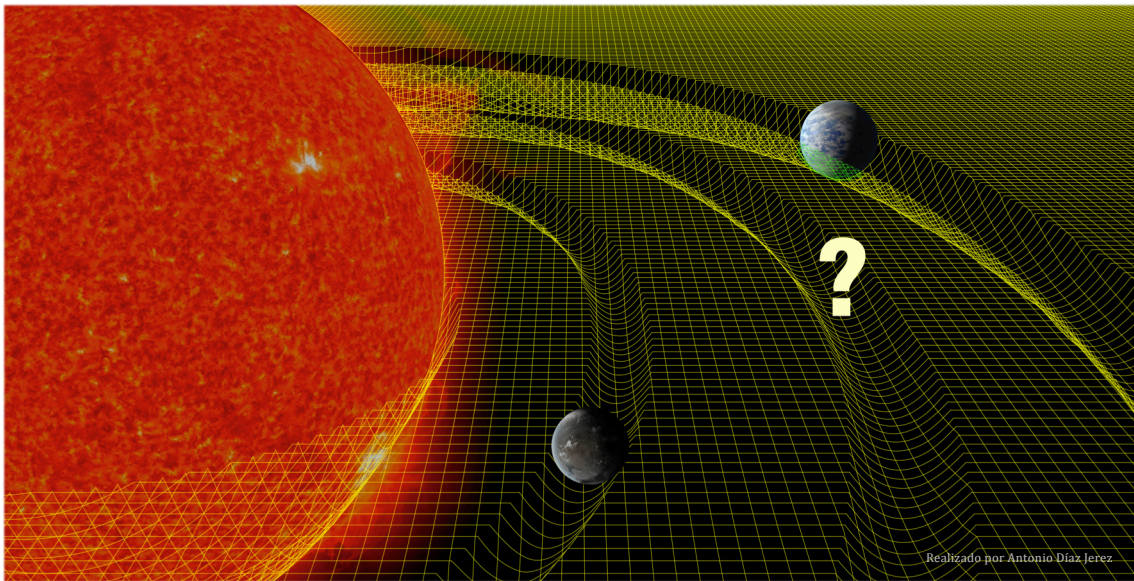


LEY DE TITIUS-BODE EN SISTEMAS EXOPLANETARIOS

TRABAJO DE FIN DE GRADO



Manuel Mallorquín Díaz

Curso: 2015/2016

Titulación: Grado en Física

Tutor: Teodoro Roca Cortés

Departamento: Astrofísica



Universidad
de La Laguna

Índice general

	Página
Abstract	1
Resumen	2
1. Introducción	3
1.1. Conceptos históricos	4
1.2. Motivación	7
2. Datos observacionales	8
2.1. Base de datos de exoplanetas	8
2.2. Desarrollo del código	9
3. Metodología de análisis	11
3.1. Formulación matemática del modelo	11
3.2. Aplicación al sistema solar	12
3.3. Aplicación a sistemas exoplanetarios	13
4. Valor predictivo del modelo	17
4.1. Predicción del número ordinal planetario	17
4.2. Nuevo análisis de los sistemas reconfigurados	18
4.3. Análisis de los valores de q y p	21
5. Discusión de los resultados	23
5.1. Predicción del número de planetas por descubrir	23
5.1.1. Exclusión de un exoplaneta conocido	24
5.1.2. Exclusión de más de un exoplaneta conocido	25
5.2. Comparativa de los valores de a con otros autores	26
5.3. Análisis de las hipótesis del modelo	27
5.4. ¿Es la Ley de Titius-Bode universal?	27
6. Conclusiones y proyectos futuros	29
6.1. Conclusiones	29
6.2. Proyectos futuros	30
Anexo	31
Bibliografía	34

Abstract

In this work I will study the Titius-Bode law for exoplanetary systems for, among other things, get a predictive model of the location of exoplanets.

The Titius-Bode law was proposed in the late eighteenth century by Titius, although popularly was known as Bode's Law due to diffusion that Bode made of this law. Originally, the law states that the distances of the orbits of all the planets of the solar system follow a geometric progression whose ratio is 2. Although, for this to be fulfilled, a planet between the orbits of Mars and Jupiter must be added, being this the dwarf planet Ceres. With similar reasoning Ceres and other bodies in the asteroid belt were discovered. What is shown in this text a code applied to a database of exoplanets which allows us to calculate the ratio of Titius-Bode for each exoplanetary and predict system, and, if exists, unknown celestial bodies as the case of Ceres centuries ago.

This can be made reformulating the original Titius-Bode law, giving a more general nature and, by a linear fit, determining the parameters to obtain the geometric ratio of the system. Firstly and to familiarize yourself with the method, the code is applied to the solar system and is compared with the original law. Then, it is applied to all exoplanetary systems of the database that are suitable for later analysis and timely results will be extracted. Based on these results the code will reconfigure the exoplanetary systems moving the orbits of exoplanets and adding "empty" orbits to verify the reformulated law.

When all systems are reconfigured the results and fit parameter of the systems will be re-extracted and analyzed to study predictive power. After this, individually and according to their complexity, stellar systems for the cases that one and two missed exoplanets respectively will be studied.

Looking at the bibliography you can find similiar publications of this work, therefore, it is convenient to make some comparisons of the results obtained with the aim of firming up the conclusions. An analysis of the proposed model will be also done, answering some of the questions that motivate the development of this work.

Finally the conclusions and implications of the work will be presented with the greatest posible criticism and future prospects of them.

Resumen

En este trabajo se estudiará la Ley de Titius-Bode aplicada a sistemas exoplanetarios para conseguir, entre otras cosas, un modelo predictivo sobre la localización de los exoplanetas.

La ley de Titius-Bode fue propuesta a finales del siglo XVIII por Titius, aunque popularmente fue conocida como Ley de Bode debido a la difusión que hizo éste de la ley. Originalmente la ley enuncia que las distancias de las órbitas de todos los planetas del sistema solar siguen una progresión geométrica cuya razón es 2. Si bien, para que esto se cumpla hay que añadir un planeta entre las órbitas de Marte y Júpiter, siendo éste el planeta enano Ceres. Con un razonamiento similar a este fue con el que se descubrió Ceres y otros cuerpos del cinturón de asteroides. Lo que se mostrará aquí es un código que, aplicado a una base de datos de exoplanetas, nos permite calcular la relación de Titius-Bode para cada sistema exoplanetario y predecir, si lo hubiera, astros no conocidos cómo el caso de Ceres siglos atrás.

Para ello se reformulará la ley original de Titius-Bode otorgándole un carácter más general y, mediante un ajuste lineal, se determinarán los parámetros que permitan obtener la razón geométrica del sistema. En primer lugar y para familiarizarse con el método, se aplicará el código al sistema solar y se comparará con la ley original. A continuación se aplicará a todos los sistemas exoplanetarios de la base de datos que sean aptos para el análisis posterior y se extraerán los resultados oportunos. En base a esos resultados el código reconfigurará los sistemas exoplanetarios desplazando las órbitas de los exoplanetas para añadir órbitas “vacías” hasta que verifiquen la ley reformulada.

Una vez estén todos sistemas reconfigurados, se volverán a extraer los resultados y se analizarán los parámetros de los ajustes de los sistemas para poder estudiar el poder predictivo. Para ello se estudiarán, individualmente y de acuerdo a su complejidad, los sistemas estelares para los casos en los que falten uno y dos exoplanetas respectivamente.

Si se observa la bibliografía se puede encontrar publicaciones similares a este texto, por ello, se ha encontrado conveniente realizar algunas comparaciones de los resultados obtenidos con el objetivo de reforzar las conclusiones. También se realizará un análisis del modelo propuesto así como dar respuesta a algunas de las cuestiones que motivan la elaboración de este trabajo.

Por último se expondrán, con la mayor crítica posible, las conclusiones y repercusiones del trabajo realizado así como las perspectivas futuras del mismo.

Capítulo 1

Introducción

In this first chapter I will do a brief historical description of the Titius-Bode law, first enunciated by Johann Daniel Titius von Wittenberg in 1766, until recent publications that are using a similar formulation. It is noteworthy that it was known for many years as Bode's Law and not as the Titius-Bode law, which is the name that is recognized today. This is because, at first, when only planets from Mercury to Saturn were known, the law predicted the existence of a planet between the orbits of Mars and Jupiter and it was the great persistence of Johann Elert Bode in finding the predicted planet, that made the law popularly known by his name without reference to Titius. The existence of the asteroid belt and the planet Uranus confirmed the validity of the law without a physical explanation. The discovery of the planet Neptune, that at first, does not satisfy the relationship only he added more doubt on the validity of that law. At the present, different variations of the law are used for satellite systems in giant planets of our solar system, getting good results with the most massive satellites. Also different publications, which will then be mentioned, used a similar formulation using the periods of the orbits instead of the size of the orbits, however, we know that both are related by Kepler's third law. In this work the physical explanation it will be studied if this law holds true for exoplanetary systems and we will also try to answer some questions posed at the end of the chapter.

En este primer capítulo se realiza una breve descripción histórica de la ley de Titius-Bode, enunciada por primera vez por Johann Daniel Titius von Wittenberg en 1766, hasta las publicaciones actuales que utilizan una formulación similar. Es destacable, que ésta fue conocida durante muchos años como la Ley de Bode y no como la Ley de Titius-Bode, que es el nombre que se le reconoce en la actualidad. Esto se debe a que, al principio, cuando sólo se conocían los planetas desde Mercurio hasta Saturno, la ley predecía la existencia de un planeta entre las órbitas de Marte y Júpiter y fue, la gran persistencia de Johann Elert Bode en encontrar ese planeta, la que hizo que popularmente se conociera la ley con su nombre y sin hacer referencia a Titius. La existencia del cinturón de asteroides y del planeta Urano corroboró la validez de dicha ley aunque sin explicación física alguna. El descubrimiento del planeta Neptuno que, en un primer momento, no satisface la relación arrojó más dudas sobre la validez de dicha ley. En la actualidad diferentes variantes de la ley son usadas para los sistemas de satélites de los planetas gigantes de nuestro sistema solar obteniendo buenos resultados con los satélites más masivos. También diferentes publicaciones, que luego serán mencionadas, utilizan una formulación similar usando los periodos de las órbitas y no las distancias de éstas, sin embargo, ambas están relacionadas mediante la tercera Ley de Kepler.

En este trabajo la explicación física que será estudiada es si ésta se cumple para sistemas exoplanetarios y se intentará dar respuesta a algunas preguntas que se formulan al final del capítulo.

1.1. Conceptos históricos.

Johann Daniel Titius von Wittenberg (1729 – 1796) descubrió en 1766 una relación muy interesante en la observación de las distancias de los planetas del sistema solar al Sol. Él supuso que si normalizamos la órbita de la Tierra a 10, los radios de las órbitas de todos los planetas (siendo Saturno el planeta más lejano conocido entonces) al Sol cumplían la siguiente relación:

$$r_n = 4 + 3 \times 2^n$$

donde $n = -\infty$ para Mercurio y $n = 0, 1, 2, \dots$ para el resto de planetas ordenados según su distancia creciente al Sol.

