



Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna

Mecánica Celeste: una introducción

TRABAJO FIN DE GRADO

presentado por

KEVIN MELIÁN PERDOMO

La Laguna, 17 de septiembre de 2014

La memoria “Mecánica Celeste: una Introducción” ha sido realizada en el curso 2013–2014 por D. Kevin Melián Perdomo al objeto de ser presentada por éste como “Trabajo de Fin de Grado”. Como director del trabajo, otorgo el visto bueno a su defensa pública.

En La Laguna, a 17 de septiembre de 2014.

Fdo. José Sabina de Lis

Índice general

INTRODUCCIÓN	VI
1. Aspectos preliminares	1
1.1. Ley de Gravitación Universal	1
1.2. Fuerzas centrales	2
1.3. Movimiento en un campo de fuerzas centrales	2
1.4. Traslación del instante inicial	3
1.5. Reversibilidad del tiempo	3
1.6. Invariancia por Isometrías	3
1.7. El momento angular	4
1.8. Expresión en polares de un movimiento plano	5
1.9. Fórmula del área en coordenadas polares	6
1.10. Segunda ley de Kepler	7
1.11. Colisiones	8
1.12. Potencial y conservación de la energía	11
2. Problema de dos cuerpos	13
2.1. El problema general de dos cuerpos	13
2.2. Ecuación focal de una cónica	14
2.3. Primera ley de Kepler	16
2.4. Clasificación de las órbitas según su energía	17
2.5. Ecuación de una cónica en coordenadas polares	18
2.6. Recorrido completo de la órbita	21
2.6.1. Existencia global de la solución	21
2.6.2. La elipse se recorre infinitas veces	22
2.6.3. La solución recorre la elipse de forma periódica	23
2.7. Tercera Ley de Kepler	23
2.8. Ecuación de Kepler	25
2.8.1. La órbita en términos de la anomalía real	27
2.8.2. La órbita en términos de la anomalía excéntrica	27
3. Problema de tres cuerpos	29
3.1. Formulación del problema de los n cuerpos	29
3.2. Puntos de equilibrio	30
3.3. Soluciones maximales	31
3.4. Momento de inercia y fórmula de Lagrange-Jacobi	32
3.5. Centro de masas	33
3.6. Conservación del momento angular	34
3.7. Colapso total	35

3.7.1. Un ejemplo particular de triple colisión	35
3.8. Soluciones circulares de Lagrange	37
3.9. El problema restringido de los tres cuerpos	39
3.9.1. Preparación de las ecuaciones	40
3.9.2. Los cinco puntos de libración	41
BIBLIOGRAFÍA	43

Introducción

Contenido

El siguiente trabajo es un estudio de los aspectos elementales de los problemas de dos y tres cuerpos, realizado durante el curso académico 2013-2014 bajo la dirección de José Sabina de Lis, profesor del departamento de Análisis Matemático.

El proyecto lo hemos dividido en tres capítulos, en los dos primeros estudiaremos el movimiento relativo de un astro alrededor de otro de mayor masa (v. g., la Tierra y el Sol). Demostraremos las tres leyes de Kepler (la segunda en el Capítulo 1 y las otras dos en el Capítulo 2). El punto de partida es, por supuesto, la ley de Gravitación Universal de Newton.

En el primer capítulo obtendremos otros resultados básicos sobre campos de fuerzas centrales como la conservación del momento angular y la energía total. Estudiaremos en detalle el caso de movimiento angular cero. En el segundo capítulo analizaremos el problema real de los dos cuerpos introduciendo el centro de masas. Nos centraremos en el movimiento elíptico, probaremos rigurosamente que el movimiento es periódico. Para describir el movimiento del cuerpo relativo al de masa mayor introduciremos las anomalías real y excéntrica, y deduciremos la ecuación de Kepler.

Algunos aspectos elementales del problema de los n -cuerpos los consideraremos en el tercer capítulo. Específicamente la energía y momento angular totales, centro de masas, no existencia de equilibrios y cuándo la trayectoria tiene un intervalo finito de existencia. La relación de esta última cuestión con la posibilidad de colisiones se estudia en detalle. También analizaremos la posibilidad de una colisión múltiple y el teorema de Sundman que afirma que si ésta se produce entonces el momento angular total es nulo. Finalizaremos nuestro estudio tratando el problema *restringido* de los tres cuerpos y sus puntos de libración (cinco posiciones donde el cuerpo de masa menor se mantiene en reposo con respecto a los otros dos).

Objetivos y plan de trabajo

La materia abordada en el trabajo se estudia habitualmente en los cursos elementales de mecánica, especialmente el problema de los dos cuerpos ([?]). El objetivo perseguido ha consistido en analizar rigurosamente las trayectorias de las partículas desde el punto de vista de la teoría general de ecuaciones diferenciales ordinarias. La finitud del intervalo de existencia de una trayectoria, o su carácter periódico son dos de la clase de cuestiones que merecen este análisis técnico. La teoría cualitativa de ecuaciones fue fundada hace más de un siglo por H. Poincaré para probar, en el sentido matemático del término, la existencia –incluso estabilidad– de órbitas periódicas en el problema de los tres cuerpos ([1]).

El plan de trabajo ha consistido en estudiar el texto [3] y complementarlo tomando como referencia teórica las notas [4].

Antecedentes, discusión de resultados, conclusiones

No se han abordado en esta memoria problemas originales de investigación.

Abstract

This work is a preliminary study of the elementary aspects of Celestial Mechanics. Main issues addressed are the two-body problem, collisions, shape of the orbits, global definition in time of motion equations, analysis of the periodicity of closed orbits. These features are customary gathered in the well-known Kepler Laws. In addition, some few aspects of the n -body problem are also discussed. Special emphasis is put in the restricted three-body problem and its equilibrium configuration in a rotating framework. The main objective of the whole memory is performing a rigorous analysis of the subjects based upon the general theory of ordinary differential equations.

Capítulo 1

Aspectos preliminares. Campos de fuerzas centrales

1.1. Ley de Gravitación Universal

Una de las grandes aportaciones de Newton a la mecánica fue su investigación sobre cómo los objetos celestes se atraen mutuamente. En el caso de dos cuerpos, identificados como partículas, vamos a describir sus ideas. Sean M y m las masas de aquéllas y supongamos que M está situada, por comodidad, en el origen de coordenadas. Si se coloca m en cualquier punto $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, la evidencia experimental prueba que esta partícula se ve atraída por M . La atracción adopta la forma de un vector fuerza que tiene la misma dirección que el vector posición $x = (x_1, x_2, x_3)$, pero con sentido opuesto. Además, su magnitud es proporcional al producto mM y al inverso del cuadrado de $|x|$. Es decir, el módulo de la fuerza tiene es:

$$|F| = G \frac{Mm}{|x|^2},$$

donde G es la constante de proporcionalidad, llamada de gravitación. Lo que acabamos de describir es la llamada ley de la gravitación universal debida esencialmente a Newton.

En formato vectorial:

$$F = \frac{-GMm}{|x|^2} \frac{x}{|x|}.$$

La fuerza F produce una aceleración en la masa m . Si admitimos que M es considerablemente mayor que m , $M \gg m$, entonces se puede admitir que M está en reposo con respecto a m y por tanto M permanece anclada en el origen. El problema de interés consiste en describir el movimiento del cuerpo de masa m con respecto al tiempo t . Si $x(t) \in \mathbb{R}^3$ es su posición en el instante t , entonces la segunda ley de Newton permite establecer una relación entre fuerza y la aceleración. A saber:

$$F = mx''(t).$$

Usando por tanto la expresión de F llegamos a la ecuación diferencial para $x(t)$:

$$x'' = -GM \frac{x}{|x|^3}, \tag{1.1}$$

en donde hemos simplificado m en ambos miembros. Podemos escribir la ecuación en la forma:

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|},$$

donde $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$ y $\mu = GM$. El segundo miembro de la ecuación es lo que se denomina un campo de fuerzas centrales

Recordemos que estamos suponiendo que $M \gg m$ y que m no produce ninguna perturbación en M . Sin embargo, esto no es totalmente cierto pues m también atrae a M , aunque sea mínimamente.

También obtenemos como conclusión que, como ya enunció Galileo Galilei, dos cuerpos en el vacío caen a la misma velocidad independientemente de sus masas (simplificación de m).

1.2. Fuerzas centrales

Un campo de fuerzas $F : \mathbb{R}^3/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, se dice *central* si es de la forma

$$F(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|}, \quad (1.2)$$

donde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Cuando $f > 0$ el origen es repulsivo y cuando $f < 0$ el origen es atractivo. A cada función continua f le corresponde un campo de fuerzas centrales F .

1.3. Movimiento en un campo de fuerzas centrales

Supondremos f continua y por lo tanto el campo F también lo será. Una partícula de masa unidad se mueve en el campo de fuerzas centrales (1.2) describiendo un movimiento de vector posición $x(t)$, donde $x(t)$ cumple:

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|}.$$

En el caso particular del campo generado dos masas $f(r) = -\frac{\mu}{r^2}$ y la posición $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ de la partícula m satisface el sistema de ecuaciones:

$$x_i'' = -\mu \frac{x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} \quad i = 1, 2, 3.$$

En esta fase inicial no resulta difícil encontrar una clase particular de soluciones periódicas, que es el patrón de movimiento de los astros. Suponemos que el movimiento ocurre en el plano, hipótesis que justificaremos más adelante. Al buscar soluciones circulares se propone como solución:

$$x(t) = ae^{i\theta},$$

con $a > 0$ constante. Se comprueba que es efectivamente solución si:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \quad \omega = \frac{\mu^{1/2}}{a^{3/2}}.$$

Para $\mu = 1$, dos soluciones particulares son:

$$x(t) = (\cos t, \text{sen } t) \quad (\theta_0 = 0, a = 1),$$

y

$$y(t) = 2\left(\cos \frac{t}{\sqrt{8}}, \text{sen } \frac{t}{\sqrt{8}}\right) \quad (\theta_0 = 0, a = 2).$$

Esto expresa que el problema admite soluciones periódicas sencillas. Estas se están observando desde el origen. Debe notarse sin embargo que el movimiento de $y(t)$ con respecto a $x(t)$, dado por el vector:

$$z(t) = y(t) - x(t)$$

es considerablemente más complicado y, en primera instancia, no es siquiera periódico. Esto es lo que ocurre cuando un planeta es observado desde otro, y no desde la masa mayor M (el sol). En este punto estamos admitiendo que los planetas no se perturban entre sí.

1.4. Traslación del instante inicial

Supongamos un campo de fuerzas centrales cualquiera y la correspondiente ecuación para un partícula de masa unidad:

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

La ecuación es autónoma, es decir, la parte derecha de la igualdad no depende del tiempo y por ello si $x = x(t)$ es solución entonces $x = x(t+c)$ también lo es para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Por ejemplo,

$$y(t) = (\cos(t+c), \sin(t+c), 0) \quad t \in \mathbb{R},$$

es una familia de soluciones de

$$x'' = -\frac{x}{|x|^3}.$$

1.5. Reversibilidad del tiempo

Teorema 1.1. *Si $x = x(t)$ es un movimiento en un campo de fuerzas centrales*

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

entonces $x(-t)$ también lo es.

Demostración. La comprobación es inmediata. La ecuación diferencial es autónoma y por lo tanto el segundo miembro no varía con el cambio a $-t$. La parte izquierda de la igualdad tampoco varía con dicho cambio pues derivando dos veces $x(-t)$ respecto del tiempo:

$$\frac{dx}{dt} = -x'(-t) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x''(-t).$$

Con otras palabras, podemos describir el movimiento pasado en base a los datos del presente. \square

1.6. Invariancia por Isometrías

Una isometría (lineal) en \mathbb{R}^3 se representa por una matriz ortogonal:

$$A \in M_3(\mathbb{R}), \quad AA^T = A^T A = I_3.$$

Recordemos que $O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) : A \text{ ortogonal}\}$ es un grupo respecto del producto matricial. Si A es ortogonal entonces es una isometría.

Propiedad 1.2. *Si A es ortogonal:*

$$|Ax| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

Además si el $\det A > 0$ se trata de un giro, si en cambio $\det A < 0$, la transformación es un giro seguido de una simetría.

Propiedad 1.3. *Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ una solución de la ecuación:*

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|},$$

y $A \in O(3)$ una matriz ortogonal. Entonces:

$$y : \begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \\ t \longmapsto y(t) = Ax(t) \end{array}$$

también es una solución.

Demostración. Comprobemos que $y(t) = Ax(t)$ también es solución de la ecuación diferencial:

$$x''(t) = -GM \frac{x}{|x|^3}$$

Para ello derivamos $y(t)$ dos veces con respecto del tiempo

$$y''(t) = Ax''(t) = -GM \frac{Ax}{|x|^3} = -GM \frac{Ax}{|Ax|^3} = -GM \frac{y}{|y|^3}.$$

La penúltima igualdad se debe a que A es ortogonal. □

1.7. El momento angular

En la siguiente definición,

$$x \wedge y$$

denota el producto vectorial de $x, y \in \mathbb{R}^3$. Dicho vector es el único $z \in \mathbb{R}^3$ tal que:

$$\det(x, y, \xi) = \langle z, \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^3.$$

Sea $x : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 . Definimos su momento angular como la siguiente función $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$c(t) = x(t) \wedge x'(t).$$

Supongamos que nuestra partícula se mueve en el campo de fuerzas centrales:

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|},$$

y que x es de clase C^2 . Entonces:

$$c' = x'(t) \wedge x'(t) + x(t) \wedge x''(t) = 0,$$

y el momento angular se conserva. La siguiente propiedad es consecuencia de este resultado.

