supongamos que los polinomios $f_1(y)$, $g_1(y)$ tienen grado ≤ 1, y los polinomios $f_2(y)$, $g_2(y)$ tienen grado igual 2.

Sea:
$R = \psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2) = (\alpha_1^2 - g_1\alpha_1 + g_2)(\alpha_2^2 - g_1\alpha_2 + g_2) = \alpha_1^2\alpha_2^2 - g_1(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_1) + g_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) + g_1^2\alpha_1\alpha_2 - g_1g_2(\alpha_1+\alpha_2) + g_2^2$,
donde
$\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2^2\alpha_1 = (\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1\alpha_2 = f_1f_2$
$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = (\alpha_1+\alpha_2)^2 - 2\alpha_1\alpha_2 = f_1^2 - 2f_2$

Luego, sustituyendo tenemos que:

$$R = f_2^2 - g_1f_1f_2 + g_2(f_1^2 - 2f_2) + g_1^2f_2 - g_1g_2f_1 + g_2^2 = f_2^2 - g_1f_1f_2 + g_2 + g_2f_1^2 - 2g_2f_2 + g_1^2f_2 - g_1g_2f_1 + g_2^2 \tag{5.1}$$

Sea $R(y)$ el polinomio mónico en y que se obtiene dividiendo el polinomio R por una constante distinta de 0.
Entonces $R(y)$ es un polinomio en y de grado menor o igual que 4.

Se verifica:
$R(y_0) = 0 \Leftrightarrow \exists x_0 \in C : \varphi(x_0, y_0) = 0,\ \psi(x_0, y_0) = 0.$
Haremos varias suposiciones.

Suposición 1
El grado de R(y) es 4 y su discriminante es diferente de 0.
Entonces la ecuación $R(y) = 0$ tiene 4 raíces $y_1, ..., y_4$ que son diferentes entre sí.

Suposición 2
El sistema:

$$f_1(y) - g_1(y) = 0$$
$$f_2(y) - g_2(y) = 0$$

no tiene solución

Entonces para cada $i = 1, ..., 4$ existe un único x_i tal que $\varphi(x_i, y_i) = 0$, $\psi(x_i, y_i) = 0$.
Para cada i, x_i se obtiene de la siguiente forma:
De

$$x^2 - f_1(y_i)x + f_2(y_i) = 0$$
$$x^2 - g_1(y_i)x + g_2(y_i) = 0$$

resulta $[g_1(y_i) - f_1(y_i)]x + f_2(y_i) - g_2(y_i) = 0$
de donde $x_i = \frac{g_2(y_i) - f_2(y_i)}{g_1(y_i) - f_1(y_i)}$.

R se llama la resultante de eliminar la variable x entre las dos ecuaciones $\varphi(x_i, y_i) = 0$, $\psi(x_i, y_i) = 0$. Esta construcción se debe a Euler. El Maxima permite calcular esta resultante con la función: resultant(φ, ψ, x). Usaremos la notación $R = resultant(\varphi, \psi, x)$.

Consideremos entonces el número F=$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$.
Observemos que si fijamos las x_i y permutamos las $y_1, ..., y_4$, entonces este número puede variar. Sin embargo, si permutamos las soluciones $(x_1, y_1), ..., (x_4, y_4)$, entonces F no varía. Nos proponemos ver cómo, siguiendo un procedimiento de Poisson, F se puede calcular a partir de los coeficientes de los dos polinomios iniciales $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sin necesidad de conocer las soluciones $(x_1, y_1), ..., (x_4, y_4)$.

Las ecuaciones iniciales se pueden también escribir, después de dividir por una constante, en la forma:

$$\varphi(x, y) = y^2 - u_1y + u_2 = 0$$
$$\psi(x, y) = y^2 - v_1y + v_2 = 0$$

donde $u_1 = u_1(x)$, $v_1 = v_1(x)$ son polinomios de grado menor o igual que 1 en x y $u_2 = u_2(x)$, $v_2 = v_2(x)$ son polinomios de grado 2 en x.
De manera análoga a como hicimos arriba, podemos ahora eliminar la y y obtenemos una resultante en x.

Sea $R_1(x)$ el polinomio mónico que obtiene a partir de $resultant(\varphi, \psi, y)$ al dividir por un número distinto de 0.
$R_1(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 4 en x.

Haremos la siguiente:

Suposición 3
El sistema:

$$\begin{aligned} u_1(x) - v_1(x) = 0 \\ u_2(x) - v_2(x) = 0 \end{aligned}$$

no tiene solución.