Sin embargo, esta relación fue conocida durante más de un siglo por la Ley de Bode y no como la Ley de Titius-Bode, que es el nombre que se le reconoce actualmente. Esto es debido a que en 1772 Johann Elert Bode (1747 – 1826), con más prestigio que Titius en aquel entonces, promovió de manera muy activa la ley con el objetivo de buscar un nuevo planeta y se le atribuyó dicha ley. En ninguna de las obras de astronomía de Bode se hace referencia a Titius, y Bode nunca se asigna claramente la autoría de la ley, sin embargo, en una memoria póstuma, sí existe una referencia a Titius reconociendo su prioridad.



Figura 1. A la izquierda Johann E. Bode, a la derecha Johann Daniel Titius W..

En 1781 Wilhelm Herschel (1738 – 1822) descubrió Urano, al comprobar la distancia de Urano al Sol resultó que satisfacía razonablemente bien la Ley de

Titius-Bode. Entonces surgió una pregunta, si la ley podía describir lo observado, ¿tendría también un poder predictivo?. Sin embargo, para que la ley no fallara, era necesario añadir un planeta entre las órbitas de Marte y de Júpiter que no se conocía entonces. Motivados por este acontecimiento, en 1800 varios grupos de astrónomos comenzaron con la búsqueda del planeta que faltaba. El 2 de enero de 1801 Giuseppe Piazzi (1746 - 1826) notó cierto movimiento en un objeto desconocido que cumplía la ley pero que parecía demasiado pequeño para tratarse de un planeta, se le llamó Ceres. Un año más tarde, Heinrich Olbers (1758 - 1840), encontró un segundo objeto con una órbita similar, aunque con mayor excentricidad, llamado Palas y así se fueron descubriendo varios objetos en años sucesivos. Se había empezado, por tanto, a descubrir lo que hoy se conoce como el cinturón de asteroides y, en el primer caso, el planeta enano Ceres¹.

En 23 de septiembre de 1856 fue descubierto Neptuno donde Urbain Le Verrier (1811 - 1877) predijo, mediante cálculos matemáticos, que se encontraría. A diferencia de los demás planetas del sistema solar conocido entonces, Neptuno parece violar la ley de Titius-Bode (*Tabla 1*). Sin embargo, se verá cómo realizando las correcciones adecuadas Neptuno sí satisfará la ley.

La formulación actual de la Ley de Titius-Bode cambia ligeramente la obtenida inicialmente:

$$a = 0.4 + 0.3 \times 2^n \quad (1)$$

donde $n = -\infty, 0, 1, 2, \dots$ y a es el semieje mayor de la órbita que viene dado en unidades astronómicas (UA). Podemos ver en la *Tabla 1* la diferencia entre las distancias reales y las obtenidas mediante dicha ley.

Planeta	Semieje mayor real [UA]	Ley Titius-Bode [UA]	n
Mercurio	0.39	0.4	$-\infty$
Venus	0.72	0.7	0
Tierra	1	1	1
Marte	1.52	1.6	2
Ceres	2.78	2.8	3
Júpiter	5.2	5.2	4
Saturno	9.54	10	5
Urano	19.19	19.6	6
Neptuno	30.07	38.8	7

Tabla 1. Comparación entre los semiejes reales² de las órbitas y las obtenidas mediante la Ley de Titius-Bode.

¹ Michael M. Nieto, "Success with Uranus and the Asteroids", en *The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory*, (Oxford: Pergamon Press Ltd., 1972), 16-19.

² Stuart Clark, "The solar system", en *EXTRASOLAR PLANETS, The Search for New Worlds*, (Chichester: Chichester, 1998), 65-67.

En la actualidad distintas variantes de esta ley se han aplicado no sólo al sistema solar sino a los sistemas de satélites de planetas gigantes como Júpiter, Saturno o Urano. Es necesario mencionar la formulación alternativa³ para los satélites que propuso Stanley Dermott (1945 -) en 1972, en la que la ley está basada en los periodos orbitales y no en los semiejes mayores de las órbitas, si bien, están relacionadas por la tercera ley de Kepler⁴:

$$T_i = T_0 \cdot A^i$$

donde T_i es el periodo predicho para el satélite i y T_0 y A los parámetros a determinar. Esta ley se conoce en la actualidad como la *ley de Dermott*, en donde la aplicación a los satélites de Júpiter y Urano concuerda muy bien con los datos reales de los periodos. Para el sistema de satélites de Saturno no es tan efectiva, pero para los satélites más grandes se ajusta bastante bien.

También se tiene constancia de varias publicaciones en las que se ha hecho uso de ley de Titius-Bode para intentar predecir la existencia de exoplanetas, ya sea para casos aislados⁵, como para varios sistemas exoplanetarios^{6,7}. En este último caso se emplea la formulación de Dermott y además no sólo se utiliza como método de interpolación sino también de extrapolación.

Una de las mayores controversias que generó esta ley fue la de si existe alguna explicación física, es decir, alguna razón dinámica que explique que las distancias de las órbitas que resultan sean soluciones, como sucede, por ejemplo, para la mecánica cuántica al explicar el radio atómico de Bohr. Bode creía fervientemente que existía una razón física que explicara la ley, pero no la encontró. Aún hoy el tema de si existe una razón física o no sigue creando controversia, ya que la mayor parte de la comunidad científica considera la ley de Titius-Bode una mera regla mnemotécnica para conocer las distancias de las órbitas de los planetas al Sol. Sin embargo, se ha de tener presente que existe un hecho y es que las distancias siguen una progresión geométrica y no existe ninguna explicación física para ello. El problema ha radicado en que no había más sistemas para poder sacar conclusiones acerca de este hecho y sus consecuencias. Cabe recordar que en el pasado se han puesto en duda muchas leyes experimentales hasta que, fruto de la perseverancia o la genialidad, se han llegado a contrastar en un marco teórico que las fundamenta.

³ Carl D. Murray y Stanley F. Dermott, "The Titius-Bode Law", en *Solar System Dynamics*, (Cambridge: Cambridge University Press, 1999), 6.

⁴ $C = T^2/a^3$, el cuadrado del periodo orbital es directamente proporcional al cubo del semieje mayor.

⁵ Arcadio Poveda y Patricia Lara, "The Exo-Planetary System of 55 Cancri and the Titius-Bode Law", *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica* (2008): 243-246.

⁶ Timothy Boverid y Charles H. Lineweaver, "Exoplanet Predictions Based on the Generalised Titius-Bode Relation", *MNRAS* 435 (2013): 116-1138.

⁷ Chelsea X. Huang y Gáspár Á. Bakos, "Testing the Titius-Bode law predictions for Kepler multi-planet system", *MNRAS* 442 (2014): 674-681.

1.2. Motivación.

Más de dos siglos después de la formulación de Titius y Bode se sigue buscando una respuesta al significado físico de esta ley. Si bien se intentará proporcionar algunas ideas acerca de esta respuesta, lo que se presentará, de aquí en adelante, es la comprobación observacional de si esta ley se trata de un caso particular del sistema solar o si se puede generalizar, es decir, si en todos los sistemas exoplanetarios se verifica la ley.

Una vez realizado el estudio podremos obtener ciertos argumentos que permitan conocer cuán diferente es el sistema solar de otros sistemas estelares, ¿será el sistema solar una excepción en cuanto a su organización planetaria?, ¿obtendremos una base sólida para predecir la posición de nuevos exoplanetas?, ¿es la ley de Titius-Bode una nueva manera de clasificar los sistemas exoplanetarios?, ¿cuál es el alcance de la ley dentro de un sistema?, ¿depende la ley de la masa, edad o de alguna otra característica física de las estrellas?

Hoy en día se dispone de bases de datos exoplanetarios que contienen un gran número de exoplanetas que continua creciendo considerablemente y que permitirá tratar este caso no de manera individual, sino para todo el colectivo de sistemas exoplanetarios, intentando así obtener conclusiones más generales. En un primer momento se obtendrá una formulación matemática de la ley para el caso más general posible. Luego se aplicará la ley a todos los sistemas con exoplanetas de los cuales existan suficientes datos. En función a los resultados obtenidos y después de un análisis crítico se expondrán las conclusiones.

Capítulo 2

Datos observacionales

The second chapter is a brief description of the observational data used and the development of the code needed to read and reorganize the information. A code will be designed and written that allows to read all data from over 3400 exoplanets contained the database. However, it must to be reusable, e.g., if the used database is www.exoplanetas.eu, when the database is updated, the code has to be able to reanalyze the data.

For this work only the data of exoplanetary systems containing four or more exoplanets will be used, because systems with 3 exoplanets have only one degree of freedom and the systems with two exoplanets zero degrees of freedom.

El segundo capítulo es una breve descripción de los datos observacionales que se utilizan y del desarrollo del código necesario para leer y reorganizar la información. Se diseñará y escribirá un código que permita leer todos los datos de más de 3400 exoplanetas que contiene la base de datos. Sin embargo, debe ser reutilizable, es decir, si la base de datos utilizada es www.exoplanet.eu, cuando la base de datos sea actualizada, el código tiene que ser capaz de reanalizar los datos.

Para este trabajo sólo se utilizarán los datos de los sistemas exoplanetarios que contengan 4 o más exoplanetas, debido a que los sistemas con 3 exoplanetas sólo tienen un grado de libertad y los sistemas con 2 exoplanetas cero grados de libertad.

2.1. Base de datos de exoplanetas.

En la actualidad existen en la red diferentes bases de datos⁸ de exoplanetas de libre acceso, en los que se incluyen tanto los exoplanetas ratificados como los aún sin confirmar. En estas bases de datos se podrán obtener magnitudes de los exoplanetas tales como: masa, periodo, radio de la órbita, etc., así como información acerca de su descubrimiento: método de detección, fecha o autores. También proporciona datos sobre la estrella anfitriona, tales como masa, edad, radio, tipo espectral, etc. De esta manera se dispondrá de una gran variedad de datos con los que se intentará responder a las cuestiones planteadas en el capítulo anterior.

⁸ Algunas de ellas son : www.exoplanets.org, www.exoplanetarchive.ipac.caltech.edu, www.openexoplanetcatalogue.com.

Para este trabajo se han extraído todos los datos disponibles en abierto de la web <http://www.exoplanet.eu>, creada en 1995 por *exoplanet TEAM* y que se mantiene regularmente actualizada, siendo la última vez consultada el 14 de mayo de 2016.

2.2. Desarrollo del código.

Para poder realizar estos cálculos para todos los sistemas exoplanetarios disponibles, se diseñará un código informático específico, en el lenguaje Python, que permita leer toda la información de que se dispone, organizarla según necesitemos y realizar todos los cálculos matemáticos que se requieran de manera rápida y eficiente. Se ha de recordar que lo que se intenta aquí no es estudiar un sistema exoplanetario aislado, sino todos los conocidos para sacar conclusiones lo más generales posible.

Vamos a describir, a grandes rasgos, el cometido del código creado. Lo primero que debe hacer es leer el fichero **.dat*, escrito en formato de texto, con todos los datos de los exoplanetas que hemos obtenido de la base de datos. En este paso es probable que el programa de error al leer algún dato puesto que, por lo general, suelen haber errores de escritura en el fichero de origen. Además el fichero de origen se actualiza con una periodicidad de 3 o 4 días de manera que los errores que se presentan van cambiando, ya que se solucionan unos pero aparecen otros nuevos, por este motivo, el código intenta leer el fichero de diferentes formas minimizando el número de estos errores en el fichero origen. En el fichero se facilita la información de más de 3400 exoplanetas y cerca de 95 magnitudes o datos por exoplaneta. Los parámetros de los sistemas planetarios que, en principio, nos interesan son fundamentalmente dos; el semieje mayor de la órbita de cada uno de los exoplanetas y sus errores, y los nombres de las estrellas del sistema, que son los que dan lugar al nombre del sistema estelar.

