



Universidad
de La Laguna

La complejidad topológica del planificador de movimientos robótico

Topological complexity of robotic motion planning

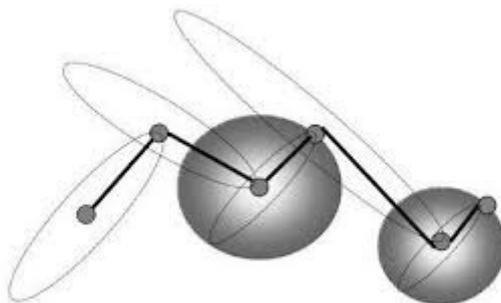
David Laarbi Fumero

Trabajo de Fin de Grado

Facultad de Ciencias

Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna



La Laguna, 15 de septiembre de 2016

Dr. D. **Jose Manuel García Calcines**, profesor Contratado Doctor adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadísticas e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

“Estudio de la complejidad topológica en el planificador de movimientos robótico”

ha sido realizada bajo su dirección por **D.David Laarbi Fumero**, con N.I.F. 42.237.227-G

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firma la presente en La Laguna a 15 de septiembre de 2016



Agradecimientos

A mi familia que ha estado en los momentos malos y en los buenos apoyándome.

A mi tutor, Jose Manuel García Calcines, por su incondicional ayuda en todo momento.

A Javi y Patri, que entre teoremas y debates pasamos buenos días.

A todos aquellos que me han aportado su grano de arena durante la carrera.

Resumen

En esta memoria estudiamos un invariante numérico denominado *complejidad topológica*. Dicho invariante fue introducido por M. Farber en 2003 al tratar el problema de planificador de movimientos en robótica desde una perspectiva topológica. Se corresponde, en cierta medida, con el menor número de órdenes que debe contener cualquier algoritmo que rijan un determinado planificador de movimientos de un espacio de configuraciones dado. En primer lugar probamos una serie de propiedades básicas, entre las que se destaca el hecho de ser un invariante homotópico. Además, con el fin de poder realizar cálculos efectivos de la complejidad topológica, la hemos relacionado mediante acotaciones con otros invariantes numéricos más conocidos, como son la categoría de Lusternik-Schnirelmann, la categoría seccional (también denominada género de Schwarz), la dimensión recubridora y la nilpotencia del núcleo del producto cup en cohomología. El relacionado con la cohomología ilustra la potencia de la topología algebraica dentro de nuestro estudio, puesto que es una pieza fundamental en el cálculo de la complejidad topológica de numerosos ejemplos. Finalizamos la memoria poniendo en práctica esto último para el caso de las esferas, productos de esferas, las superficies orientables y los grupos topológicos.

Abstract

In this memory we study a numerical invariant called *topological complexity*. Such an invariant was introduced by M. Farber in 2003 in order to face the motion planning problem in robotics from a topological perspective. It corresponds to the lowest number of orders that any algorithm must contain to govern a particular movement planner of a given configuration space. First, we prove some basic properties, in which the fact of being a homotopic invariant is highlighted. Furthermore, in order to perform effective calculations of the topological complexity, we have related it by bounds with other known numerical invariants such as the Lusternik-Schnirelmann category, the sectional category (also called Schwarz genre), the covering dimension and the nilpotency of the kernel of the cup product. The last bound, which is related to cohomology, illustrates the power of algebraic topology in our study, because it is a key element in the computation of the topological complexity of many examples. We finish our study by putting into practice that for the case of the spheres, product of spheres, orientable surfaces and topological groups.

Índice general

1. Preliminares	4
1.1. Herramientas de topología general. Espacios de funciones	4
1.2. Partición de la unidad	7
1.3. Dimensión recubridora	9
1.4. Teoría de homotopía básica	12
2. El anillo graduado de cohomología	14
2.1. Complejos de cadenas y de cocadenas	14
2.2. Cohomología singular y su estructura de anillo graduado	16
3. Complejidad topológica	22
3.1. Espacios de configuraciones	22
3.2. El problema del planificador de movimientos	25
3.3. Estudio de la complejidad topológica	27
4. Cálculos	41
4.1. La n -esfera S^n . Productos de esferas	41
4.2. Superficies orientables	46
4.3. Grupos topológicos	47

Introducción

Una de las principales ramas de la Robótica donde en la actualidad se investiga con intensidad es la llamada *planificación de movimientos*, en la cual confluyen la informática, la ingeniería y las matemáticas. Su objetivo principal es, a grandes rasgos, la creación, diseño e implementación de algoritmos en un sistema mecánico que lo permita moverse adecuadamente por el entorno en el que se desenvuelve. De forma general, la planificación de un movimiento tiene dos importantes tareas que llevar a cabo. La primera de ellas es diseñar y modelar el sistema mecánico de forma que refleje fielmente el movimiento o bien el entorno donde se mueve (obstáculos a sortear, capacidad de movimiento de un robot, posibles posiciones físicas de todos y cada uno de los elementos del sistema mecánico,...). Este modelo del sistema mecánico se denomina espacio de configuraciones asociado, el cual, en la mayoría de los casos prácticos, tiene estructura de espacio topológico. Un estado de un espacio de configuraciones es por tanto una determinada posición del sistema mecánico. Una vez conocido y diseñado el espacio de configuraciones, la segunda tarea consiste en la creación e implementación de algoritmos que permita al sistema mecánico pasar de forma autónoma de un estado a otro del espacio de configuraciones. En la robótica moderna pueden usarse métodos propios de la geometría y la topología de forma eficiente para llevar a cabo estas dos tareas esenciales que conforman la planificación de un movimiento. Podemos destacar el libro de Jean Claude Latombe, "Robot Motion Planning" [10], donde pueden encontrarse las primeras aplicaciones de métodos topológicos y geométricos para el estudio de planificadores de movimientos.



Figura 1: Jean Claude Latombe

Por una parte, la geometría y topología nos permiten describir de forma esencial el espacio de configuraciones de un determinado movimiento. Una vez descrito el espacio de configuraciones, la topología también permite formular la descripción de algoritmos planificadores de movimientos. En efecto, consideremos un determinado espacio de configuraciones al que llamaremos X . Un

algoritmo planificador del movimiento ha de tener como input dos estados cualesquiera del espacio de configuraciones X , un estado inicial A y otro final B . El output del algoritmo debe proporcionar un movimiento sin interrupciones del estado A al estado B . Tal movimiento puede ser descrito de forma topológica por una aplicación continua $\alpha : I \rightarrow X$ del intervalo cerrado $I = [0, 1]$ en el espacio de configuraciones X tal que comience en A , esto es $\alpha(0) = A$, y termine en B , es decir $\alpha(1) = B$. Teniendo esto en cuenta, consideremos el conjunto de todos los posibles caminos en X , y denotémoslo por X^I . Tomemos a continuación la aplicación $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ que asocia a cada camino en X su punto inicial y final, es decir $\pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$. Entonces un algoritmo planificador del movimiento de nuestro espacio de configuraciones no es más que una aplicación inversa por la izquierda (también llamada *sección*) de π , esto es, una aplicación $s : X \times X \rightarrow X^I$ tal que $\pi \circ s = 1_{X \times X}$. Así pues, el problema de encontrar algoritmos planificadores de movimientos se reduce a encontrar secciones de la aplicación que aplica cada camino a sus extremos. No obstante, en la búsqueda de estas secciones es muy importante que haya continuidad. La continuidad en la estrategia de planificador de movimientos significa que para pequeñas perturbaciones (A', B') del par de configuraciones (A, B) , los movimientos resultantes $s(A, B)$ y $s(A', B')$ estén próximos unos de otros.



Figura 2: Continuidad en la sección

En otras palabras, la continuidad del algoritmo de planificador de movimientos s garantiza que cualquier pequeño error en la descripción de la posición inicial A y la posición final B causará una pequeña modificación en el movimiento del sistema, producido por el planificador de movimientos. El conjunto X^I de todos los caminos de X puede ser dotado de una estructura de espacio topológico, de tal modo que podemos decir cuándo dos caminos están cerca uno del otro. Con dicha estructura se tiene que la aplicación $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ es continua. Así pues, tiene sentido preguntarse cuándo una determinada sección s de π , esto es, un algoritmo planificador del movimiento, es una aplicación también continua. La respuesta es sorprendente, pues veremos que para un espacio de configuraciones X existe un algoritmo de planificador de movimientos continuo $s : X \times X \rightarrow X^I$ si y solo si el espacio X es contráctil (recordemos que un espacio X es contráctil si puede ser deformado continuamente a un punto). Sin embargo, los espacios de configuraciones no son contráctiles en general, por lo que encontrar un algoritmo planificador puede tener cierta dificultad. El invariante numérico que mide esta complejidad se denomina *complejidad topológica* de un espacio topológico. Este índice fue introducido en 2003 por Michael Farber [3] y puede ser definido como el menor número de abiertos con que podemos recubrir el producto $X \times X$ y donde en cada uno de estos abiertos existe una sección continua de $\pi : X^I \rightarrow X \times X$.



Figura 3: Michael Farber

Se corresponde, en cierta medida, con el menor número de órdenes que debe contener cualquier algoritmo que rija un determinado planificador de movimiento de un espacio de configuraciones dado. Con ayuda de resultados que pueden probarse utilizando teoría de homotopía, calcularemos la complejidad topológica de espacios de configuraciones de diversos ejemplos. Este trabajo está dedicado al estudio de la complejidad topológica viendo sus propiedades más importantes y su relación con otros invariantes numéricos como son la categoría de Lusternik-Schnirelmann, la dimensión recubridora o el índice de nilpotencia del núcleo del producto cup en cohomología.

La presente memoria esta dividida en cuatro capítulos. En el primero veremos un recordatorio de nociones básicas de topología general y de homotopía, así como los conceptos de dimensión recubridora y de partición de la unidad. Continuamos con el segundo capítulo sobre el anillo graduado de cohomología, en el cual veremos la homología de un complejo de cadenas y de cocadenas, para culminar con el estudio de la cohomología, viendo su estructura de anillo graduado. Este capítulo será de vital importancia para la realización de los cálculos en el último capítulo. En el tercer capítulo, y central, estudiaremos la complejidad topológica, comenzando por dar la motivación de este invariante, el cual se fundamenta en el problema de planificador de movimientos asociado a un sistema mecánico, así como una serie de acotaciones del mismo. También estudiaremos conceptos topológicos y algebraicos menos recientes como la categoría de Lusternik-Schnirelmann y la categoría seccional. En el cuarto y último capítulo, calcularemos la complejidad topológica de algunos espacios relevantes, y los relacionaremos con los espacios de configuraciones visto en el capítulo anterior. Finalmente adjuntamos las conclusiones y una serie de posibles continuaciones de este trabajo, junto a la bibliografía utilizada en la memoria.

Capítulo 1

Preliminares

Con el fin de hacer esta memoria lo más autocontenida posible, incluimos un capítulo preliminar donde veremos todas aquellas nociones y resultados que necesitaremos en nuestro estudio de la complejidad topológica. A saber, cuestiones básicas de topología general y de teoría de homotopía. Nótese que si bien los primeros resultados de topología general son muy elementales y no precisan de demostración, los siguientes no se han impartido durante el grado de matemáticas (espacios de funciones, dimensión recubridora, particiones de la unidad, etc.), y es por ello que hemos decidido incluir sus pruebas o en algunos casos, un esbozo de ellas. En cuanto a la teoría de homotopía básica, expondremos simplemente las ideas de homotopía y de espacios homotópicamente equivalentes.

1.1. Herramientas de topología general. Espacios de funciones

Sin duda, la estructura matemática que permite la definición formal de conceptos como conexión por caminos, continuidad, puntos próximos es la de *espacio topológico*. Un espacio topológico no es más que un conjunto X junto con una colección distinguida de subconjuntos (que llamaremos *topología* y cuyos elementos se denominan *abiertos*) satisfaciendo las propiedades que se describen a continuación:

- El conjunto total X y el conjunto vacío son abiertos.
- La unión arbitraria de abiertos es abierta.
- La intersección finita de abiertos es abierta.

Si no hay lugar a confusión escribiremos, como es usual, el conjunto subyacente X para designar el espacio topológico sin necesidad de explicitar la topología. La forma de poder relacionar espacios topológicos es a través de aplicaciones continuas. Intuitivamente, una aplicación continua es aquella en la cual para puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en sus respectivas imágenes. Formalmente una aplicación entre espacios topológicos $f : X \rightarrow Y$ es continua, si $f^{-1}(A)$ es abierto en X para todo abierto A en Y . Un resultado muy útil para comprobar la continuidad de funciones definidas a trozos viene dado por el conocido *lema de continuidad*:

Lema 1.1.1. *Sean A y B subconjuntos cerrados (sus complementarios son abiertos) en un espacio topológico X tales que $A \cup B = X$. Si $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ son aplicaciones continuas tales que*

$f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, entonces la aplicación $h : X \rightarrow Y$, definida como:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

es continua.

Por otro lado, un *homeomorfismo* es una aplicación continua, biyectiva y con inversa continua. Se trata de un proceso de ida y vuelta entre los espacios, que es continuo en las dos direcciones, es decir, sin roturas. Se dice entonces que tales espacios tienen la misma forma, o que son *homeomorfos*. Así, la topología, como disciplina matemática, estudia todas aquellas propiedades de los espacios topológicos que son invariantes por homeomorfismos, esto es, las propiedades cualitativas intrínsecas de los espacios, que son independiente de su posición, tamaño o forma.

Aunque supondremos que el lector está familiarizado con las nociones más básicas de topología general, como bases de entornos, compacidad, conexidad, conexidad por caminos, espacios productos, axiomas de contabilidad y separación, etc. (referimos al lector a [15], [4]), estudiaremos a continuación las herramientas de topología general más importantes para nuestro estudio teórico del próximo capítulo. Dichas herramientas no se han impartido en el grado, por lo que hemos creído conveniente incluirlas en la memoria junto con sus demostraciones más notables.

Comenzamos con los espacios de funciones. Dados dos espacios topológicos X e Y , podemos considerar el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X en Y

$$Y^X = \{f : X \rightarrow Y / f \text{ es continua}\}$$

Sin embargo, este conjunto no posee, en principio, ninguna topología. La topología estándar que se le asocia a este conjunto de funciones es la denominada *topología compacto-abierta*. Dicha topología se genera a partir de una determinada subbase. Dados un conjunto X y \mathcal{S} una colección de subconjuntos de X , recordemos que \mathcal{S} es *subbase* si la unión de todos sus elementos es X . Toda subbase genera automáticamente una topología \mathcal{T} , la cual se define como la formada por todas las uniones de intersecciones finitas de elementos de la subbase.

Definición 1.1.1. Dados X e Y espacios topológicos, definimos en Y^X la topología compacto-abierta como la generada por la subbase cuyos elementos son de la forma:

$$\omega(K, U) = \{f \in Y^X / f(K) \subseteq U\}$$

siendo K compacto en Y y U abierto en X .

Una característica muy importante en los espacios de funciones es que se puede establecer una relación con los espacios producto mediante la denominada *ley exponencial*. Dicha relación se produce a su vez, mediante la aplicación *evaluación*, definida como:

$$e : X \times Y^X \rightarrow Y, (x, f) \mapsto f(x)$$

Previamente es necesario saber bajo qué condiciones esta aplicación es continua. La primera condición trata sobre compacidad local. En este sentido, un espacio es localmente compacto si todo punto admite una base de entornos compactos. Teniendo esta definición clara, podemos demostrar el siguiente lema. Escribiremos \bar{A} para denotar la clausura de un subconjunto A de un espacio topológico.

Lema 1.1.2. *Sea X un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Si K es un compacto que está contenido en un abierto V , entonces existe otro abierto W en X , tal que $K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$ y \overline{W} es compacto.*

Demostración.

Comenzamos probando el caso particular en el que el compacto sea un punto. En efecto, sean $x \in X$ y V entorno abierto de x ; entonces por la definición de bases de entornos, existe K un entorno compacto de x tal que $K \subseteq V$. Al ser K un entorno de x existe un abierto W tal que $x \in W \subseteq K \subseteq V$. Por otro lado, puesto que X es de Hausdorff, tenemos que K es cerrado, y en consecuencia, $\overline{W} \subseteq K$. Como todo subconjunto cerrado dentro de un compacto es compacto concluimos que \overline{W} es compacto.

Veamos ahora el caso general de que K sea un compacto arbitrario. Por el razonamiento anterior, podemos tomar para cada $x \in K$ un abierto W_x con clausura compacta, tal que, $x \in W_x \subseteq \overline{W_x} \subseteq V$. Como los abiertos W_x recubren a K , y K es un compacto, entonces podemos extraer un subrecubrimiento finito, y tomando W como la unión de todos éstos, tenemos un abierto W con clausura compacta, tal que $K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq V$.

□

Proposición 1.1.1. *Si X es un espacio de Hausdorff y localmente compacto, entonces la aplicación evaluación $e : X \times Y^X \rightarrow Y$ es continua.*

Demostración.

Sean $(x_0, f_0) \in X \times Y^X$ y $V \subseteq Y$ un entorno abierto del punto $e(x_0, f_0) = f_0(x_0)$. Por la continuidad de f_0 , $f_0^{-1}(V)$ es un entorno abierto de x_0 y existe K compacto tal que $x_0 \in K \subseteq f_0^{-1}(V)$. Por la proposición anterior, sabemos que existe un entorno abierto W del punto x_0 tal que \overline{W} es compacto y $K \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq f_0^{-1}(V)$. Consideramos el abierto en $X \times Y^X$,

$$U := W \times \omega(\overline{W}, V)$$

Entonces U es un abierto que contiene a (x_0, f_0) y una simple comprobación demuestra que $e(U) \subseteq V$. Esto demuestra la continuidad de la aplicación evaluación en el punto (x_0, f_0) . Como este punto es arbitrario, concluimos la demostración del resultado.

□

Otro resultado técnico que nos hará falta para probar la ley exponencial, es el conocido como *lema del tubo*, que enunciamos a continuación.

Lema 1.1.3. *Sean X e Y espacios topológicos, con Y compacto, y sea $x \in X$. Si W es un abierto en $X \times Y$ con $\{x\} \times Y \subseteq W$, entonces existe un abierto U en X tal que $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq W$.*

Demostración.

Por la definición de topología producto podemos escribir

$$W = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \times V_{\alpha}$$

donde U_{α} y V_{α} son abiertos de X e Y , respectivamente. De la compacidad de $\{x\} \times Y$ (que es homeomorfo a Y) tenemos que un número finito de esos productos $U_{\alpha} \times V_{\alpha}$ sirven para cubrir este conjunto. Supongamos que

$$\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}$$

Tomando $U := \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ concluimos que: $\{x\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i} \subseteq W$.

□

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar la ley exponencial.

Teorema 1.1.1 (Ley exponencial). *Sean X e Y espacios topológicos donde X es un espacio de Hausdorff y localmente compacto. Sea también $f : X \times Z \rightarrow Y$ una aplicación con Z un espacio topológico arbitrario. Entonces:*

$$f : X \times Z \rightarrow Y \text{ es continua} \iff F : Z \rightarrow Y^X \text{ es continua}$$

siendo F la aplicación definida como $F(z)(x) := f(x, z)$ (A esta aplicación F se le denomina adjunta de f).

Demostración.