Proposición 1.4. *Si $x(t)$ es un movimiento con momento angular $c(t) \neq 0$ entonces $x(t)$ se mueve en un plano π que pasa por el origen.*

Demostración. Denotemos $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$ y $c_0 = x_0 \wedge x'_0$. Entonces

$$\langle x(t), c_0 \rangle = \langle x(t), c(t) \rangle = 0,$$

porque x y c son ortogonales mientras $c(t) = c_0$ para todo $t \in I$. Por lo que $x(t)$ está en el plano π de ecuación:

$$\langle x, c_0 \rangle = 0.$$

Es evidente que $0 \in \pi$. □

Proposición 1.5. *Si el momento angular $c(t) = 0$ el movimiento $x(t)$ tiene lugar en una semirrecta.*

Demostración. Como $c = 0$ resulta que $x(t), x'(t)$ son linealmente dependientes, es decir, existe $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$x'(t) = \lambda x(t), \quad t \in I.$$

Comprobamos que $\frac{x}{|x|}$ es constante:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{x'|x| - x \left(\frac{x'x}{|x|} \right)}{|x|^2} = 0.$$

Por lo que existe un vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $x/|x| \equiv v$ en I , donde $|v| = 1$ y

$$x(t) = |x(t)|v,$$

para todo $t \in I$. □

Nota 1.6. En el caso del campo gravitatorio, una forma de comprobar que los movimientos planos de las partículas son posibles es simplemente considerar que $x = (x_1, x_2, 0)$. Esto no contradice la ecuación diferencial y resulta:

$$x_i'' = \mu \frac{x_i}{|x|}, i = 1, 2.$$

Nota 1.7. Usando las propiedades de invariancia frente a isometrías siempre podemos suponer que el plano π donde tiene lugar el movimiento es precisamente el plano x - y .

1.8. Expresión en polares de un movimiento plano

El siguiente resultado permite representar, de forma rigurosa, una curva en coordenadas polares. Se le conoce como el “lema de elevación de arcos” en el contexto de la topología y debe señalarse que es válido para curvas meramente continuas. Aquí se ofrece una demostración apoyada en resultados de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.8. Sean $I = [t_0, t_1]$ un intervalo y $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de clase C^k , $k \geq 1$, que no pasa por el origen:

$$\alpha(t) \neq 0,$$

para todo $t \in I$. Entonces existen funciones $r, \theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, llamadas módulo y argumento, de clase C^k tales que $r(t) > 0$ y

$$\alpha(t) = r(t)(\cos \theta(t), \text{sen } \theta(t)),$$

para todo $t \in I$. Además, $r(t)$ es única y $\theta(t)$ también lo es módulo múltiplos $2h\pi$, $h \in \mathbb{Z}$, de 2π .

Demostración. Como $|\alpha(t)| = r(t)$ vamos a considerar $|\alpha(t)| = 1$, ya que en otro caso dividiríamos la curva $\alpha(t)$ por su módulo.

Existe θ_0 tal que:

i) $\alpha_1(t_0) = \cos \theta(t_0)$.

ii) $\alpha_2(t_0) = \text{sen } \theta(t_0)$.

Primero probamos la unicidad de $\theta(t)$ bajo la condición $\theta(t_0) = \theta_0$. Derivamos i) y obtenemos

$$\alpha_1'(t) = -\theta' \text{sen } \theta.$$

Ahora, multiplicamos la ecuación por ii)

$$\alpha_1'(t)\alpha_2(t) = -\theta' \text{sen}^2 \theta.$$

Realizamos el mismo procedimiento con ii)

$$\alpha_2'(t)\alpha_1(t) = \theta' \cos^2 \theta.$$

Ahora restamos ambas

$$\alpha_2'(t)\alpha_1(t) - \alpha_1'(t)\alpha_2(t) = \theta' \cos^2 \theta + \theta' \operatorname{sen}^2 \theta = \theta'(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) = \theta'.$$

Por último integramos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \theta'(s) ds = \int_{t_0}^{t_1} (\alpha_2'(s)\alpha_1(s) - \alpha_1'(s)\alpha_2(s)) ds,$$

de donde:

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t_1} (\alpha_2'(s)\alpha_1(s) - \alpha_1'(s)\alpha_2(s)) ds, \quad (1.3)$$

donde $\theta_0 = \theta(t_0)$. Esto prueba la unicidad de $\theta(t)$.

Ahora vamos a demostrar la existencia. Introducimos la curva $(x(t), y(t)) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ definida como:

$$(x(t), y(t)) = (\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t)),$$

donde $\theta(t)$ está definida por (1.3). Entonces, (x, y) cumple el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = -\theta' y \\ y' = \theta' x \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_0) = \alpha_1(t_0) \\ y(t_0) = \alpha_2(t_0). \end{cases} \quad (1.4)$$

Verificamos ahora que $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ satisface (1.4). Es evidente que cumple la condición inicial. En cuanto a la ecuación, de la condición $|\alpha(t)| = 1$ se tiene:

$$\alpha_1 \alpha_1' + \alpha_2 \alpha_2' = 0.$$

Por la definición (1.3) de θ :

$$\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_1' \alpha_2 = \theta'.$$

Formando el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 \alpha_1' + \alpha_2 \alpha_2' = 0 \\ \alpha_1 \alpha_2' - \alpha_1' \alpha_2 = \theta', \end{cases}$$

se deduce que:

$$\alpha_1' = -\theta' \alpha_2, \quad \alpha_2' = \theta' \alpha_1.$$

Por lo tanto, (α_1, α_2) resuelve el mismo problema de valor inicial que (x, y) , de donde:

$$\alpha_1 = \cos \theta, \quad \alpha_2 = \operatorname{sen} \theta.$$

□

1.9. Fórmula del área en coordenadas polares

La siguiente propiedad es consecuencia del teorema de la divergencia (ver [2]).

Propiedad 1.9. Sea $\alpha(t) = r(t)(\cos \theta(t), \operatorname{sen} \theta(t))$, $t \in [t_0, t_1]$ una curva de clase C^1 , tal que

$$\theta'(t) > 0 \quad \text{para } t \in [t_0, t_1], \quad \theta(t_1) - \theta(t_0) < 2\pi. \quad (1.5)$$

Se define el dominio:

$$\Omega = \{s\alpha(t) : t \in (t_0, t_1), s \in (0, 1)\}.$$

Entonces

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} r^2(s) \theta'(s) ds, \quad (1.6)$$

donde $|\Omega|$ representa el área de Ω .

La conclusión sigue siendo cierta si retenemos $\theta' > 0$ en la curva del enunciado pero $\theta(t_1) = \theta(t_0) + 2\pi$. En este caso $\alpha(t)$ parametriza una curva de Jordan y obtenemos una fórmula para el área de la región interior.

1.10. Segunda ley de Kepler

La segunda ley de Kepler establece que *el segmento que une cada planeta con el Sol, barre áreas iguales en tiempos iguales*. Vamos a ocuparnos de su demostración que explicamos en el contexto de los campos de fuerzas centrales.

Consideramos el movimiento $x : I \rightarrow \mathbb{R}^2/\{0\}$ de un cuerpo sometido al campo de fuerzas centrales:

$$x'' = f(|x|) \frac{x}{|x|}. \quad (1.7)$$

Expresamos el movimiento de la partícula en coordenadas polares:

$$x(t) = r(t) \cos \theta(t) + ir(t) \sin \theta(t) = r(t)e^{i\theta(t)} \quad t \in I.$$

Derivamos dos veces con respecto al tiempo y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)} \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= r''(t)e^{i\theta(t)} + 2r'(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta''(t)e^{i\theta(t)} - r(t)\theta'^2(t)e^{i\theta(t)}. \end{aligned}$$

Substituimos en la ecuación diferencial:

$$r''(t)e^{i\theta(t)} + 2r'(t)i\theta'(t)e^{i\theta(t)} + r(t)i\theta''(t)e^{i\theta(t)} - r(t)\theta'^2(t)e^{i\theta(t)} = f(r)e^{i\theta(t)}.$$

Se obtiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} r'' - r\theta'^2 = f(r) \\ 2r'\theta' + r\theta'' = 0. \end{cases}$$

Multiplicamos la segunda ecuación por r ,

$$2rr'\theta' + r^2\theta'' = 0,$$

$$(r^2\theta')' = 0,$$

e integramos respecto al tiempo ($t \in I$) obteniendo:

$$r^2\theta' = J,$$

con J constante. Este hecho no es sino otra expresión de la conservación del momento angular. De hecho partiendo de que:

$$c = x(t) \wedge x'(t) = c,$$

con c constante (aquí $x(t)$, $x'(t)$ se observan en \mathbb{R}^3 pero variando en el plano $x_3 = 0$), y usando coordenadas polares se tiene que:

$$c = r^2\theta'e_3 \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Por tanto $c = Je_3$ y $|c| = |J|$.

En vista de la Propiedad 1.9 establecemos una formulación más precisa de la segunda ley de Kepler.

Teorema 1.10 (Segunda ley de Kepler). *Sea $x(t)$ un movimiento en el campo $F(x) = f(|x|)\frac{x}{|x|}$, es decir una solución de (1.7), definida en $[t_0, t_1]$. Si $\Omega(t)$ es la región comprendida entre los vectores de posición $x(t_0)$ y $x(t)$ entonces:*

$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t)|) = \frac{1}{2}J,$$

donde $c = Je_3$ representa el momento angular de la trayectoria. En otras palabras, el movimiento abarca áreas iguales en tiempos iguales.

Demostración. Usando la relación (1.6):

$$\frac{d}{dt}(|\Omega(t)|) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta(t)} r^2(s) ds \right) = \frac{1}{2} r^2 \theta'(t) = \frac{1}{2} J.$$

□

1.11. Colisiones

Consideramos un movimiento $x = x(t)$ en el campo de fuerzas centrales (1.7):

$$x'' = f(|x|)\frac{x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Vamos a estudiar el caso en el que el momento angular c es 0. Bajo estas condiciones, ya se demostró que $x(t)$ se mueve en una semirrecta que pasa por el origen:

$$x(t) = |x(t)|v, \quad |v| = 1.$$

Definimos $r(t) = |x(t)|$, que es una función positiva. Como $x(t)$ resuelve (1.7) entonces $r(t)$ es solución de la ecuación diferencial:

$$r'' = f(r), \quad r > 0.$$

Supondremos que el campo de fuerza es atractivo, es decir, $f(r) < 0$ para $r \in (0, \infty)$. Entonces $r''(t) < 0$, y $r(t)$ es cóncava.

En el siguiente resultado admitimos que la velocidad se anula en el instante inicial, o lo que es lo mismo, que la partícula parte del reposo: $x'(0) = 0$ ($r'(0) = 0$).

Teorema 1.11. *Sea $x(t)$ un movimiento en el campo central*

$$f(|x|)\frac{x}{|x|}$$

donde $f : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ es continua. Entonces la solución de:

$$\begin{cases} x'' = f(|x|)\frac{x}{|x|} \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

alcanza el punto $x = 0$ en tiempo finito.

Observación 1.1. En este caso se dice que la partícula colisiona con $x = 0$ en tiempo finito.

Demostración. La función $r(t)$ es solución de:

$$\begin{cases} r'' = f(r) \\ r(0) = r_0 \\ r'(0) = 0, \end{cases} \quad (1.8)$$

con $r_0 = |x(0)| > 0$.

La teoría general de ecuaciones diferenciales ([4]) permite afirmar que $r(t)$ está definida en un intervalo maximal (α, w) . Estudiamos el caso $[0, w)$ porque $(\alpha, 0]$ se deduce del primer caso haciendo el cambio $\tau = -t$.

Como $f(r) < 0$ y $r'(0) = 0$ resulta que $r'(t) < 0$ para todo t en $[0, w)$. Luego $r(t)$ es decreciente y

$$0 < r(t) < r_0 = r(0) \quad (1.9)$$

para $t \in (0, w)$. Tomemos $t_1 \in (0, w)$. Como $r(t)$ es cóncava:

$$r(t) < r_1 + r'_1(t - t_1) \quad (1.10)$$

para $t > t_1$, donde $r_1 = r(t_1)$, $r'_1 = r'(t_1) < 0$. Por tanto ha de ser $0 < w < \infty$ pues si $w = +\infty$ entonces de (1.10):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = -\infty,$$

incompatible con (1.9). Por otro lado los límites:

$$r_w := \lim_{t \rightarrow w^-} r(t), \quad r'_w := \lim_{t \rightarrow w^-} r'(t),$$

existen y son finitos pues $r(t)$ y $r'(t)$ son decrecientes. Además:

$$r'_w = \lim_{t \rightarrow w^-} r'(t) = \int_0^w f(r(s)) ds,$$

luego $r'_w > -\infty$.

Como r_w y r'_w son finitos entonces $r_w = 0$. Caso contrario resolvemos (1.8) con valores iniciales $r(w) = r_w$, $r'(w) = r'_w$ y la solución $r(t)$ se prolongaría al intervalo $[0, w_1)$ con $w < w_1$. Esto es imposible porque $[0, w)$ es maximal. \square

Teorema 1.12. *Sea $x(t)$ una solución de la ecuación (1.7) definida en el intervalo maximal $I = (\alpha, \omega)$ y con momento angular nulo. Caben entonces tres posibilidades:*

- 1) *Ascenso y retorno a $x = 0$, es decir $-\infty < \alpha < \omega < +\infty$, y en este caso $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} r(t) = \lim_{t \rightarrow \omega^-} r(t) = 0$. Además existe $t_0 \in (\alpha, \omega)$ tal que $r'(t) > 0$ si $\alpha < t < t_0$, $r'(t) < 0$ si $t_0 < t < \omega$.*
- 2) *Escape de $x = 0$ a ∞ , es decir $-\infty < \alpha < w = \infty$ y en este caso $\lim_{t \rightarrow \alpha} r(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty$ y $r'(t) > 0$ para todo $t \in (\alpha, +\infty)$.*
- 3) *Retorno desde ∞ , es decir $-\infty = \alpha < \omega < +\infty$, y en este caso $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = 0$ y $r'(t) > 0$ para todo $t \in (-\infty, \omega)$.*

Demostración. Como en el resultado anterior escribimos $x(t)$ en la forma

$$x(t) = r(t)v,$$

y $r(t)$ resuelve un problema de la forma:

$$\begin{cases} r''(t) = f(r(t)) \\ r(t_0) = r_0 \\ r'(t_0) = r'_0 \end{cases}$$

con $t_0 \in I$. Si $r'_0 = 0$ estamos en el caso del teorema anterior. Por tanto se da el caso 1) del teorema con t_0 el punto medio de I .

