

TRABAJO DE FIN DE GRADO
DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

LA ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN EDUCACIÓN PRIMARIA UTILIZANDO
APPLETS

GABRIELA RODRÍGUEZ DE ARMAS

TUTOR: MATÍAS CAMACHO MACHÍN

CURSO ACADÉMICO 2022/2023

CONVOCATORIA: JUNIO

Resumen

Este Trabajo de Fin de Grado se corresponde con la modalidad de revisión teórica, y se presenta una revisión bibliográfica sobre el concepto de fracción. Posteriormente, se diseña una situación de aprendizaje utilizando dos applets del Math Learning Center (Fractions y Math Clock) y se experimenta en el aula y evalúa en un curso de 4º de Educación Primaria. La experimentación ha resultado satisfactoria para la superación de algunas de las dificultades que presenta el alumnado para el aprendizaje de este concepto. Se concluye la utilidad de los applets en la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Palabras-clave: fracciones, dificultades, aprendizaje, applets.

Abstract

This Final Degree Project presents a bibliographical review of the concept of fraction, a didactic lesson using two Math Learning Center applets and the description of the implementation and evaluation of this material with students in the 4th year of Primary Education. The experimentation has been satisfactory in solving the difficulties in the learning of this concept, allowing us to conclude the value of applets in education.

Keywords: fractions, difficulties, learning, applets.

Índice

Introducción.....	3
Capítulo 1. Las fracciones	5
Breve aproximación histórica al concepto.....	6
Concepto de fracción.	7
Dificultades en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las fracciones.....	10
Propuestas didácticas para la enseñanza de la fracción.	16
Capítulo 2. Metodología.....	24
Formulación del problema.	24
Objetivos.	24
Capítulo 3. La situación de aprendizaje: fracciones.....	26
Finalidad	26
Contextualización.....	27
Justificación curricular.....	28
Elementos multidisciplinares	31
Justificación metodológica.....	31
Secuenciación de actividades.....	31
Análisis y evaluación de la experiencia.	34
Capítulo 4. Conclusiones.....	40
Referencias bibliográficas	42
Anexos.....	46

Introducción

Las fracciones forman parte de la vida cotidiana; están presentes y resultan esenciales en muchas actividades del día a día y, sin embargo, constituyen un problema en la escuela. Aun estando ampliamente representadas en el currículum en diferentes cursos de Educación Primaria y Secundaria, su comprensión y aplicación resultan claramente deficientes, dando pobres resultados académicos y generando actitudes negativas frente a su aprendizaje. El concepto de fracción constituye realmente uno de los ámbitos más complejos y difíciles a los que se enfrentan los estudiantes, que tienen serias dificultades para entenderlas, y los docentes de Matemáticas, que buscan y plantean alternativas para superarlas y lograr su aprendizaje.

La selección del contenido de fracciones para desarrollar el Trabajo de Fin de Grado (TFG) obedece a la constatación de las dificultades encontradas en el alumnado al comenzar las prácticas en el aula. La tutora de prácticas estaba trabajando su significado y en ese momento se hicieron evidentes para mí los conflictos que generaban en el alumnado, lo que despertó mi interés por desarrollar este tema. Me planteé cómo se podría enseñar este concepto usando como recurso las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) y, concretamente, qué influencia pueden tener en este proceso los applets como herramientas de aprendizaje.

La opción elegida para este TFG se articula en torno a una revisión de la literatura especializada para conocer el estado de la cuestión y el diseño de una situación de aprendizaje para ser experimentada en el aula, en 4º de Enseñanza Primaria.

El presente informe comienza con un primer capítulo teórico en el que se aborda una aproximación histórica del concepto, sus significados, las dificultades del alumnado en su aprendizaje y las alternativas o propuestas didácticas para superarlas.

En el segundo capítulo se presenta la metodología, en donde se definen las fases seguidas, la pregunta a la que se pretende dar respuesta con este documento, el objetivo general y los objetivos específicos planteados.

El tercer capítulo se centra en la situación de aprendizaje propuesta y experimentada. Se incluye la finalidad de este material, la contextualización del aula, la justificación curricular, los elementos multidisciplinares que se han tenido en cuenta, la metodología por la que ha optado, la secuencia de actividades y, finalmente, el relato y evaluación de la experiencia.

Por último, se presentan las reflexiones y conclusiones a las que se ha llegado en la realización de este trabajo, entre las que destacan, la enorme utilidad que tienen los applets en la enseñanza de las fracciones, o el dominio de la materia por parte del profesorado que exige cualquier contenido matemático.

Capítulo 1. Las fracciones

La comprensión del concepto de fracción y el significado que los estudiantes le atribuyen constituyen un importante ámbito de la investigación en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas.

Durante generaciones los escolares de primaria han estudiado conceptos matemáticos que en el futuro se tornan indispensables para el desarrollo de su vida adulta. Concretamente, entre todos ellos, Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez (2021) evidencian a través de la completa revisión que desarrollan, que la comprensión de las fracciones debe ser trabajada desde edades tempranas. Por ello, estos autores reiteran que las fracciones deben ser estudiadas detenidamente, así como la metodología apropiada para su enseñanza, analizando por tanto las dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto desde el rol del profesorado como desde el del alumnado. Como señalan Tsung-Lung y Hui-Chuan, (2016):

Decimales, fracciones y porcentajes son tres formas diferentes de representar el mismo valor numérico. Muchas actividades de la vida cotidiana se basan en estas tres formas, como cocinar, comprar comestibles, pagar facturas y cambiar divisas. Para hacer frente a estas situaciones cotidianas que involucran fracciones, decimales y porcentajes, la comprensión de la relación entre ellos es esencial para ayudar a las personas a moverse entre ellos de manera flexible y eficiente. Sin embargo, la investigación sugiere que este movimiento no es fácil para muchos estudiantes porque no entienden la conexión de las tres formas (p.6).

La presencia de las fracciones en el currículum escolar está claramente justificada porque su asimilación y manejo son muy útiles en el desarrollo personal y en diferentes ámbitos profesionales. Nos encontramos con el concepto de fracción en una amplia diversidad de contextos y situaciones. Según varios estudios que analizaremos a continuación, su aprendizaje constituye una parte integral de la persona porque maneja procedimientos esenciales de la vida cotidiana y su comprensión es fundamental para desarrollar otros aprendizajes matemáticos como álgebra, geometría y otros. Desde el punto de vista de la psicología cognitiva, su estudio contribuye al desarrollo de estructuras mentales fundamentales, porque dan continuidad al desarrollo intelectual (Butto, 2013). “El dominio de las fracciones se considera esencial para acceder al plan de estudios de matemática en secundaria, en particular en los dominios de medida, álgebra y geometría, así como de probabilidad” (Department for Education of England-DFE, 2011, pág. 72).

En este capítulo repasaremos brevemente la historia del concepto de fracción, su origen, los significados atribuidos al mismo, las dificultades encontradas relativas a su aprendizaje y propuestas de enseñanza para superarlas.