De esta suposición se deduce, de manera análoga a como hicimos arriba, que para cada x_0 tal que $R_1(x_0) = 0$, existe un único y_0 tal que $\varphi(x_0, y_0) = 0$, $\psi(x_0, y_0) = 0$.

Entonces, el grado de $R_1(x)$ es 4 y $x_1, ..., x_4$ son diferentes entre sí. Si no fuese así, habría dos soluciones (x_i, y_i) con el mismo x, lo que contradice el hecho de que , según acabamos de ver, y_i queda determinado por x_i.

En las ecuaciones

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = 0 \\ \psi(x, y) = 0 \end{aligned}$$

sustituimos y por $y = x + t$, desarrollamos, y obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x, t) = 0 \\ \overline{\psi}(x, t) = 0 \end{aligned}$$

donde $\overline{\varphi}(x, t)$ y $\overline{\psi}(x, t)$ son polinomios en x, t.

Haremos la siguiente:

Suposición 4
Después de dividir cada ecuación por una constante, las ecuaciones obtenidas tienen la forma:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x, t) = x^2 + h_1(t)x + h_2(t) = 0 \\ \overline{\psi}(x, t) = x^2 + k_1(t)x + k_2(t) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, $h_1(t)$, $k_1(t)$ son polinomios de grado menor o igual que 1 en t y $h_2(t)$, $k_2(t)$ son polinomios de grado menor o igual que 2 en t.
Sea $R_2(t)$ el polinomio mónico que se obtiene a partir $resultant(\overline{\varphi}, \overline{\psi}, x)$ al dividir por un número distinto de 0. $R_2(t)$ es entonces un polinomio de grado menor o igual que 4 en t.

Haremos la siguiente:

Suposición 5
El sistema:

$$\begin{gathered} h_1(t) - k_1(t) = 0 \\ h_2(t) - k_2(t) = 0 \end{gathered}$$

no tiene solución.

Para cada $i = 1, ..., 4$, sea $t_i = y_i - x_i$. Entonces $(x_1, t_1), ..., (x_4, t_4)$ son soluciones del sistema $\overline{\varphi}(x,t) = 0$, $\overline{\psi}(x,t) = 0$.
Entonces por la suposición 5 obtenemos de manera análoga a como hicimos arriba que $R_2(t)$ tiene grado 4, que las soluciones de $R_2(t) = 0$ son $t_1, ..., t_4$ y que $t_1, ..., t_4$ son diferentes entre sí.

Se tiene que:
$(t_1^2 + ... + t_4^2) = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 + (y_4 - x_4)^2 = (y_1^2 + ... + y_4^2) + (x_1^2 + ... + x_4^2) - 2(x_1y_1 + ... + x_4y_4)$.

Luego F $= x_1y_1 + ... + x_4y_4 = \frac{-(t_1^2+...+t_4^2)+(y_1^2+...+y_4^2)+(x_1^2+...+x_4^2)}{2}$.

Las sumas $t_1^2 + ... + t_4^2$, $y_1^2 + ... + y_4^2$, $x_1^2 + ... + x_4^2$ se pueden calcular a partir de los coeficientes de los polinomios $R_2(t)$, $R(y)$ y $R_1(x)$ respectivamente que a su vez se han calculado a partir de las dos ecuaciones iniciales.

Ejemplo:

Sean:

$$\begin{gathered} \varphi(x,y) = x^2 - xy + 2y^2 - 1 = 0 \\ \psi(x,y) = x^2 + xy - y^2 + 2y + 1 = 0 \end{gathered}$$

Para eliminar x escribimos estas ecuaciones en la forma:

$$\begin{gathered} x^2 - yx + (2y^2 - 1) = 0 \\ x^2 + yx + (-y^2 + 2y + 1) = 0 \end{gathered}$$

Calculamos resultant(φ,ψ,x) mediante el Maxima y obtenemos:

$$R(\varphi, \psi, x) = 11y^4 - 8y^3 - 8y^2 + 8y + 4$$

Dividimos todo entre 11 y obtenemos:

$$R(y) = y^4 - \tfrac{8}{11}y^3 - \tfrac{8}{11}y^2 + \tfrac{8}{11}y + \tfrac{4}{11}$$