Supongamos en primer lugar que F es continua. Como $f = e \circ (1_X \times F)$ y $e, 1_X$ y F son funciones continuas concluimos que f es continua. Recíprocamente, supongamos que $f : X \times Z \rightarrow Y$ es continua. Tomamos $z_0 \in Z$ tal que $F(z_0) \in \omega(K, U)$, para algún compacto K y abierto U . Por la continuidad de f y la definición de F , tenemos que $f^{-1}(U)$ es un abierto en $X \times Z$ que contiene a $K \times \{z_0\}$. Luego, $f^{-1}(U) \cap (K \times Z)$ es un abierto, al ser intersección de dos abiertos en $K \times Z$, que contiene a $C \times \{z_0\}$. Usando el lema 1.1.3, tenemos que existe W un entorno de z_0 tal que $K \times W \subseteq f^{-1}(U)$. Es directo comprobar que $F(W) \subseteq \omega(K, U)$, por lo que F es continua en z_0 . Como este punto es arbitrario, concluimos que F es continua.

□

1.2. Partición de la unidad

En esta sección introducimos la noción de *partición de la unidad*, y veremos condiciones suficientes para que un espacio topológico posea tal estructura.

Comenzamos previamente viendo unas definiciones básicas. En primer lugar si X es un espacio topológico y $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación real, entonces se define el *soporte* de ϕ (y lo denotaremos por $sop(\phi)$) como la clausura del conjunto $\{x \in X / \phi(x) \neq 0\}$. Por otro lado, una colección \mathcal{A} de subconjuntos de X se dice que es *localmente finita* en X , si todo punto X tiene un entorno que interseca sólo a un número finito de elementos de \mathcal{A} .

Como ya disponemos de los conceptos previos necesarios podemos definir la noción de *partición de la unidad*:

Definición 1.2.1. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de X . Una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} es una colección $\{\phi_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in J}$ de aplicaciones continuas tal que:

1. $0 \leq \phi_\alpha(x) \leq 1, \forall x \in X$.
2. $sop(\phi_\alpha) \subseteq U_\alpha, \forall \alpha \in J$.
3. La familia $\{sop(\phi_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ es localmente finita.
4. $\sum_{\alpha \in J} \phi_\alpha(x) = 1, \forall x \in X$.

Nota 1.2.1. *Obsérvese que en la definición anterior la suma en la condición 4 está bien definida, ya que por la condición 3, todos los sumandos son nulos salvo un número finito de ellos.*

Un tipo de espacio topológico que juega un papel importante en la existencia de partición de la unidad es el de espacio *paracompacto*, el cual es una generalización de espacio compacto. Para su definición recordamos previamente la noción de *refinamiento*. En efecto, sea X un espacio topológico y \mathcal{A} una colección de subconjuntos de X . Una colección \mathcal{B} de subconjuntos de X se dice que es un refinamiento de \mathcal{A} , si para cada elemento B de \mathcal{B} , existe un elemento A de \mathcal{A} que contiene a B . Si los elementos de \mathcal{B} son abiertos en X , entonces llamamos a \mathcal{B} un refinamiento abierto de \mathcal{A} .

Definición 1.2.2. Diremos que un espacio topológico X es *paracompacto* si para cualquier recubrimiento abierto de X , existe un refinamiento abierto localmente finito que recubre X .

Nota 1.2.2. *Nótese que por definición se deduce que todo espacio compacto es paracompacto. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Por ejemplo, se sabe que todo espacio metrizable es paracompacto (ciertamente, existen espacios metrizable no compactos). Para una demostración de este resultado, véase por ejemplo [15].*

En [15] se puede encontrar la demostración de que todo espacio paracompacto y de Hausdorff es *normal*, es decir, cualquier par de cerrados disjuntos se puede separar por entornos abiertos. En particular, todo espacio metrizable es normal. Una propiedad equivalente de normalidad se encuentra en el enunciado del denominado *lema de Urysohn*. Podríamos hacer un estudio más elaborado sobre este tema, pero su inclusión implicaría extender innecesariamente la memoria. Omitimos su demostración, la cual se puede encontrar en [15].

Lema 1.2.1 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio topológico. Entonces X es normal si y solo si para todo par de cerrados disjuntos A, B , existe una aplicación continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$.*

Nota 1.2.3. *Una definición más fuerte de normalidad es la de normalidad completa. Diremos que un espacio es completamente normal si todo subespacio suyo es normal. En particular, todo espacio completamente normal es normal. Ya que ser metrizable es una propiedad hereditaria, se deduce que todo espacio metrizable es completamente normal. Por otro lado, no es difícil demostrar que un espacio es completamente normal si y sólo si para cada par de subconjuntos $A, B \subseteq X$ tales que $A \cap \bar{B} = \emptyset$ y $\bar{A} \cap B = \emptyset$, existen abiertos disjuntos U, V tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Seguimos nuestro estudio con el siguiente lema, conocido como *lema de encogimiento*:

Lema 1.2.2 (Lema de encogimiento). *Sea X un espacio de Hausdorff y paracompacto. Sea también $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de X . Entonces existe una familia localmente finita $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de subconjuntos abiertos que recubre a X tal que $\bar{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$, para cada $\alpha \in J$.*

Demostración.

Sea \mathcal{A} el recubrimiento de X formado por todos los conjuntos abiertos A tales que \bar{A} está contenido en algún elemento de la colección $\{U_\alpha\}$. Dado que X es paracompacto, podemos encontrar una colección localmente finita \mathcal{B} de abiertos que recubre X y refina a \mathcal{A} . Consideremos $\mathcal{B} = \{B_\beta\}_{\beta \in K}$, que es una familia localmente finita, por la paracompacidad de X . Como \mathcal{B} refina a \mathcal{A} , entonces podemos definir una función $f : K \rightarrow J$, eligiendo para cada $\beta \in K$, un elemento $f(\beta) \in J$, tal que

$$\bar{B}_\beta \subseteq U_{f(\beta)}$$

Entonces, para cada $\alpha \in J$, definimos V_α como la unión de los elementos de la colección:

$$V_\alpha = \{B_\beta : f(\beta) = \alpha\}$$

(Nótese que V_α es vacío si no existe β tal que $f(\beta) = \alpha$).

Para cada elemento B_β de la colección \mathcal{B}_α tenemos, por definición, que $\overline{B_\beta} \subseteq U_\alpha$. Por otro lado como \mathcal{B}_α es localmente finita y cada $\overline{V_\alpha}$ es unión de las clausuras de los elementos de \mathcal{B}_α , tenemos que $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$.

Para acabar la prueba, sólo falta comprobar que la familia $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es localmente finita. En efecto, dado un punto $x \in X$, elegimos un entorno W suyo que interseca a B_α en una cantidad finita de valores de β . Obsérvese que tal entorno existe, pues la familia $\{B_\beta\}_{\beta \in K}$ es localmente finita. Supongamos que los valores de β en los que W interseca a B_β son $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$. Entonces W solo puede intersecar a V_α en aquellos valores de α tales que sean uno de los índices $f(\beta_1), f(\beta_2), \dots, f(\beta_s)$. Concluimos entonces que V_α es una familia localmente finita de conjuntos abiertos que recubre a X tal que $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$, para cada $\alpha \in J$. □

Vemos a continuación el resultado principal de esta sección, el cual establece condiciones suficientes para que en un espacio existan particiones de la unidad.

Teorema 1.2.1. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y paracompacto, y sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un recubrimiento abierto de X . Entonces existe una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.*

Demostración.

Aplicando el lema de encogimiento dos veces, encontramos dos familias localmente finitas de abiertos $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ y $\{V_\alpha\}_{\alpha \in J}$ que recubren X y tales que $\overline{W_\alpha} \subseteq V_\alpha$ y $\overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$, para cada $\alpha \in J$. Dado que X es normal podemos usar el lema de Urysohn. Así para cada $\alpha \in J$ podemos considerar una función continua $\eta_\alpha : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $\eta_\alpha(\overline{W_\alpha}) = \{1\}$ y que $\eta_\alpha(X - V_\alpha) = \{0\}$. De esta última condición es claro que $\text{sop}(\eta_\alpha) \subseteq \overline{V_\alpha} \subseteq U_\alpha$. Además, puesto que la familia $\{\overline{V_\alpha}\}_{\alpha \in J}$ es localmente finita (dado que un conjunto interseca a $\overline{V_\alpha}$ solo si interseca a V_α), se deduce que la familia $\{\text{sop}(\eta_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ también es localmente finita. Por otro lado, como $\{W_\alpha\}_{\alpha \in J}$ recubre a X , entonces para cualquier x , debe existir al menos un $\alpha \in J$ tal que $\eta_\alpha(x) > 0$.

Tiene sentido ahora la suma formalmente infinita:

$$\mu(x) := \sum_{\alpha \in J} \eta_\alpha(x)$$

Dado que cada $x \in X$ tiene un entorno W_x que interseca al conjunto $\text{sop}(\eta_\alpha)$ solo para un número finito de valores de α , podemos interpretar la suma infinita como la suma finita de sus términos no nulos. Se sigue que la restricción de μ a W_x es igual a una suma finita de funciones continuas y, por consiguiente, es continua. Entonces al ser μ continua sobre W_x , para cada $x \in X$, se tiene que μ es continua en X . Como tenemos también que μ es positiva, podemos definir:

$$\phi_\alpha(x) := \frac{\eta_\alpha(x)}{\mu(x)}$$

para obtener la partición de la unidad que deseábamos. □

1.3. Dimensión recubridora

Definiremos en esta sección la noción de dimensión en un espacio topológico arbitrario. Ésta es la denominada *dimensión recubridora* de un espacio, originalmente definida por Lebesgue (para más detalles, véase [6], por ejemplo). Probaremos que la dimensión recubridora de todo subconjunto

compacto de \mathbb{R}^n es a lo sumo n . Finalmente veremos que la dimensión recubridora de una n -variedad topológica es a lo sumo n .

Definición 1.3.1. Sea \mathcal{A} una colección de subconjuntos de un espacio X . Se dice que \mathcal{A} tiene orden $n + 1$ si existe un punto de X que está en $n + 1$ elementos de \mathcal{A} , pero no existe ningún punto que esté en mas de $n + 1$ elementos de \mathcal{A} .

Definición 1.3.2. Se dice que un espacio tiene dimensión recubridora finita si existe un entero positivo n tal que para todo recubrimiento abierto \mathcal{A} de X existe un recubrimiento abierto \mathcal{B} de X que refina a \mathcal{A} y de orden a lo sumo $n + 1$. La dimensión recubridora de X (denotado por $\dim_R(X)$) es el menor de estos valores de n .

Un caso especial es $\dim_R(X) = 0$. Consiste en que para todo recubrimiento abierto existe un refinamiento formado por abiertos disjuntos, tal que todo punto de X está contenida en un único elemento del refinamiento.

Nota 1.3.1. Esta noción de dimensión recubridora coincide hasta cierto punto con la idea intuitiva de dimensión de un espacio. En este sentido, es sencillo comprobar que la dimensión recubridora de un intervalo de la forma $[a, b]$ es 1 (véase [15]). Más generalmente, teniendo en cuenta la fórmula $\dim_R(X \times Y) \leq \dim_R(X) + \dim_R(Y)$ (siempre que X e Y tengan determinadas propiedades topológicas, como por ejemplo ser separable y metrizable, ver [8]) se demuestra que la dimensión recubridora de un producto de intervalos de la forma $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ es menor o igual que n . Veremos que este hecho se puede generalizar para cualquier compacto en \mathbb{R}^n .

El primer resultado que veremos es el siguiente.

Lema 1.3.1. Sea X un espacio topológico con dimensión recubridora finita. Si Y es un subespacio cerrado de X , entonces la dimensión recubridora de Y es finita y $\dim_R(Y) \leq \dim_R(X)$.

Demostración.

Supongamos que $\dim_R(X) = n$ y sea \mathcal{A} un recubrimiento de Y por abiertos de Y . Para cada $A \in \mathcal{A}$ elegimos un A' abierto en X con $A = A' \cap Y$. Se recubre a X con los abiertos A' junto con el abierto $X \setminus Y$. Sea \mathcal{B} un refinamiento de orden a lo sumo $n + 1$. Entonces $\{B \cap Y / B \in \mathcal{B}\}$ es un recubrimiento de Y por abiertos de Y , de orden a lo sumo $n + 1$ y que refina a \mathcal{A} .

Proposición 1.3.1. Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto. Entonces $\dim_R(K) \leq n$.

Demostración.

Por Heine-Borel, K es cerrado y acotado. De este modo, podemos encontrar un n -cubo

$$C = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

tal que $K \subseteq C$. Por la nota 1.3.1 tenemos que $\dim_R(C) \leq n$. Concluimos la demostración haciendo uso del lema anterior. □

Acabamos este apartado probando que la dimensión recubridora de una n -variedad topológica es a lo sumo n . Para ello haremos uso del siguiente lema. Por notación, denotaremos por $\text{Int}(A)$ al interior del conjunto A .

Lema 1.3.2. Sea $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ una colección de cerrados en un espacio X , tal que $A_m \subseteq \text{Int}(A_{m+1})$ y $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = X$. Si A_1 y cada $\overline{(A_{m+1} - A_m)}$ tienen dimensión recubridora a lo sumo n , entonces $\dim_R(X) \leq n$.

Demostración.

Dado \mathcal{U} un recubrimiento abierto de X , sea \mathcal{B}_0 un refinamiento de \mathcal{U} tal que para todo $b \in \mathcal{B}_0$ que interseca a A_i , está en A_{i+1} . Ahora sea \mathcal{B}_1 un refinamiento de \mathcal{B}_0 tal que la restricción a A_1 tenga orden a lo sumo n (consideramos $A_0 = \emptyset$ por convenciencia).

Iterando este proceso, tenemos \mathcal{B}_m un refinamiento de \mathcal{B}_0 tal que la restricción a A_m tenga orden a lo sumo n . Si \mathcal{C} un refinamiento de \mathcal{B}_m tal que la restricción a $\overline{(A_{m+1} - A_m)}$ tiene orden a lo sumo n , definimos \mathcal{B}_{m+1} como sigue:

- Si $U \in \mathcal{B}_m$ y $U \cap A_{m-1} \neq \emptyset$, entonces $U \in \mathcal{B}_{m+1}$.
- Si $V \in \mathcal{C}$ y $V \cap A_m \neq \emptyset$, $V \cap A_{m-1} = \emptyset$, entonces elegimos $V' \in \mathcal{B}_m$, tal que $V \subseteq V'$. Entonces, para cada $U \in \mathcal{B}_m$, definimos U' como la union de todos los $V \in \mathcal{C}$ para los cuales esta definido V' y es igual a U , entonces $U' \in \mathcal{B}_{m+1}$.
- Si $V \in \mathcal{C}$ es tal que $V \cap A_m = \emptyset$, entonces $V \in \mathcal{B}_{m+1}$.

Es fácil comprobar que \mathcal{B}_{m+1} recubre a X y que su restricción a A_{m+1} tiene orden a lo sumo n . Si \mathcal{B} consiste en la colección de todos los abiertos que están en todos los \mathcal{B}_m salvo en un número finito, entonces \mathcal{B} tiene orden a lo sumo n . □

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.3.1. *Si B_1, B_2 son cerrados en X tales que $\dim_R(B_1) \leq n$ y $\dim_R(B_2) \leq n$, entonces $\dim_R(B_1 \cup B_2) \leq n$.*

Demostración.

Sean $A_1 = B_1$ y $A_m = X' = B_1 \cup B_2$, para $m \geq 2$. Aplicando el lema anterior, como $\overline{(A_2 - A_1)} \subseteq A_2$, concluimos que $\dim_R(X') \leq n$. □

Recordemos que una n -variedad topológica es un espacio topológico M de Hausdorff, segundo contable (es decir, que su topología tiene una base contable de abiertos) y tal que todo punto $x \in M$ admite un entorno abierto U homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^n (es decir, M es localmente euclídeo de dimensión n). Este tipo de espacios topológicos tiene propiedades muy buenas. Entre estas propiedades destacan la paracompacidad. Haciendo uso de esta propiedad y de la de ser localmente euclídeo, es sencillo comprobar que en toda variedad topológica podemos encontrar un recubrimiento localmente finito formado por subconjuntos homeomorfos compactos en \mathbb{R}^n (véase por ejemplo [11]). Haremos uso de este hecho.

Teorema 1.3.1. *Si M es una n -variedad topológica, entonces $\dim_R(M) \leq n$.*

Demostración.

Tomemos $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de M localmente finito, tal que cada B_i es homeomorfo a un compacto en \mathbb{R}^n (por tanto compacto). Consideramos $A_1 = B_1$ y en general, dado $A_m = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$, elegimos un entero $p > q$, tal que $A_m \subseteq \text{Int}(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p)$, y hacemos $A_{m+1} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p$. Evidentemente como cada B_i es homeomorfo a un compacto en \mathbb{R}^n , tenemos que $\dim_R(B_i) \leq n$. Por otro lado, por el corolario 1.3.1 anterior, tenemos que $\dim_R(A_m) \leq n$ y haciendo uso del lema 1.3.2 concluimos que $\dim_R(M) \leq n$. □

Nota 1.3.2. *Se puede demostrar que la dimensión recubridora de una n -variedad topológica es exactamente n , si bien para su demostración se requieren técnicas de topología algebraica que no incluimos en esta memoria por cuestiones de extensión.*

1.4. Teoría de homotopía básica

En el estudio de la complejidad topológica, que veremos en el próximo capítulo, muchas de sus propiedades vendrán descritas en términos de teoría de homotopía básica. Es por ello que recordaremos también algunas nociones de homotopía que nos harán falta, tales como homotopía de aplicaciones continuas, espacios homotópicamente equivalentes, contractibilidad, etc. Expondremos estas nociones, así como los correspondientes resultados sin demostración, puesto que se han visto durante el Grado de Matemáticas en la asignatura de Topología II. Si el lector está interesado en alguna demostración, podemos remitirle a, por ejemplo, [15].

Comenzamos con la definición de aplicaciones homótopas. Como es habitual, denotaremos por I al intervalo cerrado unidad $[0, 1]$ con la topología inducida por la usual de \mathbb{R} .

Definición 1.4.1. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas entre espacios topológicos. Se dice que f es homótopa a g ($f \simeq g$) si existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para cada $x \in X$. Usaremos $H : f \simeq g$ para denotar una homotopía entre f y g .

Nota 1.4.1. La noción de homotopía se corresponde con la idea intuitiva de perturbación continua, puesto que una homotopía $H : f \simeq g$ puede verse como una familia uniparamétrica de aplicaciones continuas $\{h_t : X \rightarrow Y\}_{t \in [0,1]}$, que varía con continuidad respecto de la variable "tiempo" t , con $h_0 = f$ y $h_1 = g$.

Fijados X e Y espacios topológicos, la homotopía en el conjunto de las aplicaciones continuas de X a Y verifica las propiedades de una relación de equivalencia. Otra propiedad interesante de la homotopía es que es invariante respecto a la composición, tanto por la izquierda como por la derecha. Este hecho viene dado por la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones homótopas ($f \simeq g$) y sean $h : Y \rightarrow Z$, $k : Z \rightarrow X$. Entonces $h \circ f \simeq h \circ g$ y $f \circ k \simeq g \circ k$.

Un caso especial de homotopía es la de *nulhomotopía*. Diremos que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es nulhomótopa, si es homótopa a una aplicación constante, es decir, existe $y_0 \in Y$ tal que $f \simeq C_{y_0}$, siendo $C_{y_0} : X \rightarrow Y$ la aplicación constante en y_0 .