Supongamos por tanto que $r'_0 \neq 0$. Analicemos $r'_0 > 0$. Estudiemos primero la solución en $[t_0, \omega)$.

Caben dos posibilidades: o bien existe $t_1 > t_0$ con $r'(t_1) = 0$ ó bien $r'(t) \neq 0 \forall t > t_0$. En el primer caso estamos en la situación del teorema anterior y acabamos en el caso 1). Si $r'(t) \neq 0$ entonces

$$0 < r'(t) < r'_0$$

porque $r(t)$ es cóncava. Como además $r(t)$ es creciente existe los límites:

$$\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = r_\omega \leq +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \omega} r'(t) = r'_\omega \geq 0. \quad (1.11)$$

Vamos a probar que $\omega = +\infty$ y que $\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = \infty$. En efecto, de la teoría general de ecuaciones (v. [4]) tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow \omega} (r(t) + r'(t)) = +\infty, \quad (1.12)$$

si ocurre que $\omega < \infty$. Debido a la concavidad

$$r(t) < r_0 + r'_0(t - t_0) \quad \forall t > t_0. \quad (1.13)$$

Esta desigualdad y la existencia de límite (1.11) implican que:

$$\lim_{t \rightarrow \omega} r(t) = r_\omega < \infty.$$

Pero:

$$r'(t) = r'_0 + \int_{t_0}^t f(r(s))ds \Rightarrow r'_\omega = r'_0 + \int_{t_0}^\omega f(r(s))ds < \infty.$$

Esto contradice (1.12). Luego $\omega = +\infty$.

Veamos ahora que no puede ser $r_\omega < \infty$ en (1.11). En tal caso

$$r_\omega - \delta < r(t) < r_\omega$$

para $t > t_\delta$ con lo que

$$f(r_\omega) - \varepsilon < f(r(t)) < f(r_\omega) + \varepsilon$$

y tomando ε pequeño se puede suponer que $f(r_\omega) \pm \varepsilon < 0$.

Escribimos

$$r'(t) = r'_0 + \int_{t_0}^{t_\delta} f(r(s))ds + \int_{t_\delta}^t f(r(s))ds.$$

Como:

$$(f(r_\omega) - \varepsilon)(t - t_\delta) < \int_{t_\delta}^t f(r(s))ds < (f(r_\omega) + \varepsilon)(t - t_\delta)$$

para $t > t_\delta$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} r'(t) = -\infty$. Esto contradice que:

$$0 \leq r'_\omega < r'_0.$$

Para concluir la demostración del caso 2) probamos que $\alpha > -\infty$ y que $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} r(t) = 0$.

En efecto por concavidad se tiene que $r'(t) > 0$ para $t \in (\alpha, t_0]$ mientras:

$$0 < r(t) < r_0 + r'_0(t - t_0), \quad (1.14)$$

para $t \in (\alpha, t_0]$. Así (1.14) implica que $\alpha > -\infty$. Por otro lado si fuese

$$\lim_{t \rightarrow \alpha^+} r(t) := r_\alpha > 0$$

sería $r'_\alpha = \lim_{t \rightarrow \alpha^+} r'(t) = r'_0 + \int_{t_0}^\alpha f(r(s)) ds < \infty$.

Pero resolviendo

$$\begin{cases} r''(t) = f(r(t)) \\ r(\alpha) = r_\alpha \\ r'(\alpha) = r'_\alpha \end{cases}$$

tendríamos que $r(t)$ se puede prolongar a un intervalo de la forma $[\alpha - \varepsilon, \alpha]$ que contradiría el carácter maximal de la solución.

Por tanto $r'_0 > 0$ nos lleva al caso 2).

Finalmente si $r'_0 < 0$, que es la opción que falta, introducimos la función $\varphi(t) = r(-t)$ que cumple:

$$\begin{cases} \varphi''(t) = \varphi(t) \\ \varphi(-t_0) = r_0 \\ \varphi'(-t_0) = -r'_0 > 0 \end{cases}$$

y está en las condiciones del caso 2). Es decir, $r(t) = \varphi(-t)$ satisface el caso 3). \square

1.12. Potencial y conservación de la energía

Definición 1.13. Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N y $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Una función $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 se dice un potencial para el campo F si

$$F = -\nabla V \quad \text{en } \Omega.$$

Nota 1.14. Los campos que admiten un potencial se llaman conservativos. Asimismo, si $V(x)$ es un potencial de F entonces para toda constante E , $V(x) + E$ también es un potencial de F . Si Ω es conexo, dos potenciales de F necesariamente difieren en una constante.

Propiedad 1.15. Los campos de fuerzas centrales son conservativos.

Demostración. Consideremos el campo de fuerzas centrales

$$F(x) = f(|x|) \frac{x}{|x|} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

donde $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Sea $V_0 : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva de f , es decir:

$$V_0(r) = \int_1^r f(s) ds.$$

Entonces $V(x) = -V_0(|x|)$ es una potencial de F pues:

$$\nabla V = -f(|x|) \frac{x}{|x|} = -F.$$

\square

En el caso del campo gravitatorio

$$F(x) = -\frac{\mu}{|x|^2} \frac{x}{|x|}$$

la función:

$$V(x) = -\frac{\mu}{|x|},$$

constituye el potencial que toma el valor cero en el infinito. Se le conoce como el *potencial Newtoniano*.

Consideremos un campo conservativo $F : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ con función de potencial $V(x)$ y una partícula de masa m que se desplaza en el campo siguiendo la trayectoria $x(t)$ que satisface la ecuación:

$$mx'' = F(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.15)$$

Definición 1.16. *La cantidad*

$$E = \frac{1}{2}mx'(t)^2 + V(x(t))$$

se denomina la energía total de la partícula en el instante t .

Proposición 1.17. *La energía total E de una partícula de masa m en un campo conservativo permanece constante.*

Demostración. Escribiendo $F = -\nabla V$ y multiplicando escalarmente por x' la ecuación (1.15) obtenemos:

$$m\langle x'', x' \rangle + \langle \nabla V, x' \rangle = 0.$$

Resulta evidente que el primer miembro es $\frac{dE}{dt}$ por tanto E se conserva. \square

La cantidad $\frac{1}{2}mx'^2$ es la energía cinética de la partícula y se suele representar por T .

En el caso del campo gravitatorio generado por una partícula de masa M la energía vale:

$$E = \frac{1}{2}x'(t)^2 - \frac{\mu}{|x|},$$

con $\mu = GM$.

Propiedad 1.18. *Sea $x(t)$ un movimiento en el campo gravitatorio:*

$$x'' = -\mu \frac{x}{|x|^3}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

con momento angular $c = 0$ y definido en el intervalo maximal $I = (\alpha, w)$. Si E es la energía total de la solución $x = x(t)$:

- $E < 0$ si y sólo si $r(t) = |x(t)|$ pasa de creciente a decreciente.
- $E \geq 0$ si y sólo $r(t)$ es monótona.

Demostración. Basta comprobar que las condiciones son suficientes. Si primero crece y luego decrece, su derivada tiene que ser cero en algún instante t_0 , entonces

$$E = \frac{1}{2}x'(t_0)^2 - \frac{\mu}{|x(t_0)|} = -\frac{\mu}{|x(t_0)|} < 0, \quad \mu > 0.$$

Por otra parte, si $r(t)$ es una función monótona, se demostró en la Sección 1.11 que $r(t)$ es estrictamente monótona y que su imagen recorre $(0, \infty)$. De la desigualdad

$$E = \frac{1}{2}x'(t)^2 - \frac{\mu}{|x(t)|} \geq -\frac{\mu}{|x(t)|}, \quad t \in (\alpha, w),$$

deducimos que necesariamente $E \geq 0$. \square

Capítulo 2

Órbitas del problema de los dos cuerpos

2.1. El problema general de dos cuerpos

En el capítulo anterior hemos supuesto que el origen del sistema de referencia estaba situado en la partícula de masa mayor M , que al no ser apreciablemente perturbada por la de menor masa, permanecía fija en ese punto. Ahora vamos a estudiar el caso general de dos cuerpos, en el cual el origen del sistema no se encuentra situado en ninguna de las partículas.

Observaremos el movimiento de dos cuerpos de posiciones $r_1(t), r_2(t) \in \mathbb{R}^3$ desde un nuevo origen. Es éste el centro de masas que se define como:

$$C(t) = (1 - \gamma)r_1 + \gamma r_2 \quad \gamma \in (0, 1),$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{M} \\ 1 - \gamma &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M}, \end{aligned}$$

$M = m_1 + m_2$. Las ecuaciones del problema de los dos cuerpos son, en el caso general:

$$\begin{cases} m_1 r_1'' = Gm_1 m_2 \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} \\ m_2 r_2'' = Gm_1 m_2 \frac{r_1 - r_2}{|r_2 - r_1|^3}. \end{cases} \quad (2.1)$$

De ellas se deduce que:

$$C''(t) = (1 - \gamma)r_1'' + \gamma r_2'' = 0,$$

y el centro de masas se desplaza con movimiento uniforme.

Los movimientos de las partículas con respecto a $C(t)$ son:

$$\hat{r}_1 = r_1 - C(t) \quad \hat{r}_2 = r_2 - C(t).$$

Si sustituimos en las ecuaciones del problema de los dos cuerpos obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{r}_1'' + C''(t) &= Gm_2 \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1}{|\hat{r}_2 - \hat{r}_1|^3} \\ \hat{r}_2'' + C''(t) &= Gm_1 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{|\hat{r}_2 - \hat{r}_1|^3}, \end{aligned}$$

como $C'''(t) = 0$ ($C(t)$ se desplaza a velocidad constante), entonces:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1'' &= Gm_2 \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1}{|\hat{r}_2 - \hat{r}_1|^3} \\ \hat{r}_2'' &= Gm_1 \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{|\hat{r}_2 - \hat{r}_1|^3}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Nota 2.1. Observamos ahora que si m_1 es mucho mayor que m_2 , el centro de masas está muy próximo a la masa m_1 . En efecto

$$\begin{cases} \gamma = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \approx 0 \\ 1 - \gamma = 1 - \frac{\frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \approx 1. \end{cases}$$

Es por ello que $C(t) \approx r_1$ si $m_1 \gg m_2$.

Observamos que se cumple:

$$\begin{aligned}\hat{r}_1 &= -\gamma(r_2 - r_1) \\ \hat{r}_2 &= (1 - \gamma)(r_2 - r_1).\end{aligned}$$

Restando las ecuaciones del sistema (2.2) se tiene:

$$(\hat{r}_2 - \hat{r}_1)'' = -GM \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3}.$$

Si llamamos $z = \hat{r}_2 - \hat{r}_1 = r_2 - r_1$, concluimos:

$$z'' = -MG \frac{z}{|z|^3}.\tag{2.3}$$

Como $\hat{r}_1 = -\gamma z$, $\hat{r}_2 = (1 - \gamma)z$, $r_1 = C(t) + \hat{r}_1$ y $r_2 = C(t) + \hat{r}_2$, hemos reducido el problema a estudiar una única ecuación que es (2.3).

Esto significa que tras las transformaciones efectuadas, el estudio del problema general de dos cuerpos se reduce al de la ecuación (1.1) del Capítulo 1, en donde una partícula no era perturbada por otra de masa considerablemente menor. Más aún podemos suponer que z , que en principio varía en \mathbb{R}^3 , se mueve en el plano $z_3 = 0$.

Nota 2.2. En lo que sigue, con frecuencia escribiremos $\mu = MG$.

2.2. Ecuación focal de una cónica

Como sabemos, una cónica se define como el conjunto de ceros de un polinomio de segundo grado $p(x, y)$.

En esta sección escribiremos la ecuación de una cónica con respecto a los focos, distinguiendo tres casos.

1. Elipse

La elipse se define como el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, permanece constante.