Calculamos el discriminante de R con el Maxima y obtenemos que este discriminante es menor que 0.
Luego, se verifica la suposición 1.
Aquí, $f_1 = -y$, $f_2 = 2y^2 - 1$, $g_1 = y$ y $g_2 = -y^2 + 2y + 1$
Comprobamos fácilmente que el sistema:

$$\begin{aligned} -y &= y \\ 2y^2 - 1 &= -y^2 + 2y + 1 \end{aligned}$$

no tiene solución.
Luego, se verifica la suposición 2.
Para eliminar y, escribimos las ecuaciones iniciales en la forma:

$$\begin{aligned} y^2 - 1/2xy + 1/2(x^2 - 1) &= 0 \\ y^2 - (2 + x)y - (x^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Aquí, $u_1 = -\frac{1}{2}x$, $u_2 = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, $v_1 = -(x + 2)$ y $v_2 = -(x^2 + 1)$.
Comprobamos fácilmente que el sistema:

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}x &= -(x + 2) \\ \tfrac{1}{2}(x^2 - 1) &= -(x^2 + 1) \end{aligned}$$

no tiene solución.
Luego, se verifica la suposición 3.
Ahora sustituimos y por $x + t$ en la ecuación $\varphi(x, y) = 0$, desarrollamos y obtenemos:

$$2x^2 + 3tx + 2t^2 - 1 = 0$$

Dividimos toda la ecuación por 2 y obtenemos:

$$\overline{\varphi}(x, t) = x^2 + \tfrac{3}{2}tx + t^2 - \tfrac{1}{2} = 0$$

Sustituimos y por $x + t$ en la ecuación $\psi(x, y) = 0$, desarrollamos y obtenemos:

$$\overline{\psi}(x, t) = x^2 + x(2 - t) - t^2 + 2t + 1 = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x, t) &= x^2 + h_1(t)x + h_2(t) = 0 \\ \overline{\psi}(x, t) &= x^2 + k_1(t)x + k_2(t) = 0 \end{aligned}$$

donde $h_1(t) = \frac{3}{2}t$, $h_2(t) = t^2 - \frac{1}{2}$, $k_1(t) = 2 - t$, $k_2(t) = -t^2 + 2t + 1$.
Luego, se verifica la suposición 4.
Comprobamos fácilmente que el sistema:

$$\begin{gathered}\frac{3}{2}t = 2 - t \\ t^2 - \frac{1}{2} = -t^2 + 2t + 1\end{gathered}$$

no tiene solución.
Luego, se verifica la suposición 5.

Ahora, procedemos a calcular F=$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$.

Como las y_i son las raíces de $R(y) = y^4 - \frac{8}{11}y^3 - \frac{8}{11}y^2 + \frac{8}{11}y + \frac{4}{11}$, entonces $(y_1^2 + ... + y_4^2) = (-\frac{8}{11})^2 - 2(-\frac{8}{11}) = \frac{240}{121}$.

Calculamos mediante el Maxima $resultant(\varphi, \psi, y)$ y $resultant(\overline{\varphi}, \overline{\psi}, x)$ y obtenemos:

$$\begin{gathered}R_1(x) = x^4 + \frac{10}{11}x^3 + \frac{14}{11}x^2 - \frac{2}{11}x - \frac{7}{11} \\ R_2(t) = t^4 - \frac{18}{11}t^3 - \frac{6}{11}t^2 + \frac{26}{11}t + \frac{1}{11}\end{gathered}$$

Como las x_i son las raíces de $R_1(x) = x^4 + \frac{10}{11}x^3 + \frac{14}{11}x^2 - \frac{2}{11}x - \frac{7}{11} = 0$, entonces $(x_1^2 + ... + x_4^2) = (\frac{10}{11})^2 - 2(\frac{14}{11}) = -\frac{208}{121}$.

Como las t_i son las raíces de $R_2(t) = t^4 - \frac{18}{11}t^3 - \frac{6}{11}t^2 + \frac{26}{11}t + \frac{1}{11} = 0$, entonces $(t_1^2 + ... + t_4^2) = (-\frac{18}{11})^2 - 2(\frac{6}{11}) = \frac{456}{121}$.

Luego, sustituyendo tenemos que:

F=$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = \frac{\sum y_i^2 + \sum x_i^2 - \sum t_i^2}{2} = \frac{\frac{240}{121} - \frac{208}{121} - \frac{456}{121}}{2} = -\frac{212}{121}$.