En teoría de homotopía se trabaja con una noción más débil que la de homeomorfismo, que es la de *tipo de homotopía*. Se comparan espacios topológicos mediante las denominadas *equivalencias de homotopía*. Dada $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua, diremos que f es equivalencia de homotopía si existe una aplicación continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. Nótese que de la definición se deduce que g también es equivalencia de homotopía. A g se le denomina *inverso homotópico* de f (y a f inverso homotópico de g). Inmediatamente se deduce que todo homeomorfismo es equivalencia de homotopía. Sin embargo el recíproco no es cierto: por ejemplo, si $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$ es el disco unidad cerrado, entonces la aplicación constante $f : D^2 \rightarrow \{*\}$ es una equivalencia de homotopía que, claramente, no es homeomorfismo.

Definición 1.4.2. Dados X e Y espacios topológicos, se dirá que X e Y son *homotópicamente equivalentes*, o bien del *mismo tipo de homotopía*, si existe una equivalencia de homotopía entre ellos. Se usará la notación $X \simeq Y$ para denotar que X e Y son homotópicamente equivalentes.

Puesto que las identidades, inversos homotópicos y la composición de equivalencias de homotopía son equivalencias de homotopía, se deduce que la relación "ser homotópicamente equivalente" verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Según lo comentado anteriormente, existen espacios homotópicamente equivalentes que no son homeomorfos. El disco es un caso particular del siguiente tipo de espacios.

Definición 1.4.3. Sea X espacio topológico. Decimos que X es un espacio contráctil si es homotópicamente equivalente a un punto.

Ejemplos clásicos de espacios contráctiles son los espacios euclídeos \mathbb{R}^n , subespacios convexos de \mathbb{R}^n , espacios homotópicamente equivalentes a dichos subespacios convexos, etc.

Una caracterización bastante útil de espacio contráctil viene dada en la siguiente proposición.

Proposición 1.4.2. Un espacio topológico X es contráctil si y solo si la aplicación identidad, $1_X : X \rightarrow X$, es nulhomótopa.

Nota 1.4.2. Más generalmente, en esta sección se puede considerar parejas de espacios en vez de espacios. Una pareja de espacios (X, A) consiste en un espacio topológico X junto con un subespacio $A \subseteq X$. Por otro lado, una aplicación continua entre parejas de espacios $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ no es más que una aplicación continua ordinaria $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Dadas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ continuas, se dice que f es homótopa a g ($f \simeq g$) si existe una aplicación continua de parejas

$$H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. Es sencillo comprobar que esta homotopía es una relación de equivalencia compatible con la composición. De forma natural, se puede definir equivalencias de homotopía de parejas de espacios y contractibilidad. Obsérvese también que todo espacio topológico X se puede considerar una pareja de espacios sin más que considerar la identificación de X con (X, \emptyset) . Similarmente para aplicaciones continuas.

Capítulo 2

El anillo graduado de cohomología

En este capítulo introduciremos la cohomología singular, así como sus propiedades más importantes. La diferencia fundamental respecto de la homología singular es que la cohomología singular tiene estructura de anillo graduado mediante el denominado *producto cup*. Esta operación será crucial a la hora de determinar cierta cota inferior con la complejidad topológica. Ello permitirá el cálculo de numerosos ejemplos en espacios en el último capítulo de la memoria.

2.1. Complejos de cadenas y de cocadenas

Comenzamos recordando el concepto de homología en un complejo de cadenas. Un complejo de cadenas (de grupos abelianos) es una colección de $C = \{C_q, \partial_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ indizada por los enteros, tal que C_q es un grupo abeliano, llamado grupo de las q -cadenas, y $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ es un homomorfismo de grupos, llamado *operador borde*, tal que para todo q entero, la composición

$$C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}$$

es el homomorfismo trivial. Si en el complejo de cadenas se verifica que $C_q = 0$ para $q < 0$ entonces es *no negativo*, y usaremos la notación $C = \{C_q, \partial_q\}_{q \geq 0}$. Denominaremos el grupo de los q -ciclos y grupo de los q -bordes a $Z_q(C) := \text{Ker}(\partial_q)$ y $B_q(C) := \text{Im}(\partial_{q+1})$, respectivamente. Obsérvese que de la composición $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ se deduce que $B_q(C) \subseteq Z_q(C)$, por lo que podemos definir el q -grupo de homología de C como el grupo cociente

$$H_q(C) := Z_q(C)/B_q(C)$$

Denotaremos por $H_*(C)$ a la familia $\{H_q(C)\}_{q \in \mathbb{Z}}$. Los elementos de $H_*(C)$ se denominan *clases de homología*, y diremos que los elementos de $H_q(C)$ tienen *grado* q . Si z es un q -ciclo, se suele denotar por $[z]$ a su clase de homología. Cuando dos q -ciclos z_1, z_2 están relacionados, es decir $z_1 - z_2 \in B_q(C)$, se dice que son *homólogos*.

Dados C y C' complejos de cadenas, un homomorfismo de complejos de cadenas $f : C \rightarrow C'$ consiste en una colección de homomorfismos de grupos $f = \{f_q : C_q \rightarrow C'_q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ que es compatible con los operadores borde, es decir, el diagrama siguiente es conmutativo, para todo $q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccc} C_q & \xrightarrow{f_q} & C'_q \\ \partial_q \downarrow & & \downarrow \partial'_q \\ C_{q-1} & \xrightarrow{f_{q-1}} & C'_{q-1} \end{array}$$

Esta conmutatividad permite que f lleve ciclos en ciclos y bordes en bordes. En consecuencia, para cada $q \in \mathbb{Z}$ se induce un homomorfismo de grupos $H_q(f) : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$, definido por $H_q(f)([z]) = [f_q(z)]$.

Dados C y C' complejos de cadenas, diremos que C' es un *subcomplejo* de C si $C'_q \subseteq C_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$, y la inclusión $i : C' \rightarrow C$ es un homomorfismo de complejos de cadenas. Es sencillo comprobar que se induce un *complejo de cadenas cociente* C/C' , definido por $(C/C')_q := C_q/C'_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

La noción dual de complejo de cadenas es la de *complejo de cocadenas*. Un complejo de cocadenas no es más que una colección $C = \{C^q, \delta^q\}_{q \in \mathbb{Z}}$ donde cada C^q es un grupo abeliano (*grupo de q -cocadenas*) y $\delta^q : C^q \rightarrow C^{q+1}$ (*operador coborde*) es un homomorfismo de grupos tal que, para todo $q \in \mathbb{Z}$, la composición

$$C^{q-1} \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^q \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}$$

es el homomorfismo trivial.

Análogamente al caso anterior de complejos de cadenas, diremos que un complejo de cocadenas es *no negativo* si verifica que $C^q = 0$ para todo $q < 0$, y usaremos la notación $C = \{C^q, \delta^q\}_{q \geq 0}$. Denominaremos el grupo de los q -cociclos y grupo de los q -cobordes a $Z^q(C) := \text{Ker}(\delta^q)$ y $B^q(C) := \text{Im}(\delta^{q-1})$, respectivamente. Definimos el q -grupo de cohomología de C como el grupo cociente

$$H^q(C) := Z^q(C)/B^q(C)$$

y denotaremos por $H^*(C)$ a la familia $\{H^q(C)\}_{q \in \mathbb{Z}}$. Los elementos de $H^*(C)$ se denominan *clases de cohomología*, y diremos que los elementos de $H^q(C)$ tienen *grado q* . Si z es un q -cociclo, se denota por $[z]$ a su clase de cohomología.

También de forma análoga, se puede definir homomorfismo de complejos de cocadenas y su cohomología, subcomplejos de cocadenas y complejos de cocadenas cocientes.

Veamos que a cada espacio topológico le podemos asociar cierto complejo de cadenas, así como de cocadenas:

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos el n -símplice estándar como el conjunto:

$$\Delta_n := \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0, \forall i\}$$

Un n -símplice singular de X es una aplicación continua $f : \Delta_n \rightarrow X$. Denotaremos por $\text{Top}(\Delta_n, X)$ al conjunto de todos los n -símplices singulares de X .

Recordemos que el *grupo abeliano libre* generado por un conjunto arbitrario S , denotado por $F(S)$, viene dado por los elementos σ que son sumas formales finitas de la forma

$$\sigma = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r$$

con $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ y $x_i \in S$. Existe una inclusión canónica $i : S \rightarrow F(S)$. Además, dada una aplicación $\phi : S \rightarrow A$, con A grupo abeliano, existe un único homomorfismo de grupos $\tilde{\phi} : F(S) \rightarrow A$ que extiende de forma natural a ϕ .

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\phi} & A \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{\phi} & \\ F(S) & & \end{array}$$

Tal homomorfismo viene dado por

$$\tilde{\phi}(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_r x_r) := \lambda_1 \phi(x_1) + \lambda_2 \phi(x_2) + \cdots + \lambda_r \phi(x_r)$$

En otras palabras, para definir un homomorfismo de grupos de $F(S)$ en A , nos basta con dar una aplicación de S en A . Esta propiedad es fundamental para definir el complejo de cadenas singular de un espacio X .

Definición 2.1.2. El *complejo de cadenas singular* de X se define como el complejo de cadenas no negativo $S_*(X) := \{S_q(X), \partial_q\}_{q \geq 0}$, donde

$$S_q(X) := F(\text{Top}(\Delta_q, X))$$

es el grupo abeliano libre generado por el conjunto de los q -símplices singulares de X . El operador borde $\partial_q : \Delta_q(X) \rightarrow \Delta_{q-1}(X)$ viene dado, para cada $\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)$, por:

$$\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ d_i)$$

siendo d_i el operador i -cara, $d_i : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$, definido como

$$d_i(t_0, t_1, \dots, t_{q-1}) = (t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{q-1})$$

con el 0 ocupando la posición i -ésima, donde $i = 0, 1, 2, \dots, q-1$.

El q -grupo de homología singular de X se define como el q -grupo de homología del complejo de cadenas singular de X

$$H_q(X) := H_q(S_*(X))$$

Por otro lado, dada una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, se puede definir el homomorfismo de complejos de cadenas singular de X , $S_*(f) : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$, como $S_q(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ para cada q -símplice singular $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$. De este modo podemos definir la homología $H_q(f) : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ como la homología de $S_*(f)$.

Más generalmente, si (X, A) es una pareja de espacios, se comprueba fácilmente que $S_*(A)$ es un subcomplejo de $S_*(X)$. Así podemos definir $H_q(X, A) := H_q(S_*(X)/S_*(A))$. Similarmente para aplicaciones continuas de parejas.

Nota 2.1.1. La homología singular es una generalización de la homología simplicial, impartida optativamente en el grado. En este sentido, si K es un complejo simplicial (finito), se puede demostrar que la homología simplicial de K es naturalmente isomorfa a la homología singular de su realización geométrica.

2.2. Cohomología singular y su estructura de anillo graduado

En este trabajo estamos más interesados en la cohomología (con coeficientes) de un espacio topológico. Dado un espacio topológico X y dado un grupo abeliano G , se define el *complejo de cocadenas singular de X con coeficientes en G* , y lo denotaremos por $S^*(X; G)$, como el grupo abeliano formado por todos los homomorfismos de grupos $S_q(X) \rightarrow G$, siendo $S_q(X)$ el grupo de las q -cadenas singulares de X :

$$S^q(X; G) := \text{Hom}(S_q(X), G)$$

Obsérvese que la operación de grupo viene dada por $(\varphi + \psi)(\sigma) := \varphi(\sigma) + \psi(\sigma)$. Por otro lado, el operador coborde $\delta^q : S^q(X; G) \rightarrow S^{q+1}(X; G)$ viene definido como $\delta^q(\varphi) := \varphi \circ \partial_{q+1}$. Se define el q -grupo de cohomología singular de X con coeficientes en G como

$$H^q(X; G) := H^q(S^*(X; G))$$

Dada una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, se define el homomorfismo de complejo de cocadenas $S^*(f) : S^*(Y; G) \rightarrow S^*(X; G)$ por $S^q(f)(\varphi) := \varphi \circ S_q(f)$, para cada $\varphi : S_q(Y) \rightarrow G$ q -cadena singular en Y . Entonces se induce de forma natural la q -cohomología de f con coeficiente en G

$$H^q(f) : H^q(Y; G) \rightarrow H^q(X; G)$$

Obsérvese el cambio en el sentido de las flechas, a diferencia de la homología. Para simplificar la notación, y siempre que no haya lugar a confusión, escribiremos $f^* : H^q(Y; G) \rightarrow H^q(X; G)$ para designar a $H^q(f)$.

Más generalmente, si (X, A) es una pareja de espacios, se comprueba fácilmente que $S^*(A; G)$ es un subcomplejo de $S^*(X; G)$. Así podemos definir $H^q(X, A; G) := H^q(S^*(X; G)/S^*(A; G))$. Similarmente para aplicaciones continuas de parejas.

La cohomología cumple una serie de propiedades importantes. Tales propiedades vienen recogidas en los denominados *Axiomas de Eilenberg-Steenrod*. A continuación exponemos tales propiedades sin demostración, puesto que no entra dentro de los objetivos marcados en esta memoria. Para una demostración, puede consultarse cualquier libro de topología algebraica básico, como por ejemplo, [18], [16] o [5].

Teorema 2.2.1.

1. *Funtorialidad.* Sean $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ y $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ aplicaciones continuas de parejas. Entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$$\begin{array}{ccc} H^q(Z, C; G) & \xrightarrow{(g \circ f)^*} & H^q(X, A; G) \\ & \searrow g^* & \nearrow f^* \\ & H^q(Y, B; G) & \end{array}$$

Si $1_{(X,A)} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ denota la identidad en (X, A) , entonces $1_{(X,A)}^* = 1_{H^q(X,A;G)}$ es el homomorfismo identidad en $H^q(X, A; G)$.

2. *Homotopía.* Sean $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ aplicaciones continuas de parejas. Si $f \simeq g$, entonces $f^* = g^* : H^q(Y, B; G) \rightarrow H^q(X, A; G)$.
3. *Exactitud.* Sea (X, A) una pareja de espacios y sean $i : A \rightarrow X$, $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ las correspondientes inclusiones. Entonces existe una sucesión exacta de grupos abelianos y homomorfismos:

$$\dots \longrightarrow H^q(A; G) \xrightarrow{\Delta} H^{q+1}(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^{q+1}(X; G) \xrightarrow{i^*} H^{q+1}(A; G) \xrightarrow{\Delta} \dots$$

A Δ se le denomina homomorfismo de conexión. Se trata de una transformación natural, es decir, si $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una aplicación continua de parejas arbitraria, entonces el

siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^q(B; G) & \xrightarrow{\Delta} & H^{q+1}(Y, B; G) \\ (f_{1A})^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^q(A; G) & \xrightarrow{\Delta} & H^{q+1}(X, A; G) \end{array}$$

4. *Dimensión.* Sea P un espacio unipuntual. Entonces,

$$H^q(P) = \begin{cases} G, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

5. *Escisión.* Sea (X, A) una pareja de espacios y U un abierto de X tal que $\bar{U} \subseteq \text{Int}(A)$. Entonces la inclusión $i : (X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induce isomorfismos en cohomología

$$i^* : H^q(X, A; G) \xrightarrow{\cong} H^q(X \setminus U, A \setminus U; G)$$

Nota 2.2.1. En topología algebraica, existen numerosas teorías de homología y de cohomología para espacios topológicos. En un intento de unificar todas estas teorías, Samuel Eilenberg y Norman Steenrod recogieron en [2] todas las propiedades que tenían en común, en su conjunto de axiomas. Los ejemplos más notables que reúnen dichas propiedades son la homología singular y cohomología singular.

A continuación veremos que la cohomología de un espacio puede dotarse de una estructura algebraica más rica que la de grupo abeliano. Dicha estructura vendrá determinada por un producto, que denominaremos *producto cup*. A partir de ahora, consideraremos cohomología con coeficientes en un anillo R (las elecciones más comunes suelen ser \mathbb{Z} , \mathbb{Z}_n y \mathbb{Q}).

Antes de la definición del producto cup, necesitamos precisar notación previa. Obsérvese que el n -símplice estándar Δ_n también se puede describir como el conjunto de todos los elementos en \mathbb{R}^{n+1} de la forma:

$$x = t_0 e_0 + t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n$$

dónde $\sum_{i=0}^n t_i = 1$ y $t_i \geq 0$, siendo $e_i = (0, 0, \dots, 1^{(i)}, \dots, 0, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Este conjunto se denomina *envolvente convexa* de los puntos e_0, e_1, \dots, e_n . Estos puntos son los vértices de Δ_n . Así, una forma más cómoda de representar a Δ_n es escribir

$$\Delta_n := [e_0, e_1, \dots, e_n]$$

Obsérvese que, con esta notación, la expresión del operador borde en el complejo de cadenas singular de X , $\partial_q : S_q(X; R) \rightarrow S_{q-1}(X; R)$ viene dada de la siguiente forma alternativa (compárese con la definición 2.1.2):

$$\partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_{[e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_q]}$$

Definición 2.2.1. Sean X un espacio topológico y $\varphi \in C^p(X; R)$, $\psi \in C^q(X; R)$ cocadenas singulares en X de grados p y q respectivamente. El producto cup $\varphi \smile \psi \in C^{p+q}(X; R)$ es la cocadena cuyo valor en un símplice singular $\sigma : \Delta_{p+q} \rightarrow X$ viene dada por la fórmula:

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma_{[e_0, e_1, \dots, e_p]}) \cdot \psi(\sigma_{[e_p, e_{p+1}, \dots, e_{p+q}]})$$

donde en el miembro de la derecha se ha usado el producto del anillo R .

Para ver que este producto cup en cocadenas induce un producto cup en clases de cohomología, haremos uso del siguiente lema. Para simplificar notación, eliminaremos los índices de los operadores borde y coborde correspondientes.

Lema 2.2.1. Si $\varphi \in C^p(X; R), \psi \in C^q(X; R)$, entonces:

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta(\varphi) \smile \psi + (-1)^p \varphi \smile \delta(\psi)$$

Demostración.

Sea $\sigma : \Delta^{p+q+1} \rightarrow X$ un $(p+q+1)$ -símplice singular de X . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} (\delta(\varphi) \smile \psi)(\sigma) &= \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+1}]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_{p+1}, \dots, v_{p+q+1}]}) \\ (-1)^p (\varphi \smile \delta(\psi))(\sigma) &= \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0, \dots, v_p]}) \cdot \psi(\sigma|_{[v_p, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_{p+q+1}]}) \end{aligned}$$

Entonces sumando ambas expresiones, tenemos que el último término de la primera expresión se cancela con el primer término de la segunda expresión. Como sabemos que

$$\partial(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \sigma|_{[v_0, \dots, v_i, \dots, v_{p+q+1}]}$$

entonces los términos que quedan son exactamente $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\partial(\sigma))$, luego el lema queda probado.

□

Como consecuencia inmediata de la fórmula dada en el lema anterior, es inmediato comprobar que el producto cup de dos cociclos es un cociclo y que el producto cup de un cociclo con un coborde (da igual el orden) es también un coborde. De este modo, se induce el producto cup en cohomología

$$\smile : H^p(X; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X; R)$$

Este producto es asociativo y distributivo, puesto que a nivel de cocadenas, el producto cup verifica obviamente estas propiedades. Si el anillo R tiene un elemento identidad entonces existe un elemento identidad para el producto cup: la clase $1 \in H^0(X; R)$ definida por el 0-cociclo que toma el valor 1 en cada 0-símplice singular de X .