Sean x un punto perteneciente al conjunto, $A, O \in \mathbb{R}^2$ los focos y $d_1 = d(x, O)$, $d_2 = d(x, A)$, entonces se cumple:

$$d_1 + d_2 = c,$$

$c > 0$, es decir

$$|O - x| + |A - x| = c \Rightarrow |A - x| = c - |x|.$$

Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} |A - x|^2 &= (c - |x|)^2 \Rightarrow |A|^2 - 2\langle A, x \rangle + |x|^2 = c^2 - 2c|x| + |x|^2 \\ \Rightarrow 2c|x| - 2\langle A, x \rangle &= c^2 - |A|^2 \Rightarrow |x| + \left\langle -\frac{A}{c}, x \right\rangle = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}. \end{aligned}$$

Denotamos $e = -\frac{A}{c}$, $k = \frac{c^2 - |A|^2}{2c}$. Por desigualdad triangular, $|A| < |x| + |A - x| = c$, por lo que se deduce que $k > 0$ y

$$|e| < 1.$$

Reescribimos la ecuación en la forma:

$$\boxed{|x| + \langle e, x \rangle = k.}$$

2. Hipérbola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es una constante positiva c^1 . Si x está en el lugar, A y O son los focos, entonces la ecuación es:

$$d_2 - d_1 = c,$$

$c > 0$, es decir

$$|A - x| - |O - x| = c \Rightarrow |A - x| = c + |x|.$$

Elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} |A - x|^2 &= (c + |x|)^2 \Rightarrow |A|^2 - 2\langle A, x \rangle + |x|^2 = c^2 + 2c|x| + |x|^2 \Rightarrow \\ 2c|x| + 2\langle A, x \rangle &= |A|^2 - c^2 \Rightarrow |x| + \left\langle \frac{A}{c}, x \right\rangle = \frac{|A|^2 - c^2}{2c}. \end{aligned}$$

Llamamos $e = \frac{A}{c}$, $k = \frac{|A|^2 - c^2}{2c}$ y llegamos de nuevo a la ecuación

$$\boxed{|x| + \langle e, x \rangle = k.}$$

Por la desigualdad triangular tenemos,

$$d_2 < |A| + d_1 \Rightarrow c = d_2 - d_1 < |A|,$$

por lo que $k > 0$ y

$$|e| > 1.$$

3. Parábola

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de una recta L , la directriz y de un punto O , el foco, exterior a L . Si x es un punto del lugar, $d_1 = d(x, O)$, $d_2 = d(x, L)$ su ecuación es

$$d_1 = d_2.$$

¹La curva resultante tiene dos componentes y dependiendo del orden en que se reste ($c > 0$) se obtiene una u otra componente.

Escogemos un vector normal $v \in \mathbb{R}^2$, $|v| = 1$, a L y de las dos posibles opciones de v tomamos aquella en la que L tiene como ecuación

$$\langle x, v \rangle + c = 0,$$

con $c > 0$. Se tiene entonces que

$$d(p, L) = \begin{cases} \langle p, v \rangle + c & \text{si } p \text{ está en el semiplano donde está } 0. \\ -\langle p, v \rangle - c & \text{si está en el otro semiplano.} \end{cases}$$

Por ello, la ecuación tiene la forma:

$$|x| = \langle x, v \rangle + c.$$

Tomando $e = -v$, $k = c$, y volvemos a llegar a la ecuación

$$\boxed{|x| + \langle e, x \rangle = k,}$$

con $k > 0$ y

$$|e| = 1.$$

Resumiendo, la ecuación de una cónica en términos de los focos se escribe como

$$|x| + \langle e, x \rangle = k, \quad e \in \mathbb{R}^2, k > 0,$$

que según el valor de $|e|$ describe:

- una elipse si $|e| < 1$,
- una parábola si $|e| = 1$,
- una rama de hipérbola si $|e| > 1$.

2.3. Primera ley de Kepler

En esta sección procederemos a demostrar que dos objetos celestes se mueven con respecto a su centro de masas describiendo una cónica. En particular el movimiento de un planeta perturbado por el Sol (despreciando la presencia de los restantes planetas, lo cual no es siempre aceptable).

Teorema 2.3. *Sea $x = x(t)$, $t \in I$, un movimiento en el campo gravitatorio Newtoniano, es decir, una solución maximal de:*

$$x'' = -\frac{\mu}{|x|^3}x, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad (2.4)$$

con momento angular no nulo, $c \neq 0$. Entonces $x(t)$ toma valores en una cónica uno de cuyos focos se encuentra en el origen.

Nota 2.4. *Dos matices importantes no se aclaran en el teorema. Por una lado, el tamaño del intervalo I , por otro si el movimiento recorre o no la cónica en su totalidad. La respuesta completa a estas cuestiones se presenta en las Secciones 2.6.1, 2.6.2 y 2.6.3.*

Para la demostración tenemos en cuenta el siguiente lema.

Lema 2.5. *Sea $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Entonces:*

1. $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w \rangle v - \langle v, w \rangle u$,
2. $\langle u \wedge v, w \rangle = \langle u, v \wedge w \rangle$.

Demostración del Teorema 2.3. Sin pérdida de generalidad suponemos que $x(t)$ se mueve en $x_3 = 0$. Partimos de la igualdad

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x}{|x|} \right) = \frac{x'|x|^2 - \langle x', x \rangle x}{|x|^3} = \frac{1}{|x|^3} [(x \wedge x') \wedge x], \quad (2.5)$$

válida para todo $x(t) \in C^1$ que no se anula en su dominio. Hacemos uso de la segunda igualdad del Lema 2.5, multiplicamos la ecuación por μ , empleamos que x cumple (2.5), y tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\mu \frac{x}{|x|} \right) = - \left[(x \wedge x') \wedge \frac{-\mu x}{|x|^3} \right] = -c \wedge x'' = \frac{d}{dt} (-c \wedge x').$$

Hemos usado que $c = x \wedge x'$. Integramos y obtenemos lo siguiente

$$\mu \left[\frac{x(t)}{|x(t)|} + e \right] = -c \wedge x'(t), \quad t \in I, \quad (2.6)$$

donde $e \in \mathbb{R}^2$ es un vector constante.

Ahora multiplicamos ambos lados de la igualdad por $x(t)$:

$$\mu \left[\left\langle \frac{x(t)}{|x(t)|}, x(t) \right\rangle + \langle e, x(t) \rangle \right] = |c|^2, \quad t \in I,$$

pues $-\langle c, x'(t) \wedge x(t) \rangle = |c|^2$. Por tanto,

$$|x(t)| + \langle e, x(t) \rangle = \frac{|c|^2}{\mu}, \quad t \in I.$$

Así, el movimiento de $x(t)$ yace en un cónica con un foco en el origen. \square

El vector e es una constante del movimiento (para comprobarlo basta con despejar en (2.6)) y recibe el nombre de *eje de excentricidad*. Su módulo $\varepsilon = |e|$ es lo que se conoce como la excentricidad de la cónica (ver la Nota 2.17).

Podemos clasificar el movimiento de $x(t)$ según el valor de $|e|$ como sigue.

- Si $e = 0$ se trata de una circunferencia.
- Si $0 < |e| < 1$ tenemos una elipse.
- Si $|e| = 1$ el movimiento descrito es un parábola.
- Si $|e| > 1$ obtenemos una rama de hipérbola.

A partir de ahora escribiremos $\varepsilon = |e|$.

2.4. Clasificación de las órbitas según su energía

Es costumbre en mecánica celeste clasificar las órbitas a partir de su energía total:

$$E = \frac{1}{2} x'^2 - \frac{\mu}{|x|} \quad x'^2 = |x'|^2,$$

y no tanto en términos de su excentricidad ε . Para ello debemos relacionar E y ε . Partimos de la igualdad (2.6),

$$\mu \left[\frac{x}{|x|} + e \right] = -c \wedge x'$$

y tomamos normas al cuadrado:

$$\mu^2 \left| \frac{x(t)}{|x(t)|} + e \right|^2 = |c \wedge x'|^2.$$

Sabemos que c y x son perpendiculares, por lo tanto,

$$|c \wedge x'| = |c||x'|,$$

por lo que

$$\mu^2 \left[\frac{x^2}{|x|^2} + 2\langle e, \frac{x}{|x|} \rangle + \varepsilon^2 \right] = |c|^2 x'^2.$$

Ahora usamos que $|x| + \langle e, x \rangle = |c|^2/\mu$ y que $E = x'^2/2 - \mu/|x|$ para obtener que:

$$\mu^2 [|e|^2 - 1] = 2E|c|^2.$$

Como estamos estudiando los casos en los que no hay colisión ($c \neq 0$), deducimos que:

- $\varepsilon < 1 \Leftrightarrow E < 0$, órbita elíptica,
- $\varepsilon = 1 \Leftrightarrow E = 0$, órbita parabólica,
- $\varepsilon > 1 \Leftrightarrow E > 0$, órbita hiperbólica.

2.5. Ecuación de una cónica en coordenadas polares

Partimos de la ecuación de una cónica con un foco en el origen

$$|x| + \langle x, e \rangle = k \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2.7)$$

donde $e \in \mathbb{R}^2$ y $k > 0$ constante. Denotamos

$$e = \varepsilon(\cos \omega, \text{sen } \omega) \quad \varepsilon = |e| \geq 0 \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Como se ha dicho, ε es la excentricidad de la cónica y ω es el argumento del pericentro. El *pericentro* (respectivamente, *apocentro*) de (2.7) es el punto de la cónica más cercano (alejado) del foco $O = (0, 0)$. En la órbita del sistema Sol–Tierra se habla de *perihelio* y de *afelio*. El argumento ω está definido con unicidad salvo múltiplos enteros de 2π .

Nota 2.6. En la circunferencia $\varepsilon = 0$ y ω no está definido.

Para escribir (2.7) en coordenadas polares, expresamos $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ en la forma² $x = \rho(\cos \theta, \text{sen } \theta)$, $\rho > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$ y obtenemos:

$$\rho + \rho\varepsilon\langle(\cos \theta, \text{sen } \theta), (\cos \omega, \text{sen } \omega)\rangle = k.$$

Simplificando

$$\rho[1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)] = k \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}.$$

²Usamos en este capítulo ρ en lugar de r .

Como sabemos que k es positiva, $\rho > 0$ y $\theta \in \mathbb{R}$, el punto x pertenece a la cónica si y sólo si $1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega) > 0$ y

$$\rho = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}.$$

Usando coordenadas polares volvemos a comprobar ahora que las soluciones de la ecuación (2.4) yacen en cónicas. Con la notación $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$ tenemos:

$$z'' = -\frac{\mu}{|z|^3}z, \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Escribiendo $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ y derivando respecto a t dos veces tenemos ³:

$$z'' = e^{i\theta}(\rho'' + 2\rho' i\theta' + \rho i\theta'' - \rho\theta'^2).$$

Substituimos y la ecuación queda descrita de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \frac{d\theta^2}{dt} = -\frac{\mu}{\rho^2} \\ 2\frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d\theta}{dt} = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación del sistema sale que:

$$\rho^2 \frac{d\theta}{dt} = J,$$

donde J es una constante. Como se vio Esta relación expresa la conservación del momento angular c (Sección (1.10)). Como suponemos que no hay colisión $J \neq 0$. Así:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{J}{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{\rho^2}{J}.$$

Substituimos en la primera ecuación del sistema:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \frac{J^2}{\rho^4} = -\frac{\mu}{\rho^2}.$$

Por el teorema de la función inversa podemos escribir $t = t(\theta)$, por lo tanto $\rho = \rho(\theta)$, y entonces

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho}{dt} \frac{dt}{d\theta} = \frac{d\rho}{dt} \frac{\rho^2}{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{J}{\rho^2}.$$

Si volvemos a derivar ρ ,

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{J}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{J}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} - \frac{J^2}{\rho^3} &= -\frac{\mu}{\rho^2} \quad \Rightarrow \\ J \frac{d}{d\theta} \left(\frac{J}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right) - \frac{J^2}{\rho} &= -\mu \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right) - \frac{1}{\rho} = -\frac{\mu}{J^2} \quad \Rightarrow \\ -\frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right) - \frac{1}{\rho} &= -\frac{\mu}{J^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} = \frac{\mu}{J^2}. \end{aligned}$$

³Una cuenta similar se realizó en la Sección 1.10 para campos de fuerzas centrales.

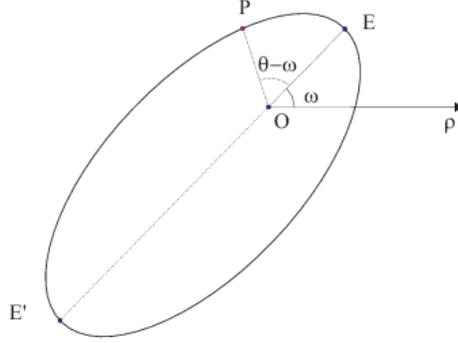


Figura 2.1: Posiciones del pericentro E y apocentro E' en la elipse.

Si hacemos el cambio de variable $u = \frac{1}{\rho}$ obtenemos la ecuación diferencial:

$$u'' + u = \frac{\mu}{J^2},$$

cuya solución general es:

$$u = A \cos \theta + B \operatorname{sen} \theta + \frac{\mu}{J}.$$

Poniendo $A = |w| \cos \omega$, $B = |w| \operatorname{sen} \omega$ y $w = (A, B)$:

$$u = |w|(\cos \omega \cos \theta + \operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} \theta) + \frac{\mu}{J^2} = |w| \cos(\theta - \omega) + \frac{\mu}{J^2}.$$

Deshaciendo el cambio $u = \frac{1}{\rho}$ tenemos:

$$\rho = \frac{1}{|w| \cos(\theta - \omega) + \frac{\mu}{J^2}}.$$

Manipulando la fracción obtenemos:

$$\rho = \frac{J^2/\mu}{1 + (J^2/\mu)|w| \cos(\theta - \omega)},$$

es decir:

$$\rho = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)},$$

donde:

$$\varepsilon = \frac{J^2}{\mu}|w| > 0, \quad k = \frac{J^2}{\mu}.$$

Llegamos por tanto a la ecuación polar de una cónica.

Nota 2.7. En el caso de la elipse, $\theta = \omega$, $\theta = \omega + \pi$ son las posiciones del pericentro y apocentro, respectivamente (Figura 2.1).