Es importante recordar que el código debe de ser capaz de reanalizar los datos del fichero de origen cada vez que éste se actualice, por lo tanto, la generalidad con la que el código lee y analiza cada dato ha de ser absoluta y se debe evitar, en la medida de lo posible, hacer un tratamiento individual de alguno de los sistemas exoplanetarios.

El programa, a continuación, procede a identificar los sistemas estelares que se pueden analizar, es decir, que cuenten con 3 o más planetas. Se descartan los que contengan sólo 2 planetas, puesto que si se quiere hacer un ajuste lineal y sólo se tiene dos datos, el número de grados de libertad es cero. También se aprecia que los sistemas de 3 planetas generan problemas puesto que sólo tienen un grado de libertad. Por esta razón, después de barajar diferentes opciones de cómo tratar estos sistemas, no se ha encontrado ninguna que resulte sólida en las conclusiones, de modo que no se realizará un análisis de estos sistemas. Sin embargo, si quedará presente buscar, en el futuro, un método que permita tratar estos sistemas puesto que el número de éstos es bastante elevado en relación con los que tienen 4 o más exoplanetas. Una vez identificados se observa, en la *figura 2*, que el valor máximo de sistemas con 3 o más exoplanetas es de 189 siendo 7 el número máximo de exoplanetas encontrados en cualquier sistema.

Se procede entonces a darle el valor ordinal de n a cada planeta de cada sistema según su valor a , el semieje mayor de la órbita, de manera ordenada creciente. Es aquí donde se encuentra el primer inconveniente, puesto que la base de datos contiene algunos exoplanetas de los cuales aún no se conoce su semieje mayor, así que los eliminaremos de nuestra selección. Por este motivo, después de la corrección, el número de sistemas exoplanetarios que se tiene se verá modificado reduciéndose el total de sistemas a 149.

```
[In [1]: run Ley_TB.py
(3404, 95)
El número de sistemas con 7 planetas es 1
El número de sistemas con 6 planetas es 5
El número de sistemas con 5 planetas es 14
El número de sistemas con 4 planetas es 45
El número de sistemas con 3 planetas es 124
El número de sistemas con 7 planetas corregido es 1
El número de sistemas con 6 planetas corregido es 5
El número de sistemas con 5 planetas corregido es 10
El número de sistemas con 4 planetas corregido es 32
El número de sistemas con 3 planetas corregido es 101
```

Figura 2. Número de exoplanetas por sistema corregido.

Capítulo 3

Metodología de análisis

The third chapter begins with a description of the mathematical formulation that will be used and the corresponding treatment of the errors. This is a formulation based on the Titius-Bode law but more widespread in which a linear fit for each exoplanetary system will be made. For a better understanding of the proposed method, the model will be first applied to the solar system and the results are compared with those obtained by Titius centuries ago. Then, the proposed methodology will be applied to some exoplanetary systems, with a few numbers of exoplanets in order to show how it works and if there might present unexpected problems. Later, an analysis of as much exoplanetary systems as possible will be performed.

El tercer capítulo empezará con la descripción de la formulación matemática que se usará así como el tratamiento de errores correspondiente. Se propondrá una formulación basada en la ley de Titius-Bode pero más generalizada, en la que se realizará un ajuste lineal para cada sistema exoplanetario. Para una mejor comprensión del método planteado se aplicará el modelo al sistema solar y se comparará los resultados con los obtenidos por Titius siglos atrás. A continuación, la metodología propuesta se aplicará a unos pocos sistemas exoplanetarios con el fin de mostrar como funciona y ver si se presenta algún problema inesperado. Por último, se realizará un análisis de los ajustes del resto de los sistemas exoplanetarios conocidos.

3.1. Formulación matemática del modelo.

Conocida la ecuación (1), se propone una formulación más general y se escribe de forma que sea más fácil de tratar analíticamente:

$$a = p \cdot q^n \quad (2)$$

donde a mantiene su significado (semieje mayor de la órbita) y donde p y q son parámetros a determinar empíricamente y $n = 1, 2, 3, \dots, N$ es el número ordinal que le corresponde a cada planeta en orden creciente según la distancia a la estrella. Si tomamos logaritmos a ambos lados de la ecuación (2) resulta:

$$\ln a = \ln p + n \cdot \ln q \quad (3)$$

La ecuación (3) la podemos ajustar a los datos observacionales mediante una recta del tipo:

$$Y = AX + B$$

donde, por comparación, vemos que:

$$Y = \ln a, \quad X = n, \quad A = \ln q, \quad B = \ln p \quad (4)$$

Si los logaritmos de las distancias siguen una progresión aritmética es porque las distancias siguen una progresión geométrica. Por tanto, lo que haremos será aplicar la relación (3) con los cambios de variables en (4) para ajustar a una recta todos los sistemas estelares con exoplanetas conocidos.

Lo que nos interesa estudiar en un primer momento es el valor de la pendiente A , es decir, el parámetro q , y ver que relación existe entre el sistema solar y otros sistemas estelares con exoplanetas, y entre ellos mismos. El valor de A nos diría que los planetas no están situados en órbitas con una distancia a la estrella al azar, sino que todos ellos cumplen la relación (2) y su razón entre una órbita y la siguiente es constante. Sin embargo el valor B lo que nos proporciona es el valor para calcular la distancia al primer planeta conocido.

El ajuste de esta función a los datos observacionales, es decir, las distancias de los exoplanetas a su estrella, se realizará mediante el método de mínimos cuadrados⁹, donde la dispersión es:

$$\text{desviación estandar} \equiv \sigma = \sqrt{\frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y}_i)^2} \quad (5)$$

donde Y_i representa los datos observados para cada exoplaneta e \bar{Y}_i es el valor del modelo ajustado para cada exoplaneta usando los parámetros del ajuste. $(N - m)$ representa el número de grados de libertad del sistema en el que N es el valor máximo del número de planetas observados para cada sistema y m es el número de parámetros a determinar, 2 en nuestro caso, q y p .

El valor de σ es la desviación estándar de los residuos del ajuste que, en este caso, nos muestra una medida de la diferencia del valor de cada punto respecto de la recta ajustada. Éste parámetro es muy importante ya que será uno de los criterios que se utilizará para concretar el número de planetas que tiene un sistema. El tratamiento de errores asociado a los parámetros del ajuste y a los cambios de variable de (4) se detallará en el *Anexo 1*.

3.2. Aplicación al sistema solar.

Para comprobar el código escrito y familiarizarnos con el método que vamos a usar realizaremos el estudio para el caso del sistema solar de manera aislada, que no sólo servirá de ejemplo de cómo se realizará el tratamiento de información sino

⁹ Philip R. Bevington y D. Keith Robinson, "Least-Squares Fit to a Straight Line", en *Data Reduction and Error Analysis for de Physical Sciences*, (New York: Mc Graw Hill, 2003), 98-114.

que, también es de interés conocer que diferencias pudiera haber de nuestro sistema estelar con el resto.

Recordemos que para el sistema solar estamos considerando los 8 planetas conocidos más el planeta enano Ceres en la quinta posición, por eso hace un total de $N = 9$.

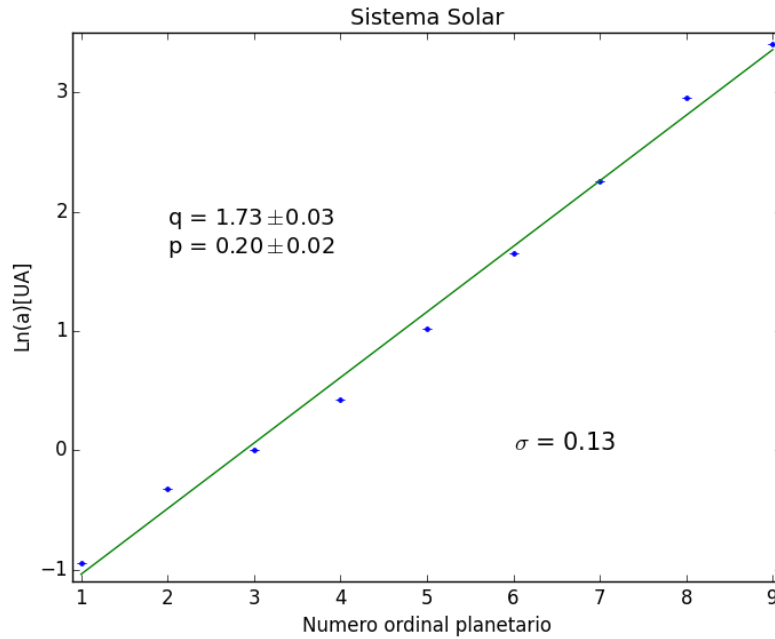


Figura 3. Aplicación de la metodología al caso de nuestro sistema planetario.

En la *figura 3* se observa el número ordinal planetario frente al logaritmo de las distancias tal y como se indica en la ecuación (3). Recordemos que los valores de q y p son los valores de la razón geométrica y de la distancia del primer planeta a la estrella. El valor de σ es el definido en (5) y, cabe destacar que, aunque no se aprecie en el gráfico debido a la precisión de los datos, las distancias están dibujadas con sus barras de error correspondientes.

Es notable que la relación (1) que proponía Titius iba bien encarrilada, sin embargo, su error fue suponer que el valor de la razón geométrica para el sistema solar era de 2 cuando en realidad es de 1.73 ± 0.03 . Debido a este margen en la razón geométrica, el valor de a que se deducía en la *Tabla 1* para el planeta Neptuno es erróneo, ya que al ser el último planeta ($n = N$) el error es mayor.

3.3. Aplicación a sistemas exoplanetarios.

Ahora se dispone de los sistemas exoplanetarios completos y ordenados por lo que se procede a realizar el ajuste visto en (3) para cada valor de a pesado con la inversa de su error al cuadrado. Si nos fijamos en los valores de los errores máximo y mínimo del semieje mayor vemos que en su mayoría son asimétricos, es decir, que el error superior e inferior son diferentes. El tratamiento matemático y computacional que implicaría considerar errores asimétricos en los datos excede

este estudio, por lo tanto, después de valorar diferentes soluciones, se ha optado por elegir el valor mayor de ambos resultando así un valor con mayor incertidumbre. Sin embargo, a la hora de visualizar en gráficas los sistemas, sí se expondrán los planetas con sus barras de error observadas.