Breve aproximación histórica al concepto.

Fue necesario construir el concepto de fracción, su significado, desde hace miles de años porque responde a una necesidad real de uso para resolver problemas de la vida cotidiana, como son el recuento, la cantidad de cabezas de ganado que se tenían o el número de piezas que se debían cazar o cosechar, si bien el nombre concreto que se le asignó es posterior (Barba, Varon y Binimelis, 2019). Las fracciones se concibieron, entonces, porque existen divisiones inexactas y porque se necesitaron para aplicar unidades de medida de longitud (León Robles, 2011).

Ya desde la Edad Antigua, se constata que los egipcios trabajaban con fracciones; en el papiro de Rhind (atribuido al escriba Ahmes) aparecen registradas por primera vez en la historia, así como sus reglas y utilidades, según recoge el análisis de Carrillo et al. (2016). Los documentos de la civilización egipcia encontrados nos han permitido saber que razonaban con fracciones y operaban con ellas para resolver cuestiones cotidianas; las usaban con numerador 1 y un sistema aditivo. También los babilonios han dejado registros de su uso en tablillas encontradas, con un sistema de numeración de base 60. La cultura griega consideró la fracción como razón o concordancia entre enteros, representando de manera distinta las unitarias y ordinarias. También hay registros chinos antiguos que demuestran su uso. Fue el conocimiento hindú el que estableció las reglas para operar con ellas. Finalmente, la civilización árabe incorporó la línea para simbolizar las fracciones.

Con el paso del tiempo, dada la necesidad de solucionar un mayor número de problemas matemáticos, se define el conjunto de los números racionales (Q) como extensión de los números enteros (Z), que considera tanto a las fracciones como algunas representaciones de los decimales. Aunque estos avances se produjeron lentamente, siempre hubo algún visionario, como Al-Khwarizmi (c. 780-846), que fue quien introdujo la numeración decimal como herramienta de trabajo matemático. Su obra recoge el conocimiento matemático hindú, griego y babilónico ya comentado y se le considera el padre del Álgebra, palabra que se le atribuye. En el siglo XII, Juan de Luna tradujo sus escritos y usó la palabra “fractio” correspondiente a al-Kasr, que significa quebrar o romper; de este modo se le dio significado al concepto de fracción. También en el siglo XII Omar Jayyam estableció por primera vez la idea de que las fracciones podrían contener más propiedades que las conocidas con los números naturales (Barba, Varon y Binimelis, 2019). Asimismo, cabe destacar la labor realizada por Stevin en el año 1585, quien logró que el decimal alcanzara el reconocimiento

de noción matemática, transformándolo en objeto de conocimiento para enseñar y para utilizarlo en situaciones prácticas, como Carrillo et al. (2016) señalan.

Las fracciones, que nacen como respuesta a la necesidad humana de contar, medir, comparar, distribuir y repartir o dividir magnitudes, esto es, en un contexto de medida y de reparto, son construcciones históricas y sociales. Requieren para su comprensión de un largo recorrido porque su significado ha estado sujeto a diferentes interpretaciones y ha ido evolucionando a lo largo de la historia (Salazar, 2021).

Habiendo mostrado brevemente la importancia histórica que han tenido las fracciones en nuestra sociedad desde hace miles de años, queda expuesto que nos enfrentamos a una noción prioritaria que se debe trabajar desde la escuela primaria. Sin embargo, para saber cómo enseñar las fracciones, es primordial que analicemos en primer lugar el concepto y sus particularidades, para luego observar cuáles son las dificultades y errores más comunes en su aprendizaje.

Concepto de fracción.

Si se analiza la definición de fracción, podemos observar que no hay una única respuesta, sino que existen varias posibles según el contexto en el que se utilicen. Es un concepto complejo al que se le atribuyen diferentes sentidos y supone una de las primeras ideas abstractas en el aprendizaje infantil de las matemáticas (Tsung-Lung y Hui-Chuan, 2016). La comprensión de su significado requiere la adecuada asimilación de las distintas interpretaciones que este concepto entraña.

Kieren (1976, citado por Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez, 2021, pág. 54) estableció cuatro categorías o sentidos atribuidos, que están relacionados entre sí: fracción como relación (razón), fracción como operador, fracción como cociente y fracción como medida. Behr et al. (1983; 1992, citados por Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez, 2021, pág. 54) consideran que a este megaconstructo de fracción se le deben añadir dos subconstructos: fracción como parte-todo y fracción como decimal. El mismo Kieren (1988, citado por Tsung-Lung y Hui-Chuan, 2016, pág. 3) identificó cinco constructos: parte-todo, cociente, operador, razón y medida. Si atendemos a Freudenthal (1983, citado por Valenzuela et al., pág. 3), los aspectos fundamentales en los que debemos considerar la fracción son: como “fracturador”, como “comparador”, como “medidora” y como número racional. Para Fandiño (2009, citada por Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez, 2021, pág. 54) es importante analizar otras perspectivas para considerar el concepto de fracción, teniendo en cuenta tanto su

interpretación como su uso, y propone seis formas de contemplarla: como probabilidad, como número racional, como punto de una recta orientada, como decimal, como porcentaje y en los puntajes. Lo que esta autora (2015) expone es que hay varias formas de entender el concepto de fracción, no sólo desde un punto de vista terminológico, sino también matemático. Así, posteriormente destaca: la fracción como parte de una unidad-todo, a veces continua, a veces discreta; como cociente; como relación; como operador; como probabilidad; en los puntajes; como número racional; como punto de una recta orientada; como medida; como indicador de cantidad de elección; como porcentaje; y, finalmente, en el lenguaje cotidiano. Como vemos, son doce interpretaciones y/o usos que las fracciones pueden representar en las matemáticas y, consecuentemente, en su enseñanza y aprendizaje. Así, esta autora incluye, además de aplicaciones, los cinco constructos establecidos por Kieren sobre los que se podría decir que hay un consenso generalizado, a juzgar por la bibliografía consultada. Fracción es, sin lugar a duda, un concepto complejo, como se ha expuesto. Supone la consideración de esas cinco interpretaciones que, por su importancia, se explican brevemente a continuación.

Fracción como parte-todo: se corresponde con la capacidad de dividir una unidad -ya sea continua o un conjunto de objetos discretos- en partes equivalentes, de modo que cada una de ellas es una fracción semejante.

Fracción como relación (razón): expresa la correspondencia entre dos valores de una magnitud o de distintas magnitudes por comparación. Si bien toda fracción se puede considerar como una razón, no todas las razones son fracciones; sólo aquellas en las que se compara una parte con la totalidad. Las razones que comparan totalidades diferentes, partes distintas de una misma totalidad o totalidades con partes no son fracciones (Andonegui, 2006).

Fracción como operador: tiene que ver con una función aplicable a objetos, números o conjuntos, de modo que se logra aumentar o disminuir una cantidad dando un valor nuevo; esto es, se refiere a la fracción como una acción sobre un conjunto. Se puede considerar como el orden de ejecución de dos operaciones, por ejemplo, primero multiplicación y luego división o al contrario.