Por otro lado, también como consecuencia del lema anterior, existe un producto cup relativo más general:

$$\smile : H^p(X, A; R) \times H^q(X, B; R) \rightarrow H^{p+q}(X, A \cup B; R)$$

cuando A y B son abiertos en X . Para una idea de cómo se induce este producto cup relativo, véase [5, pág. 209].

Definimos a continuación la noción de anillo graduado.

Definición 2.2.2. Un *anillo graduado* consiste en un anillo A junto con una descomposición $A = \bigoplus_{k \geq 0} A_k$ de subgrupos tal que la multiplicación lleva $A_p \times A_q$ a A_{p+q}

$$\cdot : A_p \times A_q \rightarrow A_{p+q}$$

Diremos que A es *conmutativo en el sentido graduado* (o simplemente, *conmutativo*) si

$$a \cdot b = (-1)^{pq} b \cdot a$$

para todo $a \in A_p$ y $b \in A_q$.

Para indicar que un elemento $a \in A$ está en A_p diremos que a tiene grado p y escribiremos $|a| = p$.

Ejemplo 2.2.1. *Entre los anillos graduado más sencillos, podemos considerar los siguientes:*

- (i) *El anillo de polinomios $R[x]$ con coeficientes en R con la graduación, suma y multiplicación obvias.*
- (ii) *El anillo de polinomios truncado $R[x]/(x^{n+1})$ con coeficientes en R , con la graduación clásica de polinomios módulo $n + 1$.*

Una noción que se usará bastante en esta memoria es la de nilpotencia de un anillo.

Definición 2.2.3. *Sea R un anillo (posiblemente graduado). Entonces la nilpotencia (o el índice de nilpotencia) de R , denotado por $\text{nil}(R)$, es el menor n tal que cualquier producto de longitud $n + 1$ es nulo. Equivalentemente, es el mayor n tal que existe un producto de longitud n no nulo.*

Volviendo a la cohomología del espacio, ya que el producto cup es asociativo y distributivo, es inmediato comprobar que

$$H^*(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; R)$$

tiene estructura de anillo graduado. Los elementos de $H^*(X; R)$ son sumas finitas $\sum_i \alpha_i$ con $\alpha_i \in H^i(X; R)$ y el producto de dos tales sumas se define como $(\sum_i \alpha_i)(\sum_i \beta_i) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j$. Similarmente, $H^*(X, A; R)$ es un anillo graduado vía el producto cup relativo. Además si R es conmutativo, se puede comprobar (véase [5, Thm. 3.14]) que estos anillos de cohomología son conmutativos en el sentido graduado. Todo esto queda resumido en el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *$H^*(X; R)$ tiene estructura de anillo graduado, con las operaciones definidas anteriormente. Si R tiene elemento unidad entonces $H^*(X; R)$ es anillo unitario graduado. Además, si R es conmutativo entonces $H^*(X; R)$ es conmutativo en el sentido graduado. Análogamente para el caso relativo.*

Proposición 2.2.1. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Entonces las aplicaciones inducidas $f^* : H^p(X; R) \rightarrow H^p(Y; R)$ satisfacen la fórmula $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$, es decir, son homomorfismo de anillos graduados. Similarmente en el caso relativo.*

Demostración.

Esto es una consecuencia directa de la fórmula $S^*(f)(\varphi \smile \psi) = S^*(f)(\varphi) \smile S^*(f)(\psi)$ a nivel de cocadenas. En efecto,

$$\begin{aligned} (S^*(f)(\varphi) \smile S^*(f)(\psi))(\sigma) &= S^*(f)(\varphi)(\sigma|_{[e_0, \dots, e_p]}) \cdot S^*(f)(\psi)(\sigma|_{[e_p, \dots, e_{p+q}]}) \\ &= \varphi(S^*(f)\sigma|_{[e_0, \dots, e_p]}) \cdot \psi(S^*(f)\sigma|_{[e_p, \dots, e_{p+q}]}) \\ &= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) = S^*(f)(\varphi \smile \psi)(\sigma) \end{aligned}$$

□

Nota 2.2.2. La proposición anterior se puede generalizar fácilmente para pares de espacios. Así dada $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y dados A, A' subconjuntos de X y B, B' subconjuntos de Y , tales que $f(A) \subseteq B$ y $f(A') \subseteq B'$, entonces

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \in H^{p+q}(X, A \cup A'; R)$$

para todo $\alpha \in H^p(Y, B; R)$ y $\beta \in H^q(Y, B'; R)$.

Nota 2.2.3. Otra forma de ver el producto cup, que usaremos en la memoria, es mediante el producto tensorial de grupos abelianos. En este sentido, el producto cup puede verse como un homomorfismo de anillos graduados

$$\smile : H^*(X; R) \otimes H^*(X; R) \rightarrow H^*(X; R), \quad \alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \smile \beta$$

Aquí la graduación en $H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)$ viene dada por

$$[H^*(X; R) \otimes H^*(X; R)]_n = \bigoplus_{p+q=n} H^p(X; R) \otimes H^q(X; R)$$

y la multiplicación por $(\alpha \otimes \beta) \cdot (\alpha' \otimes \beta') = (-1)^{|\alpha'| |\beta|} (\alpha \smile \alpha') \otimes (\beta \smile \beta')$.

Capítulo 3

Complejidad topológica

Este es el capítulo central de la memoria y es donde se analizará en profundidad un invariante numérico homotópico denominado *complejidad topológica*. Como se mencionó en la introducción, dicho invariante está relacionado con el problema de planificador de movimientos en robótica. Comenzaremos hablando de los espacios de configuraciones, los cuales son espacios topológicos que modelan a los sistemas mecánicos. Para tomar ciertas ideas intuitivas veremos distintos ejemplos de espacios de configuraciones. A continuación describimos el problema de planificador de movimientos en sí y veremos que si consideramos continuidad, no es posible dar con una solución global en la mayoría de los casos. Una forma de medir la dificultad de este problema la proporciona la complejidad topológica, la cual hace uso de planificadores locales y continuos de movimientos. Después de dar con la definición precisa, veremos sus propiedades más importantes, entre las que destacan el ser un invariante numérico homotópico. También daremos importantes relaciones con otros invariantes numéricos de diferente naturaleza, como son la categoría de Lusternik-Schnirelmann, la categoría seccional y la dimensión recubridora. Finalizamos el capítulo viendo una desigualdad crucial que nos proporciona el índice de nilpotencia de los divisores de cero del producto cup en cohomología. Esta desigualdad nos permitirá hacer diversos cálculos en el último capítulo.

3.1. Espacios de configuraciones

Un *sistema mecánico* es un conjunto constituido fundamentalmente por componentes, dispositivos o elementos que tienen como función específica transformar o transmitir el movimiento desde las fuentes que lo generan, al transformar distintos tipos de energía. Se caracteriza por presentar elementos o piezas sólidos, con el objeto de realizar movimientos por acción o efecto de una fuerza. En ocasiones, estos sistemas pueden asociarse con sistemas eléctricos y producir movimiento a partir de un motor accionado por la energía eléctrica. En general la mayor cantidad de sistemas mecánicos usados actualmente son propulsados por motores de combustión interna. En los sistemas mecánicos, se utilizan distintos elementos relacionados para transmitir un movimiento.

En mecánica clásica, el *espacio de configuraciones* asociado a un sistema mecánico consiste en el conjunto de todas las posibles posiciones instantáneas, o estados, de dicho sistema. Generalmente, un estado del sistema mecánico queda perfectamente determinado por un número finito de parámetros reales. En este sentido, el espacio de configuraciones puede dotarse de estructura de espacio topológico. Es más, se le puede dotar de una estructura adicional de n -variedad diferenciable, siendo n el número de grados de libertad. No obstante, para nuestro estudio de la complejidad topológica, nos centraremos simplemente en la parte topológica.

Así pues, para nosotros, el espacio de configuraciones consistirá simplemente en un modelo topológico del sistema mecánico. Conociendo el espacio de configuraciones de un determinado sistema mecánico, podemos olvidarnos del sistema y estudiar sólo la topología y algunas otras propiedades.

A continuación veremos algunos ejemplos que ilustran esta idea.

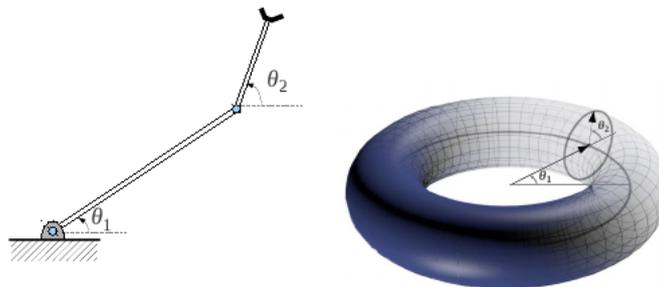
Ejemplo 3.1.1. *Comenzamos con el llamado problema del pianista. Este problema fue estudiado por los matemáticos Schwartz and Sharir a finales del siglo XX. En este problema, se considera un pianista en una habitación (llamemos H a el área que ocupa la habitación) que desea mover su piano desde un punto inicial A a un punto final B . Suponemos que el piano a mover carece de masa. El problema surge debido a los diversos obstáculos (supongamos que existen m obstáculos) que están presentes en la habitación. Denotemos por $\{O_n\}_{n=1}^m$ los m obstáculos presentes en la habitación. Entonces su espacio de configuraciones asociado al piano esta determinado por*

$$X = H \setminus \bigcup_{n=1}^m O_n$$



Introducimos otro ejemplo, el brazo robótico.

Ejemplo 3.1.2. *Consideramos un brazo robótico formado por n barras A_1, A_2, \dots, A_n tal que A_i y A_{i+1} están conectadas por codos flexibles. Supongamos que el punto inicial de A_1 está fijado y que se permiten autointersecciones. En el caso plano, una configuración del brazo está determinada por n ángulos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ donde θ_i es el ángulo entre la barra A_i y el eje OX .*



Así, en el caso plano, el espacio de configuraciones del brazo robótico (si no hay obstáculos presentes) es el toro n -dimensional

$$X = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$$

Análogamente, el espacio de configuraciones de un brazo robótico en el espacio 3-dimensional es el producto de n copias de la 2-esfera S^2

$$X = S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2$$

Existe también el caso mixto en el que en un mismo brazo robótico existan barras que se muevan en el plano y otras en el espacio. En este caso, el espacio de configuraciones estaría formado por el producto de un producto de circunferencias con un producto de esferas.

Ejemplo 3.1.3. Se considera un dron que se mueve en el espacio y que puede rotar sobre sí mismo. Dicho dron posee la peculiaridad de que estando en un mismo punto del espacio, puede tener distintos estados, dependiendo de la rotación del dron.



Así el espacio de configuraciones asociado a un dron de este tipo viene dado por

$$X = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$$

donde las coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ determinan la posición del dron en el espacio y las coordenadas $(\alpha, \beta, \gamma) \in SO(3)$ corresponden con la orientación del dron. Aquí $SO(3)$ denota al grupo especial ortogonal de dimensión 3 (grupo de rotaciones en el espacio) y viene determinado por el conjunto de matrices cuadradas reales ortogonales de orden 3 y con determinante igual a la unidad, es decir,

$$SO(3) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / A^{-1} = A^T, |A| = 1\}$$

Es conocido que $SO(3)$ es homeomorfo (incluso difeomorfo) al espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^3$ (recordaremos la definición general de estos espacios más adelante).

Concluimos esta sección con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.4. Consideremos una barra que se mueve libremente por el espacio, pero su punto medio está fijo. Así, para cada posición de la barra, tendríamos un estado diferente, con lo que podríamos pensar inicialmente que el espacio de configuraciones asociado es la esfera S^2 . Pero si fijamos un estado A de la barra y lo giramos 180 grados, no varía el estado al no poder distinguir sus extremos. Luego los posibles estados son invariantes con respecto a rotaciones de 180 grados. Así, podemos establecer una relación de equivalencia ' \sim ', en la esfera S^2 , dada por

$$x \sim y \Leftrightarrow y = \pm x$$

para $x, y \in S^2$. Concluimos que el espacio de configuraciones asociado a este sistema mecánico es el plano proyectivo real

$$X = \mathbb{R}P^2$$

3.2. El problema del planificador de movimientos

Sea X el espacio de configuraciones asociado a un sistema mecánico S . Un *planificador de movimientos* del sistema S se puede describir de forma algorítmica. Consiste en diseñar un programa que tenga por entrada un par ordenado de estados del sistema (A, B) , y que tenga por salida un movimiento continuo desde el estado de origen A hasta el estado final B . En términos del espacio de configuraciones X del sistema, este algoritmo está descrito como:

- **Input:** un par ordenado de puntos $(x, y) \in X \times X$ (correspondientes a los estados inicial y final)
- **Output:** un camino $\alpha : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$ (correspondiente al movimiento desde el estado inicial hasta el final)

A partir de ahora supondremos que el espacio X es conexo por caminos, es decir, para cualquier par de puntos en X existe un camino que los une. Esta condición no es muy restrictiva. Si el espacio de configuraciones X no fuera conexo por caminos, el planificador de movimientos debería decidir primero si las posiciones x e y pertenecen a la misma componente conexa por caminos de X .

Otra forma de ver el planificador de movimientos es la siguiente. Consideremos X^I el conjunto de todos los caminos en X con la topología compacto-abierto. Podemos considerar la aplicación

$$\pi : X^I \rightarrow X \times X$$

definida por $\pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$. Obsérvese que esta aplicación es continua (ver proposición 1.1.1). Entonces el planificador de movimientos consiste exactamente en encontrar una *sección* de π , es decir, una aplicación $s : X \times X \rightarrow X^I$ tal que $\pi \circ s = 1$. Esta sección no tiene por que ser necesariamente continua. Sin embargo, la continuidad es muy importante, puesto que esta condición aseguraría a que pequeñas perturbaciones de los estados inicial y final, daría lugar a pequeñas perturbaciones en los correspondientes caminos generados por $s : X \times X \rightarrow X^I$. En otras palabras, la continuidad proporcionaría estabilidad en el algoritmo.



Desafortunadamente, como establece el siguiente teorema, la existencia de planificadores de movimientos continuos se reduce a situaciones muy simples y restrictivas.

Teorema 3.2.1. *Existe $s : X \times X \rightarrow X^I$ planificador de movimientos continuo, si y sólo si, X es contráctil.*

Demostración.

Si X es contráctil, entonces por la proposición 1.4.2, podemos considerar una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$ para algún $x_0 \in X$ fijo. Entonces, para cada $x \in X$, $H(x, -)$ es un camino de x a x_0 . Definimos una aplicación s , como sigue:

$$s(x, y)(t) = \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ H(y, 2 - 2t), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Aplicando la ley exponencial (Teorema 1.1.1), tenemos que s es continua. Recíprocamente, supongamos que existe $s : X \times X \rightarrow X^I$ un planificador de movimientos continuo. Fijado un punto $x_0 \in X$, definimos $H : X \times I \rightarrow X$ por

$$H(x, t) = s(x, x_0)(t)$$

Obsérvese que H es continua porque puede verse como la composición de las siguientes aplicaciones continuas.

$$X \times I \xrightarrow{j} X \times X \times I \xrightarrow{s \times 1_I} X^I \times I \xrightarrow{e} X$$

Donde $j : X \times I \rightarrow X \times X \times I$ es la aplicación continua definida como $j(x, t) = (x, x_0, t)$ y e es la aplicación evaluación, que es continua por la proposición 1.1.1. Claramente, $H(x, 0) = s(x, x_0)(0) = x$ y $H(x, 1) = s(x, x_0)(1) = x_0$. En consecuencia X es contráctil.

□

A la vista del anterior teorema, y ya que la mayoría de los espacios de configuraciones no son contráctiles, en general no es posible encontrar un planificador continuo. En el año 2003 el matemático ruso M. Farber introdujo en [3] la noción de complejidad topológica como una medida de la discontinuidad de cualquier planificador de movimientos. La idea es considerar subespacios abiertos que recubran a $X \times X$ y en cada uno de los cuales haya un planificador de movimientos continuo *local*. Una *sección continua local* de π sobre un subconjunto $A \subseteq X \times X$, consiste en una aplicación $s_A : A \rightarrow X^I$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & X \times X \\ & \searrow s_A & \nearrow \pi \\ & & X^I \end{array}$$

es decir, $s_A(x, y)(0) = x$ y $s_A(x, y)(1) = y$ para todo $(x, y) \in A$. Entenderemos que s_A es un planificador de movimientos local continuo.

A continuación presentamos la noción central de este trabajo, la de complejidad topológica. Intuitivamente, la complejidad topológica nos indica el número mínimo de algoritmos locales que necesita un programador para resolver un determinado problema de planificador de movimientos.

Consideraremos espacios topológicos en abstracto, dejando atrás la motivación inicial en robótica.

Definición 3.2.1. Sea X espacio topológico conexo por caminos. La *complejidad topológica* de X , denotada por $TC(X)$, es el menor entero n no negativo tal que $X \times X$ admite un recubrimiento formado por $n + 1$ abiertos

$$X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_n$$

y en cada uno de los cuales existe una sección local continua de $\pi : X^I \rightarrow X \times X$. Si no existe tal n , estableceremos $TC(X) = \infty$.

Nota 3.2.1. A partir de ahora, cada vez que consideremos secciones locales s_i de π , daremos por sentado que son continuas.

Nota 3.2.2. En la definición original de Farber se consideran recubrimientos por n abiertos, en lugar de $n + 1$. De este modo, existe un salto de una unidad con nuestra versión. Hemos tomado esta opción básicamente porque las fórmulas matemáticas quedan mejor presentadas, y además es la que usa la comunidad matemática actualmente.

3.3. Estudio de la complejidad topológica

A partir de ahora nos centraremos en hacer un estudio de la complejidad topológica desde el punto de vista de la topología algebraica. El primer resultado que presentamos viene dado por una caracterización de contractibilidad.

Proposición 3.3.1. *Sea X espacio topológico conexo por caminos. Entonces:*

$$X \text{ es contráctil, si y solo si, } TC(X) = 0$$

Demostración.

Es simple consecuencia del teorema 3.2.1. Nótese que una sección local continua sobre todo $X \times X$ es una sección global. □

Teorema 3.3.1. *La complejidad topológica es un invariante homotópico, es decir, si X e Y son espacios homotópicamente equivalentes, entonces $TC(X) = TC(Y)$*

Demostración.