A continuación veremos ciertos ejemplos de este análisis en algunos de los sistemas exoplanetarios:

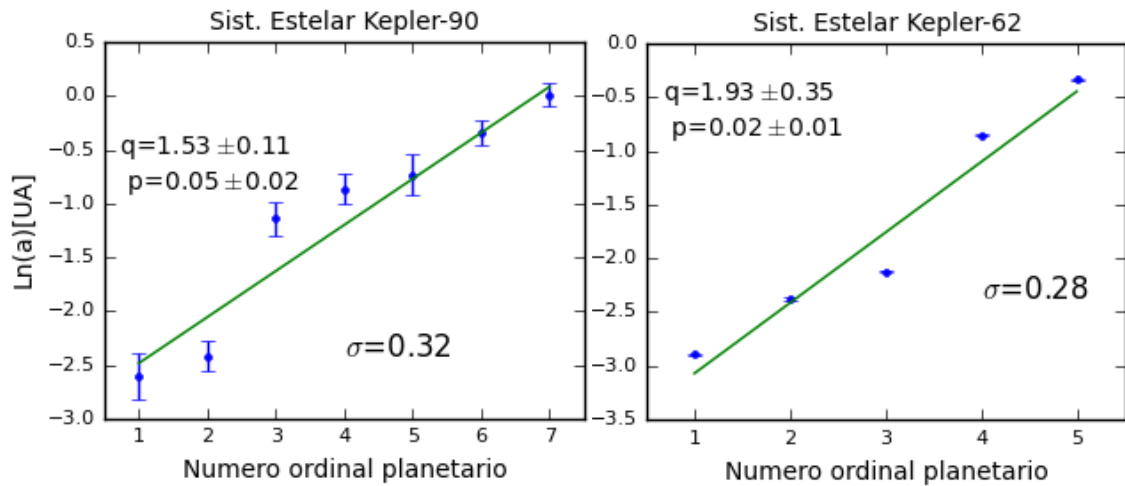


Figura 4. Ajuste del modelo, descrito en el texto, a 2 sistemas; con 7 exoplanetas (izquierda) y con 5 exoplanetas (derecha).

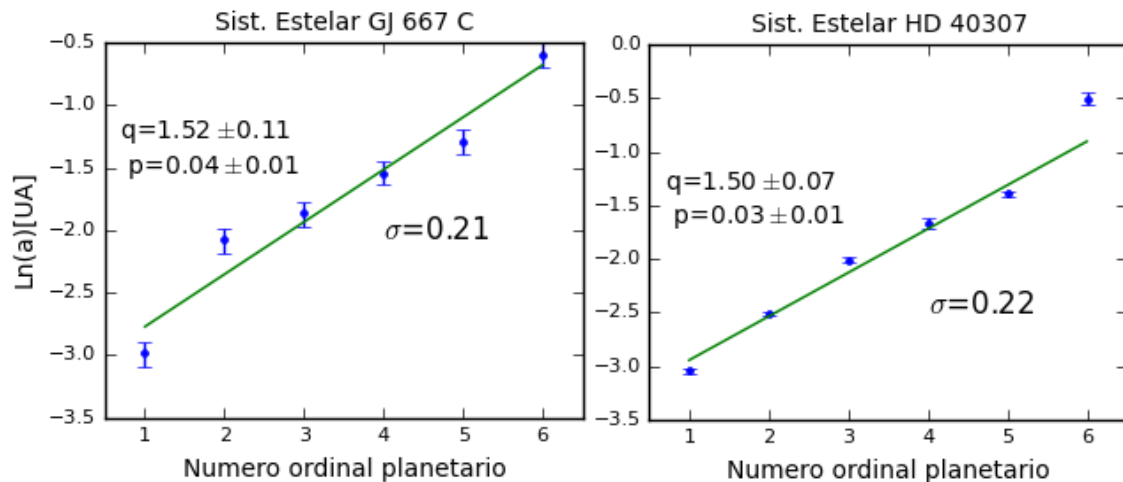


Figura 5. Ajuste del modelo, descrito en el texto, a 2 sistemas de 6 exoplanetas.

Viendo las *figuras 4 y 5* nos hacemos una idea de cuál es propósito y sentido que queremos darle al modelo propuesto. Si se examina la *figura 5*, la gráfica del sistema HD 40307, se observa como los 5 primeros planetas se ajustan bastante bien a una recta pero el último no. Uno se pregunta si desplazando el último planeta hacia la derecha, ¿encajaría ahora en la recta del ajuste?. Si desplazáramos el sexto planeta hasta $n = 7$ parece razonable intuir que ahora sí estaría la recta. El

significado que tiene esto es que en efecto conocemos 6 planetas de ese sistema pero no tienen por qué tener unos números ordinales consecutivos. Parece faltar un sexto y un séptimo planeta aún por descubrir. Cabe destacar que no tiene porque ser un planeta el que coincida con la razón geométrica sino que como en el sistema solar, en el caso de Ceres, puede tratarse de un cinturón de asteroides que sería, a día de hoy, indetectable.

Otro caso diferente que podemos ver es el del sistema GJ 667C en el que se observa claramente cómo los 4 planetas centrales están bien alineados pero el primero y el último no lo están. La solución en este caso sería retrasar el primer planeta y alejar el último de la estrella. De manera que una posible mejor solución sería, por ejemplo, $n = 1, 4, 5, 6, 7, 9$.

Algo que en un primer momento pasa inadvertido pero que supone un problema es que si observamos con detenimiento el sistema Kepler-62, en la *figura 4*, la recta que resulta no parece tender a ir hacia el planeta con número ordinal 3 como cabría esperar. Esto es debido a que, como se mencionó anteriormente, el ajuste realizado para el semieje mayor está pesado con los errores y, para este caso concreto, el valor de a para el segundo y quinto planeta es muy preciso, por tanto, su peso será mucho mayor. Esto hace que al modificar cualquier posición de los planetas, que no sean los dos mencionados anteriormente, el valor de la pendiente no cambie y eso perjudicará el alcance de nuestro estudio, pues en el valor de la razón geométrica primará la diferencia de pesos entre los planetas y no las distancias entre ellos.

Por tanto, nuestro segundo criterio será el de realizar los ajustes sin considerar los pesos de los valores de a . Si bien este criterio parece quitar confianza en la solidez de los resultados también se puede entender como una forma, más general, de tratar los sistemas puesto que la mayoría de éstos tienen valores de los pesos incompletos, es decir, que en un sistema de n planetas desde que uno de ellos no contenga un error para el valor del semieje mayor entonces, o eliminamos el planeta del sistema o igualamos todos los pesos de los planetas de ese sistema. Recordemos que el objetivo del estudio es realizar un tratamiento estadístico y general de manera que es preferible utilizar un número mayor de planetas por sistema que tener menos pero con mucha variación en la precisión de sus datos.

En la *figura 6* se realiza un histograma de los valores de q y p de los sistemas exoplanetarios actualizados que contienen 7, 6, 5 y 4 planetas, obteniendo que tanto los valores de q como los valores de p se agrupan alrededor de un determinado valor de $q = 1.516$ y $p = 0.028$, donde wq y wp representan la anchura a mitad de altura, y, sin embargo, hay otros valores claramente alejados que representan sistemas exoplanetarios que, o no se ajustan a una recta ó la recta tiene una pendiente mucho mayor. Esto nos muestra que no todos los sistema siguen la ley de Titius-Bode con el mismo valor de los parámetros p y q .

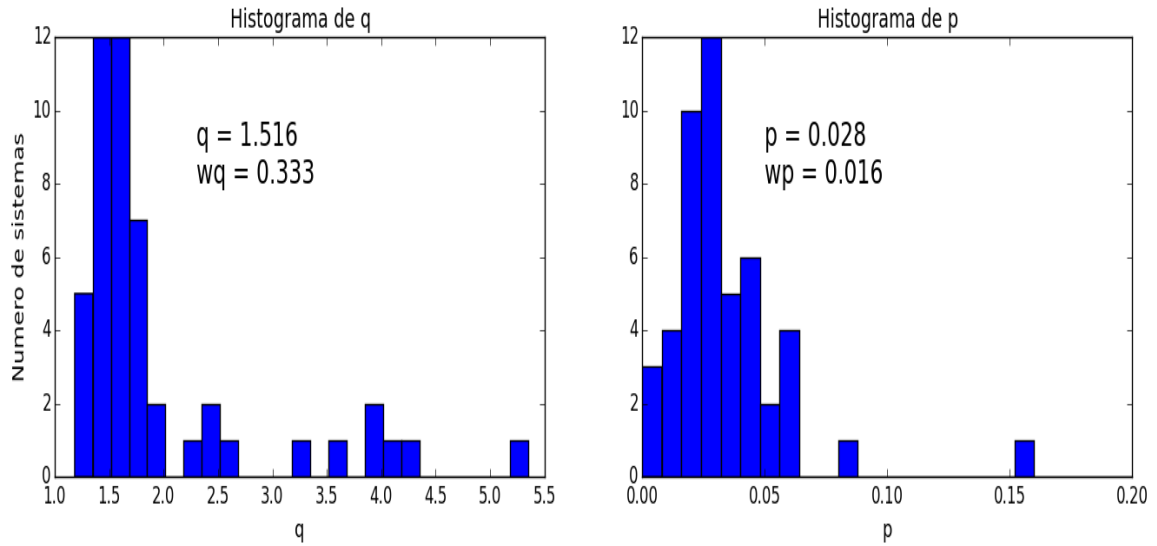


Figura 6. Histograma con los valores de q y p obtenidos sin utilizar los errores en a . Éstos corresponden al valor medio de q y p más repetido y al valor de la anchura del histograma a altura mitad.

También es de interés estudiar los valores de σ de estos ajustes. De esta manera se logra visualizar cómo de buenos son unos ajustes respecto de otros. Se puede tomar como referencia el valor de $\sigma = 0.13$, que se obtuvo en el sistema solar, para observar en la *figura 7* que aproximadamente más de la mitad de los sistemas estudiados tienen un valor de σ superior, es decir, que ajustan peor a una recta que lo que lo hacía el sistema solar en la *figura 3*.

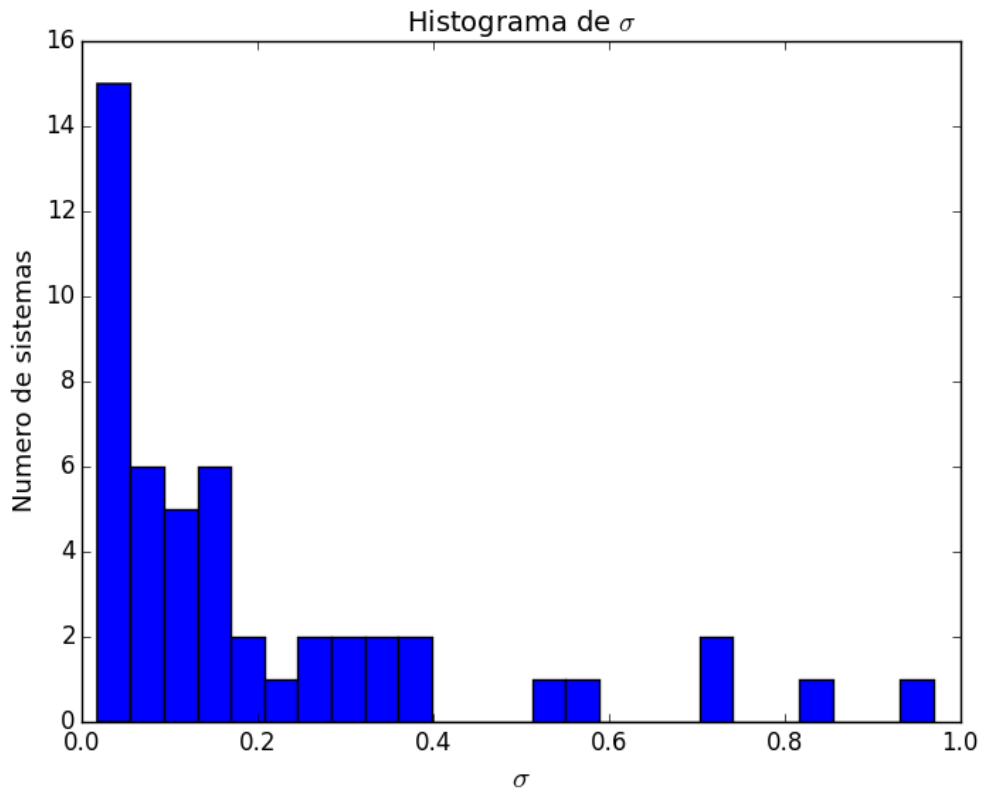


Figura 7. Histograma de σ para los sistema exoplanetarios.