Fracción como cociente: indica el resultado de una división en la que no se obtiene un número entero en el reparto. Este resultado puede expresarse como número decimal o como fracción, según sea el caso. La fracción se entiende desde esta interpretación como la operación de dividir un número natural por otro.

Fracción como medida: representa la magnitud de una fracción o la medida de un intervalo. Es el significado que está detrás del uso de las fracciones para determinar cuántas veces una medida o una cantidad se repite en el todo o la unidad.

Las fracciones operan y tienen sentido en todos esos contextos y adquieren su razón de ser en su uso y aplicación en esos ámbitos. Su comprensión requiere el manejo de los diferentes niveles de conceptualización que su aprendizaje necesita. Su significado, efectivamente, va más allá de su definición. Estos sentidos distintos atribuidos al concepto de fracción han ido surgiendo como necesidades para resolver diferentes problemas que se fueron planteando en su uso, como se expuso en el apartado anterior. Vemos que es un concepto polimorfo que adopta diferentes formas de representación; el propio símbolo a/b supone también una marcada polisemia, como Andonegui (2006) comenta. ¿Por qué es importante tener en cuenta estas interpretaciones y significados del concepto de fracción para su enseñanza y aprendizaje? Tsung-Lung y Hui-Chuan (2016) nos dan la respuesta:

Una literatura considerable sugiere que estos cinco constructos juegan un papel importante en la comprensión de fracciones de un niño y el desarrollo de su conocimiento interconectado y representativo de ellas. Por ejemplo, (1) la construcción parte-todo de las fracciones es la base para que los niños pequeños desarrollen el concepto de comparar y ordenar fracciones equivalentes [...]. (2) La construcción de razón de fracciones como una relación entre dos cantidades, es decir, $3/4$ significa 3:4, es fundamental en el desarrollo del razonamiento proporcional [...]. La falta de esta comprensión puede causar problemas conceptuales a los estudiantes en sus clases de cálculo, especialmente cuando están aprendiendo sobre la derivada como tasa de cambio [...]. (3) La construcción del cociente juega un papel esencial en la comprensión de las fracciones algebraicas [...]. (4) La construcción del operador ayuda a comprender el significado de una fracción de una cantidad como $3/4$ de 100 metros [...] y (5) la comprensión de la construcción de la medida es esencial para desarrollar la competencia en operaciones aditivas en fracciones [...]. Los investigadores también argumentaron que los niños que carecían del constructo de medida tenían dificultades para reconocer fracciones en una recta numérica [...] (p.3).

Vergnaud (1990) considera que comprender las fracciones es más que manipular objetos y que su aprendizaje no puede articularse en torno a definiciones. Plantea que si en la educación primaria se entiende la fracción sólo como una cantidad fraccionaria en términos de parte-todo (por ejemplo, un trozo de una pizza o una cantidad dentro de un conjunto), no se podrá captar la riqueza y el poder de los números racionales. La comprensión de este concepto, para el autor, requiere no sólo la consideración de esta relación parte-todo, sino también la relación parte-parte, porque el todo se relaciona con el número de partes que se tienen y las divisiones que se han hecho para obtenerlas. En su teoría de los campos conceptuales considera que son las situaciones las que dan sentido a los conceptos y que para resolver una situación o

problema se requiere la aplicación de más de un concepto. La conceptualización para él es un proceso lento, progresivo, que necesita distintas aproximaciones en situaciones diferentes para llegar a la comprensión. Fracciones, entre otros conceptos, empiezan a adquirir significado para el alumnado de educación primaria con problemas de proporción hasta que se desarrolla el dominio progresivo de las situaciones en las que se usa, de procedimientos y de representaciones estrechamente conectadas hasta razonar con ellas como objetos matemáticos. Vergnaud las incluye en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas.

En este sentido y en este contexto, las palabras de Goutard (1964, págs. 89-90, en Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, 2001, pág. 18) cobran especial relevancia: “Las fracciones no son algo que haya que saber, sino algo que hay que comprender, y no es posible comprenderlas antes de tener una suficiente experiencia con ellas ... La clave del éxito en la iniciación al estudio de las fracciones es la variedad, el cambio, la diversidad de puntos de vista”.

Se ha constatado que la comprensión del concepto de fracción entraña problemas y dificultades de aprendizaje dado que los estudiantes no consiguen captar su significado y aplicarlo adecuadamente. Este aprendizaje no es sencillo y su enseñanza, por supuesto, tampoco.

Dificultades en el proceso de enseñanza/aprendizaje de las fracciones.

La investigación educativa en matemáticas aporta abundantes referencias relativas al aprendizaje y la enseñanza de las fracciones. Tal y como se ha puesto de manifiesto en los apartados anteriores, el concepto de fracción es un concepto complejo de difícil aprehensión por parte del alumnado, que muestra serias dificultades para aprender su significado y para operar con ellas al utilizarlas en su vida diaria. Estas dificultades son propias o inherentes a la diversidad de interpretaciones del propio concepto de fracción, por una parte, y, por otra, a la forma en que se introduce y se trabaja este contenido con el alumnado. Brousseau (1998) considera que existen tres obstáculos: ontogenéticos, propios del estudiante y su naturaleza; didácticos, relacionados con el docente y su práctica de aula; y epistemológicos, relativos a la naturaleza matemática del concepto de fracción. Para el profesorado es uno de los contenidos más difíciles de enseñar. Los resultados de aprendizaje son bajos o incluso muy bajos, especialmente en educación primaria, mostrándose una limitada comprensión, y las expectativas de mejora no son muy prometedoras, a pesar de los esfuerzos realizados en la planificación y experimentación de nuevas propuestas (Ávila, 2019).

A pesar de la evidente utilidad de las fracciones en todas las etapas educativas, existe, según Streefland (1991) una gran problemática en la construcción de conocimiento desde los saberes previos y el vínculo del concepto con el contexto y la realidad cotidiana, lo que genera a los estudiantes una dificultad en la interpretación de las fracciones, así como sus relaciones y significados. Por eso cree que deben utilizarse herramientas y recursos para establecer puentes entre lo concreto y lo abstracto, como diagramas, esquemas o modelos visuales, que actúen como vehículos de pensamiento para que los estudiantes consigan captar la realidad matemática y avanzar en su aprendizaje, de modo que el concepto adquiriera significado. Nos encontramos, según este autor (1993) ante dos cuestiones o problemas distintos: no tener en cuenta la complejidad de las fracciones a lo largo del aprendizaje en la infancia y plantear un aprendizaje mecanicista de las mismas, alejado de la realidad y basado en normas rígidas.