2.6. Recorrido completo de la órbita

Un cuerpo celeste (planeta) de masa pequeña, orbita entorno a otro de mayor masa (estrella) siguiendo la ecuación (1.1):

$$x''(t) = -\mu \frac{x(t)}{|x(t)|^3} \quad x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3.$$

Su posición y velocidad iniciales $x(0)$, $x'(0)$ yacen en un plano π donde acaba confinada la trayectoria completa (Sección 1.7). Usando los resultados del Capítulo 1 podemos suponer que π coincide con $x_3 = 0$. Podemos así representar:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), 0) = x_1(t) + ix_2(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)},$$

y como se ha demostrado las ecuaciones del movimiento son:

$$\begin{cases} \rho'' - \theta'^2 \rho &= -\frac{\mu}{\rho^2} \\ \rho^2 \theta' &= J \end{cases} \quad (2.8)$$

donde J es una constante que vamos a suponer positiva. También se sabe de las secciones anteriores que $(x_1(t), x_2(t))$ se mueve en la cónica:

$$\rho = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)}, \quad (2.9)$$

donde $k = \frac{J^2}{GM}$. La cónica es una elipse, una de cuyos focos es $z = 0$ (donde se sitúa el Sol), si $0 < \varepsilon < 1$. Esta es la primera ley de Kepler si consideramos el sistema Sol-Tierra.

En el caso en que (2.9) es una elipse E vamos a estudiar las siguientes cuestiones. A saber:

- Probar que el planeta recorre totalmente la elipse E .
- La recorre infinitas veces siendo el movimiento periódico de periodo mínimo T (año del planeta).
- Existe una relación precisa entre el periodo T de la órbita y el semieje mayor a de la misma (Tercera ley de Kepler).

En particular, la órbita de la solución $(x_1(t), x_2(t))$ de (2.8) es la elipse E en el sentido técnico del término ([4]).

A efectos de aplicar los resultados de la teoría de ecuaciones conviene observar que (2.8) es la versión polar de la ecuación 4-dimensional:

$$\begin{cases} z' &= v \\ v' &= -\mu \frac{z}{|z|^3} \end{cases} \quad (2.10)$$

donde $z = (x_1(t), x_2(t))$, $v(t) = (x'_1(t), x'_2(t))$.

2.6.1. Existencia global de la solución

Proposición 2.8. *Sea $(z(t), v(t))$ una solución maximal de (2.10), es decir*

$$z(t) = \rho(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

donde (ρ, θ) es una solución de (2.8) con datos iniciales en la elipse (2.9). Entonces el intervalo de existencia $I = (\alpha, w)$ de la solución es todo \mathbb{R} .

Demostración. Sea $t \in [0, w)$ la parte derecha del intervalo. La elipse es compacta y no pasa por $(0, 0)$, por lo que $z(t)$ y $v(t)$ están acotadas. En efecto:

$$\rho_{min} = \frac{k}{1 + \varepsilon} \leq |z(t)| \leq \frac{k}{1 - \varepsilon} = \rho_{max}.$$

Por otro lado de (2.10):

$$\mu \frac{\rho_{min}}{\rho_{max}^3} \leq |v'(t)| \leq \mu \frac{\rho_{max}}{\rho_{min}^3}.$$

Integrando:

$$|v(t) - v(0)| = \left| \int_0^t v'(s) ds \right| \leq \int_0^t |v'(s)| ds,$$

por lo que

$$\mu \frac{\rho_{min}}{\rho_{max}^3} t \leq |v(t) - v(0)| \leq \mu \frac{\rho_{max}}{\rho_{min}^3} t.$$

Entonces $|v(t)|$ está acotada en $[0, \omega)$ si $\omega < +\infty$. Esto no es compatible con la teoría de prolongabilidad ([4]). En el estudio del intervalo a la izquierda $(\alpha, 0]$ se procede de la misma manera. \square

2.6.2. La elipse se recorre infinitas veces

Como $z(t)$ está definida en $(\alpha, \omega) = \mathbb{R}$, $\rho(t)$ y $\theta(t)$ también están definidas en \mathbb{R} .

Proposición 2.9. *Supongamos que la constante $J > 0$. Entonces:*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) = \pm\infty.$$

En otras palabras, $z(t)$ recorre la elipse infinitas veces.

Demostración. Se tiene

$$\rho^2 \theta'(t) = J,$$

donde:

$$\rho(t) = \rho(\theta(t))$$

y $\rho(\theta)$ está dada por (2.9).

Como $J > 0$, de

$$\theta' = \frac{J}{\rho^2},$$

y las estimaciones precedentes se deduce integrando que:

$$\frac{J}{\rho_{max}^2} t + \theta(0) \leq \theta(t) \leq \frac{J}{\rho_{min}^2} t + \theta(0),$$

con $t \in \mathbb{R}$. Luego $\theta(t) \rightarrow \pm\infty$ si $t \rightarrow \pm\infty$. \square

Nota 2.10. *Si $J < 0$ sólo hay que cambiar el signo en el resultado de los límites.*

2.6.3. La solución recorre la elipse de forma periódica

Proposición 2.11. *Existe $T > 0$ tal que la función $\theta(t)$ cumple:*

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $J > 0$ ($J < 0$ sólo afecta al sentido de recorrido). Como $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es biyectiva, entonces existe un único $T > 0$ tal que

$$\theta(T) = \theta_0 + \pi,$$

con $\theta_0 = \theta(0)$. Definimos ahora las funciones:

$$\begin{cases} \theta_1(t) &= \theta(t + T) \\ \theta_2(t) &= \theta(t) + 2\pi. \end{cases}$$

Ambas son soluciones de:

$$\begin{cases} \theta(t)' &= \frac{J}{\rho^2(\theta(t))} \\ \theta(0) &= \theta_0 + 2\pi. \end{cases}$$

Por el teorema de existencia y unicidad $\theta_1(t) = \theta_2(t)$, luego:

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi, \quad (2.11)$$

para cualquier $t \in \mathbb{R}$. □

Proposición 2.12. *Si $z(t)$ toma valores iniciales en la elipse (2.9), entonces $z(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es periódica de periodo T .*

Demostración. La solución tiene la forma

$$\begin{cases} x_1(t) &= \rho(\theta(t)) \cos \theta(t) \\ x_2(t) &= \rho(\theta(t)) \operatorname{sen} \theta(t), \end{cases}$$

donde ρ viene dado por (2.9) y por lo tanto $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$.

Usando (2.11):

$$x_1(t + T) = \rho(\theta(t + T)) \cos \theta(t + T) = \rho(\theta(t)) \cos \theta(t) = x_1(t).$$

De la misma forma

$$x_2(t + T) = x_2(t).$$

Por lo tanto $z(t)$ es periódica de periodo T . □

Nota 2.13. *Hemos demostrado además que T es el periodo mínimo de la órbita.*

2.7. Tercera Ley de Kepler

En lo que sigue tomaremos la constante J con signo positivo.

Teorema 2.14. *Admitamos que $z(t)$ recorre la órbita (2.9), que suponemos una elipse, y que por lo tanto es periódica de periodo T . Entonces:*

$$T = \frac{2\pi}{J} ab, \quad (2.12)$$

donde $a > b > 0$ son los semiejes de la elipse.

Demostración. En la Sección 1.9 se demostró que si $A(t)$ es el área comprendida entre los ángulos $\theta(0)$ y $\theta(t)$ de la órbita, entonces:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\rho(\theta)^2\theta'(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}J. \quad (2.13)$$

Como $\theta(t)$ es periódica entonces $\theta(0) = \theta(T)$ coinciden y $A(T)$ es el área de la elipse. Integrando (2.13) entre $t = 0$ y $t = T$ resulta que

$$A(T) = \frac{1}{2}JT.$$

Se sabe que el área de la elipse es $A(T) = \pi ab$ luego:

$$T = \frac{2\pi}{J}ab.$$

□

Teorema 2.15 (Tercera Ley de Kepler). *El periodo de rotación de un planeta alrededor del Sol es proporcional a la potencia 3/2 del semieje mayor de la órbita.*

Demostración. Haciendo uso de (2.9) resulta lo siguiente:

$$2a = \frac{k}{1-\varepsilon} + \frac{k}{1+\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{k}{1-\varepsilon^2}.$$

La distancia d del centro de simetría C al foco O de la órbita es (Figura 2.2):

$$d = a - \frac{k}{1+\varepsilon} = a - a(1-\varepsilon) = a\varepsilon.$$

El semieje menor es $b = \sqrt{a^2 - d^2}$; luego $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Se sabe que:

$$T = \frac{2\pi}{J}ab = \frac{2\pi}{J}a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Por otro lado de (2.9) se tiene que:

$$k = \frac{J^2}{GM} \quad \Rightarrow \quad J = \sqrt{GMk}.$$

Como $k = (1-\varepsilon^2)a$ entonces $J = \sqrt{GM(1-\varepsilon^2)a}$. Así

$$T = \frac{2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}a^2}{\sqrt{GM(1-\varepsilon^2)a}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{3/2}.$$

□

Nota 2.16. *Observamos que T es el año del planeta y M la masa del Sol.*

Nota 2.17. *En el curso de la prueba se establece que:*

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

De ahí se desprende que la excentricidad ε mide cuánto se “aleja” la elipse de la circunferencia de radio a .

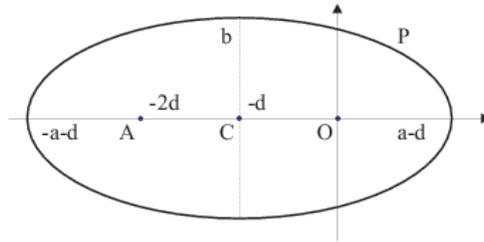
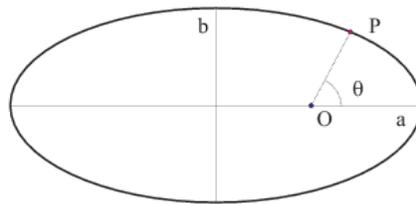


Figura 2.2: Diversos valores en la órbita.

Figura 2.3: Anomalía real θ de P

2.8. Ecuación de Kepler

Para un cuerpo en órbita elíptica alrededor de otro, la anomalía es el ángulo que forma éste (o su proyección sobre una curva adecuada) con un punto fijo del eje mayor de la órbita que se toma como referencia.

De la primera ley de Kepler un planeta orbita en torno a un astro de masa mucho mayor siguiendo una órbita elíptica. Precisamente, el astro ocupa uno de los focos, en el eje mayor. La *anomalía real* del planeta es ángulo que forma el vector de posición OP desde ese foco O . Véase la Figura 2.3.

Para describir el movimiento del cuerpo (planeta) se necesita calcular θ en términos de t .

Como vamos a ver, lo que se *mide* mejor en términos de t es la *anomalía excéntrica* del planeta, que se observa desde el centro de simetría de la órbita y se dirige, no al planeta mismo, sino a su proyección sobre la circunferencia de radio a (el semieje mayor de la elipse).

Para entender el papel de la anomalía excéntrica notamos que en coordenadas rectangulares

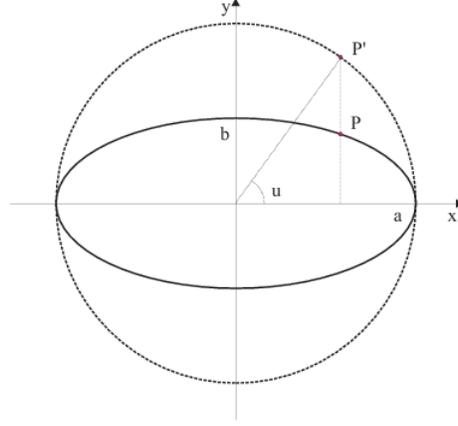


Figura 2.4: Anomalía excéntrica u de P . En los ejes $x = x_1$, $y = x_2$.

la elipse observada desde el centro $(0, 0)$ de simetría es:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Haciendo:

$$\begin{cases} x_1 = a \cos u \\ x_2 = b \sin u \end{cases} \quad u \in [0, 2\pi],$$

describimos la elipse completamente. Pero, ¿quién es el ángulo u ?

Para averiguarlo notamos que el punto $(x_1, x'_2) = (x_1, \frac{a}{b}x_2)$ yace en la circunferencia:

$$x_1^2 + (x'_2)^2 = a^2.$$

Así pues:

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cos u \\ x'_2 &= a \sin u, \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{cases} x_1 = a \cos u \\ x_2 = b \sin u. \end{cases}$$

El paso $P = (x_1, x_2) \mapsto P' = (x_1, x'_2)$ consiste en proyectar, en la dirección del eje x_2 , la elipse sobre la circunferencia de radio el semieje mayor a (Figura 2.4).

Ya hemos aclarado cómo se interpreta la anomalía excéntrica del satélite.

Vamos ahora a representar la elipse

$$\rho = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)},$$

en términos de la anomalía excéntrica. Podemos suponer, módulo una rotación, que $\omega = 0$. El centro de simetría es entonces $C = (-d, 0)$ (Figura 2.2).

La elipse en coordenadas rectangulares es:

$$\frac{(x_1 + d)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Empleando la anomalía excéntrica u resulta que:

$$\begin{cases} x_1 + d = a \cos u \\ x_2 = b \operatorname{sen} u. \end{cases}$$

Recordando que $b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ (Sección 2.7) se obtiene que:

$$(x_1, x_2) = a(\cos u - \varepsilon, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u),$$

que es la elipse parametrizada por u .

2.8.1. La órbita en términos de la anomalía real

Para determinar la posición del planeta en la órbita con respecto al tiempo se hace necesario conocer $\theta = \theta(t)$. La anomalía real $\theta(t)$ cumple la ecuación diferencial:

$$\frac{k^2}{(1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega))^2} \theta' = J.$$

Integrando:

$$\int_0^\theta \frac{ds}{(1 + \varepsilon \cos(s - \omega))^2} = \frac{J}{k^2} (t - t_0),$$

donde, como $\omega = 0$, t_0 es el tiempo de paso por el pericentro (perihelio en el caso de la Tierra alrededor del Sol).