Capítulo 4

Valor predictivo del modelo

This chapter focuses on the predictive value of the model, in which a method will be developed to sort the exoplanets in a system in which "empty" orbits will be included. This will be possible thanks to a condition based on the standard deviation of each fit, which must satisfy all exoplanetary systems. Once all systems have been reconfigured according to the proposed method, an analysis of the systems, like the one mentioned in the previous chapter will be performed. Finally, it will analyze the values taken by the parameters of fit after being reconfigured and it will study the existence of possible systematic errors in the data.

Este capítulo se centra en el valor predictivo del modelo, en el que se desarrollará un método que ordene los exoplanetas en un sistema en el cual se incluirán orbitas "vacías". Esto será posible gracias a que se aplicará una condición, basada en la desviación estándar de cada ajuste, que han de cumplir todos los sistemas exoplanetarios. Una vez que todos los sistemas hayan sido reconfigurados de acuerdo al método propuesto, se realizará un análisis de los sistemas similar al mencionado en el capítulo anterior. Por último se analizarán los valores que toman los parámetros del ajuste después de ser reconfigurados y se estudiará la existencia de algún posible error sistemático en el modelo.

4.1. Predicción del número ordinal planetario.

Lo que se intentará es desarrollar un método, basado en la ecuación (3), que "ordene" los planetas en un sistema incluyendo órbitas "vacías" (al menos hasta la actualidad) para que la ley se verifique con mejor precisión. Para ello se utilizará la desviación estándar, vista en (5), de cada ajuste a cada sistema. Partimos del supuesto que los valores que se alejan de la parte más agrupada del histograma es debido a que existen planetas aún no descubiertos que una vez considerados, deberían concentrar aún más el histograma hacia un solo valor más probable.

Creemos un código informático que "filtre" sistema a sistema la correcta colocación de los planetas. En primer lugar el programa comprobará si la desviación estándar o residuo del ajuste es menor o mayor que la diferencia entre la distancia del planeta y el valor de y del ajuste que sea máximo, es decir, calculamos todos los valores de:

$$|\ln a^n - y_{estimado}^n|, \quad n = 1, \dots, N$$

De este cálculo se extraerán dos condiciones:

$$\sigma > |\ln a - y_{estimado}|_{m\acute{a}x}, \quad (6)$$

$$\sigma < |\ln a - y_{estimado}|_{m\acute{a}x}, \quad (7)$$

Si se cumple la condición (6), entonces no se realizará ninguna acción y se considerará que el sistema es correcto, pero si σ satisface la condición (7), entonces supondremos que hay al menos un planeta que puede no estar en su "sitio", para este caso consideraremos dos opciones, que $(\ln a - y_{estimado})_{m\acute{a}x}$ sea positivo o negativo.

Si $(\ln a - y_{estimado})_{m\acute{a}x} > 0$ significa que el valor del $\ln a$, para el n que cumple (7), está por encima de la recta de ajuste, entonces se desplazará el planeta n hasta la posición $n + 1$, así como todos los planetas con n mayor al que cumpla (7), es decir, le asignamos un número ordinal mayor a todos los planetas después de n . Esto dará lugar a un "hueco" en la posición n . Para el caso de $n = N$ sólo se desplazará el planeta n debido a que éste es el último.

Si por el contrario $(\ln a - y_{estimado})_{m\acute{a}x} < 0$, el procedimiento será el mismo pero restando un número ordinal, es decir, el valor de n que cumpla (7) pasará a la posición $n - 1$, así como sus predecesores. Si $n = 1$ podría darse el caso que el número ordinal planetario fuera cero o negativo. Para evitarlo, una vez finalizado la recolocación se sumará a todos los valores de n la diferencia entre 1 y n mínimo.

Este proceso se repetirá de forma iterativa hasta que se cumpla la condición (7); sin embargo, una vez aplicado estos criterios es posible que nunca se cumpla la dicha condición. Para evitar que el proceso iterativo se prolongue indefinidamente usaremos que si $\sigma_{\mu-1} < \sigma_{\mu}$ siendo μ el número de iteraciones realizadas hasta que el proceso se detenga. Es razonable emplear una regla así debido a que se entiende que si σ aumenta entonces la recolocación de los planetas es peor y nos alejamos del ajuste deseado. Esta claro que, debido a esta regla, es posible que algún sistema aislado mejore el valor de σ aunque en un primer momento tienda a aumentar, por ello seremos un poco más estrictos y exigiremos $\sigma_{\mu-1} < \sigma_{\mu} \cdot 0.9$ salvando así los casos que sólo por milésimas o centésimas evitarían que el sistema mejorara.

4.2. Nuevo análisis de los sistemas reconfigurados

En la *figura 8* se ha escogido algunos sistemas para observar las diferentes reconfiguraciones que ha realizado el programa en los distintos sistemas, en los que para todos estos ejemplos disminuye la pendiente, indicando así que se han incorporado órbitas vacías desconocidas hasta ahora ocupadas por "planetas" no descubiertos. Se observa también como el programa se detiene en el momento en que el σ crece, indicando, como se mencionó anteriormente, que el ajuste empeora, siendo en éstos casos el mejor valor de σ el de σ_2 .

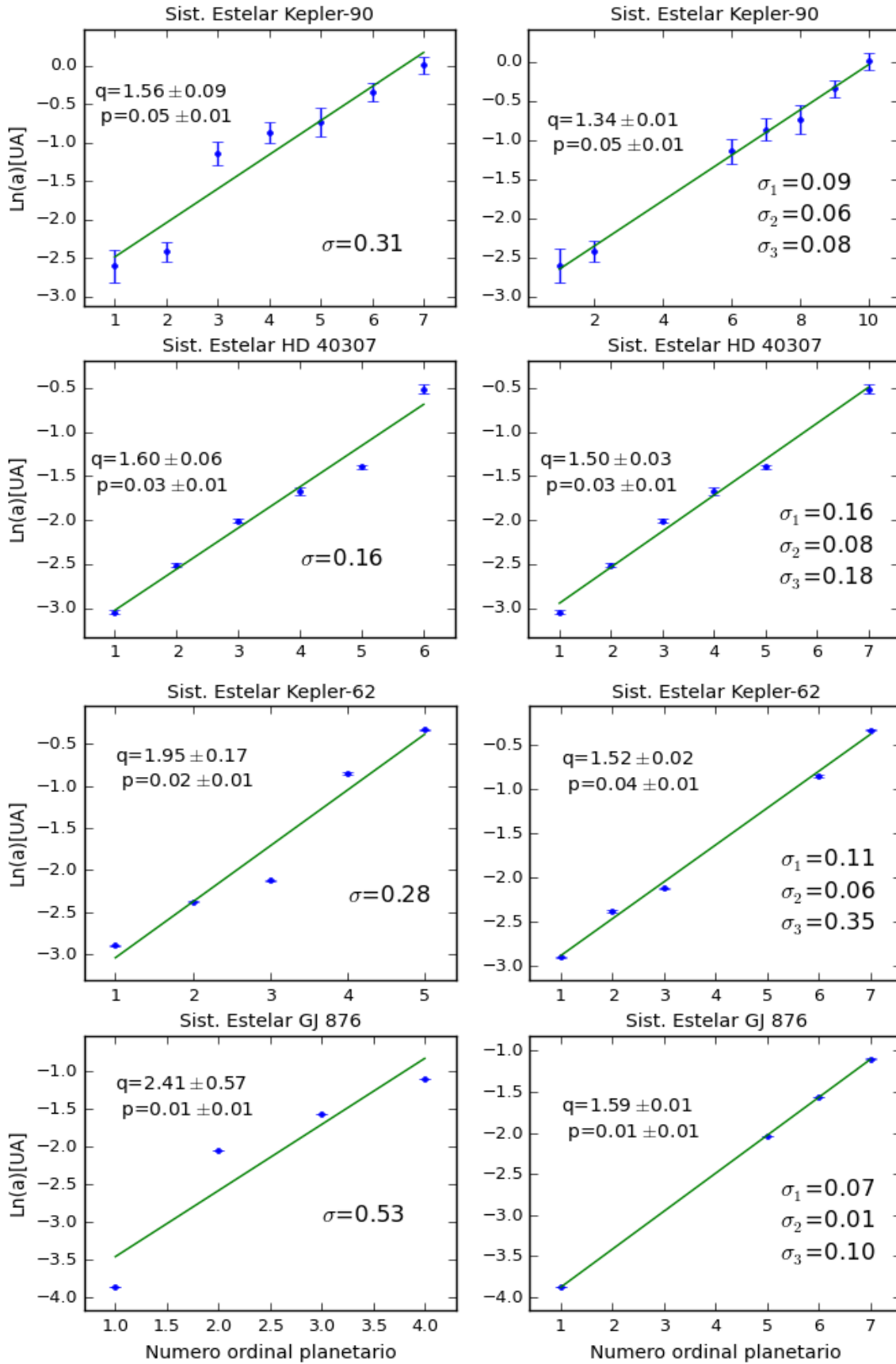


Figura 8. Análisis comparativo de los sistemas en la configuración original (izquierda) y en la nueva configuración (derecha) para los sistemas de 7, 6, 5 y 4 exoplanetas en orden descendente.

Una vez realizado todos los ajustes para todos los sistemas de la forma indicada anteriormente, sería interesante realizar un histograma similar al del capítulo anterior que muestre los valores de q y p después de reconfigurar los sistemas. Con el histograma se pretende ver si estos parámetros tienden todos al mismo valor o se puede establecer un rango en el que se distribuyen estos parámetros.

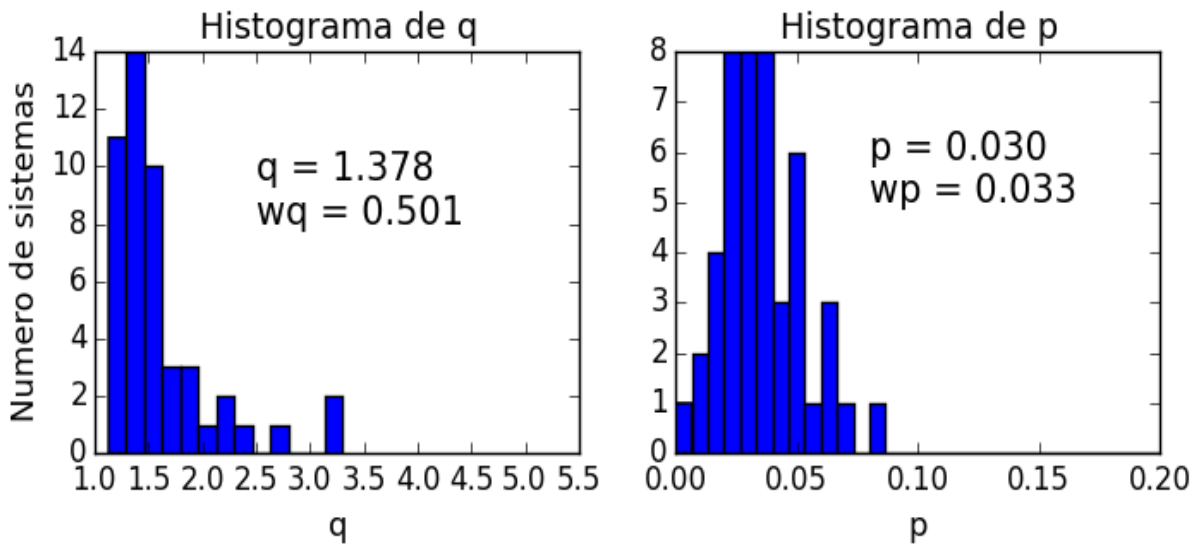


Figura 9. Histograma con los valores de q y p al reconfigurar los sistemas exoplanetarios. Éstos corresponden al valor medio de q y p más repetido y, wq y wp , a los valores de la anchura del histograma a altura mitad.