Por su parte, Escolano y Gairín (2005) concuerdan en que la dificultad de comprensión de las fracciones se debe sobre todo a la práctica docente, en la que generalmente se presenta el número racional (fracción) como una relación “parte-todo”, lo que crea visibles obstáculos para la comprensión real del concepto de fracción. Dicha noción “parte-todo”, que no aparece como una necesidad humana ni se genera en el ámbito de las matemáticas, supone un impedimento para los estudiantes en la resolución de problemas. Además, sostienen que existe una preocupación generalizada por el aprendizaje teórico memorístico, que fomenta que el estudiante se centre únicamente en la repetición mecánica y en el ámbito procedimental, alejándose de una búsqueda consciente de soluciones y del verdadero significado de fracción.

Para arrojar luz en este asunto, Fandiño (2009, citada por Arenas-Peñaloza y Rodríguez Vázquez, 2021, pág. 55) enumera, según su criterio, las principales dificultades que se han detectado en el aprendizaje de las fracciones; se comentan algunas por su relevancia. En primer lugar establece conflictos relativos al ordenamiento, un fallo muy habitual que comete el estudiante cuando organiza fracciones, números decimales o los dos mezclados de forma incorrecta; en segundo lugar, expone problemas en la realización de cálculos, debidos a una dificultad conceptual del estudiante para realizar operaciones entre fracciones; en tercer lugar, formula obstáculos en el reconocimiento de esquemas, relacionados con el hecho de que el estudiante no sabe interpretarlos y por ello no puede identificar la unidad que está en juego; en cuarto lugar, hace referencia a la duda en el manejo del adjetivo “igual”, dado que el aprendiz no sabe cómo interpretar que las unidades fraccionarias deben ser iguales; por último y en quinto lugar, recalca la problemática del alumnado para determinar la unidad que generó

la fracción utilizándola como origen, puesto que los educandos saben representar una fracción concreta partiendo de un conjunto, pero dibujar el total a partir de una fracción se les hace prácticamente imposible, dado que no lo trabajan en el aula. La autora también expone como dificultades la gestión de la equivalencia, de la fracción irreducible, de las figuras no estándar y del manejo autónomo de esquemas, figuras o modelos.

Perera y Valdemoros (2009) sostienen que la baja comprensión del concepto tiene que ver con muchos factores, pero subrayan el uso excesivo de situaciones cotidianas porque puede originar ideas abstractas en el alumnado, que a veces se enfrenta a contextos desconocidos. Esto genera en los estudiantes desconciertos debidos a los escasos conocimientos previos de los que disponen mientras estudian un determinado contenido matemático en la escuela.

Para Fazio y Siegler (2010) las dificultades de aprendizaje de fracciones tienen ámbito mundial, pues son muchos los países que no consiguen desarrollar un conocimiento efectivo de su significado. Estas dificultades tienen naturaleza conceptual, que se manifiesta en que los escolares ven las fracciones como números separados e incluso operan con ellas procedimentalmente, pero sin comprenderlas global y conceptualmente.

Butto (2013) entiende que la interpretación de la fracción como parte de un todo no favorece una comprensión correcta del concepto y entiende que genera dependencia con los objetos concretos. Hace referencia a lo habitual que es encontrar en los manuales editados para la enseñanza primaria el concepto de fracción determinado por dos acciones: dividir y tomar. Considera que esta simplificación del concepto puede conllevar su baja comprensión en niños pequeños, puesto que no aborda todas las singularidades inherentes a su significado y conceptualización. Observamos un ejemplo claro del fallo de esta definición en las fracciones impropias, dado que el número de partes tomadas es mayor que el número de partes divididas, según la acción dividir/tomar. En estos casos, los estudiantes presentan una dificultad conceptual al interpretar una fracción impropia, puesto que $5/3$ representa dividir un todo en tres partes iguales y tomar cinco. En su investigación detecta que el proceso de conceptualización de los números enteros a los fraccionarios es lento y reclama la comprensión de distintos subconstructos que forman parte del campo conceptual de los números racionales, en línea con la transición que Vergnaud (1990) plantea entre los problemas de estructuras aditivas y los de estructuras multiplicativas, que incluyen las fracciones. Haciendo referencia a las interpretaciones de Kieren (1988), la autora ha observado que algunos estudiantes están en el nivel más bajo de este modelo, pues manejan

un saber rudimentario básico de herramientas intuitivas como partición, equivalencia y formación de la unidad. Es necesario trabajar estas ideas en el aula, de modo que los estudiantes puedan construir progresivamente un concepto de fracción más consistente, que implique las concepciones de medida, cociente, razón y operador.

En sintonía con los análisis realizados anteriormente, Gabriel et al. (2013) reafirman que el alumnado tiene grandes dificultades para operar con fracciones y que utiliza procedimientos sin comprenderlos realmente. Consideran que es necesaria una reorganización conceptual en el ámbito de los números naturales. Según estos autores, para que la comprensión conceptual sea completa, desarrollar la conceptualización de las fracciones no sólo requiere un conocimiento conceptual profundo y bien articulado, sino que también reclama la manipulación compleja de procedimientos.

Tsung-Lung y Hui-Chuan, (2016), parten de las cinco interpretaciones de Kieren presentadas en el apartado del concepto. Como señalan, son muchas las referencias bibliográficas que dan cuenta de que las fracciones siguen siendo un asunto difícil no resuelto en las matemáticas elementales, porque son muchos los estudiantes que desarrollan una concepción pobre y limitada de este concepto, lo que origina dificultades de comprensión que la escuela no ha logrado superar. En este sentido, enseñar los algoritmos propios de fracciones sin atender a sus fundamentos cognitivos más significativos, que es habitual en el aula, no conduce a su comprensión porque los niños y niñas no manejan de forma suficiente los conceptos y procedimientos propios y definatorios de las mismas. Muchos aprendices pueden operar con los algoritmos y ser capaces de usarlos, por ejemplo, sumando fracciones, pero sin que se haya desarrollado la comprensión y el conocimiento subyacente al concepto y a las operaciones que realizan. Defienden que las fracciones deben considerarse un nuevo sistema numérico basado en la relación multiplicativa y no como una relación aditiva común, ya que son algo más que una simple extensión de los números enteros. La cita de Nickson (2000, pág. 18) que estos autores reflejan (pág. 2) es más que elocuente: “La falta de desarrollo y comprensión exitosos de las fracciones en las primeras etapas del aprendizaje de los niños resultará en dificultades que los seguirán hasta los años de educación secundaria”. Tradicionalmente se plantea la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones en términos de partición o reparto equitativo, una perspectiva parcial y sesgada que no considera toda su historia, porque esa noción sólo representa una de las múltiples propiedades que las fracciones tienen y de los significados que se le han atribuido; por sí sola, se entiende que es una forma poco apropiada para trabajar este concepto con el alumnado pequeño de manera efectiva y

significativa. Para su enseñanza debe tenerse en cuenta que el desarrollo y la conceptualización de la forma simbólica de las fracciones requiere la movilización simultánea de muchos conceptos. Contrastando la información analizada, se observa una relación entre lo que estos autores plantean y lo expresado por Vergnaud (1990), que considera las fracciones en el campo conceptual de las estructuras multiplicativas y, también, en lo que este autor comenta relativo a que para resolver una situación o problema hace falta el concurso de múltiples conceptos.