Si $F(\theta)$ es la integral, entonces

$$F(\theta) = \frac{J}{k^2} (t - t_0), \quad (2.14)$$

así pues en vez de tener $\theta = \theta(t)$ tenemos la función inversa. La función $F(\theta)$ se puede calcular explícitamente pero su expresión resulta muy aparatosa a efectos prácticos.

2.8.2. La órbita en términos de la anomalía excéntrica

Para calcular u en términos de t usamos que el momento angular es:

$$\rho^2 \theta' = x_1 x_2' - x_2 x_1'. \quad (2.15)$$

Como $\rho^2 \theta' = J$ y

$$\begin{aligned} x_1 &= a(\cos u - \varepsilon) \\ x_2 &= a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u, \end{aligned}$$

se deduce de (2.15) que:

$$a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} (1 - \varepsilon \cos u) \frac{du}{dt} = J,$$

que es una ecuación diferencial para la anomalía excéntrica u . Suponiendo, como en el caso anterior, que $\omega = 0$ y que t_0 es el tiempo de paso por el pericentro, resulta que:

$$u - \varepsilon \operatorname{sen} u = \frac{J}{a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2}} (t - t_0),$$

que es una variante más sencilla de la ecuación de (2.14).

Para ζ dado,

$$u - \varepsilon \operatorname{sen} u = \zeta$$

recibe el nombre de *ecuación de Kepler*.

Se recuerda de la Sección 2.7 que:

$$J = \sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)},$$

luego:

$$u - \varepsilon \operatorname{sen} u = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t - t_0) \quad \mu = GM. \quad (2.16)$$

Nótese que $u = 2\pi$ cuando $t = t_0 + T$ (T el periodo de la órbita). Volvemos entonces a recuperar la tercera ley de Kepler:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2},$$

al dar estos valores en (2.16).

Resumiendo, el movimiento en términos de la anomalía excéntrica es:

$$\begin{cases} x_1 = a(\cos u - \varepsilon) \\ x_2 = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \operatorname{sen} u \\ u - \varepsilon \operatorname{sen} u = \frac{2\pi}{T}(t - t_0), \end{cases}$$

con t_0 tiempo de paso por el pericentro.

Capítulo 3

Introducción al problema de los tres cuerpos

En los capítulos anteriores nos hemos centrado en estudiar el problema de los dos cuerpos (movimiento, periodo, energía, momento angular). En este capítulo nos dedicaremos a hacer una pequeña introducción al problema de los n cuerpos, haciendo especial hincapié en el de tres cuerpos.

3.1. Formulación del problema de los n cuerpos

En esta sección generalizaremos la formulación del problema anteriormente estudiado para n cuerpos, estudiando su energía potencial y energía total.

Comenzamos fijando la posición de cada cuerpo por una función vectorial:

$$r_i : J \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad r_i = (x_i(t), y_i(t), z_i(t)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Por la segunda ley de Newton:

$$m_i r_i'' = - \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j (r_j - r_i)}{|r_j - r_i|^3},$$

donde vamos a designar el segundo miembro por $F_i(r_1, r_2, \dots, r_n)$.

Para que las ecuaciones tengan sentido, dos de los cuerpos no deben ocupar la misma posición. Por tanto, del dominio Ω de las ecuaciones deben ser excluidos los conjuntos:

$$\Delta_{ij} = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^{3n} : r_i = r_j\} \quad i \neq j.$$

Cada Δ_{ij} es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^{3n} de dimensión $3n - 3$. Denotamos

$$\Delta = \cup_{1 \leq i < j \leq n} \Delta_{ij}.$$

Como Δ es unión finita de subespacios entonces es un cerrado en \mathbb{R}^{3n} por lo que $\Omega = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es abierto. Se conoce a Δ como el conjunto de colisión.

Las soluciones del problema de n cuerpos son funciones C^∞

$$r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta, \quad r = (r_1, \dots, r_n),$$

que cumplen

$$\mathcal{M}r'' = F(r),$$

con:

$$\mathcal{M} = \text{diag} (m_1 I_3, \dots, m_n I_3) \quad F = (F_1, \dots, F_n),$$

donde “diag” significa “diagonal por bloques”, m_i es la masa del cuerpo i -ésimo, I_3 es la matriz identidad 3×3 . La regularidad C^∞ de las soluciones es consecuencia directa de la estructura de la ecuación.

Proposición 3.1. *El campo F es conservativo, es decir existe una función C^1 $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$F = -\nabla V,$$

donde

$$\nabla V = (\partial_{r_1} V, \dots, \partial_{r_n} V) \quad V = V(r_1, \dots, r_n),$$

y $\partial_{r_i} V = \frac{\partial V}{\partial r_i}$ es el gradiente de V con respecto a las tres componentes x_i, y_i, z_i de r_i .

Demostración. La elección:

$$V = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{|r_i - r_j|} \quad r \in \Omega,$$

cumple la propiedad buscada. □

Definición 3.2. *La función V se denomina el potencial Newtoniano del problema de los n cuerpos.*

Definiendo la energía cinética del sistema como:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r'_i(t)|^2,$$

donde $r(t)$ es una solución, y la energía total:

$$E = T + V,$$

resulta, al derivarla con respecto a t , que:

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \langle r''_i, r'_i \rangle + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{dV}{dr_i}, r'_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \left\langle m_i r''_i + \frac{dV}{dr_i}, r'_i \right\rangle = 0.$$

Por tanto, la energía total se conserva (hecho bien conocido de los campos conservativos).

3.2. Puntos de equilibrio

Estudiemos la existencia o no de puntos de equilibrio en el problema general de los n cuerpos. Para ello debemos hacer uso del siguiente teorema.

Teorema 3.3 (Teorema de Euler). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un cono¹ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y homogénea de grado p : $f(tx) = t^p f(x)$ para $t > 0$, $x \in \Omega$. Entonces*

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = p f(x), \quad x \in \Omega.$$

¹Es decir un conjunto Ω tal que $tx \in \Omega$ para todo $t > 0$ si $x \in \Omega$.

Demostración. Tomamos $x \in \Omega$ y la función C^1 : $t \in (0, +\infty) \mapsto f(tx) = t^p f(x)$. Derivando respecto de t :

$$\langle x, \nabla f(tx) \rangle = p t^{p-1} f(x).$$

Tomamos $t = 1$ y concluimos que $\langle x, \nabla f(x) \rangle = p t^{p-1} f(x)$. \square

Teorema 3.4. *El problema de los n cuerpos no tiene equilibrios.*

Demostración. Supongamos que $r(t) = r^*$ es constante y por lo tanto un equilibrio. Entonces:

$$\frac{\partial V}{\partial r_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

en $r = r^*$. Observamos que $\Omega = \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta$ es un cono abierto. Asimismo que el potencial Newtoniano $V(r)$ es homogéneo de grado -1

$$V(tr_1, \dots, tr_n) = t^{-1}V(r_1, \dots, r_n) \quad t > 0.$$

Luego si $r^* \in \Omega$ es un equilibrio entonces, del Teorema de Euler:

$$0 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial r_i} r_i = -V(r^*),$$

que es imposible porque $V(r^*) \neq 0$. Por tanto las ecuaciones no admiten equilibrios. \square

3.3. Soluciones maximales

Una solución maximal $r(t)$, $t \in I := (\alpha, \omega)$, del problema de n cuerpos define la solución $(r(t), v(t))$ de la ecuación:

$$\begin{cases} r' = v \\ v' = \mathcal{M}^{-1}F(r). \end{cases} \quad (3.1)$$

En el siguiente teorema estudiamos qué ocurre cuando las soluciones sólo tienen un horizonte de existencia finito. Es decir si $\omega < \infty$.

Teorema 3.5. *Si $\omega < \infty$ y se define:*

$$\rho(t) = \text{dist}(r(t), \Delta),$$

con Δ el conjunto de explosión, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \omega} \rho(t) = 0. \quad (3.2)$$

La prueba hace uso del siguiente resultado de prolongabilidad (véase [4]).

Lema 3.6. *Sea $f : \overline{B}(x_0, R) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función continua y $M = \sup_{\overline{B}(x_0, R)} |f|$. Entonces, toda solución $x(t)$ del problema:*

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

se puede prolongar por lo menos al intervalo $[-M/R, M/R]$.

El Teorema 3.5 se deduce del lema siguiente.

Lema 3.7. *Dados E y $\delta > 0$ existe un número $\tau = \tau(E, \delta)$ tal que toda solución $r(t)$ de energía E que cumpla $\rho(0) > \delta$ está definida en el intervalo $[-\tau, \tau]$.*

Demostración del Teorema 3.5. Si (3.2) no es cierto entonces existe t_n creciente tal que $t_n \rightarrow \omega$ donde $\rho(t_n) > \delta > 0$ para cierto δ . Si usamos el lema previo con la energía E de la solución y ese δ preciso, la solución estará definida en todo intervalo de la forma $[t_n - \tau, t_n + \tau]$ donde τ está fijado por el lema. Desde que $|t_n - \omega| < \tau/2$ la solución existe en $[\omega, \omega + \tau/2]$ lo cual no es posible por la propia definición de solución maximal. \square

Esbozo de la demostración del Lema 3.7. Se trata de usar el Lema 3.6 en la ecuación (3.1), para hallar M y R , definiendo entonces $\tau = M/R$.

En la definición de la bola del Lema 3.6 usamos la norma infinito:

$$|(r, v)|_\infty = \max\{|r_j|, |v_j|\}.$$

En la bola $\overline{B}((r(0), v(0)), R)$ con $R = \delta/4$ podemos acotar la componente $\mathcal{M}^{-1}F(r)$ de la ecuación (3.1) en la forma:

$$|\mathcal{M}^{-1}F(r)|_\infty \leq \frac{C_1}{\delta^2}, \quad (3.3)$$

donde C_1 es una constante. Para acotar la primera componente de (3.1) en $\overline{B}((r(0), v(0)), R)$ razonamos así:

$$|v|_\infty \leq |v - v(0)|_\infty + |v(0)|_\infty \leq \frac{\delta}{4} + |v(0)|_\infty. \quad (3.4)$$

Para acotar $|v(0)|_\infty$ usamos la energía:

$$\frac{m_s |v_s(0)|^2}{2} \leq E - V(r(0)) \leq E + \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{|r_i(0) - r_j(0)|} \leq E + \sum_{i < j} \frac{Gm_i m_j}{\delta}.$$

Así:

$$|v(0)|_\infty \leq \frac{C_2}{\sqrt{\delta}}, \quad (3.5)$$

donde C_2 sólo depende de E y δ . Juntando (3.3), (3.4) y (3.5) obtenemos:

$$|(v, \mathcal{M}^{-1}F(r))|_\infty \leq \frac{C_1}{\delta^2} + \frac{\delta}{4} + \frac{C_2}{\sqrt{\delta}} := M,$$

y hemos terminado, porque M sólo depende de E y δ . \square

3.4. Momento de inercia y fórmula de Lagrange-Jacobi

Sea $r = (r_1, \dots, r_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ solución del problema de n cuerpos. El momento de inercia \mathcal{I} se define como:

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r_i(t)|^2, \quad t \in I.$$

Derivando respecto de t

$$\mathcal{I}'(t) = \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i(t), r_i'(t) \rangle.$$

Volviendo a derivar:

$$\mathcal{I}''(t) = \sum_{i=1}^n m_i |r_i'|^2 + \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i(t), r_i''(t) \rangle.$$

Sabemos que la energía cinética es $T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r'_i|^2$ entonces:

$$\mathcal{I}''(t) = 2T(t) + \sum_{i=1}^n m_i \langle r_i(t), r''_i(t) \rangle$$

y como $-\frac{\partial V}{\partial r_i} = m_i r''_i(t)$ tenemos

$$\mathcal{I}''(t) = 2T(t) - \sum_{i=1}^n \langle r_i(t), \frac{\partial V}{\partial r_i} \rangle = 2T(t) + V(r).$$

Por lo tanto $\mathcal{I}''(t)$ satisface:

$$\mathcal{I}''(t) = 2T + V = 2E - V,$$

donde E es la energía total, que es la identidad de Lagrange-Jacobi.

Proposición 3.8. *Todas las órbitas $r : (\alpha, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ con energía E positiva y definidas para todo tiempo futuro, es decir $\omega = \infty$, tienden a infinito en el sentido de que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{I}(t) = +\infty.$$

Demostración. Sabemos que $\mathcal{I}''(t) = 2E - V$ y $V < 0$ entonces $\mathcal{I}''(t) \geq 2E$. Integremos $\mathcal{I}''(t)$

$$\int_{t_0}^t \mathcal{I}''(s) ds > \int_{t_0}^t 2E ds \Rightarrow \mathcal{I}'(t) - \mathcal{I}'(t_0) > 2E(t - t_0) \Rightarrow \mathcal{I}'(t) > 2E(t - t_0) + \mathcal{I}'(t_0).$$

Integremos nuevamente

$$\int_{t_0}^t \mathcal{I}'(s) ds > \int_{t_0}^t (2E(s - t_0) + \mathcal{I}'(t_0)) ds \Rightarrow \mathcal{I}(t) > E(t - t_0)^2 + \mathcal{I}'(t_0)(t - t_0) + \mathcal{I}(t_0).$$

Si aplicamos límites tenemos que:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{I}(t) > \lim_{t \rightarrow +\infty} (E(t - t_0)^2 + \mathcal{I}'(t_0)(t - t_0) + \mathcal{I}(t_0)) = +\infty.$$

Como queríamos demostrar. □

3.5. Centro de masas

Partimos de una solución cualquiera $r = (r_1, \dots, r_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$. Definimos su centro de masas $C(t)$ como:

$$C(t) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M} r_i(t),$$

donde $M = \sum_{i=1}^n m_i$. El centro de masas es por tanto una media ponderada de los vectores de posición.