Como se puede observar en la *figura 9*, tanto los valores de q como los valores de p que han sido corregidos parecen concentrarse aún más en donde los histogramas tienen su altura máxima, si bien también se observa como hay algún valor, sobre todo de q , que no termina de agruparse en un valor similar a los demás. También se aprecia como el valor $q = 1.378$ es notablemente menor y su anchura a altura mitad es mayor, como era de esperar, puesto que al añadir órbitas vacías desplazando los planetas hacia la derecha (un n mayor) la pendiente tiende a disminuir. Los sistemas que tenían un q muy grande ahora están más agrupados en el la zona de altura máxima produciendo que la anchura a mitad de altura crezca, que recordemos, es el valor de wq . El valor de $p = 0.030$ apenas se ve modificado no así el valor de wp , que es el doble, debido a que más sistemas se agrupan alrededor de la altura máxima (comparar con *figura 6*).

Vamos a realizar un histograma, similar al de la *figura 7*, de los valores de σ para los sistemas reconfigurados, que, recordemos, proporciona información de cuán bueno es el ajuste realizado para cada sistema.

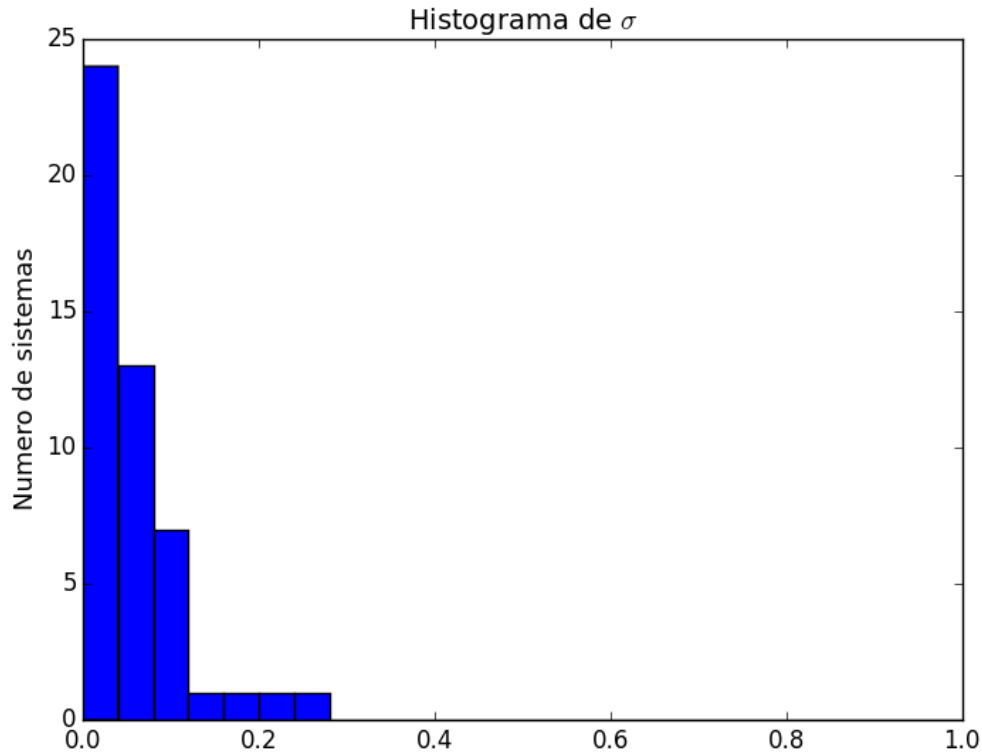


Figura 10. Histograma de σ para los sistema exoplanetarios reconfigurados.

Como era de esperar los valores de σ se reorganizan, en su mayoría, en valores pequeños, indicando así que los ajustes reconfigurados se ajustan mucho mejor a una recta que los ajustes originales (comparar con figura 7).

4.3. Análisis de los valores de q y p .

Vamos a realizar una media ponderada con el inverso del cuadrado de su respectivo error de los valores de q y p de la siguiente manera:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2}} \quad \epsilon_{ext} = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{\sigma_i^2}}{(n-1) \sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad (8)$$

donde \bar{x} es la media ponderada, σ_i es el error asociado a cada q_i y a cada p_i calculado mediante la propagación de errores explicada en el Anexo 1 y ϵ_{ext} es el llamado error externo asociado a la media ponderada.

Utilizando estas fórmulas para nuestros datos obtenemos los siguientes valores:

Parámetro	Original	Reconfigurado
q	1.384 ± 0.033	1.335 ± 0.021
p	0.027 ± 0.002	0.025 ± 0.002

Tabla 2. Comparativa de los valores medios y los errores de los parámetros q y p .

donde se entiende, en la *tabla 2*, que los valores reconfigurados son los valores con los sistemas modificados de acuerdo a (4) y los valores originales pertenecen a los sistemas tal y como los conocemos en la actualidad.

Al error de la media pesada definido en (8) se le conoce como error externo, que depende tanto de x_i como de σ_i . Sin embargo, otra forma alternativa de llegar al error de la media pesada sería mediante la propagación de errores. Si realizamos dicha propagación el error de la media pesada se le conoce como error interno y no depende de las medidas x_i sino que sólo de sus errores.

$$\epsilon_{int} = \sqrt{\frac{1}{\sum_i^n \frac{1}{\sigma_i^2}}} \quad Z = \frac{\epsilon_{ext}}{\epsilon_{int}} \quad (9)$$

El cociente entre el error externo y el error interno que se muestra en (9) debería de ser igual a la unidad¹⁰, indicando esto que no existen errores sistemáticos en las medidas. Vamos a realizar esta comprobación para nuestras medidas de la *tabla 2*.

Parámetro	Anterior	Z	Nuevo	Z
q	1.384 ± 0.033	3.383	1.335 ± 0.021	5.661
p	0.027 ± 0.002	5.462	0.025 ± 0.002	15.981

Tabla 3. Comparativa de los valores de los parámetros q y p con su correspondiente Z .

Como se puede observar los valores de Z son diferentes de la unidad, pero sí están en el mismo orden, por lo tanto, se puede considerar que los valores de q y p son válidos. Sin embargo, los valores de los errores Δq_i y Δp_i deberían ser algo mayores para que el error interno de los promedios se acercara al error externo obtenido con las distancias a la recta de ajuste. Es muy probable que los errores hayan sido minusvalorados en un factor 2 o que el modelo empleado para describirlos (la recta de ajuste) sea demasiado simple para describir correctamente las observaciones.

¹⁰ James Topping, "Theory of errors" en *Errors of Observation and Their Treatment*, (London: Chapman and Hall, 1972), 72-114.

Capítulo 5

Discusión de los resultados

In this chapter the predictive value of the model as well as the comparative of this model with other publications will be discussed. Therefore, some tests will be performed in order to better understand the proposed model. To do so, some known exoplanets of the database will be removed to check that the model's predictions. Also the hypothesis of the model will be analyzed, discussing the ability of the model to predict and possible defects in the data selection will be discussed and will attempt to answer some of the questions posed in the first chapter.

En este capítulo se discutirá el valor predictivo del modelo, así como la comparativa del este modelo con otras publicaciones. Además, se realizarán algunas pruebas con el fin de entender mejor el modelo propuesto. Por ello, se eliminarán algunos exoplanetas conocidos de la base de datos para así comprobar el que modelo los predice. También se analizarán las hipótesis del modelo, discutiendo el valor interpolatorio y extrapolatorio del modelo, así como se debatirá los posibles efectos de selección en los datos y se intentará responder a alguna de las preguntas propuestas en el primer capítulo.

5.1. Predicción del número de planetas por descubrir.

Con todos los sistemas exoplanetarios con la reconfiguración realizada se tiene un gran número de órbitas vacías que han de ser cubiertas por planetas, planetas enanos, asteroides o cuerpos similares. De aquí en adelante se hará referencia a éstos únicamente como exoplanetas. Hasta la fecha de redacción de este trabajo, el modelo predice la existencia de 73 nuevos exoplanetas que no constan en la base de datos. Una tabla con la localización de estos exoplanetas se encuentra en el *Anexo 3*.

Si en un futuro se descubriera alguno de esos exoplanetas en la localización indicada podríamos interpretar que el modelo tiene cierta solidez predictiva. Sin embargo, en el transcurso de este trabajo no ha sido incluido, en la base de datos, ningún exoplaneta de dicha tabla. Con el objetivo de comprobar la consistencia predictiva del modelo se eliminará algunos exoplanetas de los sistemas conocidos y se aplicará el código para constatar que el modelo predice la existencia de esos exoplanetas de los cuales sí se conoce su localización.

5.1.1. Exclusión de un exoplaneta conocido.

En primer lugar se suprimirá sólo un exoplaneta del sistema estelar HD 10180, el que corresponde a la posición $n = 3$.

En la *figura 11* se muestra como el modelo predice, en la gráfica de la derecha, la existencia del exoplaneta $n = 3$ (magenta) que ha sido suprimido de la base de datos, que sí se observa en la gráfica de la izquierda. Además el modelo también predice un nuevo exoplaneta en $n = 5$ (rojo) en ambas gráficas aclarando que el modelo no pierde efectividad por el hecho de que tenga un número menor de exoplanetas en el sistema. Las barras de error de los planetas predichos corresponden con la desviación estándar del ajuste.

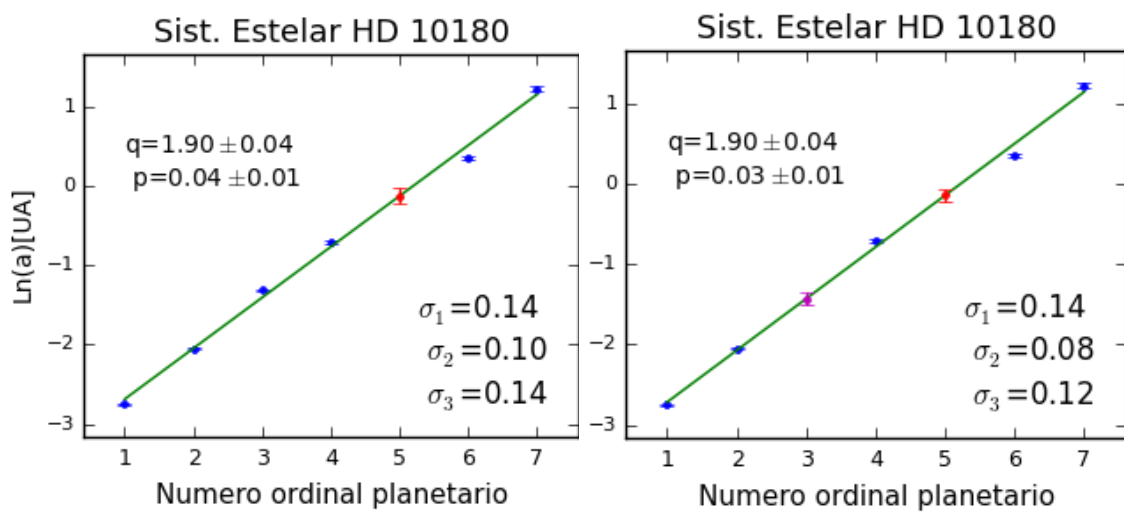


Figura 11. Aplicación del modelo para el sistema estelar HD 10180 (izquierda) y aplicación del modelo, al mismo sistema, modificando los datos iniciales al eliminar previamente un exoplaneta conocido (el dibujado en magenta)(derecha).