La investigación realizada por George (2017) en su tesis doctoral indagó las estrategias usadas por estudiantes de enseñanza primaria que sólo habían trabajado con fracciones parciales y enteras, para resolver la fracción asociada en la resolución de problemas de cociente partitivo. Los participantes usaron básicamente cuatro estrategias para encontrar la fracción relativa en la resolución de cuestiones de cociente partitivo. Una de esas estrategias se asemeja a la conceptualización de la interpretación parte-todo, de modo que es posible deducir que los conocimientos previos de esta relación condicionan el desarrollo del cociente partitivo y puede producirse de varias formas. En términos teóricos, este trabajo, como hallazgo, cuestiona un aspecto del modelo actual de Pirie-Kieren, proponiendo una modificación, de la que se deriva como implicación una mayor atención de los docentes de matemáticas al concepto de unidad cuando se aborda la enseñanza de los distintos subconstructos o interpretaciones de las fracciones. Para esta autora, es importante ayudar al alumnado a crecer para que comprenda los conceptos matemáticos, insistiendo en favorecer el desarrollo de ideas sólidas y completas utilizando los contextos locales en su aprendizaje.

Cristancho y Cristancho (2018) también entienden que las fracciones siguen siendo un tema difícil para que los profesores y estudiantes logren una buena comprensión. En la revisión que han realizado concluyen que las dificultades en la resolución de problemas con fracciones se deben mayoritariamente a que no se tienen en cuenta los conocimientos previos del alumnado y a la aplicación de una metodología que no se basa en el contexto.

El trabajo realizado por González y Eudave (2018) indica la dificultad del alumnado para operar con fracciones y decimales, así como para representarlos. Es un hecho constatable que los estudiantes no logran los aprendizajes previstos, aun cuando las matemáticas ocupan una parte importante del horario del currículum. El docente es un elemento clave, tanto en el conocimiento matemático como en el didáctico, para el logro de un aprendizaje significativo de sus aprendices y, en este sentido, han detectado que los contenidos matemáticos de los que

disponen los futuros profesores de enseñanza primaria son limitados y deficientes en el ámbito de las fracciones. Para estos autores, que los futuros maestros y maestras desarrollen el conocimiento matemático necesario sobre el tema es fundamental para que puedan, luego, planificar y organizar las estrategias pedagógicas y de intervención pertinentes a la enseñanza de las fracciones, de modo que su alumnado logre superar las dificultades que este difícil concepto muestra.

También Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez (2021) contemplan en la revisión que han realizado las dificultades que presenta el alumnado con la equivalencia entre fracciones, bien sea para encontrar una fracción equivalente a otra, o para completar el numerador o denominador en dos fracciones equivalentes. Este problema desencadena que el alumnado también tenga dificultad para hallar la “fracción irreducible” y que los estudiantes no sepan interpretar o representar figuras no estándar, más allá del círculo, el cuadrado o el triángulo. Siguiendo a Fandiño (2009), estos autores observan que esta incapacidad también puede ser consecuencia de las actividades rutinarias que proponen los docentes, puesto que normalmente todos los ejemplos se representan con dichas figuras estándar. De igual manera, constatan que las dificultades en el aprendizaje de las fracciones están altamente relacionadas con la falta generalizada de comprensión del concepto de fracción que presentan los estudiantes. Más concretamente, recalcan que el alumnado no es capaz de representar una fracción, de identificar la unidad de partida y de explicar por qué las unidades fraccionarias deben ser iguales. En síntesis, a través de su estudio concluyen que la raíz del problema está en que el aprendiz no consigue relacionar el concepto de fracción con la generación de una imagen, bien sea mental o simbólica, para utilizarla en su proceso progresivo de comprensión y conceptualización. Utilizar solamente la relación parte-todo como forma de aproximarse a las fracciones y trabajarlas en el aula no favorece su comprensión efectiva y significativa. Destacan que Kieren [...] defendía la idea de que la forma adecuada de introducir este concepto es esta interpretación parte-todo, pero que ésta no puede tratarse independientemente o por sí misma, porque se relaciona con las demás, dado que todas ellas son los distintos aspectos que configuran y definen el concepto de fracción.

En el repaso realizado en este apartado de las dificultades de enseñanza y aprendizaje que generan las fracciones en la escuela, se constata un compromiso explícito por mejorar sus resultados de comprensión y aplicación, analizando, como hemos visto, sus orígenes y consecuencias. Como se recordará, al comenzar este apartado se planteó que estas dificultades pueden deberse, por una parte, a la complejidad del concepto y a su diversidad de

interpretaciones; y, por otra, a su enseñanza. Sin ánimo de establecer una categorización o clasificación rígida, se ha hecho una aproximación a la literatura especializada revisada, con la intención de analizar cuál es la concepción subyacente a los mismos o predominante. Así se ha establecido que algunos autores tratan aspectos y cuestiones del concepto, mientras que se articulan en torno a la enseñanza, y otros cuestionan que la enseñanza de las fracciones se empiece con la interpretación parte-todo de Kieren. En la tabla 1 se expone la naturaleza de los artículos analizados.

Tabla 1. Temáticas que prevalecen en los artículos consultados.

Autores	Temática
Fandiño (2009) Fazio y Siegler (2010) Butto (2013) George (2017)	Relacionada con el concepto
Streetland (1993) Escolano y Gairín (2005) Perera y Valdemoros (2009) Gabriel et al (2013) Castaño y García (2014) Tsung-Lung y Hui-Chuan (2016) Cristancho y Cristancho (2018) Arenas-Peñaloza y Rodríguez-Vásquez (2021)	Relacionada con la enseñanza
Escolano y Gairín (2005) Butto (2013) Castaño y García (2014)	Relacionada con cuestionar la enseñanza a través de la interpretación parte-todo

Una breve mirada a esta síntesis pone de manifiesto la preocupación por mejorar la enseñanza de este contenido, como la preponderancia en trabajos del ámbito pedagógico señala. Todos los artículos destacan la importancia de que el docente tenga conocimiento suficiente para elaborar sus propuestas didácticas e intervenciones en el aula. También concuerdan con la necesidad de tener en cuenta todas las interpretaciones que el concepto de fracción supone, dada su complejidad. El apartado siguiente aborda diferentes propuestas planteadas para favorecer un aprendizaje significativo que supere esos errores y dificultades repasadas en este apartado.

Propuestas didácticas para la enseñanza de la fracción.