Derivando dos veces con respecto a t :

$$C''(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r''_i(t) = \frac{1}{M} \sum_{i,j=1, i \neq j}^n G m_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} =$$

$$\frac{1}{M} \left(\sum_{i,j=1, i>j}^n Gm_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} + \sum_{i,j=1, i<j}^n Gm_i m_j \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|^3} \right) = 0.$$

Por lo que $C(t) = \alpha + \beta t$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es decir el centro de masas se desplaza con movimiento uniforme. Asimismo, el momento lineal total del sistema:

$$\sum_{i=1}^n m_i r'_i(t) = MC'(t),$$

se conserva.

3.6. Conservación del momento angular

Sea $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))$ una solución del problema de n cuerpos y

$$c = \sum_{i=1}^n m_i (r_i \wedge r'_i), \quad (3.6)$$

el momento angular total del sistema.

Vamos a comprobar que c no depende del tiempo y por lo tanto se conserva. Para ello derivamos (3.6):

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \sum_{i=1}^n m_i (r'_i \wedge r'_i + r_i \wedge r''_i) = \sum_{i=1}^n (r_i \wedge r''_i) = \sum_{i=1}^n (r_i \wedge m_i r''_i) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i \wedge \left(\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} (r_j - r_i) \right) = \sum_{i,j=1, i \neq j}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j \\ &= \sum_{i,j=1, i < j}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j + \sum_{i,j=1, i > j}^n \frac{Gm_i m_j}{|r_j - r_i|^3} r_i \wedge r_j = 0, \end{aligned}$$

con lo que el momento angular total se conserva.

Nota 3.9. Al contrario que el caso del problema de dos cuerpos², para $n \geq 3$ que se conserve el momento angular no implica que el movimiento sea plano.

Nota 3.10. Si las posiciones iniciales $r_i(0)$ y velocidades iniciales $v_i(0) = r'_i(0)$ de los cuerpos yacen en un plano:

$$\langle x - p_0, v \rangle = 0 \quad p_0 \in \mathbb{R}^3, \quad v \in \mathbb{R}^3,$$

entonces la solución $r(t)$ del problema de n cuerpos yace en dicho plano para todo valor de $t \in I$. Es decir:

$$\langle r_i(t) - p_0, v \rangle = 0 \quad \forall t \in I,$$

para $i = 1, \dots, n$. Se omiten los detalles por brevedad.

²En el caso del problema general de dos cuerpos el movimiento observado desde el centro de masas siempre es plano.

3.7. Colapso total

Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución del problema de n cuerpos definida en $I = (\alpha, \omega)$.

Se dice que ocurre un *colapso total* cuando las n partículas coinciden en un punto en un instante dado, es decir, $\exists \xi \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} r_i(t) = \xi \quad i = 1, \dots, n.$$

Si t_0 es el instante de colapso es evidente que ha de ser $t_0 = \alpha$ o $t_0 = \omega$. Más aún:

$$C(t_0) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i r_i = \xi,$$

por lo que el punto de colapso debe ser el centro de masas en el instante de colapso. A partir de ahora tomaremos $t_0 = \omega$. Refiriendo todo el sistema al centro de masas, es decir haciendo el cambio $\hat{r}_i(t) = r_i(t) - C(t)$ podemos suponer que el centro de masas es idénticamente cero:

$$C(t) = \sum_{i=1}^n m_i r_i(t) = 0,$$

y en particular que $\xi = 0$.

Teorema 3.11. *Si una solución $r(t)$ del problema de n cuerpos presenta colapso en $t = \omega$ entonces, necesariamente, $\omega < \infty$.*

Demostración. Observamos el comportamiento del potencial y el momento de inercia, que deben cumplir:

$$V(r(t)) = -G \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{|r_i(t) - r_j(t)|} \rightarrow -\infty,$$

mientras:

$$I(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i |r(t)_i|^2 \rightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow \omega$. Usando la identidad de Lagrange-Jacobi,

$$I''(t) = 2E - V(r(t)), \quad V < 0,$$

se sabe que $\exists t_0 < \omega$ tal que $I''(t) \geq 1$ si $t \in (t_0, \omega)$. Integrando dos veces:

$$I(t) \geq \frac{(t - t_0)^2}{2} + I'(t_0)(t - t_0) + I(t_0) \quad t \in [t_0, \omega).$$

Supongamos que $\omega = \infty$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \infty,$$

absurdo porque por hipótesis $\lim_{t \rightarrow \omega} I(t) = 0$. □

3.7.1. Un ejemplo particular de triple colisión

Situémosnos en el caso en que $n = 3$ y construyamos una solución en la cual se produce el colapso.

Trabajaremos en el plano y usaremos notación compleja $z = x + iy$. La solución tomará la forma $r_j(t) = \lambda(t)z_j$, $j = 1, 2, 3$, donde z_1, z_2, z_3 forman un triángulo equilátero. A tal fin se fija z_1 con $|z_1| = 1$ y:

$$z_2 = e^{i\varphi} z_1 \quad z_3 = e^{i\varphi} z_2 \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}.$$

Siendo $z = e^{i\varphi}$ raíz cúbica de la unidad resulta que:

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 + z_3 = 0,$$

mientras $|z_j - z_k| = \sqrt{3}$ para $j \neq k$.

Suponiendo que las masas son iguales $m_1 = m_2 = m_3 = m$, al substituir $r_i(t) = \lambda(t)z_i$, $i = 1, 2, 3$, en las ecuaciones del problema encontramos

$$\lambda''(t)z_i = Gm \sum_{j=1, j \neq i}^3 \frac{\lambda(t)(z_j - z_i)}{\lambda^3(t)|z_j - z_i|^3} = -\frac{Gmz_i}{\sqrt{3}\lambda^2},$$

pues $|z_i - z_j| = \sqrt{3}$. La ecuación resultante

$$\lambda'' = -\frac{Gm}{\sqrt{3}\lambda^2}$$

es la del problema de dos cuerpos en el caso de colisión que estudiamos en el Capítulo 1 (Teorema 1.12). Concluimos entonces que o bien hay colisión triple al inicio y al final de la trayectoria, o bien sólo hay colapso al final o bien sólo colapso al principio de la misma.

Observemos que el momento angular total es nulo para este sistema:

$$c = \sum_{i=1}^3 m_i(r_i \wedge r'_i) = m\lambda\lambda' \sum_{i=1}^3 z_i \wedge z_i = 0.$$

Teorema 3.12 (Teorema de Sundman). *Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución del problema de n cuerpos, con centro de masas fijo en el origen y que sufre un colapso total cuando $t \rightarrow \omega$. Entonces el momento angular es nulo.*

Para demostrarlo se necesitan los siguientes lemas.

Lema 3.13 (Desigualdad de Sundman). *Sea $r = (r_1, \dots, r_n)$ una solución del problema de n cuerpos. Entonces:*

$$|c|^2 \leq 4I(I'' - E).$$

Demostración. El momento angular es:

$$c = \sum_{i=1}^n m_i x_i \wedge x'_i,$$

así:

$$|c| \leq \sum_{i=1}^n m_i |x_i| |x'_i| = \sum_{i=1}^n (\sqrt{m_i} |x_i|)(\sqrt{m_i} |x'_i|).$$

Usando la desigualdad de Cauchy–Schwartz resulta:

$$|c| \leq \sqrt{2T} \sqrt{2I}.$$

La identidad de Lagrange–Jacobi es $I'' = 2T + V$ y como la energía total $E = T + V$ se tiene que $I'' = T + E$ luego $T = I'' - E$. Usando esta relación y la última desigualdad tenemos:

$$|c| \leq 2\sqrt{I}\sqrt{I'' - E}.$$

La desigualdad deseada se obtiene elevando al cuadrado los dos miembros. \square

Lema 3.14 (Una desigualdad diferencial). Sea $\psi \in C^2[t_0, w)$ una función que cumple

$$\psi(t) > 0, \quad \psi'(t) < 0, \quad \psi''(t) \geq \alpha + \frac{\beta}{\psi(t)}, \quad t \in [t_0, \omega). \quad (3.7)$$

Entonces

$$\frac{1}{2}\psi'(t)^2 - \alpha\psi(t) - \beta \ln \psi(t) \leq H, \quad t \in [t_0, \omega),$$

donde $H = \frac{1}{2}\psi'(t_0)^2 - \alpha\psi(t_0) - \beta \ln \psi(t_0)$.

Demostración. Multiplicando los dos miembros de la última desigualdad en (3.7) resulta:

$$\psi''\psi' - \alpha\psi' - \beta\frac{\psi'}{\psi} \leq 0,$$

en decir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}(\psi')^2 - \alpha\psi - \beta \ln \psi \right) \leq 0.$$

El resultado se deduce integrando la desigualdad entre t_0 y t . □

Demostración del Teorema 3.12. De la desigualdad de Sundman se sigue, para $t \in [t_0, w)$ que:

$$|c|^2 \leq 4I(I'' - E) \quad \Rightarrow \quad I'' \geq \frac{|c|^2}{4I} + E.$$

Como $I'' \rightarrow \infty$ podemos suponer que $I'' > 0$ para t cerca de ω . Por otro lado, como $I \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \omega$ debe cumplirse que $I' < 0$ para t cerca de ω . Aplicando el segundo Lema 3.14 resulta:

$$\frac{1}{2}I' - EI - |c|^2 \ln I \leq H \quad t \in [t_0, \omega).$$

Esto es imposible si $|c| \neq 0$. Por tanto $c = 0$. □

3.8. Soluciones circulares de Lagrange

En la Sección 3.7.1 hallamos una solución plana del problema de tres cuerpos con masas iguales y colapso total. Ahora vamos a buscar soluciones planas de dicho problema que describen movimientos periódicos en torno al centro de masas. Sin pérdida de generalidad supondremos que éste se halla fijo en el origen. Por tanto

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0.$$

Nos ocuparemos del caso en que los tres cuerpos giran simultáneamente con la misma velocidad angular ω en torno al origen. Vamos a usar notación compleja z_1, z_2, z_3 . Buscamos por tanto soluciones que tienen la forma:

$$r_j(t) = e^{i\omega t} z_j \quad j = 1, 2, 3.$$

El resultado principal es el que sigue.

Teorema 3.15. Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}^2$ puntos no alineados en el plano. Entonces

$$r_j(t) = e^{i\omega t} z_j \quad j = 1, 2, 3,$$

es solución del problema de tres cuerpos si y sólo si se cumplen:

i) El centro de masas está en el origen:

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0.$$

ii) Los puntos z_1, z_2, z_3 son vértices de un triángulo equilátero de lado $d > 0$.

iii) $|\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$, $M = m_1 + m_2 + m_3$.

Uno se pregunta sobre la posibilidad de construir tales movimientos y el lema siguiente aclara la cuestión.

Lema 3.16. *Consideremos tres masas arbitrarias (positivas) m_1, m_2, m_3 y la distancia $d > 0$. Entonces existe un triángulo equilátero –único salvo rotaciones y simetrías– de lado d , de suerte que si colocamos las masas en sus vértices entonces el centro de gravedad se localiza en el origen.*

Demostración. Suponemos que el lado mide $d = \sqrt{3}$. Para pasar al caso general bastará aplicar una homotecia. El triángulo equilátero más general con ese lado tiene la forma,

$$z_1 = \lambda + e^{i\theta}, \quad z_2 = \lambda + we^{i\theta}, \quad z_3 = \lambda + \bar{w}e^{i\theta},$$

donde λ es el baricentro del triángulo y θ el argumento del primer vértice visto desde el baricentro.