A continuación, en la *tabla 4*, se aprecia como el exoplaneta $n = 3$, que se ha eliminado, tiene un mismo valor de a , dentro del error estimado el cual se detalla el calculo en el *Anexo 2*, que el original. Asimismo, el valor de a para $n = 5$ se ve prácticamente inalterado en ambos casos.

Número ordinal	a [UA] (previa)	a [UA] (modificada)
3	0.245	0.240 ± 0.038
5	0.880 ± 0.168	0.867 ± 0.173

Tabla 4. Valores del semieje mayor de la órbita para los exoplanetas predichos por el modelo.

5.1.2. Exclusión de más de un exoplaneta conocido.

Como se ha observado en algunas figuras, varias veces el modelo predice la existencia de más de un exoplaneta en un mismo sistema, luego es de interés verificar la eficacia del modelo cuando predice más de un exoplaneta. Del mismo modo que en el apartado anterior se elegirá un sistema exoplanetario al cual se le borrarán dos exoplanetas. Debido a que es conveniente trabajar con el máximo de grados de libertad posible, escogeremos el único sistema exoplanetario que contiene 7 exoplanetas y se procederá del mismo modo que anteriormente, pero para este caso, se eliminarán los exoplanetas con $n = 2$ y $n = 6$.

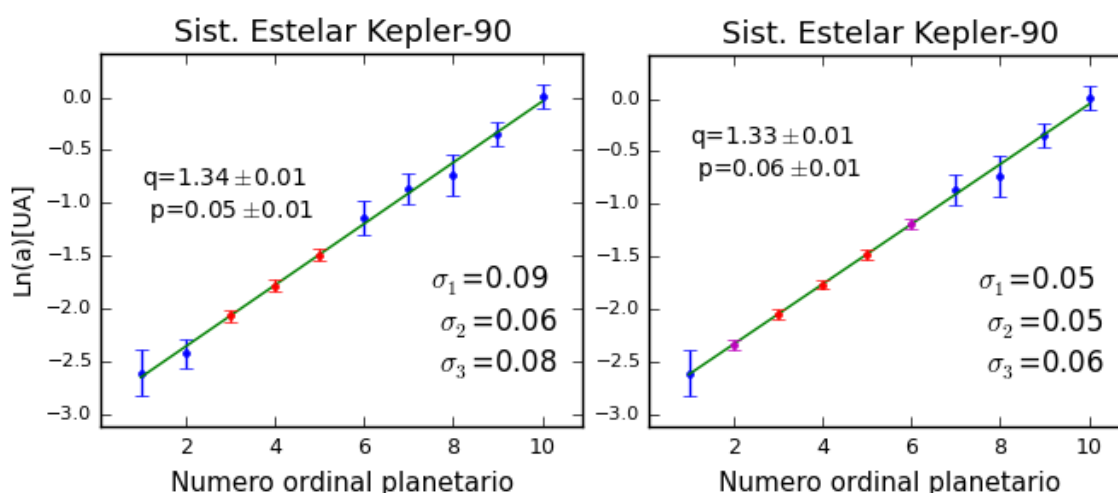


Figura 12. Aplicación del modelo para el sistema estelar Kepler-90 (izquierda) y aplicación del modelo, al mismo sistema, modificando los datos iniciales al eliminar previamente dos exoplanetas conocidos (los dibujados en magenta) (derecha).

Se puede observar en la *figura 12*, de manera cualitativa, como el modelo también funciona para predecir más de un exoplaneta en un mismo sistema, inclusive en un sistema exoplanetario tan complejo como este, en el que el modelo predice originalmente 3 exoplanetas (rojo).

Si se examina la siguiente tabla se puede contemplar como para los exoplanetas $n = 2$ y $n = 6$ (ambos en magenta) el valor de a coincide, una vez más, con el valor real que tienen los exoplanetas. Además, al igual que en el caso anterior, los exoplanetas que eran predichos originalmente también lo son ahora en las mismas órbitas dentro de las incertidumbres.

Número ordinal	a [UA] (previa)	a [UA] (modificada)
2	0.095	0.097 ± 0.010
3	0.127 ± 0.011	0.129 ± 0.015
4	0.169 ± 0.016	0.172 ± 0.022
5	0.226 ± 0.023	0.228 ± 0.031
6	0.302	0.304 ± 0.045

Tabla 5. Valores del semieje mayor de la órbita para los exoplanetas predichos por el modelo.

5.2. Comparativa de los valores de a con otros autores.

Como se indicaba en el capítulo 1, existen otros autores que han realizado publicaciones similares a este trabajo. Una de ellas es el trabajo de Poveda & Lara (2008) en que aplican la Ley de Titius-Bode original solamente a un sistema, el 55 Cnc. Como resultado, predicen la existencia de un exoplaneta en $n = 6$ con $a \sim 2$ UA. Este mismo sistema es uno de los que se muestran como resultado de las predicciones en el Anexo 3 en el que se observa que nuestro modelo predice, en el mismo número ordinal, un exoplaneta con $a = 2.043 \pm 0.529$ UA, que concuerda con la publicación citada. Este exoplaneta también es predicho en el trabajo de Bovaird & Lineweaver (2013) en $n = 6$ con $a = 2.0 \pm 0.5$ UA que, también, coincide con el valor predicho por nuestro modelo. Además, Bovaird & Lineweaver predicen la existencia de 73 exoplanetas en 68 sistemas exoplanetarios analizados. Cabe destacar que ellos usaron una base de datos que contiene tanto exoplanetas confirmados como candidatos a serlo, es por ello, que siendo un trabajo más antiguo tengan un mayor número de sistemas exoplanetarios analizados. Si observamos los exoplanetas predichos y las distancias de sus órbitas en su trabajo, podemos encontrar que coinciden con las propuestas en este modelo para los sistemas, Kepler-11, Kepler-20, Kepler-33, Kepler-62 y GJ 876 y únicamente no coincide para el sistema HD 40307. Para los restantes sistemas exoplanetarios no se han encontrado coincidencia alguna en las distintas publicaciones. Esto es debido a que los nombres de los sistemas exoplanetarios cambian frecuentemente al incluirlos en nuevas bases de datos o catálogos, haciendo difícil encontrar los mismos sistemas estelares en diferentes bases de datos.

Autores	Año	Sistema	n	a [UA]	Éste modelo	
					n	a [UA]
Poveda & Lara	2008	55 Cnc	6	~ 2	6	2.043 ± 0.529
Bovaird & Linewear	2013	55 Cnc	6	2 ± 0.5	6	2.043 ± 0.529
Bovaird & Linewear	2013	Kepler-11	6	0.34	6	0.342 ± 0.041
Bovaird & Linewear	2013	Kepler-20	5	0.22	6	0.238 ± 0.063
Bovaird & Linewear	2013	Kepler-33	2	0.09	2	0.091 ± 0.008
Bovaird & Linewear	2013	Kepler-62	4	0.20	4	0.196 ± 0.024
Bovaird & Linewear	2013	Kepler-62	5	0.26	5	0.297 ± 0.041
Bovaird & Linewear	2013	GJ 876	2	0.03	2	0.033 ± 0.001
Bovaird & Linewear	2013	GJ 876	3	0.05	3	0.052 ± 0.001
Bovaird & Linewear	2013	GJ 876	4	0.08	4	0.083 ± 0.002

Tabla 6. Comparativa de los valores del semieje mayor entre nuestro modelo y el de otros autores.

5.3. Análisis de las hipótesis del modelo.

En el capítulo 5 se muestra el poder predictivo del modelo propuesto, sin embargo, este modelo es únicamente interpolatorio, es decir, sólo predice la existencia de exoplanetas dentro de los valores del número ordinal mínimo y máximo que se conoce. Es evidente que el modelo se podría usar para extrapolar los valores de a fuera del rango mencionado, como de hecho, realizan otros autores ya citados, pero nuestro modelo carece de capacidad suficiente para predecir de manera extrapolatoria.

Se podría, a modo de ensayo, calcular el número ordinal para el sistema solar, $n = 10$ que correspondería con $a = 49.768 \pm 12.901$ [UA]. Éste valor de a pertenece a la zona más alejada del cinturón de Kuiper en la que, cercana a esta órbita, habitan los objetos transneptunianos¹¹ de Makemake ($a = 45.763 \pm 0.001$ [UA]) y 2002 AW197 ($a = 47.526 \pm 0.006$ [UA]). Si bien, estos valores de a se acercan al descrito por nuestro modelo, existen una gran cantidad de objetos en las inmediaciones que también cumplirían de manera aproximada con el modelo. Si se siguiera aumentando el valor de n nos encontraríamos con órbitas vacías (en la actualidad) que parecen poco probable que estén ocupadas por planetas. Aquí lo interesante sería comprobar hasta cuantos planetas puede tener un sistema planetario o hasta que distancia a la estrella podemos encontrar planetas. Estas cuestiones, sin duda, merecen estudios más profundos en el futuro.

5.4. ¿Es la Ley de Titius-Bode universal?

Los resultados del ajuste calculados en el capítulo 3 para el sistema solar muestran que $q = 1.73 \pm 0.03$, sin embargo, en el capítulo 4 se observa que el valor promedio es 1.38 ± 0.03 para los sistemas exoplanetarios con los datos originales y 1.34 ± 0.02 para los sistemas exoplanetarios después de ser reconfigurados. El resultado del valor de q para los sistemas reconfigurados disminuye de acuerdo a lo esperado puesto que, recordemos, al añadir más exoplanetas lo que hacemos es desplazar los mismos a un número ordinal mayor y, por tanto, la pendiente tiene a disminuir. Si bien los histogramas del capítulo 4, en la *figura 12*, muestran la tendencia hacia el valor anteriormente mencionado de q , no queda completamente definido ese valor, sino que más bien éste comprende un rango de valores cercanos a la media pesada de q . Además, también se observa que existe una diferencia notable entre los valores de q del sistema solar y del resto de sistemas exoplanetarios. Todo esto indica que no existe un único valor de q universal, a pesar del agrupamiento entorno a la media, sino que cada sistema cumple su propia ley de Titius-Bode en la que el valor de los parámetros cambia.