Ya hemos visto que, a la luz de las dificultades expuestas, se reclama otra forma de enseñar las fracciones y se advierte de la necesidad de plantear la manera de trabajarlo en el aula con propuestas alternativas que den cuenta, por una parte, de la complejidad inherente a las

mismas y, por otra, de los problemas que su docencia ha tenido hasta el momento. Como Streefland (1991), hemos de preguntarnos qué actividades y materiales hacemos para que los estudiantes puedan construir un concepto significativo y operativo de fracción. Es evidente que se requiere una investigación detallada sobre las propuestas didácticas que resultan más adecuadas para dicho aprendizaje. Partimos de la base de que el alumnado aprende los conceptos matemáticos tomando como referencia situaciones cotidianas, porque utiliza sus conocimientos previos para resolver los problemas y las situaciones a las que se enfrenta (Carrillo y col., 2016). Por otro lado, cabe destacar que al comenzar su andadura en el aprendizaje matemático, los estudiantes afianzan en primer lugar los números naturales, pasando más adelante a estudiar las fracciones para comprender las particiones en diferentes contextos.

Como Castaño y García (2014) indican, es frecuente responsabilizar al alumnado de los fracasos en el aprendizaje, no teniendo en cuenta que el papel de los docentes también tiene mucho que ver con su falta de atribución de significados. Por ello estos autores entienden que es primordial plantear nuevos modos de enseñar, diferentes a los habituales o tradicionales; en este sentido hablan de una categoría de dificultades didácticas. Así, desde el punto de vista del profesorado, es necesario encontrar estrategias distintas que pongan en juego el uso de la realidad y la perspectiva del que aprende, como los modelos de procesamiento de la información proponen; en este contexto, destacan las ventajas que aporta el aprendizaje contextualizado en la construcción del conocimiento, teniendo en cuenta los saberes previos y su interacción con el contexto socio-familiar. Fazio y Siegler (2010) sugieren que la construcción del concepto se inicie en la infancia por medio de la comprensión informal del reparto y la proporcionalidad. Un aprendizaje consistente de las fracciones difícilmente se logra con un modelo conceptual parte-todo para su enseñanza, de modo que se requieren planteamientos alternativos para lograrlo. En este sentido, se ha propuesto el uso de diferentes soportes de representación y también de distintas representaciones de un concepto matemático, con el fin de facilitar al alumnado el aprendizaje de conceptos más elaborados y potentes en el ámbito de las matemáticas (Butto, 2013). Como vemos, se detecta la imperiosa necesidad de buscar alternativas y una aproximación a la investigación educativa en el área nos ofrece algunas posibilidades.

Partiendo de las dificultades propias del concepto y teniendo en cuenta su complejidad, Tsung-Lung y Hui-Chuan, (2016) desarrollan una síntesis teórica con la que pretenden aportar una concepción más amplia de la docencia de las fracciones, un conocimiento multifacético,

porque entienden que un enfoque tradicional que sólo contempla la partición o el reparto equitativo no trata todo su potencial ni su historia. Para que los estudiantes alcancen lo que llaman “dominio de las fracciones”, proponen un modelo con cinco dimensiones: 1) las cinco construcciones de fracciones; 2) el concepto de fracciones equivalentes; 3) la fluidez procesal y la comprensión conceptual de las operaciones de fracciones; 4) la relación entre fracciones, decimales y porcentajes; y, finalmente, 5) la transición entre diferentes formas de representaciones que involucran fracciones. Con respecto a esta última dimensión, adoptan los cinco modos de representación que Lesh propone (situaciones del mundo real, ayudas de manipulación, imágenes, símbolos hablados y símbolos escritos) y consideran que cuando los estudiantes no tienen la capacidad de manejarse entre estas representaciones, exponerlos al conocimiento fraccionario no favorece la comprensión ni la construcción del significado del concepto de fracción. Por eso proponen como alternativa para tener en cuenta en la planificación de la enseñanza el modelo que se presenta en la figura 1.

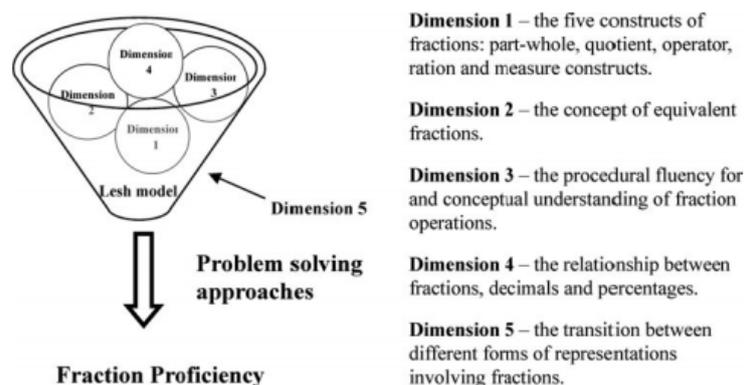


Fig. 1. Un marco para desarrollar el dominio de los estudiantes en fracciones (tomado de Tsung-Lung y Hui-Chuan, (2016, p. 8).

Esta propuesta pone el acento en el conocimiento que necesita asimilar el alumnado, comenzando por las cuatro primeras dimensiones, para llegar al desarrollo de ideas fraccionarias. Lo que sugieren es “un marco para desarrollar la competencia en fracciones de los estudiantes desde el punto de vista de la comprensión conceptual, las habilidades procedimentales y la destreza que tienen los individuos para abordar situaciones cotidianas que involucren fracciones” (p. 9), en el que se parte de la comprensión global de cada dimensión para lograr posteriormente su integración. Los autores aportan una sólida revisión del concepto que da una visión más amplia del mismo, por una parte, y, por otra, una forma de planificar estos contenidos para su docencia, aportando cómo y dónde debemos dirigir los esfuerzos para favorecer la construcción y el dominio de las fracciones. La enseñanza debe

contemplar su carácter multifacético, sin aislar una interpretación con respecto a las demás y debe cuidarse la organización de los temas relacionados, tanto en el currículum, como en los materiales que se utilicen en el aula, si lo que se persigue es la mejora de la competencia del alumnado en el manejo de las fracciones.

Perera y Valdemoros (2007, 2009) diseñaron una propuesta didáctica para la enseñanza de fracciones en cuarto curso de educación primaria de una escuela pública. La intervención didáctica se articuló en torno a situaciones problemáticas realistas y lúdicas conectadas a la vida cotidiana del estudiante, realizadas desde un enfoque constructivista del aprendizaje; su concepción es una enseñanza matemática realista y lúdica. Se trató de esclarecer si esa metodología ayudaría en la adquisición del concepto de fracción y en las resoluciones operacionales, o si por el contrario, seguiría existiendo la misma problemática. Las autoras aplicaron pre y post-test, realizando además una entrevista individual a tres educandos. Como resultado del estudio, concluyeron que su intervención favoreció la construcción de los propios conocimientos por parte de los estudiantes, pues consiguieron resolver repartos equitativos de la fracción, tanto de forma discreta como continua; utilizaron expresiones simbólicas para nominar las partes de un todo; adquirieron destreza en el manejo de las expresiones simbólicas propias de las fracciones nombrando sus partes; y también lograron anticipar una imagen mental de las acciones implicadas en la partición del todo ante las situaciones de reparto propuestas y de la proporcionalidad, relacionando figuras y equivalencia entre fracciones. Además, añaden que los escolares fueron capaces de realizar de manera exitosa repartos equitativos de la fracción. Durante el proyecto didáctico se fomentó que el alumnado contrastara y debatiera grupalmente generando un clima de confianza y de respeto basado en la interacción, lo que favoreció su aprendizaje de manera proactiva, permitiéndoles reconstruir mentalmente sus experiencias, atribuir significados a las fracciones en su quehacer cotidiano y resolver problema utilizándolas. Las estrategias empleadas con este alumnado han sido, pues, eficaces para favorecer el aprendizaje de los conceptos matemáticos implicados. En un posterior estudio, finalmente Perera y Valdemoros (2009) mostraron que la resolución de problemáticas de la vida real con fracciones, en un ambiente de interacción y cooperación lúdico-creativa, favorece enormemente la consolidación de la noción de fracción y de algunos de sus significados.