Sea $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia de homotopía con inverso homotópico $g : Y \rightarrow X$. Si consideramos una homotopía $H : 1_Y \simeq f \circ g$, veamos en primer lugar que $TC(Y) \leq TC(X)$. Claramente, si $TC(X) = \infty$, ya acabaríamos. Supongamos ahora que $TC(X) = n$ y consideremos un recubrimiento abierto $X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$, donde en cada U_i existe $s_i : U_i \rightarrow X^I$ sección local continua de π para $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Consideramos, para cada i , la antimagen $V_i := (g \times g)^{-1}(U_i)$ vía la aplicación continua $g \times g : Y \times Y \rightarrow X \times X$. Evidentemente, V_i es abierto por la continuidad de $g \times g$. Además, estos abiertos recubren a $Y \times Y$, puesto que

$$Y \times Y = (g \times g)^{-1}(X \times X) = (g \times g)^{-1} \left(\bigcup_{i=0}^n U_i \right) = \bigcup_{i=0}^n (g \times g)^{-1}(U_i) = \bigcup_{i=0}^n V_i$$

Definimos entonces la aplicación $\sigma_i : V_i \rightarrow Y^I$ como sigue:

$$\sigma_i(x, y)(t) = \begin{cases} H(x, 3t), & 0 \leq t \leq 1/3 \\ f(s_i(g(x), g(y)))(3t - 1) & 1/3 \leq t \leq 2/3 \\ H(y, 3(1 - t)) & 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Haciendo uso del lema de continuidad (lema 1.1.1) y de la ley exponencial (teorema 1.1.1), se demuestra fácilmente que σ_i es continua. Además, por construcción, $\sigma_i(x, y)(0) = H(x, 0) = x$ y $\sigma_i(x, y)(1) = H(y, 0) = y$. Concluimos que $TC(Y) \leq n = TC(X)$. La desigualdad $TC(X) \leq TC(Y)$ se hace de manera análoga. □

Nota 3.3.1. *Hacemos notar que la complejidad topológica no caracteriza el tipo de homotopía de los espacios topológicos. Por ejemplo, en el próximo capítulo veremos que la complejidad topológica de la 2-esfera y del toro coinciden. Sin embargo, como sabemos, estos espacios no son homotópicamente equivalentes (el grupo fundamental de la esfera es trivial, mientras que el del toro no lo es).*

A continuación veremos una generalización de la complejidad topológica. Dicha generalización viene dada por la categoría seccional (o género de Schwarz) de una fibración. La categoría seccional fue ampliamente estudiada por A.S. Schwarz en [17].

Comenzamos viendo la definición de fibración. Diremos que una aplicación continua $p : E \rightarrow B$ es *fibración*, si para cualquier espacio topológico X y aplicaciones continuas $f : X \rightarrow E$ y $F : X \times I \rightarrow B$ tales que $F(x, 0) = p(f(x))$, para todo $x \in X$, existe una aplicación continua $G : X \times I \rightarrow E$, tal que $p \circ G = F$ y $G(x, 0) = f(x)$, para todo $x \in X$. Esta propiedad está determinada por el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow G & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

donde i_0 está definida como $i_0(x) = (x, 0)$.

Como ejemplos sencillos de fibraciones tenemos, por un lado, la aplicación constante sobre un espacio unipuntual

$$X \rightarrow *$$

y por otro, las proyecciones canónicas

$$p_1 : X \times Y \rightarrow X$$

Estamos especialmente interesados en el siguiente ejemplo. Recordemos que $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ viene definida como $\pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$.

Proposición 3.3.2. *La aplicación $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ es una fibración.*

Demostración.

Sea Z un espacio topológico y consideremos el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow \pi \\ Z \times I & \xrightarrow{F=(F_0, F_1)} & X \times X \end{array}$$

Entonces tenemos que ver existe una aplicación continua $G : Z \times I \rightarrow X^I$ tal que $G \circ i_0 = f$ y $\pi \circ G = F$. En efecto, consideremos en primer lugar el conjunto: $A = (I \times \{0, 1\}) \cup (\{0\} \times I)$. Entonces podemos encontrar un homeomorfismo

$$r : A \times I \rightarrow I \times I$$

verificando que $r(t, s, 0) = (t, s)$, para todo $(t, s) \in A$.

Definimos ahora el homeomorfismo $g : Z \times A \times I \rightarrow Z \times I \times I$ por $g = 1_Z \times r$. Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (Z \times A) & & \\ i_0 \downarrow & \searrow & \\ (Z \times A) \times I & \xrightarrow{g} & Z \times I \times I \end{array}$$

Construimos ahora la aplicación $H : Z \times A \rightarrow X$ como:

$$H(z, t, s) = \begin{cases} F_0(z, t), & s = 0 \\ F_1(z, t), & s = 1 \\ \tilde{f}(z, s) := f(z)(s), & t = 0 \end{cases}$$

La cual es continua por la ley exponencial y el lema de continuidad (teorema 1.1.1 y lema 1.1.1, respectivamente). Además, por la construcción de H , tenemos que $\pi(f(z)) = (f(z)(0), f(z)(1)) = (\tilde{f}(z, 0), \tilde{f}(z, 1)) = (H(z, 0, 0), H(z, 0, 1)) = (F_0(z, 0), F_1(z, 0)) = F(z, 0) = F(i_0(z)) = F \circ i_0$, luego $\pi \circ f = F \circ i_0$.

Para terminar, definimos la aplicación $G : Z \times I \times I \rightarrow X$ por $G := H \circ p_1 \circ g^{-1}$, siendo $p_1 : Z \times A \times I \rightarrow Z \times A$, la proyección canónica. Notemos que $g^{-1}(z, t, s) = (z, t, s, 0)$. Aplicando la ley exponencial, tenemos la aplicación adjunta de G :

$$\tilde{G} : Z \times I \rightarrow X^I$$

definida como $\tilde{G}(z, t)(s) = G(z, t, s)$. Entonces \tilde{G} es la aplicación que estábamos buscando. □

A continuación introducimos la noción de categoría seccional.

Definición 3.3.1. La *categoría seccional* de una fibración $p : E \rightarrow B$ (denotado por $\text{secat}(p)$) es el menor entero no negativo n tal que B admite un recubrimiento $B = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$ de abiertos, en cada uno de los cuales existe una sección local de p

$$\begin{array}{ccc} U_i & \hookrightarrow & B \\ s_i \downarrow & \nearrow p & \\ E & & \end{array}$$

Es decir, $p \circ s_i(x) = x$, para todo $x \in U_i$. Si no existe tal entero, diremos que $\text{secat}(p) = \infty$

Nota 3.3.2. Obsérvese que, ciertamente, la categoría seccional es una generalización de la complejidad topológica, pues para cualquier espacio topológico X se tiene que

$$TC(X) = \text{secat}(\pi)$$

Una propiedad de gran importancia de las fibraciones es que sus secciones coinciden con sus secciones homotópicas. Este resultado se comprueba por la siguiente proposición.

Proposición 3.3.3. Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración y sean $f : X \rightarrow E$, $u : X \rightarrow B$ aplicaciones continuas tales que $p \circ f \simeq u$. Entonces existe $f' \simeq f$ tal que $p \circ f' = u$.

Demostración.

Sea $F : X \times I \rightarrow B$ tal que $F : p \circ f \simeq u$, entonces tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ X \times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

Como p es una fibración, existe $\tilde{F} : X \times I \rightarrow E$ continua tal que $\tilde{F} \circ i_0 = f$ y $p \circ \tilde{F} = F$. Definimos $f' : X \rightarrow E$ por $f'(x) = \tilde{F}(x, 1)$. Entonces tenemos que $\tilde{F}(x, 0) = f(x)$ y $\tilde{F}(x, 1) = f'(x)$, es decir, $\tilde{F} : f \simeq f'$. Además, para todo $x \in X$ tenemos que, $p \circ f'(x) = p \circ \tilde{F}(x, 1) = F(x, 1) = u(x)$. Concluimos que $p \circ f' = u$.

□

Como consecuencia inmediata de este lema, si $u = 1_B$ es la identidad en B , es equivalente que p tenga una sección a que tenga una sección homotópica. Similarmente para u una inclusión $U \hookrightarrow B$ y secciones locales.

Corolario 3.3.1. *Sea U un abierto en $X \times X$. Entonces U tiene una sección local de π si y sólo si, U tiene una sección homotópica local de π .*

La anterior proposición también nos permite extender la definición de categoría seccional a cualquier aplicación continua $f : E \rightarrow B$.

Definición 3.3.2. Dada $f : E \rightarrow B$ una aplicación continua, se define $\text{secat}(f)$ como el menor n tal que B admite un recubrimiento formado por $n+1$ abiertos, en cada uno de los cuales existe una sección local homotópica de f . Es decir, los triángulos siguientes son conmutativo salvo homotopía

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{c} & B \\ s_i \downarrow & \nearrow f & \\ E & & \end{array}$$

Proposición 3.3.4. *Sea el siguiente diagrama conmutativo salvo homotopía*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow[\simeq]{\varphi} & E' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & B & \end{array}$$

donde φ es una equivalencia de homotopía. Entonces $\text{secat}(f) = \text{secat}(f')$.

Demostración. Si U es un abierto en B con una sección local homotópica $s : U \rightarrow E$ de f , entonces, es sencillo comprobar que la composición $\varphi \circ s : U \rightarrow E'$ es una sección homotópica local de f' . Usando este argumento con recubrimientos, se tiene que

$$\text{secat}(f') \leq \text{secat}(f)$$

Para la otra desigualdad se considera el triángulo homotópicamente conmutativo $f \circ \psi \simeq f'$, siendo $\psi : E' \rightarrow E$ un inverso homotópico de φ .

Corolario 3.3.2. *Sea $\Delta : X \rightarrow X \times X$ la aplicación diagonal en X ($x \mapsto (x, x)$). Entonces*

$$TC(X) = \text{secat}(\Delta)$$

Demostración. La aplicación $C : X \rightarrow X^I$ definida por $C(x) := C_x$, el camino constante en x , es una equivalencia de homotopía. En efecto, considerando la aplicación evaluación en 0, $ev_0 : X^I \rightarrow X$, se tiene que $ev_0 \circ C = 1_X$ y $H(\alpha, t)(s) = \alpha((1-t)s)$ define una homotopía $H : ev_0 \simeq 1_{X^I}$. Además, el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow[\simeq]{C} & X^I \\ \Delta \searrow & & \swarrow \pi \\ & X \times X & \end{array}$$

Entonces tenemos que $\text{secat}(\Delta) = \text{secat}(\pi) = \text{TC}(X)$.

□

Un invariante numérico homotópico íntimamente relacionado con la complejidad topológica es la *categoría de Lusternik-Schnirelmann*. Dicho invariante fue originalmente introducido en 1934 (ver [12]) por los matemáticos rusos L. Lusternik y L. Schnirelmann para variedades diferenciables. Para una variedad diferenciable M , su categoría $\text{cat}(M)$, proporciona una cota inferior del número de puntos críticos de cualquier función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Más tarde, la definición de categoría fue evolucionando hasta poder definirse a cualquier espacio topológico, teniendo profundas relaciones con la teoría de homotopía. En esta memoria veremos que, además, está íntimamente relacionada con la complejidad topológica.

Un subespacio $A \subseteq X$ diremos que es *categorico* si la inclusión $A \hookrightarrow X$ es nulhomótopa, es decir, existe una homotopía $H : A \times I \rightarrow X$ tal que $H(a, 0) = a$ y $H(a, 1) = x_0$, para todo $a \in A$, siendo x_0 un punto de X .

Definición 3.3.3. La categoría de Lusternik-Schnirelmann de X , denotado por $\text{cat}(X)$, se define como el menor entero n tal que X se puede recubrir por $n + 1$ abiertos categoricos. Si no existe tal entero, se dice que $\text{cat}(X) = \infty$.

Nota 3.3.3. Para simplificar nomenclatura a la categoría de Lusternik-Schnirelmann, lo llamaremos categoría LS, o simplemente categoría.

La categoría LS tiene unas propiedades que nos dan bastantes similitudes con la complejidad topológica. En esta proposición veremos las más relevantes:

Proposición 3.3.5.

- (i) $\text{cat}(X) = 0$ si y sólo si X es contráctil.
- (ii) Si $f : X \rightarrow Y$ es equivalencia de homotopía, entonces $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$.
- (iii) Si $X = A \cup B$, con A y B abiertos en X , entonces $\text{cat}(X) \leq \text{cat}(A) + \text{cat}(B) + 1$.

Demostración.

- (i) Es inmediato puesto que la igualdad $\text{cat}(X) = 0$ es equivalente a decir que $1_X : X \rightarrow X$ es nulhomótopa. Pero esto es equivalente a decir que X es contráctil (véase la proposición 1.4.2).
- (ii) Supongamos que $g : Y \rightarrow X$ es un inverso homotópico de f . Si consideramos una homotopía $F : 1_Y \simeq f \circ g$, veamos en primer lugar que $\text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X)$. Claramente si $\text{cat}(X) = \infty$ ya estaría. Supongamos entonces que $\text{cat}(X) = n$, y sea $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ un recubrimiento por abiertos categoricos. Si definimos $V_i = g^{-1}(U_i)$, para $i = 0, 1, 2, \dots, n$ entonces

$$\bigcup_{i=0}^n V_i = \bigcup_{i=0}^n g^{-1}(U_i) = g^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^n U_i\right) = g^{-1}(X) = Y$$

Es decir, $\{V_i\}_{i=0}^n$ es un recubrimiento abierto de Y . Obsérvese que por continuidad, cada V_i es abierto en Y . Falta por comprobar que son categoricos. Veamos en general, que si U

es categórico en X , entonces $V := g^{-1}(U)$ es categórico en Y . En efecto, supongamos una homotopía $H : U \times I \rightarrow X$, con $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$, para cierto punto $x_0 \in X$. Definimos $G : V \times I \rightarrow Y$ por

$$G(y, t) := \begin{cases} F(y, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ (f \circ H)(g(y), 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

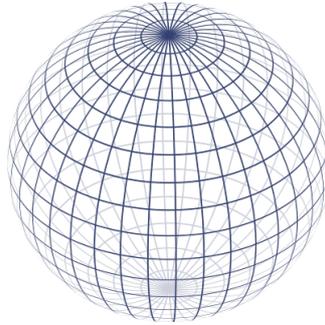
Obsérvese que es continua por el lema de continuidad (véase lema 1.1.1). Claramente, G es una nulhomotopía, haciendo V categórico en Y . Esto concluye la demostración $\text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X)$. La otra desigualdad se hace de forma análoga.

- (iii) Trivialmente, si $\text{cat}(A) = \infty$ o $\text{cat}(B) = \infty$ acabaríamos. Supongamos entonces que $\text{cat}(A) = n$ y que $\text{cat}(B) = m$, y sean $A = \bigcup_{i=0}^n U_i$ y $B = \bigcup_{j=0}^m V_j$ sus respectivos recubrimientos por abiertos categóricos. Como A y B son abiertos, entonces los abiertos relativos U_i y V_j son abiertos en X . Por otro lado, como A y B son subespacios de X , se tiene trivialmente que U_i y V_j son categóricos en X , para cada i y para cada j (obsérvese que simplemente hay que componer las nulhomotopías con las inclusiones en X). Se concluye el resultado teniendo en cuenta la igualdad $X = A \cup B = (U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n) \cup (V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_m)$.

□

Ejemplo 3.3.1. Como consecuencia inmediata de esta proposición, podemos calcular la categoría de cualquier esfera

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=0}^n x_i^2 = 1\}$$



En efecto, en la esfera podemos considerar el recubrimiento abierto $S^n = U \cup V$, donde $U = S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, 1)\}$ y $V = S^n \setminus \{(0, 0, \dots, 0, -1)\}$. Es sabido que la n -esfera menos un punto es homeomorfa a \mathbb{R}^n mediante la proyección estereográfica. Así, tanto U como V son espacios contráctiles y, en particular, son abiertos categóricos en S^n . Esto demuestra que $\text{cat}(S^n) \leq 1$. Como también es conocido que S^n no es contráctil, concluimos, por el apartado (i) de la proposición anterior que $\text{cat}(S^n) = 1$.

Continuando con las propiedades de la categoría, veremos a continuación que se trata de una cota inferior de la complejidad topológica:

Teorema 3.3.2. Sea X un espacio topológico. Entonces:

$$\text{cat}(X) \leq TC(X)$$

Demostración.

Si $\text{TC}(X) = \infty$ acabaríamos de forma trivial. Supongamos que $\text{TC}(X) = m$ y consideremos $X \times X = \bigcup_{i=0}^m U_i$, donde cada U_i es abierto en $X \times X$, junto con una sección local $s_i : U \rightarrow X^I$

$$\begin{array}{ccc} U_i & \hookrightarrow & X \times X \\ s_i \downarrow & \nearrow \pi & \\ X^I & & \end{array}$$

Fijado un punto $x_0 \in X$, para cada $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ definimos

$$V_i := \{x \in X : (x_0, x) \in U_i\}$$

Como V_i es la antimagen $V_i = \varphi^{-1}(U_i)$ vía la aplicación continua $\varphi : X \rightarrow X \times X$ definida como $\varphi(x) := (x_0, x)$, se tiene que V_i es abierto en X . Además, claramente $\bigcup_{i=0}^m V_i = X$. Falta comprobar que cada V_i es categórico en X . En efecto, definimos $H_i : V_i \times I \rightarrow X$ definida como $H_i(x, t) := s_i(x_0, x)(t)$, que es continua por la ley exponencial (ver teorema 1.1.1). Entonces tenemos que $H_i(x, 0) = s_i(x_0, x)(0) = x_0$ y que $H_i(x, 1) = s_i(x_0, x)(1) = x$, por lo que V_i es categórico en X .

□

Otra propiedad importante de la categoría es que, al igual que la complejidad topológica, resulta ser un caso particular de la categoría seccional. Para ver este hecho necesitamos el siguiente lema, que establece que un subespacio categórico se puede deformar a un punto *arbitrario* del espacio, siempre que éste sea conexo por caminos.

Lema 3.3.1. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos, y sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario. Si $A \subseteq X$, entonces A es categórico, si y sólo si, $A \hookrightarrow X$ es homótopa a la aplicación constante en x_0 .*

Demostración.

Evidentemente, si la inclusión es homótopa a la aplicación constante en x_0 , entonces A es categórico. Recíprocamente, supongamos que A es categórico mediante una homotopía $H : A \times I \rightarrow X$, tal que $H(a, 0) = a$ y $H(a, 1) = x_0$. Al ser X conexo por caminos, podemos considerar un camino $\alpha : I \rightarrow X$, tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(1) = x_0$. La siguiente aplicación define una homotopía entre la inclusión $A \hookrightarrow X$ y la aplicación constante en x_0 :

$$H'(a, t) = \begin{cases} H(a, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \alpha(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La continuidad de H' se deduce haciendo uso nuevamente del lema de continuidad.

□

Si X es un espacio topológico y distinguimos un punto $x_0 \in X$, podemos definir el *espacio de caminos con origen en x_0* como

$$P(X) := \{\alpha \in X^I / \alpha(0) = x_0\}$$

con la topología inducida por la compacto-abierta en X^I . Un argumento muy similar al hecho en la proposición 3.3.2 demuestra que la aplicación continua $p : P(X) \rightarrow X$ definida por $p(\alpha) := \alpha(1)$ es una fibración. Para la demostración concreta, referimos al lector a, por ejemplo, [16, Pág. 99 , Cor. 8].

Proposición 3.3.6. *Sea X un espacio conexo por caminos con $x_0 \in X$ un punto distinguido. Entonces*

$$\text{cat}(X) = \text{secat}(p)$$

donde $p : P(X) \rightarrow X$ es la fibración de caminos definida anteriormente.