Se tiene entonces:

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{e^{i\theta}(m_1 + m_2 w + m_3 \bar{w})}{M}.$$

Obtenemos

$$\begin{cases} z_1 = e^{i\theta} \left(1 - \frac{m_1 + m_2 w + m_3 \bar{w}}{M}\right) \\ z_2 = e^{i\theta} \left(w - \frac{m_1 + m_2 w + m_3 \bar{w}}{M}\right) \\ z_3 = e^{i\theta} \left(\bar{w} - \frac{m_1 + m_2 w + m_3 \bar{w}}{M}\right) \end{cases}$$

Esto prueba la existencia y unicidad (módulo rotaciones y simetrías). \square

Demostración del Teorema 3.15. Verificamos que las condiciones son necesarias. En primer lugar, es evidente que:

$$|r_i(t) - r_j(t)| = |z_i - z_j| := r_{i,j}.$$

La función $r = e^{i\omega t}(z_1, z_2, z_3)$ es solución si y sólo si

$$\begin{cases} -\bar{w}z_1 = \frac{Gm_2}{r_{1,2}^3}(z_2 - z_1) + \frac{Gm_3}{r_{1,3}^3}(z_3 - z_1) \\ -\bar{w}z_2 = \frac{Gm_1}{r_{2,1}^3}(z_1 - z_2) + \frac{Gm_3}{r_{2,3}^3}(z_3 - z_2) \\ -\bar{w}z_3 = \frac{Gm_1}{r_{3,1}^3}(z_1 - z_3) + \frac{Gm_2}{r_{3,2}^3}(z_2 - z_3). \end{cases} \quad (3.8)$$

Si multiplicamos la primera ecuación por m_1 , la segunda por m_2 y la tercera por m_3 y sumamos tenemos que

$$m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 = 0,$$

por lo que el sistema equivale a:

$$\begin{cases} -\bar{\omega}z_1 = \frac{Gm_2}{r_{1,2}^3}(z_2 - z_1) + \frac{Gm_3}{r_{1,3}^3}(z_3 - z_1) \\ -\bar{\omega}z_2 = \frac{Gm_1}{r_{2,1}^3}(z_1 - z_2) + \frac{Gm_3}{r_{2,3}^3}(z_3 - z_2) \\ m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 = 0 \end{cases}$$

Denotando $z_i = (x_i, y_i)$, que dichos puntos estén no alineados implica que los vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ son linealmente independientes. Por otra parte x, y son soluciones del sistema $\mathcal{A}\xi = 0$ donde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \bar{\omega} - \frac{Gm_2}{r_{1,2}^3} - \frac{Gm_3}{r_{1,2}^3} & \frac{Gm_2}{r_{1,2}^3} & \frac{Gm_3}{r_{1,3}^3} \\ \frac{Gm_1}{r_{1,2}^3} & \bar{\omega} - \frac{Gm_1}{r_{1,2}^3} - \frac{Gm_3}{r_{2,3}^3} & \frac{Gm_3}{r_{2,3}^3} \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Como el espacio de soluciones $\{\mathcal{A}\xi = 0\}$ tiene dimensión 2 el rango de la matriz $r(\mathcal{A}) = 1$. Por ello los determinantes de las matrices:

$$\begin{pmatrix} \frac{Gm_1}{r_{1,2}^3} & \frac{Gm_3}{r_{2,3}^3} \\ m_1 & m_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{Gm_2}{r_{1,2}^3} & \frac{Gm_3}{r_{2,3}^3} \\ m_2 & m_3 \end{pmatrix},$$

valen cero luego $r_{1,2} = r_{1,3} = r_{2,3} = d$. Así que si $r(t)$ es solución y z_1, z_2 y z_3 están ubicados en los vértices de un triángulo equilátero de lado d

Por último, igualando a el determinante de \mathcal{A} :

$$\det \mathcal{A} = m_3 \left(\bar{\omega} - \frac{GM}{d^3} \right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{GM}{d^3},$$

luego $|\omega| = \sqrt{\frac{GM}{d^3}}$.

Para verificar el recíproco se comprueba inmediatamente que si z_1, z_2 y z_3 cumplen i), ii) y iii) entonces las funciones $r_j(t) = e^{i\omega t} z_j$, $j = 1, 2, 3$, definen una solución del problema de los tres cuerpos. \square

3.9. El problema restringido de los tres cuerpos

Estudiamos ahora la interacción de dos cuerpos, llamados *primarios*, con masas $m_1 \geq m_2 > 0$ con un tercero –denominado planetoide– cuya masa m_3 es despreciable con respecto a los anteriores.

Nos enfrentamos a un problema de tres cuerpos con un parámetro “pequeño”. En efecto:

$$\begin{cases} r_1'' = Gm_2 \left(\frac{1}{|r_2 - r_1|^3} (r_2 - r_1) + \varepsilon \frac{1}{|r_3 - r_1|^3} (r_3 - r_1) \right) \\ r_2'' = Gm_1 \left(\frac{1}{|r_1 - r_2|^3} (r_1 - r_2) + \varepsilon \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{|r_3 - r_2|^3} (r_3 - r_2) \right) \\ r_3'' = \frac{Gm_1}{|r_1 - r_3|^3} (r_1 - r_3) + \frac{Gm_2}{|r_2 - r_3|^3} (r_2 - r_3), \end{cases}$$

donde $\varepsilon = \frac{m_3}{m_2}$. Como $m_3 \ll m_2 \leq m_1$, al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\begin{cases} r_1'' = \frac{Gm_2}{|r_2 - r_1|^3}(r_2 - r_1) \\ r_2'' = \frac{Gm_1}{|r_1 - r_2|^3}(r_1 - r_2) \\ r_3'' = \frac{Gm_1}{|r_1 - r_3|^3}(r_1 - r_3) + \frac{Gm_2}{|r_2 - r_3|^3}(r_2 - r_3). \end{cases}$$

Se observa en estas ecuaciones que las dos primeras están desacopladas de la tercera. Rigen el movimiento de los primarios y constituyen en sí mismas un problema de dos cuerpos. La tercera está acoplada con las dos primeras.

El problema *restringido* de tres cuerpos consiste en estudiar el movimiento del planetoido r_3 cuando se supone que los primarios r_1 y r_2 están en *movimiento circular*. El nombre fue introducido por Henri Poincaré quien estudió intensamente el problema a finales del siglo XIX ([1])³.

3.9.1. Preparación de las ecuaciones

Supondremos que el centro de gravedad de los primarios está fijo en el origen (esto no supone pérdida de generalidad). Tomamos $r_1(t)$ y $r_2(t)$ conocidos y en movimiento circular, y la ecuación a estudiar es:

$$r_3'' = \frac{Gm_1}{|r_1(t) - r_3|^3}(r_1(t) - r_3) + \frac{Gm_2}{|r_2(t) - r_3|^3}(r_2(t) - r_3). \quad (3.9)$$

Las funciones $r_1(t)$ y $r_2(t)$ toman la forma:

$$r_j(t) = e^{i\omega t} z_j,$$

donde:

$$(1 - \mu)z_1 + \mu z_2 = 0 \quad \mu = \frac{m_2}{M} \quad M = m_1 + m_2.$$

De ahí $z_1 = -\mu\Delta z$, $z_2 = (1 - \mu)\Delta z$, $\Delta z = z_2 - z_1$. Que $r_j(t) = e^{i\omega t} z_j$, $j = 1, 2$, resuelvan las dos primeras ecuaciones equivale a:

$$\omega^2 |\Delta z|^3 = GM.$$

Cambiando el tiempo inicial podemos suponer que Δz es real y positivo, es decir, $\Delta z = |\Delta z|$. Por ello:

$$r_1(t) = -e^{i\omega t} \mu |\Delta z| \quad r_2(t) = e^{i\omega t} (1 - \mu) |\Delta z|.$$

Ahora hacemos el cambio:

$$r_3(t) = |\Delta z| e^{i\omega t} \zeta(t), \quad (3.10)$$

en la ecuación (3.9) y obtenemos:

$$\zeta'' + 2\omega i \zeta' - \omega^2 \zeta = \frac{GM}{|\Delta z|^3} \frac{-\mu - \zeta}{|\mu + \zeta|^3} + \frac{GM}{|\Delta z|^3} \frac{1 - \mu - \zeta}{|\zeta + \mu - 1|^3}. \quad (3.11)$$

Cambiando la escala de tiempos a $t = \omega\tau$ la ecuación pasa a ser:

$$\zeta'' + 2i\zeta' - \zeta = \frac{-\mu - \zeta}{|\zeta + \mu|^3} + \frac{1 - \mu - \zeta}{|\zeta + \mu - 1|^3}, \quad (3.12)$$

³El tema de estudio de Poincaré, durante toda su carrera, fue la existencia y estabilidad de soluciones periódicas. Esta materia excede con creces los objetivos del presente trabajo.

en donde hemos usado que $\omega^2|\Delta z|^3 = GM$. Esta ecuación escrita en “formato real” es:

$$z'' + 2Jz' = z + \frac{-\mu - z}{|z + \mu|^3} + \frac{1 - \mu - z}{|z + \mu - 1|^3}, \quad (3.13)$$

donde $z = (x, y)$ y:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los términos de la derecha son de hecho el gradiente de

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1 - \mu}{|z + \mu|} + \frac{\mu}{|z + \mu - 1|} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu).$$

Es habitual añadir la constante final en esa forma.

Ahora se puede escribir la ecuación como:

$$z'' + 2Jz' = \nabla\Phi(z), \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{-\mu, 1 - \mu\}. \quad (3.14)$$

3.9.2. Los cinco puntos de libración

Comenzamos la integral de Jacobi.

Proposición 3.17. *La función:*

$$\mathcal{J}(z, v) = 2\Phi(z) - |v|^2,$$

constituye una integral primera de la ecuación (3.14) cuando se hace $v = z'$.

Demostración. Derivando $\mathcal{J}(z(t), z'(t))$:

$$\frac{d\mathcal{J}}{dt} = 2\langle \nabla\Phi(z), z' \rangle - 2\langle z', z'' \rangle = 4\langle Jz', z' \rangle = 0.$$

La última igualdad es consecuencia de que J es antisimétrica. □

A la función \mathcal{J} se la denomina la integral (o constante) de Jacobi.

Nos ocupamos ahora de calcular las soluciones de equilibrio de la ecuación (3.14). Estos constituyen, por definición, los *puntos de libración* del problema.

Nota 3.18. *En virtud del cambio (3.10), las configuraciones de equilibrio de z dan lugar a soluciones circulares del problema en la que los tres cuerpos giran con la misma velocidad angular.*

Los puntos de equilibrio z no son otra cosa que las soluciones de la ecuación:

$$z = (1 - \mu) \frac{z + \mu}{|z + \mu|^3} + \mu \frac{z + \mu - 1}{|z + \mu - 1|^3}. \quad (3.15)$$

Por simplicidad vamos a escribir $\rho_1 = |z + \mu|$ y $\rho_2 = |z + \mu - 1|$.

Consideraremos dos situaciones diferentes.

Soluciones en el eje real

Buscamos los equilibrios $z = (x, y)$ para los que $y = 0$. La ecuación (3.15) es:

$$x = (1 - \mu) \frac{x + \mu}{|x + \mu|^3} + \mu \frac{x + \mu - 1}{|x + \mu - 1|^3}. \quad (3.16)$$

Llamando $g(x)$ a la función del segundo miembro se observa que:

- g está definida en los intervalos $I_1 = (-\infty, -\mu)$, $I_2 = (-\mu, 1 - \mu)$ y $I_3 = (1 - \mu, \infty)$;
- g decrece estrictamente en cada uno de los intervalos por separado, siendo negativa en I_1 , positiva en I_3 ;
- $|g| \rightarrow \infty$ cuando $x \rightarrow -\mu$ o $x \rightarrow 1 - \mu$.

Resulta evidente entonces que (3.16), es decir:

$$x = g(x),$$

admite únicamente tres soluciones $x_i \in I_i$, $i = 1, 2, 3$.

Más aún $g(0) = 0$, $g(0) > 0$ ó $g(0) < 0$ dependiendo de si $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu < \frac{1}{2}$ ó $\mu > \frac{1}{2}$, respectivamente. Por tanto, la raíz intermedia $x_2 = 0$, $x_2 \in (0, 1 - \mu)$ ó $x_2 \in (-\mu, 0)$ dependiendo de si $\mu = \frac{1}{2}$, $\mu < \frac{1}{2}$ ó $\mu > \frac{1}{2}$, respectivamente.

Conjuntamente con las soluciones circulares $r_j(t) = e^{i\omega t} z_j$, $j = 1, 2$, cada uno de estos equilibrios x_i da lugar –vía (3.10)– a una tercera órbita circular de suerte que los tres cuerpos escenifican una coreografía en la que se mantienen alineados durante la rotación. Es costumbre denotar $L_i = (x_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$, a estos equilibrios.

Soluciones con componente imaginaria

Conviene escribir la ecuación (3.15) en la forma siguiente:

$$\left(1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) z = \frac{\mu(1 - \mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(1 - \mu)}{\rho_2^3}. \quad (3.17)$$

Al cumplirse la ecuación para un $z = (x, y)$ con $y \neq 0$ llegamos a que:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}\right) x &= \frac{\mu(1 - \mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(1 - \mu)}{\rho_2^3} \\ 1 - \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} &= 0. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que:

$$\frac{\mu(1 - \mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(1 - \mu)}{\rho_2^3} = 0,$$

de donde, en primera instancia sale que $\rho_1 = \rho_2$. Al substituir en la primera obtenemos $\rho_1 = \rho_2 = 1$. De aquí se deduce que hay dos posibilidades L_4, L_5 para el equilibrio. A saber, aquellos dos puntos que forman un triángulo equilátero con $(-\mu, 0)$ y $(1 - \mu, 0)$. Vía (3.10) obtenemos en ambos casos una coreografía para los tres cuerpos en la que éstos rotan formando un triángulo equilátero. Esta situación ya había sido explorada para un contexto más general en la Sección 3.8.

Bibliografía

- [1] J. BARROW-GREEN, *Poincaré and the three body problem*, American Mathematical Society, Providence, RI; 1997.
- [2] J. E. MARSDEN, A. TROMBA, *Cálculo Vectorial*. Addison–Wesley, México, 1998.
- [3] R. ORTEGA RÍOS, A. UREÑA ALCÁZAR, *Introducción a la Mecánica Celeste*. Editorial Universitaria de Granada, Granada, 2010.
- [4] J. SABINA DE LIS, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Curso de Introducción*. Biblioteca de la Universidad de La Laguna. Disponible en <http://josabina.webs.u11.es/>.

Celestial Mechanics: an introduction.

Celestial Mechanics studies the relative movements of celestial objects (stars, planets) as a consequence of their mutual gravitational perturbation.

This memory studies the two-body problem whose objective is to predict the future trajectories of two isolated bodies (Sun and Earth). Three Kepler laws will be deduced in the framework of the central forces fields. Conservation of angular momentum and a detailed analysis of the case of collision will be performed. A particular emphasis is put in the case of periodical motion.

Some elementary aspects of the n -body problem are addressed. Relation between the finiteness of the existence domain of the movement equations and the "collision set" is considered. The possibility of a total collision is analyzed (Sundman Theorem).

Finally, the so-called restricted three-body problem and its "libration points" are also studied. Theoretical results are stated in the framework of the general theory of differential equations.

Kevin Melián Perdomo

**September, 16th 2014
Faculty of Mathematics
University of La Laguna**