Como proyecto de formación de docentes de enseñanza primaria, Hincapié (2011) desarrolló una experiencia sobre el concepto de fracción atendiendo a sus cinco interpretaciones, con el objetivo de favorecer su comprensión, que se considera esencial antes de que se introduzcan

los algoritmos. Esta autora pone el acento en el significado del concepto y en las diferentes representaciones que le dan sentido, proponiendo que la mecanización de los procesos y la memorización de reglas pasen a un segundo plano. La propuesta que plantea se basa en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, que define las situaciones-problemas como formas de aprehensión de los significados y conceptualización, considerando a los docentes como mediadores que ayudan a los educandos a construir esquemas y representaciones. Así, se diseñaron cinco de estas situaciones para fortalecer en el profesorado este conocimiento, así como para que se capte esta forma de trabajar en el aula y se reflexione al respecto. En un primer momento, se analizó el conocimiento de los 23 participantes utilizando situaciones de enseñanza/aprendizaje para cuestionar sus concepciones e interpretaciones. Con la información obtenida, se planificó y experimentó, en una segunda fase, la secuencia de las situaciones-problema comentada en la que se utilizaron distintos y variados materiales para que los participantes, organizados en grupos, manipularan para representar las fracciones. Las producciones de los docentes, las grabaciones de vídeo y de voz, así como las anotaciones de la investigadora constituyen la base del análisis descriptivo realizado en la tercera fase. Esta propuesta alternativa ha resultado altamente positiva y muy bien valorada por parte de los asistentes y ha servido para plantear un plan de mejora de la educación matemática.

La historia de las matemáticas es también una fuente de ideas y un recurso para planificar propuestas pedagógicas para trabajar las fracciones. Bautista y Rodríguez-Vásquez (2012) diseñaron una secuencia de actividades basada en el enfoque de la enseñanza desde una perspectiva histórica, en las que se introducen conceptos históricos relacionados con las fracciones, como una forma de generar interés y motivación para su aprendizaje. La propuesta histórico-didáctica de López (2013) se basa en una perspectiva que sitúa el concepto de fracción en el contexto de un movimiento conceptual que tiene su origen en el pensamiento y el lenguaje como actividad social e histórica de la humanidad; las actividades propuestas y el permanente diálogo entre los participantes -estudiantes y docente- favorecieron el aprendizaje del concepto de fracción.

Como alternativa didáctica a la enseñanza tradicional para organizar y diseñar la docencia, el aprendizaje basado en problemas (ABP), que surgió hace ya tiempo, es una posibilidad que ha dado resultados muy positivos. Es la opción adoptada por Crisancho y Crisancho (2018), que lo han utilizado para el aprendizaje del concepto de fracción. Las autoras han seleccionado esta metodología porque sitúa al estudiante en el centro del proceso de enseñanza/aprendizaje, dándole un papel activo porque es el responsable de la construcción de su conocimiento, que

genera ante situaciones-problemas a los que el docente lo enfrenta. El objeto de esta experiencia fue el desarrollo del pensamiento matemático del alumnado frente a las fracciones, sus significados y aplicaciones. La metodología ABP resultó efectiva, facilitando la conceptualización y ampliando las perspectivas de aprendizaje que el trabajo en grupo y la comunicación ofrecen, de modo que favoreció una mayor competencia en la resolución de problemas relativos a las fracciones. Esta metodología potencia el trabajo colaborativo, favorece la reflexión, resignifica el papel de la actividad, promueve la interacción con el conocimiento y fomenta el desarrollo de las competencias matemáticas, razones por las que se puede afirmar que mejora significativamente el aprendizaje. Además, genera un clima distendido en el aula más propicio para favorecer ese proceso (Angulo y Castaño, 2011; Hidalgo, Mera, López y Patiño, 2015). Esta forma de plantear la docencia se basa en el trabajo colaborativo, el debate, la aportación de diferentes soluciones y puntos de vista, la reflexión. Es una estrategia que permite la identificación de los conocimientos previos, o su ausencia, y la detección de dificultades en la resolución de problemas (Silva y Rodríguez, 2011).

Las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) nos ofrecen un amplio abanico de posibilidades para plantear propuestas alternativas en la enseñanza de las fracciones. Pero ¿qué son las TIC? Area (2012) las define así:

Herramientas tecnológicas para la elaboración, almacenamiento y difusión digitalizada de información basadas en la utilización de redes de telecomunicación multimedia. Dicho en pocas palabras, las TIC podríamos entenderlas como la fusión de tres tecnologías que ya existían separadas (las audiovisuales, las de telecomunicaciones y las informáticas), pero que ahora convergen en la producción, almacenamiento y difusión digitalizada de cualquier tipo de dato (p.11).

Su introducción en la enseñanza en los últimos tiempos ha generado multitud de proyectos de innovación, propuestas e investigaciones en didáctica de las matemáticas que han modificado las prácticas docentes. Son herramientas que facilitan la enseñanza y el aprendizaje, por lo que constituyen un importante recurso para el aula; han supuesto una evolución importante en el ámbito de la educación. En el área de las matemáticas, representan una revolución porque han hecho posible la comprensión de muchos conceptos cuyo significado los estudiantes no lograban construir. GeoGebra es un magnífico ejemplo; es una ayuda que favorece en los resolutores la representación y visualización de situaciones y de problemas que el uso de actividades de lápiz y papel no facilita, porque permite analizar las situaciones, plantear hipótesis, abordar diferentes aproximaciones, razonar, ... de forma interactiva, dejando

constancia de las actuaciones que los estudiantes realizan. Otra ventaja que tiene es que es un software que se puede utilizar sin conexión a Internet. También el ‘Math Learning Center’ ofrece un amplio abanico de posibilidades para el profesorado en este sentido y con los mismos fines. La aplicación de estrategias con estos recursos resulta especialmente motivadora y favorece la interacción; pueden realizarse en parejas o grupo, lo que estimula la comunicación, el aprendizaje cooperativo y la argumentación, y esto permite observar la comprensión matemática y la conceptualización. Las TIC, sin duda, están presentes en las aulas y deben constituirse en elementos centrales de la formación de los docentes (Camacho, Perdomo y Hernández, 2019). El potencial que tienen es enorme y ha supuesto cambios muy profundos en la forma de concebir la educación matemática. Gascón (2018) ha elaborado una propuesta didáctica articulada en torno a las TIC para la enseñanza de las fracciones en educación primaria.