Demostración. Supongamos un abierto U en X , junto con una sección local $s : U \rightarrow P(X)$ de la fibración $p : P(X) \rightarrow X$. Entonces, la ley exponencial demuestra que la aplicación

$$H : U \times I \rightarrow X$$

definida por $H(x, t) := s(x)(t)$ es una aplicación continua. Además, $H(x, 0) = s(x)(0) = x_0$ y $H(x, 1) = s(x)(1) = p(s(x)) = x$ para cada $x \in U$. Esto demuestra que U es categórico en X . Haciendo este argumento con recubrimientos abiertos llegamos a la desigualdad $\text{cat}(X) \leq \text{secat}(p)$. Recíprocamente, sea U un abierto categórico en X . Como X es conexo por caminos, podemos suponer, por el lema 3.3.1 que U se deforma al punto distinguido x_0 , mediante la nulhomotopía $H : U \times I \rightarrow X$ ($H(x, 0) = x_0$ y $H(x, 1) = x$). Nuevamente, la ley exponencial nos da una aplicación continua $s : U \rightarrow P(X)$ definida por $s(x)(t) := H(x, t)$, la cual proporciona una sección local de p . Concluimos que $\text{secat}(p) \leq \text{cat}(X)$ al repetir este argumento para un recubrimiento por abiertos categóricos. □

En estos momentos nos proponemos demostrar que la categoría del producto cartesiano de espacios topológicos, bajo ciertas hipótesis, es menor o igual que la suma de sus categorías. Para ello definiremos la noción de sucesión categórica.

Definición 3.3.4. Una *sucesión categórica* de longitud k en un espacio topológico X , consiste en una sucesión de abiertos $U_0, U_1, U_2, \dots, U_k$, tal que $U_0 = \emptyset$, $U_k = X$ y $U_i \setminus U_{i-1} \subseteq V_i$, siendo V_i un abierto categórico, para cada $i = 1, 2, \dots, k$.

Veamos un lema que nos da una relación entre la categoría y la existencia de sucesiones categóricas:

Lema 3.3.2. *Si X un espacio topológico conexo por caminos entonces $\text{cat}(X) \leq k$ si y sólo si X tiene una sucesión categórica de longitud $k + 1$.*

Demostración.

Supongamos que X tiene una sucesión categórica $\{U_i\}_{i=0}^{k+1}$ de longitud $k + 1$. Entonces $U_0 = \emptyset$, $U_{k+1} = X$ y $U_i \setminus U_{i-1} \subseteq V_i$, donde cada V_i es abierto categórico, para todo $i = 1, 2, \dots, k + 1$.

Se deduce inmediatamente que $\{V_i\}_{i=1}^{k+1}$ recubre a X , por lo que $\text{cat}(X) \leq k$.

Recíprocamente, supongamos que $\text{cat}(X) \leq k$ y consideremos un recubrimiento de X por abiertos categóricos $\{V_i\}_{i=1}^{k+1}$. Si definimos $U_0 = \emptyset$ y para cada $i \geq 1$

$$U_i := \bigcup_{j=1}^m V_j$$

entonces está claro que $U_i \setminus U_{i-1} = \left(\bigcup_{j=1}^i V_j \right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} V_j \right) \subseteq V_i$.

Por tanto, $\{U_i\}_{i=0}^{k+1}$ forma una sucesión categórica de longitud $k + 1$. □

Teorema 3.3.3. *Sean X e Y espacios topológicos conexos por caminos y metrizable. Entonces*

$$\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y)$$

Demostración.

Claramente, si $\text{cat}(X) = \infty$ o $\text{cat}(Y) = \infty$ entonces habremos acabamos. Supongamos entonces que $\text{cat}(X) = n$ y $\text{cat}(Y) = m$ y consideremos, por el lema 3.3.2 anterior, sucesiones categóricas $\emptyset = U_0 \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_{n+1} = X$ y $\emptyset = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_{m+1} = Y$ respectivas de X e Y . Por definición, existen abiertos categóricos $W_i \subseteq X$ y $Z_j \subseteq Y$, tales que $U_{i+1} \setminus U_i \subseteq W_{i+1}$ y $V_{j+1} \setminus V_j \subseteq Z_{j+1}$, para todos i, j .

Definimos ahora el subconjunto $Q_r = \bigcup_{j=1}^r U_j \times V_{r+1-j}$, que es abierto en $X \times Y$. Está claro que

$U_j = \emptyset$ si $j > n+1$ y $V_{r+1-j} = \emptyset$, si $r-j > m$. Pero ahora, como $Q_0 = \bigcup_{j=1}^0 U_j \times V_{1-j} = \emptyset$, entonces

tenemos una sucesión creciente $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_{m+n+1} = X \times Y$. Es fácil comprobar que:

$$Q_{i+1} \setminus Q_i = \left[\bigcup_{j=1}^{i+1} U_j \times V_{i+2-j} \right] \setminus \left[\bigcup_{j=1}^i U_j \times V_{i+1-j} \right] = \bigcup_{j=1}^{i+1} (U_j \setminus U_{j-1}) \times (V_{i+2-j} \setminus V_{i+1-j}).$$

Además, cada $(U_j \setminus U_{j-1}) \times (V_{i+2-j} \setminus V_{i+1-j})$ está contenido en $W_j \times Z_{i+2-j}$, que es abierto categórico, al ser producto de abiertos categóricos. Sin embargo, entre estos conjuntos puede haber intersecciones no vacías para estos conjuntos para un i fijo y j variando. Ya que $i+2-j$ decrece, según aumente j , y los U_i y V_j están anidados, éste debe ser el caso en el que:

$$\begin{aligned} \overline{(U_j \setminus U_{j-1}) \times (V_{i+2-j} \setminus V_{i+1-j})} \cap (U_k \setminus U_{k-1}) \times (V_{i+2-k} \setminus V_{i+1-k}) &= \emptyset \\ (U_j \setminus U_{j-1}) \times (V_{i+2-j} \setminus V_{i+1-j}) \cap \overline{(U_k \setminus U_{k-1}) \times (V_{i+2-k} \setminus V_{i+1-k})} &= \emptyset \end{aligned}$$

para $k \neq j$. Como $X \times Y$ es completamente normal (véase nota 1.2.3), tenemos que existen entornos abiertos disjuntos

$$A_{ij} \supseteq (U_j \setminus U_{j-1}) \times (V_{i+2-j} \setminus V_{i+1-j}) \quad \text{y} \quad B_{ik} \supseteq (U_k \setminus U_{k-1}) \times (V_{i+2-k} \setminus V_{i+1-k})$$

Intersecando estos entornos con $W_j \times Z_{i+2-j}$ y $W_k \times Z_{i+2-k}$ respectivamente, obtendremos entornos abiertos categóricos disjuntos de $(U_j \setminus U_{j-1}) \times (V_{i+2-j} \setminus V_{i+1-j})$ y $(U_k \setminus U_{k-1}) \times (V_{i+2-k} \setminus V_{i+1-k})$, para $k \neq j$. Como los entornos categóricos son disjuntos, también lo es su unión (basta definir la nulhomotopía a trozos y usar el lema de continuidad). Por consiguiente $(U_j \setminus U_{j-1}) \times (V_{i+2-j} \setminus V_{i+1-j}) \cup (U_k \setminus U_{k-1}) \times (V_{i+2-k} \setminus V_{i+1-k})$ está contenido en un abierto categórico. Este argumento se puede iterar un número finito de veces para demostrar que $Q_{i+1} \setminus Q_i$ está contenido en un abierto categórico, para cada i . Por consiguiente, la sucesión

$$\emptyset = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_{n+m+1} = X \times Y$$

es categórica de longitud $n + m + 1$. Por el lema 3.3.2, concluimos que $\text{cat}(X \times Y) \leq n + m = \text{cat}(X) + \text{cat}(Y)$. □

A continuación veremos un resultado muy interesante, que nos relaciona la categoría seccional con la categoría:

Proposición 3.3.7. *Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración, con B conexo por caminos. Entonces:*

$$\text{secat}(p) \leq \text{cat}(B)$$

Además, si E es contráctil, entonces $\text{secat}(p) = \text{cat}(B)$.

Demostración.

Evidentemente, si $\text{cat}(B) = \infty$ ya estaría demostrada la desigualdad. Supongamos ahora que $\text{cat}(B) = n$, y sea $B = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$, donde cada U_i es abierto categórico en B . Fijamos $e_0 \in E$ y $b_0 = p(e_0)$; al ser U_i categórico y B conexo por caminos podemos considerar una homotopía $H_i : U_i \times I \rightarrow B$ tal que $H_i(b, 0) = b_0$, $H_i(b, 1) = b$, para todo $b \in U_i$ (ver 3.3.1). Considerando el siguiente diagrama conmutativo de flechas continuas,

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{C_{e_0}} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{H}_i & \downarrow p \\ U_i \times I & \xrightarrow{H_i} & H \end{array}$$

donde C_{e_0} denota la aplicación constante en e_0 , tenemos que, como p es fibración, existe $\tilde{H}_i : U_i \times I \rightarrow E$ haciendo conmutativo los dos diagramas conmutativos que se forman. Definimos $s_i : U_i \rightarrow E$, por

$$s_i(b) := \tilde{H}_i(b, 1)$$

entonces es sencillo comprobar que s_i es una sección local de p . Concluimos que $\text{secat}(p) \leq n = \text{cat}(B)$.

Veamos la segunda parte del teorema. Si E es contráctil, por la proposición 1.4.2, existe $e_0 \in E$ y una nulhomotopía $H : 1_E \simeq C_{e_0}$. Sólo falta por probar que $\text{cat}(B) \leq \text{secat}(p)$. En efecto, si $\text{secat}(p) = m$, entonces $B = \bigcup_{i=0}^m U_i$, donde cada U_i es abierto que admite una sección local $s_i : U_i \rightarrow E$ de p . Definimos $H_i : U_i \times I \rightarrow B$ como

$$H_i(b, t) = p(H(s_i(b), t))$$

Entonces, una rápida comprobación demuestra que $H_i(b, 0) = b$ y que $H_i(b, 1) = p(e_0)$, es decir, U_i es categórico en B . Por tanto, $\text{cat}(B) \leq m = \text{secat}(p)$. □

Nota 3.3.4. *Nótese que de la proposición 3.3.7 anterior podemos obtener una demostración alternativa de la proposición 3.3.6 sin más que tener en cuenta que el espacio $P(X)$ es contráctil. En efecto, podemos considerar la homotopía*

$$H : P(X) \times I \rightarrow P(X)$$

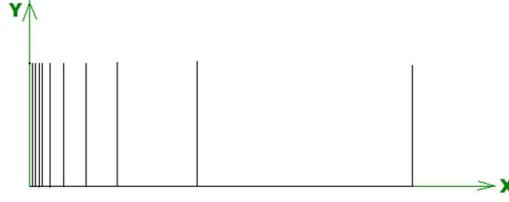
definida por $H(\alpha, t)(s) = \alpha(s(1-t))$. Por la ley exponencial H es continua y una simple comprobación demuestra que $H : 1_{P(X)} \simeq C_{x_0}$ (aquí C_{x_0} denota la aplicación constante sobre el camino constante en x_0). Así, usando la proposición 1.4.2 concluimos que $P(X)$ es contráctil.

Corolario 3.3.3. *Si X es un espacio topológico conexo por caminos y metrizable, entonces*

$$\text{cat}(X) \leq TC(X) \leq 2\text{cat}(X)$$

Demostración. La primera desigualdad se da siempre, y es el teorema 3.3.2. Para la segunda desigualdad, se tiene en cuenta la proposición 3.3.7 anterior, la nota 3.3.2 y el teorema 4.1.2. □

Como acabamos de ver, la categoría es un invariante homotópico bastante importante que acota la complejidad topológica. Ahora veremos un resultado que nos relaciona la categoría con la dimensión recubridora del espacio. Por espacio *localmente contráctil* entendemos un espacio topológico en el que todo punto admite una base de entornos abiertos contráctiles. Esta propiedad no es muy restrictiva, pues por ejemplo, todas las variedades topológicas son localmente contráctiles. Por supuesto, existen espacios localmente contráctiles que no son contráctiles (cualquier variedad no contráctil, como por ejemplo, la n -esfera). También existen espacios contráctiles que no son localmente contráctiles, como el conocido *espacio peine*.



Proposición 3.3.8. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos, metrizable y localmente contráctil. Entonces:*

$$\text{cat}(X) \leq \dim_{\mathbb{R}}(X)$$

Demostración.

Si $\dim_{\mathbb{R}}(X) = \infty$ acabaríamos trivialmente. Supongamos ahora que $\dim_{\mathbb{R}}(X) = m$, y veamos que $\text{cat}(X) \leq m$. Como X es localmente contráctil, todo punto tiene un entorno abierto contráctil, y por consiguiente, categórico. Consideramos un recubrimiento abierto categórico $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ de X . Como X es paracompacto y Hausdorff, existe una partición de la unidad $\pi = \{\pi_j : X \rightarrow [0, 1]\}_{j \in J}$ subordinada a $\mathcal{U} = \{U_j\}$. Entonces, para cada $x \in X$, definimos:

$$s(x) = \{j \in J : \pi_j(x) > 0\}$$

Trivialmente, tenemos que $s(x)$ es finito por la segunda propiedad de las particiones de la unidad. Por otro lado, si $S \subseteq J$, S finito, definimos:

$$w(S) = \{x \in X : \pi_i(x) < \pi_j(x), \forall i \notin S, \forall j \in s(x)\}$$

Veamos que $w(S)$ es abierto. Tenemos que

$$w(S) = \bigcap_{j \in S} K_j$$

Donde $K_j = \{x \in X : \pi_i(x) < \pi_j(x), i \in J - S\}$. Como S es finito, basta ver que los K_j son abiertos. En efecto, sea $j \in S$ y sea $x_0 \in K_j$, si π es una partición de la unidad, tenemos, por la segunda propiedad que existe un entorno abierto U_{x_0} tal que $J_{x_0} = \{i \in J : U_{x_0} \cap \text{supp}(\pi_i) \neq \emptyset\}$ es finito. Además,

$$\begin{aligned} U_{x_0} \cap K_j &= \{y \in X : \pi_i(y) < \pi_j(y), \forall i \in J - S, \forall j \in s(x)\} \cap U_{x_0} \\ &= \{y \in X : \pi_i(y) < \pi_j(y), \forall i \in J_{x_0} - S, \forall j \in s(x)\} \\ &= \left(\bigcap_{i \in J_{x_0}} K_j^i \right) \cap \{x \in U_{x_0} : \pi_i(x) > 0\} \end{aligned}$$

donde $K_j^i = \{y \in U_x : \pi_i(y) < \pi_j(y)\}$. Una simple comprobación demuestra que K_j^i es abierto (basta tomar $f : X \rightarrow [0, 1]$, definida como $f(x) = \pi_j(x) - \pi_i(x)$ y tener en cuenta que $f^{-1}((0, 1)) = K_j^i$).

Como tenemos que el conjunto $\{x \in U_{x_0} : \pi_i(x) > 0\}$ es abierto, entonces, $U_{x_0} \cap K_j$ es abierto, luego $K_j = \bigcup_{x \in K_j} (U_x \cap k_j)$ es abierto, pues es intersección finita de abiertos.

Entonces, hemos visto que:

- (i) Si $S \subseteq J$, S finito, entonces $w(S) = \{x \in X : \pi_i(x) < \pi_j(x), \forall i \notin S, \forall j \in s(x)\}$ es abierto.
- (ii) Si $S \not\subseteq S'$ y $S' \not\subseteq S$, entonces, $w(S) \cap w(S') = \emptyset$.

Sea

$$W_k = \bigcup_{\substack{x \in X \\ \#S(x)=k}} w(S)$$

donde $\#S(x)$ denota el cardinal del conjunto $S(x)$. Como tenemos que $w(s(x)) \subseteq \text{sop}(\pi_j) \subseteq U_j$ y que $w(s(x))$ es categórico y abierto. Concluimos que cada W_k es abierto categórico.

Por otro lado, si $\{W_k\}_{k=1}^{\infty}$ recubrimiento abierto de X entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $U_{j_1} \cap U_{j_2} \cap \dots \cap U_{j_{n+1}} = \emptyset$. En consecuencia $W_k = \emptyset$, para todo $k \geq n+1$; pero por hipótesis tenemos que $\dim_R(X) = m$, luego $W_k = \emptyset, \forall k \geq m+2$. Así, $X = W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_{m+1}$, donde cada W_i es categórico y abierto. Concluimos que $\text{cat}(X) \leq m = \dim_R(X)$.

□

El anillo graduado de cohomología nos da una serie de acotaciones inferiores que son de vital importancia para el cálculo de los invariantes que tratamos en esta memoria. Veamos previamente una propiedad del producto cup. Su demostración es sencilla y se deduce de su naturalidad (ver nota 2.2.2). Para una demostración detallada ver, por ejemplo, [16, pág. 251].

Lema 3.3.3. *Sea $A_i \subseteq X$ un subconjunto de X , para cada $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Consideremos las inclusiones $q_i : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A_i)$ y $q : (X, \emptyset) \rightarrow (X, \bigcup_{i=0}^m A_i)$. Entonces*

$$q^*(x_0 \smile x_1 \smile \dots \smile x_m) = q_0^*(x_0) \smile q_1^*(x_1) \smile \dots \smile q_m^*(x_m)$$

El resultado principal es el siguiente. Haremos uso de la noción de nilpotencia, establecida en la definición 2.2.3 del capítulo anterior.

Teorema 3.3.4. *Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración y R un anillo de coeficientes. Si $p^* : H^*(B; R) \rightarrow H^*(E; R)$ la aplicación inducida en cohomología, entonces*

$$\text{nil}(\text{Ker}(p^*)) \leq \text{secat}(p)$$

Demostración.