Capítulo 6

El discriminante de una ecuación de grado 3 y el de una ecuación de grado 4

6.1. Discriminante de una ecuación de grado 3

Consideramos la ecuación de grado 3:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

donde los a_i son números complejos. Sean x_1, x_2, x_3 sus tres raíces.
Su discriminante se define como:

$$\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 \tag{6.1}$$

Los posibles casos para el signo del discriminante son:

a)Si hay dos raíces iguales, entonces $\Delta = 0$.

b)Si x_1, x_2, x_3 son reales y distintas, entonces $\Delta > 0$.

c)Si $x_1 = a + bi$, $x_2 = a - bi$ con a real, $b \neq 0$ real y x_3 real, entonces:
$\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = (2ib)^2(a + bi - x_3)^2(a - bi - x_3)^2 = -4b^2((a - x_3) + ib)^2((a - x_3) - ib)^2 = -4b^2((a - x_3)^2 - (ib)^2)^2 = -4b^2((a - x_3)^2 + b^2)^2 < 0$.
Luego, $\Delta < 0$.

Por el Teorema Fundamental sabemos que $\Delta = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$ podrá ponerse como un polinomio Q con coeficientes enteros en e_1, e_2, e_3. Calculamos este polinomio mediante el Maxima utilizando el algoritmo de Gauss y obtenemos:

$$\Delta=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27e_3^2+18e_1e_2e_3-4e_1^3e_3-4e_2^3+e_1^2e_2^2$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^3-4x^2+x+1=0$$

donde:
$e_1=4$
$e_2=1$
$e_3=-1$

Entonces, sustituyendo, se tiene que:
$\Delta=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2=-27e_3^2+18e_1e_2e_3-4e_1^3e_3-4e_2^3+e_1^2e_2^2=169.$

Luego, las raíces x_1,x_2,x_3 de la ecuación son reales y distintas.
Comprobamos que es cierto calculando las raíces de la ecuación.
Las raíces son $x_1=3{,}651093409$, $x_2=0{,}726109445$ y $x_3=-0{,}377202854$, que son reales y distintas como habíamos dicho anteriormente.

6.2. Discriminante de una ecuación de grado 4

Consideramos la ecuación de grado 4:

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$$

donde los a_i son números complejos. Sean $x_1,...,x_4$ sus cuatro raíces.
Su discriminante se define como:

$$\Delta=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2 \tag{6.2}$$

Los posibles casos para el signo del discriminante son:

a)Si hay dos raíces iguales, entonces $\Delta=0$.

b)Si x_1,x_2,x_3,x_4 son reales y distintas, entonces $\Delta>0$.

c)Si x_1,x_2 son reales y distintas y $x_3=a+bi$, $x_4=a-bi$, con a real y $b\neq 0$ real, entonces:
$\Delta=\underbrace{(x_1-x_2)^2}_{>0}\underbrace{(x_1-a+bi)^2(x_1-a-bi)^2}_{>0}\underbrace{(x_2-a+bi)^2(x_2-a-bi)^2}_{>0}\underbrace{(2bi)^2}_{<0}<0.$

Luego, $\Delta < 0$.

d)Si x_1, x_2, x_3, x_4 son imaginarias y distintas, con $x_1 = a + bi$, $x_2 = a - bi$ y $x_3 = c + di$, $x_4 = c - di$, donde a, c son reales y $b \neq 0$, $d \neq 0$ son reales, entonces:
$\Delta = \underbrace{(2bi)^2}_{<0} \underbrace{(a - c + (b + d)i)^2(a - c + (b - d)i)^2(a - c - (b + d)i)^2(a - c - bi + di)^2}_{>0} \underbrace{(2di)^2}_{<0}$.
Luego, $\Delta > 0$.

Veamos cómo Δ se puede calcular como el discriminante de una ecuación de grado 3 que se obtiene a partir de la ecuación inicial de grado 4, de la siguiente forma:

Definimos
$u = x_1x_2 + x_3x_4$
$v = x_1x_3 + x_2x_4$
$w = x_1x_4 + x_2x_3$

Y también definimos:
$P = u + v + w$
$Q = uv + uw + vw$
$R = uvw$

Entonces tenemos la igualdad de polinomios en y:

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = (y - u)(y - v)(y - w)$$

Los coeficientes P,Q y R son funciones simétricas de las raíces x_1, x_2, x_3 y x_4 de la ecuación de grado 4. Entonces se pueden calcular como polinomios en los coeficientes de la ecuación de grado 4.
Las fórmulas que se obtienen son:

$$P = e_2$$
$$Q = e_3e_1 - 4e_4$$
$$R = e_4e_1^2 + e_3^2 - 4e_4e_2$$

donde $e_k = (-1)^k a_k$. La primera es inmediata, y las otras dos las calculamos usando el algoritmo de Gauss, y haciendo los calculos con Maxima.
Obsérvese que:
$u - v = x_1(x_2 - x_3) + x_4(x_3 - x_2) = (x_4 - x_1)(x_3 - x_2)$
$u - w = x_1(x_2 - x_4) + x_3(x_4 - x_2) = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2)$
$v - w = x_1(x_3 - x_4) + x_2(x_4 - x_3) = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3)$
con lo cual:

$$\Delta = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2 = (u-v)^2(u-w)^2(v-w)^2 \tag{6.3}$$