Se ha de tener en consideración que existe un efecto de selección en los datos que se tienen de exoplanetas, puesto que casi la totalidad de los exoplanetas que conocemos cumplen unas determinadas características. Éstas son que, en su mayoría, los exoplanetas descubiertos son planetas gigantes (mucho mayores que la Tierra), cercanos a su estrella anfitriona y con periodos orbitales relativamente

¹¹ National Aeronautics and Space Administration (NASA), "JPL Small-Body Database Browser", <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi#top>.

cortos (~ 46 días). Las características vienen limitadas por la capacidad tecnológica en la exploración exoplanetaria que se tiene en la actualidad. Los métodos¹² más usados para la detección de exoplanetas son los llamados de tránsito y velocidad radial, en los que un mayor tamaño del planeta así como un periodo lo suficientemente corto como para observar muchos tránsitos sobre la estrella son fundamentales, de ahí que la mayor parte de los exoplanetas posean estas características. Esto podría explicar la diferencia encontrada entre los valores de los parámetros del sistema solar y el resto de los sistemas exoplanetarios, sobre todo para el valor de p , y es que la mayoría de estos últimos son sistemas muy diferentes al nuestro.

¹² Michael Perryman, "Radial velocities" and "Transits", en *The Exoplanet Handbook*, (United Kingdom: Cambridge University Press, 2014), 9-60, 103-146.

Capítulo 6

Conclusiones y proyectos futuros

In this chapter, the final conclusions are presented and some ideas on future projects that have not been addressed in this text will arise.

En este capítulo se expondrán las conclusiones finales del trabajo y se plantearán algunas ideas sobre proyectos futuros que no se han abordado en éste texto.

6.1. Conclusiones

Después de analizar y discutir los resultados se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- I. Se ha diseñado y programado un código informático, en Python, que permite leer y analizar una base de datos de exoplanetas que crea un modelo predictivo de las distancias de las órbitas de éstos a su estrella, y que este código reanaliza los datos cada vez que sean actualizados.
- II. Aplicando el modelo al sistema solar, queda claro que la razón geométrica no es 2 como creía Titius sino 1.73 ± 0.03 . Para el resto de sistemas exoplanetarios conocidos se obtiene un valor medio de 1.334 ± 0.021 .
- III. Aplicando el modelo a la base de datos de exoplanetas actual, se pone de manifiesto la capacidad predictiva del modelo, ofreciendo una tabla de hasta 73 predicciones.
- IV. Se deduce que, aunque la Ley de Titius-Bode es muy común, los logaritmos de las distancias de las órbitas siguen una relación lineal con el orden, la razón geométrica no es la misma para cada sistema exoplanetario.
- V. Para finalizar, no se puede afirmar nada acerca del alcance de la Ley de Titius-Bode dentro de un sistema estelar, por tanto, el carácter extrapolatorio del modelo es meramente orientativo y tendrá que considerarse sólo el uso interpolatorio.

6.2. Proyectos futuros.

Las conclusiones de este texto dejan la puerta abierta a nuevos estudios complementarios sobre determinados apartados que, por diversos motivos, no se han tratado en éste texto:

- I. Buscar alguna magnitud o relación común a los sistemas cuyos parámetros del ajuste son similares, como la masa o edad de la estrella. Éste razonamiento se ha considerado para este trabajo pero debido a un gran efecto de selección que tienen los sistemas de la base de datos, así como la gran imprecisión en los valores de la masas de las estrellas o el desconocimiento de la edades de éstas hace que cualquier resultado obtenido no sea concluyente.
- II. Sería interesante tener la posibilidad de inspeccionar, mediante fotometría, algunos de los valores de a predichos por el modelo. Con éste método se obtienen los valores de a y, consecuentemente, los valores del periodo de la órbita, que son clave en la búsqueda de exoplanetas. Asimismo, seguir trabajando en esta línea para completar el uso de éste modelo con los valores del perihelio o afelio de las órbitas, que permitirían conocer el momento en el que el exoplaneta transita por delante de la estrella.
- III. Adaptar el modelo a los sistemas exoplanetarios de contengan menos de 4 exoplanetas. Esto permitiría incrementar el número de sistemas exoplanetarios utilizados aumentando la fiabilidad estadística.

Anexo

Anexo 1

A partir de los cambios de variable realizados en (4) se obtienen los siguientes errores mediante propagación de errores:

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial Y}{\partial a} \right| \cdot \Delta a = \left| \frac{1}{a} \right| \cdot \Delta a = \frac{\Delta a}{|a|}$$

Deshaciendo el cambio y efectuando la propagación de errores se obtiene:

$$q = e^A \qquad p = e^B$$
$$\Delta q = \left| \frac{\partial q}{\partial A} \right| \cdot \Delta A = |e^A| \Delta A \qquad \Delta p = \left| \frac{\partial p}{\partial B} \right| \cdot \Delta B = |e^B| \Delta B$$

Para calcular los valores de ΔA y ΔB se utiliza la matriz de covarianza¹³:

$$\Delta A = \sqrt{\sigma_A^2 + 2\sigma_{AB}^2} \qquad \Delta B = \sqrt{\sigma_B^2 + 2\sigma_{AB}^2} \qquad C = \begin{pmatrix} \sigma_A^2 & \sigma_{AB}^2 \\ \sigma_{BA}^2 & \sigma_B^2 \end{pmatrix}$$

donde la matriz C es la matriz de covarianza. Si el ajuste fuera perfecto los valores fuera de la diagonal de C sería nulos, pero si existe relación entre los parámetros A y B , y en general así es, entonces los valores no diagonales serán no nulos. Con el objetivo de ser lo más preciso posible, los valores no diagonales se incluirán en el calculo de los errores.

El cálculo del ajuste y la matriz de covarianza, se han realizado usando la función `curve_fit` del módulo del Python `Scipy`.

Anexo 2

Para el calculo del error asociado al valor a usado en el capítulo 5, siendo $a = a(q, p) = a(A, B)$ explicado en la ecuación (3), se ha utilizado la siguiente propagación de errores¹⁴ teniendo en cuenta la posible correlación entre parámetros:

$$\sigma_a^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial A} \right)^2 \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B} \right)^2 \sigma_B^2 + 2 \left(\frac{\partial a}{\partial A} \right) \left(\frac{\partial a}{\partial B} \right) \sigma_{AB}^2$$

$$\sigma_a^2 = (ne^{nA}e^B)^2 \sigma_A^2 + (e^{nA}e^B)^2 \sigma_B^2 + 2(ne^{nA}e^B)(e^{nA}e^B) \sigma_{AB}^2$$

donde se han usado los valores de la matriz de covarianza descrita en el anexo anterior.

¹³ Philip R. Bevington and D. Keith Robinson, "Least-Squares Fit to a Polynomial", en *Data Reduction and Error Analysis for de Physical Sciences*, (New Yor: Mc Graw Hill, 2003), 116-135.

¹⁴ Philip R. Bevington and D. Keith Robinson, "Error Analysis", en *Data Reduction and Error Analysis for de Physical Sciences*, (New Yor: Mc Graw Hill, 2003), 36-50.

Anexo 3

Tabla con los valores de a y Δa predichos por el modelo propuesto.

Número	Número ordinal	a [UA]	Δa [UA]	Sistema Estelar
1	3	0.127	0.011	Kepler-90
2	4	0.169	0.016	Kepler-90
3	5	0.226	0.023	Kepler-90
4	2	0.078	0.009	GJ 667 C
5	7	0.405	0.083	GJ 667 C
6	5	0.880	0.168	HD 10180
7	6	0.405	0.077	HD 40307
8	6	0.342	0.041	Kepler-11
9	2	0.040	0.006	55 Cnc
10	6	2.043	0.529	55 Cnc
11	5	0.165	0.030	Kepler-169
12	6	0.237	0.047	Kepler-169
13	5	0.179	0.017	Kepler-186
14	6	0.257	0.027	Kepler-186
15	5	0.168	0.040	Kepler-20
16	6	0.238	0.063	Kepler-20
17	3	0.054	0.002	Kepler-292
18	5	0.080	0.005	Kepler-292
19	7	0.118	0.008	Kepler-292
20	3	0.082	0.004	Kepler-296
21	2	0.091	0.008	Kepler-33
22	4	0.196	0.024	Kepler-62
23	5	0.297	0.041	Kepler-62
24	3	0.519	0.176	GJ 676 A
25	2	0.033	0.001	GJ 876
26	3	0.052	0.001	GJ 876
27	4	0.083	0.002	GJ 876
28	3	1.159	0.143	HD 141399
29	5	3.172	0.506	HD 141399
30	2	19.632	1.745	HR 8799
31	4	32.691	3.769	HR 8799
32	6	54.435	7.742	HR 8799
33	2	0.082	0.007	Kepler-122
34	4	0.125	0.013	Kepler-122
35	6	0.189	0.025	Kepler-122

36	4	0.368	0.190	Kepler-167
37	5	0.788	0.461	Kepler-167
38	2	0.073	0.004	Kepler-197
39	4	0.101	0.008	Kepler-197
40	6	0.141	0.013	Kepler-197
41	2	0.065	0.005	Kepler-208
42	4	0.087	0.008	Kepler-208
43	6	0.117	0.013	Kepler-208
44	3	0.144	0.005	Kepler-215
45	5	0.242	0.010	Kepler-215
46	3	0.107	0.013	Kepler-220
47	2	0.047	0.002	Kepler-221
48	4	0.070	0.004	Kepler-221
49	6	0.107	0.007	Kepler-221
50	3	0.101	0.004	Kepler-223
51	2	0.080	0.002	Kepler-251
52	5	0.271	0.009	Kepler-251
53	2	0.034	0.002	Kepler-256
54	4	0.052	0.005	Kepler-256
55	6	0.079	0.009	Kepler-256
56	3	0.160	0.040	Kepler-265
57	4	0.086	0.007	Kepler-286
58	5	0.124	0.012	Kepler-286
59	3	0.091	0.003	Kepler-306
60	5	0.166	0.007	Kepler-306
61	3	0.105	0.001	Kepler-341
62	4	0.139	0.002	Kepler-341
63	2	0.090	0.002	Kepler-85
64	4	0.115	0.004	Kepler-85
65	6	0.146	0.006	Kepler-85
66	2	0.069	0.005	KOI-94
67	4	0.125	0.012	KOI-94
68	6	0.225	0.026	KOI-94
69	4	0.239	0.076	WASP-47
70	5	0.563	0.204	WASP-47
71	2	0.197	0.050	mu Ara
72	3	0.387	0.113	mu Ara
73	6	2.938	1.185	mu Ara

Bibliografía

- [1] Bevington, P. R., y D. K. Robinson. *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*. New York: Mc Graw Hill, 2003.
- [2] Bovarid, T., y C.H. Lineweaver. "Exoplanet Predictions Based on the Generalised Titius-Bode Relation". *MNRAS* 435 (2013): 116-1138.
- [3] Clark, Stuart. *EXTRASOLAR PLANETS, The Search for New Worlds*. Chichester: Chichester, 1998.
- [4] Levy, D. H. *Guía celeste*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [5] Murray, C.D., y S.F. Dermott. *Solar System Dynamics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [6] Nieto, M. M. *The Titius-Bode Law of Planetary Distances: Its History and Theory*. Oxford: Pergamon Press Ltd., 1972.
- [7] Perryman, M. *The Exoplanet Handbook*. United Kingdom: Cambridge University Press, 2014.
- [8] Poveda, A., y P. Lara. "The Exo-Planetary System of 55 Cancri and the Titius-Bode Law". *Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica* (2008): 243-246.
- [9] Topping, J. *Errors of Observation and Their Treatment*. London: Chapman and Hall, 1972.
- [10] X. Huang, C., y G. Á. Bakos. "Testing the Titius-Bode law predictions for Kepler multi-planet system". *MNRAS* 442 (2014): 674-681.