Obviamente, si $\text{secat}(p) = \infty$ ya estaría. Supongamos ahora que $\text{secat}(p) = m$. Entonces existe un recubrimiento abierto $B = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_m$ y diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{j_i} & B \\ s_i \downarrow & \nearrow p & \\ E & & \end{array}$$

Sea $x_i \in H^{k_i}(B; R)$ tal que $p^*(x_i) = 0$, para cada $i = 0, 1, 2, \dots, m$. Consideremos la sucesión exacta larga en cohomología del par (B, U_i)

$$\dots \xrightarrow{\Delta} H^{k_i}(B, U_i; R) \xrightarrow{q_i^*} H^{k_i}(B; R) \xrightarrow{j_i^*} H^{k_i}(U_i; R) \longrightarrow \dots$$

Como $j_i^*(x_i) = (ps_i)^*(x_i) = s_i^*p^*(x_i) = 0$, por exactitud existe $\bar{x}_i \in H^{k_i}(B, U_i; R)$ tal que $q_i^*(\bar{x}_i) = x_i$. Entonces, por el lema 3.3.3, tenemos

$$\begin{aligned} x_0 \smile x_1 \smile \dots \smile x_m &= q_0^*(\bar{x}_0) \smile \dots \smile q_m^*(\bar{x}_m) \\ &= q^*(\bar{x}_0 \smile \bar{x}_1 \smile \dots \smile \bar{x}_m) \in H^k(B, \bigcup_{i=0}^m U_i; R) = H^k(B, B; R) = 0 \end{aligned}$$

siendo $k = k_0 + k_1 + \dots + k_m$. Concluimos que $\text{nil}(\text{Ker}(p^*)) \leq m$. □

Nota 3.3.5. *Nótese que, en realidad, en el teorema anterior no es necesario que p sea fibración. En este caso, obtendríamos secciones locales homotópicas $s_i : U_i \rightarrow E$; pero este hecho no altera el argumento de la demostración debido a la invariancia de la cohomología por homotopías.*

Como tenemos que la categoría LS y la complejidad topológica son casos particulares de categoría seccional, tenemos dos corolarios de gran importancia. Comenzamos con la categoría LS. Para este corolario es necesario la noción de *cohomología reducida*. Dado X un espacio conexo por caminos con un punto distinguido $x_0 \in X$, se define la q -cohomología reducida, denotada por $\tilde{H}^q(X; R)$, como el núcleo del homomorfismo $H^q(X; R) \rightarrow H^q(\{x_0\}; R)$, inducido por la inclusión $\{x_0\} \hookrightarrow X$. Se comprueba fácilmente que es

$$\tilde{H}^q(X; R) = \begin{cases} 0, & q = 0 \\ H^q(X; R), & q > 0 \end{cases}$$

Corolario 3.3.4. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos con punto distinguido $x_0 \in X$ y sea R un anillo de coeficientes. Entonces*

$$\text{nil}(\tilde{H}^*(X; R)) \leq \text{cat}(X)$$

Demostración. Como vimos en la nota 3.3.4, $P(X)$ es un espacio contráctil. Fijándonos detalladamente en su demostración, observamos que la aplicación $C : \{x_0\} \rightarrow P(X)$, definida por el camino constante en x_0 , es una equivalencia de homotopía. Además, el siguiente triángulo es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{x_0\} & \xrightarrow[\cong]{C} & P(X) \\ & \searrow & \swarrow p \\ & & X \end{array}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama inducido en cohomología:

$$\begin{array}{ccc} & H^*(X; R) & \\ p^* \swarrow & & \searrow \\ H^*(P(X); R) & \xrightarrow[\cong]{C^*} & H^*(\{x_0\}; R) \end{array}$$

Así tenemos que $\text{Ker}(p^*) = \tilde{H}^*(X; R)$. Concluimos por el teorema anterior que

$$\text{nil}(\tilde{H}^*(X; R)) = \text{nil}(\text{Ker}(p^*)) \leq \text{secat}(p) = \text{cat}(X)$$

□

Este resultado es muy útil a la hora de calcular la categoría de muchos espacios. A modo ilustrativo, exponemos a continuación el cálculo de la categoría de los espacios proyectivos reales $\mathbb{R}P^n$. Recordemos que $\mathbb{R}P^n$ es el espacio topológico cociente de la n -esfera

$$\mathbb{R}P^n : S^n / \sim$$

por la relación de equivalencia generada cuando a cada punto $x \in S^n$ lo identificamos con su antipodal $-x$. Es conocido el hecho de que $H^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$, con $|x| = 1$ (ver [5], por ejemplo). Además, como $\mathbb{R}P^n$ es una n -variedad, se tiene que $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}P^n) \leq n$ (véase proposición 3.3.8 y teorema 1.3.1). Por otro lado, claramente $\text{nil}(\tilde{H}^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)) = n$ (basta tener en cuenta que $x^n \neq 0$ siendo x de grado 1). Así, se tiene que $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \geq n$ por el corolario 3.3.4. Con lo que concluimos

$$\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n$$

El segundo corolario es un resultado fundamental para el próximo capítulo, pues nos da una importante acotación inferior para la complejidad topológica. Comenzamos recordando la aplicación diagonal $\Delta : X \rightarrow X \times X$, definida como $\Delta(x) = (x, x)$. Si el anillo de coeficientes donde estamos trabajando es un cuerpo ($R = K$), entonces la fórmula de Künneth (véase, por ejemplo, el libro de A. Hatcher [5]) nos asegura la existencia de un isomorfismo que conserva el producto haciendo el siguiente triángulo conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^*(X; K) \otimes H^*(X; K) & \xrightarrow{\cong} & H^*(X \times X; K) \\ & \searrow \smile & \swarrow \Delta^* \\ & & H^*(X; K) \end{array}$$

Entonces, teniendo en cuenta este diagrama, se demuestra fácilmente que $\text{nil}(\text{Ker}(\smile)) = \text{nil}(\text{Ker}(\Delta^*))$. Así, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.5. *Sea X un espacio topológico y K el cuerpo de coeficientes. Entonces*

$$\text{nil}(\text{Ker}(\smile)) \leq \text{TC}(X)$$

Demostración. El resultado se deduce sin más que tener en cuenta el argumento anterior, la nota 3.3.5 y el corolario 3.3.2:

$$\text{nil}(\text{Ker}(\smile)) = \text{nil}(\text{Ker}(\Delta^*)) \leq \text{secat}(\Delta) = \text{TC}(X)$$

Capítulo 4

Cálculos

En este cuarto y último capítulo de la memoria nos centraremos en calcular la complejidad topológica de diversos espacios, así como de relacionar los resultados con los espacios de configuraciones vistos en el capítulo anterior.

4.1. La n-esfera S^n . Productos de esferas

La n-esfera se define como $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} / \|x\| = 1\}$ para $n \geq 1$. Antes de proceder al cálculo de su complejidad topológica, necesitamos un resultado previo, el *Teorema de la bola peluda*. Recordemos que un campo de vectores tangentes sobre S^n , es una aplicación continua $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ donde cada vector de la imagen de F es un vector tangente a la esfera en el punto; es decir, el producto escalar en \mathbb{R}^{n+1} , $\langle x, F(x) \rangle$, es cero para todo $x \in S^n$. Diremos que F es no nulo si $F(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$.

Haremos uso de la noción de grado de una aplicación continua $S^n \rightarrow S^n$. Es sabido que, tomando coeficientes en \mathbb{Z} , la n-homología singular de la n-esfera es

$$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$$

Este hecho se ha visto durante el Grado en Matemáticas. Dada $f : S^n \rightarrow S^n$ una aplicación continua, si elegimos σ un generador de $H_n(S^n)$, entonces existe un único entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que $H_n(f)(\sigma) = k\sigma$. Definimos *el grado de f* como $\deg(f) := k$. Es sencillo comprobar que esta definición no depende del generador escogido. Además, de la propia definición de grado se pueden comprobar directamente las siguientes propiedades:

- (i) $\deg(1_{S^n}) = 1$.
- (ii) Dados $f, g : S^n \rightarrow S^n$ continuas, se tiene $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g) = \deg(g \circ f)$.
- (iii) Dados $f, g : S^n \rightarrow S^n$ continuas, si $f \simeq g$ entonces $\deg(f) = \deg(g)$.
- (iv) Si f es equivalencia de homotopía, entonces $\deg(f) = \pm 1$.

El siguiente resultado no es tan evidente. Para su demostración, nos referimos al lector a, por ejemplo, [15].

Lema 4.1.1. *Sea $\gamma_i : S^n \rightarrow S^n$ la reflexión en el eje i , es decir,*

$$\gamma_i(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) := (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$$

Entonces el grado $\deg(\gamma_i) = -1$. En consecuencia, si $a : S^n \rightarrow S^n$ denota la aplicación antipodal, entonces $\deg(a) = \deg(\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_{n+1}) = (-1)^{n+1}$.

Podemos ahora demostrar el teorema de la bola peluda.

Teorema 4.1.1 (Teorema de la bola peluda). *Si n es par, entonces no existe un campo de vectores tangentes no nulo $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración.

Supongamos que existe un campo de vectores no nulo $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces podemos definir una aplicación continua $G : S^n \rightarrow S^n$ por

$$G(x) := \frac{F(x)}{\|F(x)\|}$$

Consideramos la homotopía $H : S^n \times I \rightarrow S^n$ definida por $H(x, t) = \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)G(x)$. Esta homotopía está bien definida. En efecto, al ser F un campo de vectores tangentes, se tiene que $\langle G(x), x \rangle = 0$, para todo $x \in S^n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \|H(x, t)\|^2 &= \langle H(x, t), H(x, t) \rangle \\ &= \cos^2(\pi t) \langle x, x \rangle + 2 \cos(\pi t) \sin(\pi t) \langle G(x), x \rangle + \sin^2(\pi t) \langle G(x), G(x) \rangle \\ &= \sin^2(\pi t) + \cos^2(\pi t) = 1 \end{aligned}$$

por lo que H está bien definida.

Además, $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = -x$, por lo que H define una homotopía entre la identidad y la aplicación antipodal $a : S^n \rightarrow S^n$. Pero esto implicaría que $\deg(a) = \deg(1_{S^n}) = 1$, lo cual es imposible puesto que, por el lema anterior, $\deg(a) = (-1)^{n+1} = -1$.

□

Nota 4.1.1. *Obsérvese que si n es impar entonces podemos encontrar campos de vectores no nulos. Por ejemplo, podemos considerar el campo de vectores $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definido por*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{n+1}, x_n)$$

Calculemos ahora la complejidad topológica de las n -esferas. Comenzamos con el caso de que n sea impar:

Proposición 4.1.1. *Si n es impar, entonces $TC(S^n) = 1$.*

Demostración.

Como S^n no es contráctil (nótese que $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, mientras que $H^n(P) = 0$), entonces, usando la proposición 1.4.2, $TC(S^n) \geq 1$. Veamos ahora que $TC(S^n) \leq 1$. Para ello consideramos los siguientes subconjuntos de $S^n \times S^n$:

$$U_0 = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\} \quad U_1 = \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq y\}$$

Claramente, $U_0 \cup U_1 = S^n \times S^n$. Por otro lado, si consideramos las aplicaciones continuas $f, g : S^n \times S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definidas por $f(x, y) = x + y$ y $g(x, y) = x - y$, entonces $U_0 = f^{-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ y que $U_1 = g^{-1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$. Por tanto, U_0 y U_1 son abiertos en $S^n \times S^n$.

Finalmente definimos las secciones locales $s_i : U_i \rightarrow (S^n)^I$ de la fibración $\pi : (S^n)^I \rightarrow S^n \times S^n$

$$\begin{array}{ccc} U_i & \hookrightarrow & S^n \times S^n \\ s_i \downarrow & & \nearrow \pi \\ (S^n)^I & & \end{array}$$

Para s_0 , dados $x, y \in U_0$, consideramos $s_0(x, y)$ el arco más corto entre x y y con velocidad constante, que es único, pues en U_0 , $x \neq -y$. Para s_1 , dados $x, y \in U_1$ construimos $s_1(x, y)$ en dos pasos, es decir, como multiplicación de dos caminos. En el primer paso, movemos el punto inicial x al punto antipodal $-y$ mediante el arco más corto, como se hizo anteriormente. En el segundo paso, movemos el punto antipodal $-y$ a y . Para este propósito como n es impar, entonces existe $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo de vectores tangentes no nulo (véase nota 4.1.1). El camino que usamos es:

$$-\cos(\pi t)y + \sin(\pi t) \frac{F(y)}{\|F(y)\|}$$

Concluimos pues que $\text{TC}(S^n) = 1$.

□

Seguimos con el caso en el que n es par, para conocer la complejidad topológica de todas las esferas.

Proposición 4.1.2. *Si n es par, entonces $\text{TC}(S^n) = 2$.*

Demostración.

Sea $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo de vectores tangentes tal que $f(y_0) = 0$ y $f(y) \neq 0$ para todo $y \neq y_0$, siendo $y_0 \in S^n$ un punto de S^n . Si consideramos $z_0 \in S^n$ tal que $z_0 \notin \{-y_0, y_0\}$. Definimos los siguientes subconjuntos de S^n :

$$\begin{aligned} U_0 &= \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq -y\} \\ U_1 &= \{(x, y) \in S^n \times S^n : x \neq y, y \neq y_0\} \\ U_2 &= S^n \setminus \{z_0\} \times S^n \setminus \{z_0\} \end{aligned}$$

Una rápida comprobación demuestra que $S^n \times S^n = U_0 \cup U_1 \cup U_2$. Por otro lado, de forma obvia U_2 es abierto y usando argumentos similares a los hechos en la demostración de la proposición anterior, U_0 y U_1 también son abiertos. Se definen las secciones locales s_0 y s_1 como en el caso impar. Por otro lado, sabemos que $S^n \setminus \{z_0\} \cong \mathbb{R}^n$ son homeomorfos (mediante la proyección estereográfica) por lo que $S^n \setminus \{z_0\}$ es contráctil, y por lo tanto también lo es U_2 . Siendo U_2 categórico, podemos considerar como s_2 una aplicación constante, la cual determina una sección local homotópica. Con lo cual, tenemos que $\text{TC}(S^n) \leq 2$.

Veamos ahora que $\text{TC}(S^n) \geq 2$. En efecto, es conocido que (véase, por ejemplo, [5]) que si tomamos como coeficientes $K = \mathbb{Q}$, entonces $H^*(S^n; \mathbb{Q})$ es el anillo graduado generado por $1 \in H^0(S^n; \mathbb{Q})$ y $a \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$ la clase fundamental de cohomología; en otras palabras,

$$H^*(S^n; \mathbb{Q}) = \langle 1, a \rangle$$

Haciendo uso del producto cup

$$\smile : H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(S^n; \mathbb{Q})$$

Tenemos que $\alpha = a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \text{Ker}(\smile)$, trivialmente. Además, teniendo en cuenta que la propiedad distributiva y cómo se define la estructura de anillo graduado en el producto tensorial $H^*(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^*(S^n; \mathbb{Q})$ (véase nota 2.2.3), se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (a \otimes 1 - 1 \otimes a) \cdot (a \otimes 1 - 1 \otimes a) \\ &= (a \otimes 1) \cdot (a \otimes 1) - (a \otimes 1) \cdot (1 \otimes a) - (1 \otimes a) \cdot (a \otimes 1) + (1 \otimes a) \cdot (1 \otimes a) \\ &= a^2 \otimes 1 - a \otimes a - a \otimes a + 1 \otimes a^2 \\ &= -2(a \otimes a) \neq 0 \end{aligned}$$

Nótese que $a^2 = a \smile a = 0$. Se deduce, por el corolario 3.3.5, que $\text{TC}(S^n) \geq 2$.

□

Podemos resumir los resultados que hemos obtenido del cálculo de la complejidad topológica de las esferas en la siguiente igualdad:

$$\text{TC}(S^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ impar} \\ 2, & n \text{ par} \end{cases}$$

Ahora vamos a demostrar que la complejidad topológica del producto, bajo ciertas hipótesis, es una cota inferior de la suma de las complejidades topológicas. Esta propiedad nos será muy útil para el cálculo de determinados espacios producto.

Teorema 4.1.2. *Sean X e Y espacios topológicos metrizables y conexos por caminos. Entonces:*

$$TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y)$$

Demostración.

Obviamente, si $TC(X) = \infty$ o $TC(Y) = \infty$ hemos acabado. Supongamos ahora que $TC(X) = n$ y $TC(Y) = m$. Entonces existe $\{U_i\}_{i=0}^n$ un recubrimiento abierto de $X \times X$ junto con secciones locales $s_i : U_i \rightarrow X^I$, para cada $i = 0, 1, 2, \dots, n$; similarmente existe $\{V_j\}_{j=0}^m$ un recubrimiento abierto de $Y \times Y$, junto con secciones locales $\tau_j : V_j \rightarrow Y^I$, para cada $j = 0, 1, 2, \dots, m$. Al ser los espacios metrizables, en particular son paracompactos y de Hausdorff (ver nota 1.2.2). Así, por el teorema 1.2.1, podemos considerar particiones de la unidad $\{\rho_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=0}^n$ y $\{\sigma_j : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^m$ subordinadas a $\{U_i\}_{i=0}^n$ y $\{V_j\}_{j=0}^m$, respectivamente.

Para cualquier par de subconjuntos no vacíos $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots, n\}$, y $T \subseteq \{0, 1, 2, \dots, m\}$ consideramos

$$W(S, T) := \{(x, y, z, w) \in (X \times Y)^2 / \rho_i(x, z)\sigma_j(y, w) > \rho_{i'}(x, z)\sigma_{j'}(y, w), \\ \forall (i, j) \in S \times T, \forall (i', j') \notin S \times T\}$$

Este conjunto verifica las siguientes propiedades:

- (i) $W(S, T)$ es abierto en $(X \times Y)^2 = (X \times Y) \times (X \times Y)$. En efecto, es sencillo comprobar que este conjunto coincide con la intersección de los abiertos $(\rho_i\sigma_j - \rho_{i'}\sigma_{j'})^{-1}((0, +\infty))$, cuando $(i, j) \in S \times T$ e $(i', j') \notin S \times T$. Obsérvese que esta intersección es finita.
- (ii) Es fácil comprobar que $W(S, T) \cap W(S', T') = \emptyset$, si $S \times T \not\subseteq S' \times T'$ y $S' \times T' \not\subseteq S \times T$.
- (iii) Si $(i, j) \in S \times T$, entonces $(x, z, y, w) \in U_i \times V_j$ siempre que $(x, y, z, w) \in W(S, T)$. Por consiguiente, podemos definir una sección local $w_{ij} : W(S, T) \rightarrow (X \times Y)^I$ como

$$w_{ij}(x, y, z, w)(t) := (s_i(x, z)(t), \tau_j(y, w)(t))$$

- (iv) Los conjuntos $W(S, T)$ forman un recubrimiento de $(X \times Y)^2$.

Para $k \in \{2, 3, 4, \dots, n + m + 2\}$ denotamos por W_k a la unión de todos los $W(S, T)$ tal que el cardinal de S más el cardinal de T es igual a k . Nótese que esta unión es por abiertos disjuntos, por la propiedad (ii) anterior, por lo cual podemos definir una sección local, definida a trozos, que es continua en virtud del lema de continuidad (ver lema 1.1.1). Como además $\{W_k\}_{k=2}^{n+m+2}$ forma un recubrimiento de $(X \times Y)^2$, concluimos que $TC(X \times Y) \leq n + m$.

□

Para el caso del brazo robótico, en el capítulo anterior vimos que el espacio de configuraciones, generalmente, no es simplemente una n -esfera sino que es el producto cartesiano de ellas. Calculemos la complejidad topológica de un brazo robótico.

Proposición 4.1.3. *Sea $X = S^n \times S^n \times \dots \times S^n$. Entonces*

$$TC(X) = \begin{cases} r, & n \text{ impar} \\ 2r, & n \text{ par} \end{cases}$$

Demostración.

Usando el teorema 4.1.2, tenemos que

$$TC(X) \leq TC(S^n) + TC(S^n) + \dots + TC(S^n) = rTC(S^n) = \begin{cases} r & n \text{ impar} \\ 2r & n \text{ par} \end{cases}$$

Veamos la otra desigualdad. Para $i = 1, 2, \dots, r$ tomamos $p_i : X \rightarrow S^n$ la proyección i -ésima. Sea $a \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$ la clase fundamental de cohomología. Si denotamos $a_i := p_i^*(a) \in H^n(X; \mathbb{Q})$, entonces claramente se tiene $a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i \in \text{Ker}(\smile)$. Por un lado no es difícil comprobar que

$$\prod_{i=1}^r (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i) \neq 0$$

por lo que $\text{nil}(\text{Ker}(\smile)) \geq r$. Esto demuestra, usando el corolario 3.3.5, que $TC(X) \geq r$ independientemente de la paridad de n . Además, en el caso de que n sea par, haciendo un cálculo análogo al hecho en la demostración de la proposición 4.1.2, obtenemos la igualdad:

$$(a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)^2 = -2(a_i \otimes a_i)$$

Obsérvese que $a_i^2 = p_i^*(a)^2 = p_i^*(a^2) = p_i^*(0) = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^r (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)^2 &= \prod_{i=1}^r -2(a_i \otimes a_i) \\ &= (-2)^r \prod_{i=1}^r (a_i \otimes a_i) \\ &= (-2)^r ((a_1 \smile a_2 \smile \dots \smile a_r) \otimes (a_1 \smile a_2 \smile \dots \smile a_r)) \end{aligned}$$

Aquí $(a_1 \smile a_2 \smile \dots \smile a_r) \in H^{rn}(X; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ es un elemento generador de la cohomología (es conocido por teoría de cohomología, al ser X una variedad compacta orientable de dimensión rn , que $H^{rn}(X; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$). Por consiguiente, en el caso de n par,

$$\prod_{i=1}^r (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)^2 \neq 0$$

Por lo que, usando el mismo corolario 3.3.5, $TC(X) \geq 2r$

□

El caso más general es que el brazo robótico tenga n barras que se muevan libremente en el espacio y m barras en el plano. Así, el cálculo de la complejidad topológica de este tipo de brazo la daremos en el siguiente resultado.