O sea, Δ coincide con el discriminante de la ecuación de grado 3:

$$y^3 - Py^2 + Qy - R = 0$$

Ejemplo:

Sea la ecuación:

$$x^4 + 2x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

donde:
$e_1 = 0$
$e_2 = 2$
$e_3 = 0$
$e_4 = \frac{1}{4}$

Entonces, se tiene que:
$P = e_2 = 2$
$Q = e_3e_1 - 4e_4 = -1$
$R = e_4e_1^2 + e_3^2 - 4e_4e_2 = -2$

Construimos entonces la ecuación de grado 3:

$$y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$$

donde ahora:
$e_1 = 2$
$e_2 = -1$
$e_3 = -2$

Ahora, calculamos su discriminante mediante la fórmula para el discriminante de grado 3, y tenemos que:

$$\Delta = -27e_3^2 + 18e_1e_2e_3 - 4e_1^3e_3 - 4e_2^3 + e_1^2e_2^2$$

y sustituyendo obtenemos que:

$$\Delta = 36 > 0$$

Luego, o bien las cuatro raíces x_1, x_2, x_3, x_4 son reales y distintas o bien son dos pares diferentes de raíces conjugadas imaginarias.

Veamos que estamos en el segundo caso, pues en este ejemplo las raíces x_1, x_2, x_3, x_4 se calculan fácilmente como sigue:

$$x^4 + 2x^2 + \frac{1}{4} = 0$$

Hacemos $x^2 = t$ y obtenemos:

$$t^2 + 2t + \frac{1}{4} = 0$$

Ahora calculando mediante la fórmula para ecuaciones de grado 2 tenemos que:

$t = \frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Luego:

$t_1 = \frac{-2+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{-2+\sqrt{3}}{2}}$ y $x_2 = -\sqrt{\frac{-2+\sqrt{3}}{2}}$

$t_2 = \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}}$ y $x_4 = -\sqrt{\frac{-2-\sqrt{3}}{2}}$

Luego, son dos pares diferentes de raíces conjugadas imaginarias como habíamos dicho anteriormente.

Capítulo 7

Conclusiones

Las construcciones básicas del capítulo 3 son:
En 3.1, las funciones $b_1^3 + b_2^3$ y $b_1^3 b_2^3$ donde $b_1 = x_1 + wx_2 + w^2 x_3$, $b_2 = x_1 + w^2 x_2 + wx_3$.
En 3.2, las funciones elementales simétricas en y_1, y_2, y_3, donde $y_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$, $y_2 = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2$, $y_3 = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4)^2$.
La construcción básica en el capítulo 4 es la construcción del polinomio simétrico $P(x_1, ..., x_n)$ a partir de un polinomio $Q(\mu_1, ..., \mu_n)$.
Las construcciones básicas en el capítulo 5 son las resultantes de Euler de las ecuaciones iniciales, y la resultante de Euler que se obtiene al eliminar x después de hacer el cambio de variable $y = x + t$.
Las construcciones básicas en el capítulo 6 son las funciones elementales simétricas en u, v, w donde:

$$\begin{aligned} u &= x_1 x_2 + x_3 x_4 \\ v &= x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ w &= x_1 x_4 + x_2 x_3 \end{aligned}$$

Bibliografía

[1] L. Euler. *Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper*. Memoires de l'academie des sciences de Berlin 4, 1750, pp. 234-248.

[2] R.A. Fisher. *Moments and product moments of sampling distributions.* Proc. London Math. Soc. (1930) s2-30 (1): 199-238.

[3] David Díaz Gónzalez. *Funciones simétricas.* Trabajo fin de grado, 2015. Repositorio institucional ull.

[4] J.L. Lagrange. *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.* Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, années 1770 et 1771. Oeuvres complètes, tome 3, XIII, pp. 203-421.

[5] Poisson. *Mémoire sur l'Élimination des Équations algébriques.* Journal de l'École Polytechnique, Onzième Cahier. Tome IV. pp. 199-203, (1802).