Proposición 4.1.4. *Si m es impar y n es par entonces*

$$TC(S^m \times S^n) = 3$$

Demostración.

Por el teorema 4.1.2, tenemos que $TC(S^m \times S^n) \leq TC(S^n) + TC(S^m) = 1 + 2 = 3$.

Consideramos ahora las proyecciones $p_1 : S^m \times S^n \rightarrow S^m$ y $p_2 : S^m \times S^n \rightarrow S^n$. Sea $a \in H^m(S^m; \mathbb{Q})$ y $b \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$ las clases de cohomología fundamentales. Llamemos $\alpha = p_1^*(a) \in H^m(S^m \times S^n; \mathbb{Q})$ y $\beta = p_2^*(b) \in H^n(S^m \times S^n; \mathbb{Q})$. Así, sabemos que $\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha$ y $\beta \otimes 1 - 1 \otimes \beta$ son divisores de cero. Además, como n es par, utilizando razonamientos similares a los hechos en resultados anteriores, se tiene que $(\beta \otimes 1 - 1 \otimes \beta)^2 = -2(\beta \otimes \beta)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} (\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha)(\beta \otimes 1 - 1 \otimes \beta)^2 &= -2(\alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha) \cdot (\beta \otimes \beta) \\ &= -2[\alpha \smile \beta \otimes \beta - \beta \otimes \alpha \smile \beta] \neq 0 \end{aligned}$$

Entonces, por el corolario 3.3.5, se concluye que $TC(S^m \times S^n) \geq 3$

□

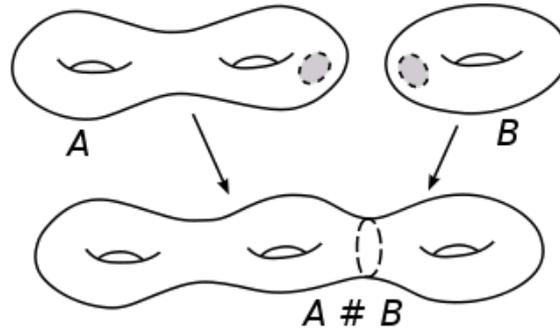
Usando razonamientos similares se puede demostrar el siguiente resultado general.

Proposición 4.1.5. $TC(S^{k_1} \times S^{k_2} \times \cdots \times S^{k_n}) = \sum_{j=1}^n TC(S^{k_j})$

De este modo, la complejidad topológica de un brazo robótico que tenga n barras que se muevan libremente en el espacio y m barras en el plano es $2n + m$.

4.2. Superficies orientables

La siguiente familia de espacios que analizaremos para calcular su complejidad topológica es la formada por las *superficies compactas orientables*. Recordemos que una superficie no es más que una 2-variedad topológica. Una particularidad importante en las superficies compactas y conexas es que todas éstas se generan mediante un proceso denominado *suma conexa*. Informalmente, dadas A y B dos superficies, entonces la suma conexa $A \# B$ es otra superficie, obtenida tras eliminar un disco abierto en cada superficie y pegar los espacios resultantes a través de las fronteras que estas eliminaciones producen



Como hemos comentado, todas las superficies compactas y conexas están perfectamente determinadas mediante esta construcción. En el denominado *teorema de clasificación de superficies* (compactas y conexas), se establece que los bloques de construcción de este tipo de espacios son planos proyectivos reales, toros y 2-esferas, denotados por $\mathbb{R}P^2$, T y S^2 respectivamente. A continuación se enuncia dicho teorema, cuya demostración se puede encontrar en cualquier libro básico de topología algebraica, como por ejemplo [15] o [9].

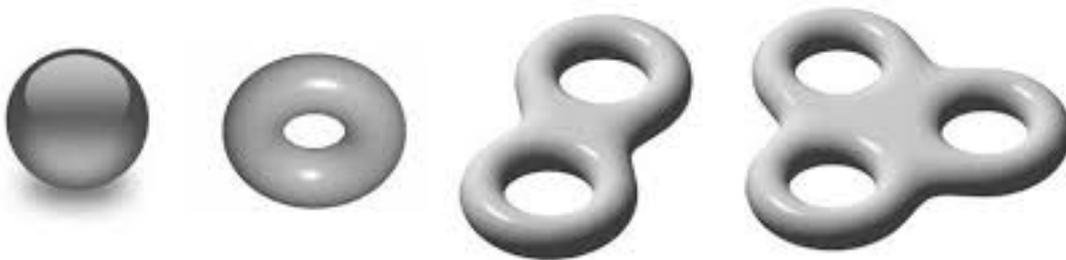
Teorema 4.2.1. *Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una, y una sola de las siguientes superficies:*

$$S^2 \# T \# T \# \dots \# T \quad (g \geq 0)$$

$$\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2 \quad (h \geq 1)$$

A la superficie $X_g = S^2 \# T \# T \# \dots \# T$ se le denomina *superficie orientable estándar de género g* (obsérvese que para $n = 0$ se obtiene la 2-esfera). Por otro lado, la superficie $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \dots \# \mathbb{R}P^2$ se denomina *superficie no orientable estándar de género h* .

Estamos interesados en el estudio de $TC(X_g)$, la complejidad topológica de las superficies orientables estándar de género g :



Proposición 4.2.1. *Para X_g , la superficie orientable estándar de género g , se tiene:*

$$TC(X_g) = \begin{cases} 2, & g \leq 1 \\ 4, & g \geq 2 \end{cases}$$

Demostración.

Comenzamos la demostración con el caso $g \leq 1$. Si $g = 0$, entonces $X_g = S^2$ es la 2-esfera, luego $TC(X_g) = 2$ por la proposición 4.1.3. Por otro lado, si $g = 1$, entonces $X_g = T$ es el toro, por lo que $TC(X_g) = 2$, haciendo uso de la misma proposición.

Veamos ahora el caso $g \geq 2$. En primer lugar observamos que, al ser las superficies 2-variedades, se obtiene la desigualdad $TC(X_g) \leq 2\dim_R(X_g) \leq 4$, combinando el corolario 3.3.3 junto con la proposición 3.3.8 y el teorema 1.3.1.

Para la desigualdad $TC(X_g) \geq 4$ se hará uso del corolario 3.3.5. En efecto, se sabe que existen (véase [5], por ejemplo) clases de cohomología $a, b, c, d \in H^1(X_g; \mathbb{Q})$ tales que $a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 0$, $ac = bd = \alpha \neq 0$ y que $ab = cd = ad = bc = 0$ (donde el producto usado se entiende que es el producto cup). Aquí $\alpha \in H^2(X_g; \mathbb{Q})$ es la clase fundamental de la cohomología de X_g . Entonces tenemos la siguiente relación:

$$(a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes 1 - 1 \otimes b)(c \otimes 1 - 1 \otimes c)(d \otimes 1 - 1 \otimes d) = -2(\alpha \otimes \alpha) \neq 0$$

Por tanto, $TC(X_g) \geq 4$. Concluimos que $TC(X_g) = 4$ para $g \geq 2$.

□

4.3. Grupos topológicos

Culminamos esta memoria con el cálculo de la complejidad topológica para un caso particular de espacios topológicos: los *grupos topológicos*. Veremos que, en este caso, la categoría LS y la

complejidad topológica coinciden.

Un *grupo topológico* no es más que un grupo con estructura de espacio topológico, de tal forma que las aplicaciones

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y \\ (-)^{-1} : G &\rightarrow G, \quad x \mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

definidas por la operación de grupo y la designación del elemento inverso, son continuas.

Nota 4.3.1. *Los ejemplos más característicos de grupos topológicos son los grupos de Lie. En esta memoria, no obstante, trabajaremos en el caso más general de grupos topológicos.*

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable real o compleja que es también un grupo tal que las operaciones de grupo (multiplicación e inversión) son funciones diferenciables o analíticas, según el caso.

El resultado central es el siguiente.

Proposición 4.3.1. *Si G es un grupo topológico conexo por caminos entonces*

$$TC(G) = \text{cat}(G)$$

Demostración.

El hecho de que $TC(G) \geq \text{cat}(G)$ es consecuencia directa del teorema 3.3.2.

Para la otra desigualdad, supongamos que $\text{cat}(G) = n$. Entonces existe un recubrimiento $G = \bigcup_{i=0}^n U_i$, donde cada U_i es abierto categórico. Además, como G es conexo por caminos, si e denota

el elemento neutro de G , podemos considerar (por el lema 3.3.1) una homotopía $H_i : U_i \times I \rightarrow G$ tal que $H_i(x, 0) = x$ y $H_i(x, 1) = e$, para cada $x \in U_i$ e $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Definimos ahora,

$$V_i := \{(x, y) \in G \times G : x \cdot y^{-1} \in U_i\} \subseteq G \times G$$

Puesto que la aplicación $\gamma : G \times G \rightarrow G$ definida por $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ es continua, tenemos que cada $V_i = \gamma^{-1}(U_i)$ es abierto, para cada i . Por otro lado, como

$$G \times G = \gamma^{-1}(G) = \gamma^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^n U_i\right) = \bigcup_{i=0}^n \gamma^{-1}U_i = \bigcup_{i=0}^n V_i$$

tenemos que $\{V_i\}_{i=0}^n$ recubre $G \times G$. Finalmente definimos $s_i : V_i \rightarrow G^I$ como

$$s_i(x, y)(t) := H_i(x \cdot y^{-1}, t) \cdot y$$

por la ley exponencial, es sencillo comprobar que s_i es continua. Además, $s_i(x, y)(0) = e \cdot y = y$ y $s_i(x, y)(1) = H_i(x \cdot y^{-1}, 1) \cdot y = x y^{-1} y = x$, luego s_i es una sección local de $\pi : G^I \rightarrow G \times G$. Esto demuestra que $TC(G) \leq n = \text{cat}(G)$. □

Finalizamos la memoria calculando la complejidad topológica del dron del ejemplo 3.1.3. Como hemos visto en el capítulo anterior, el espacio de configuraciones de un dron que se mueve libremente en el espacio y que se le permite rotar coincide con $X = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$. Como \mathbb{R}^3 es contráctil, tenemos que $X \simeq SO(3)$ son homotópicamente equivalentes, luego $TC(X) = TC(SO(3))$. Además, al ser $SO(3)$ un grupo topológico, tenemos que $TC(X) = TC(SO(3)) = \text{cat}(SO(3)) = \text{cat}(\mathbb{RP}(3)) = 3$ ya que $SO(3)$ es homeomorfo al plano proyectivo real de dimensión 3.

Conclusiones y posibles continuaciones

Como hemos podido constatar a lo largo de esta memoria, se pueden usar herramientas de topología algebraica y de geometría en problemas relacionados con una de las principales ramas de la robótica, denominada Planificación de Movimientos. En concreto, para el invariante denominado complejidad topológica, el cual mide el grado de inestabilidad en el movimiento de cualquier sistema mecánico, hemos podido hacer un análisis desde el punto de vista puramente topológico-algebraico obteniendo las siguientes propiedades:

- (i) Es un invariante numérico homotópico.
- (ii) Está íntimamente relacionado con otros invariantes numéricos homotópicos clásicos en topología algebraica, como la categoría de Lusternik-Schnirelmann y la categoría seccional.
- (iii) El anillo graduado de cohomología determina cotas inferiores fundamentales que permiten el cálculo de la complejidad topológica en muchos ejemplos.

Terminamos la memoria dando unas posibles continuaciones a este trabajo:

- Cálculo de la complejidad topológica de los espacios proyectivos reales y establecer la conexión con el problema de inmersión y extensión de dichos espacios.
- Estudio de la homología y cohomología celulares.

Bibliografía

- [1] T.T. DIECK. *Algebraic topology*. EMS, 2008.
- [2] S. EILENBERG; N. STEENROD. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton Univ. Press, 1952.
- [3] M. FARBER. *Topological complexity of motion planning*, *Discrete and Computational Geometry* 29(2), 211-221, 2003.
- [4] J.M. GARCÍA CALCINES; F.J. DÍAZ DÍAZ . *Curso de topología general*. Visión Net, 2005.
- [5] A. HATCHER. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 1ª edición, 2001.
- [6] W. HUREWICZ; H. WALLMAN. *Dimension Theory*. Princeton Legacy Library, 1941.
- [7] I. JAMES. On Category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann. *Topology*, 17, 331-348.
- [8] N. KIMURA. *On the covering dimension of products spaces*. *Proc. Japan Acad.* 40 1964, 267-271.
- [9] C. KOSNIOWSKI. *Topología algebraica*. Reverté, 1989.
- [10] J.C. LATOMBE. *Robot Motion Planning*. Kluwer, 1991.
- [11] J.M. LEE. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag New York, 2011
- [12] L. LUSTERNIK; L. SCHNIRELMANN. *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnels*. Hermann, Paris.
- [13] W. MASSEY. *Introducción a la topología algebraica*. Reverté, 1972.
- [14] J. MUNKRES. *Elementary Differential Topology*. 1ª edición, 1966.
- [15] J. MUNKRES. *Topología*. Prentice Hall, 2ª edición, 2000.
- [16] E. SPANIER. *Algebraic topology (corrected reprint of the 1966 original)*. Springer, 1981.
- [17] A.S. SCHWARZ. *The genus of a fiber space*. *Amer. Math. Sci. Transl.*, 55(1966), 49- 140.
- [18] J.W. VICK. *An Introduction to homotopy theory*. Springer-Verlag New York, 1994.

Topological complexity of robotic motion planning

David Laarbi Fumero



Universidad de La Laguna

Introduction

We study a numerical invariant called *topological complexity*. Such an invariant was introduced by M. Farber in 2003 in order to face the motion planning problem in robotics from a topological perspective. It corresponds to the lowest number of orders that any algorithm must contain to govern a particular movement planner of a given configuration space. First, we prove some basic properties, in which the fact of being a homotopic invariant is highlighted. Furthermore, in order to perform effective calculations of the topological complexity, we have related it by bounds with other known numerical invariants such as the Lusternik-Schnirelmann category, the sectional category (also called Schwarz genus), the covering dimension and the nilpotency of the kernel of the cup product. The last topic, which is related to cohomology, illustrates the power of algebraic topology in our study, because it is a key element in the computation of the topological complexity of many examples.

Some related concepts

The closest notion is the *Lusternik-Schnirelmann category* of a topological space X (denoted by $\text{cat}(X)$) which is defined as the smallest non-negative integer n such that X can be covered by $n + 1$ open subsets $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_n = X$ with each inclusion $V_i \rightarrow X$ null-homotopic.

The generalization of the two concepts is the notion of *sectional category* (also named Schwarz genus) of a fibration $p : E \rightarrow B$ (denoted by $\text{secat}(p)$) which is defined as the smallest non-negative integer n such that B admits an open covering $B = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$ such that on each of which there is a local section of p .

Conclusion

Topological complexity is an important tool in the motion planning problem in robotics, which measures the grade of instability in any mechanical system. This notion also has deep connections with algebraic topology as it is a numerical homotopy invariant related to LS category and sectional category. In general, the computation of the topological complexity is hard and it must be done by bounds of algebraic topology nature.

References

- [1] DIECK, T., *Algebraic topology*, EMS, 2008.
- [2] FARBER, M., *Topological complexity of motion planning*, Discrete and Computational Geometry 29(2).
- [3] HATCHER, A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press; 1 edición, 2001.
- [4] MUNKRES, J., *Topología*, Prentice Hall, 2 edición, 2000.

About

Department: Mathematics, Statistics and Operational Research.
Faculty: Science, Mathematical section.
Email: alu0100692075@ull.edu.es
Final Year Project in Mathematics done under the supervision of Dr. Jose Manuel García Calcinés during the academic year 2015/16

Topological complexity

Let X be a path-connected topological space. The topological complexity, denoted by $\text{TC}(X)$, is defined as the smallest non-negative integer n such that $X \times X$ admits an open covering $X \times X = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_n$ such that on each open there is a local section of $\pi : X^I \rightarrow X \times X$, that is, the following diagram is commutative:

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\quad} & X \times X \\ & \searrow^{s_i} & \nearrow^{\pi} \\ & & X^I \end{array}$$

If this n does not exist, we set $\text{TC}(X) = \infty$.

The topological complexity is generalized by the sectional category as follows if X is any topological space, then

$$\text{TC}(X) = \text{secat}(\pi)$$

where $\pi : X^I \rightarrow X \times X$ is defined by $\pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$.

Fundamental bounds

1. Let X be a metrizable path-connected topological space. Then,

$$\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq 2\text{cat}(X)$$

2. Let X be a path-connected space. Then,

$$\text{cat}(X) = \text{secat}(p)$$

where $p : P(X) \rightarrow X$ is defined as $p(\alpha) = \alpha(1)$.

3. Let $p : E \rightarrow B$ be a fibration such that B is a path-connected space. Then,

$$\text{secat}(p) \leq \text{cat}(B)$$

Furthermore, if E is a contractible space, then $\text{secat}(p) = \text{cat}(B)$.

4. Let X be a path-connected, locally contractible space and metrizable space. Then,

$$\text{cat}(X) \leq \dim_{\mathbb{R}}(X)$$

5. Let X be a topological space and K a field. Then,

$$\text{nil}(\text{Ker}(\smile)) \leq \text{TC}(X)$$

where $\smile : H^*(X; K) \otimes H^*(X; K) \rightarrow H^*(X; K)$ is the cup product in cohomology.

6. Let X, Y be path-connected and metrizable topological spaces. Then,

$$\text{TC}(X \times Y) \leq \text{TC}(X) + \text{TC}(Y)$$

Calculations of topological complexity of some examples

Let S^n be n -sphere. Then,

$$\text{TC}(S^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ odd} \\ 2, & n \text{ even} \end{cases}$$

Furthermore, $\text{TC}(S^{k_1} \times S^{k_2} \times \dots \times S^{k_n}) = \sum_{j=1}^n \text{TC}(S^{k_j})$

The topological complexity of a robot formed by n arms that are able to move in the space and m arms that are able to move in the plane is $\text{TC}((S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 \times S^2 \times S^2 \times \dots \times S^2)) = m + 2n$. Let X_g be a compact orientable surface of genus g . Then,

$$\text{TC}(X_g) = \begin{cases} 2, & g \leq 1 \\ 4, & g \geq 2 \end{cases}$$

Let G be a path-connected topological group. Then,

$$\text{TC}(G) = \text{cat}(G)$$

We know that $\text{TC}(\mathbb{R}P^3) = 3$, so the topological complexity of a drone who is able to move and rotate in the space is

$$\text{TC}(\mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)) = 3$$