En este contexto aparecen los applets o miniaplicaciones, que son escenas interactivas utilizadas en el aula para ayudar al alumnado en el aprendizaje de las matemáticas y al docente, que apoya estas animaciones manipulativas con preguntas para centrar la atención y favorecer la comprensión. Los applets facilitan la realización de gráficas de forma precisa y cómoda y esto difícilmente se consigue trabajando con lápiz y papel. El abanico de posibilidades que nos podemos encontrar es enorme y se han propuesto muchas en el ámbito de las fracciones. Valenzuela et al. (2016) diseñaron y experimentaron una secuencia de enseñanza basada en el uso de applets construidos en GeoGebra para trabajar las fracciones, utilizando como recurso el uso de la recta numérica. La finalidad de esta intervención didáctica es favorecer la construcción de mejores objetos mentales de las fracciones en estudiantes. Para esta aproximación hacen una revisión desde la teoría de los modelos teóricos locales, así como de diferentes applets disponibles en la red sobre los que plantean algunas reflexiones, para diseñar una secuencia de enseñanza con applets que han construido ellos mismos para superar las debilidades encontradas en la revisión que habían realizado. Como primera conclusión observaron la poca familiaridad del alumnado con los applets, lo que demuestra que se usan poco en el aula en el aprendizaje de las matemáticas; sin embargo, la mayoría de los aprendices se adaptó rápidamente a su manejo. Una segunda reflexión que plantean los autores es que detectaron una alta dependencia de los educandos con respecto a su docente, que puede deberse a la falta de comprensión de las instrucciones, a poco interés o a que no conocen el entorno informático. Es probable que, al no poder visualizar las preguntas y el applet al tiempo, no hayan recurrido al interactivo para contestarlas, lo que sugiere un

cambio en su diseño. Observaron también que, si bien inicialmente no eran capaces de responder, la mayoría de los estudiantes logró contestar a preguntas sobre la representación de fracciones en la recta numérica después de la intervención didáctica, de modo que esta mediación de herramientas y recursos tecnológicos favoreció el aprendizaje de las fracciones. Un modelo conceptual y didáctico articulado en el diseño de applets creados con GeoGebra como recurso ha resultado eficaz en la construcción de un objeto mental de fracción, permitiendo a los estudiantes llevar la idea de fracción más allá de su interpretación como fracturador. Este modelo se basa en la interacción telemática y preguntas tendentes a la reflexión y conceptualización en este contexto (Valenzuela y Figueras, 2019). Sin duda, los applets ayudan en la construcción de los conceptos matemáticos, pero este uso requiere una formación reflexiva de los docentes tendente a su aprovechamiento en la resolución de problemas en un entorno tecnológico. La investigación educativa en esta área aporta resultados prometedores, pero también dificultades detectadas para integrar de forma efectiva estos conocimientos tecnológicos en futuros maestros (González y Arnal-Bailera, 2021).

La literatura especializada consultada aporta más evidencias de las ventajas que supone el uso de applets en el aula porque potencian el desarrollo del pensamiento algorítmico y permiten a los estudiantes aprender los procedimientos, al mismo tiempo que construyen la base conceptual manejando diferentes representaciones visuales y numéricas de forma interactiva y dinámica. El entorno virtual facilita este proceso y es muchísimo más eficaz que la manipulación física tradicional para el aprendizaje de las fracciones. Sin embargo, no siempre se obtiene esta mejora en el rendimiento del alumnado ni se cuenta con la formación necesaria para diseñar propuestas didácticas en esta línea, por lo que se reclama una preparación consistente del profesorado que dé cuenta de estos aspectos y responda a estas necesidades. La selección de recursos digitales virtuales requiere preparación docente y apoyo.

En todas las propuestas analizadas, las situaciones de resolución de problemas constituyen el eje fundamental de los diseños de la enseñanza y en todos se considera una concepción holística del concepto de fracción. Se observa también un consenso generalizado entre los autores en torno a la necesidad de tener un profundo conocimiento del contenido matemático que se enseña, así como de los recursos y medios tecnológicos que las TIC aportan y de sus aplicaciones y posibilidades.

Capítulo 2. Metodología

Para la realización de este TFG se han cubierto seis fases (véase tabla 1). En la primera fase, una vez seleccionado el tema, se ha formulado la pregunta a la que la indagación pretende dar respuesta y se han definido los objetivos propuestos para este trabajo. En la segunda fase, se ha elaborado una revisión teórica, en la que se han recogido los principales artículos escritos sobre la didáctica de las fracciones. La tercera fase corresponde al diseño de la situación de aprendizaje y la cuarta fase a su correspondiente experimentación en el aula. Finalmente, en la quinta fase se realiza una evaluación de dicha experimentación, y en la sexta fase, una reflexión que agrupa las conclusiones del TFG.

En la Tabla 2 se expone sintéticamente el procedimiento seguido para el desarrollo de este trabajo, para el que se han organizado las tareas en torno a seis fases.

Tabla 2. Fases de desarrollo.

Fases					
Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5	Fase 6
Elección del tema, planteamiento del problema y definición de objetivos	Revisión teórica	Diseño de la situación de aprendizaje	Experimentación en el aula	Evaluación de la propuesta didáctica	Conclusiones del TFG

Formulación del problema.

La pregunta de investigación que da origen a este estudio es: ¿Los applets pueden favorecer el aprendizaje de las fracciones?

Objetivos.

El propósito de este TFG es el de analizar de qué manera la utilización de algunos applets que se encuentran libremente accesibles en la web pueden contribuir al aprendizaje de las fracciones en el alumnado de Educación Primaria. Para alcanzar este objetivo, hemos establecido una serie de objetivos específicos.

1. Revisar en la literatura especializada el conocimiento producido sobre el concepto de fracción y su enseñanza y aprendizaje.
2. Identificar las dificultades de aprendizaje de las fracciones más frecuentes en el alumnado.
3. Valorar la utilidad de metodologías basadas en la resolución colaborativa de problemas utilizando como recurso los applets.

4. Diseñar, contrastar y evaluar una propuesta didáctica articulada en torno a dos applets en el alumnado de 4º de Educación Primaria.

Con respecto al marco teórico, nuestro propósito no ha sido realizar una revisión sistemática exhaustiva, sino utilizar este procedimiento para hacer una aproximación bibliográfica del tema. Así, se ha desarrollado una búsqueda durante el mes de marzo de 2023 en las bases de datos Scopus y Google Académico, en la que se han utilizado como palabras-clave o descriptores “fracciones y dificultades y aprendizaje y applets”, delimitando las fechas entre 2016 y 2022; este rastreo se realizó en español, inglés y francés. La Tabla 3 resume las referencias encontradas.

Tabla 3. Resultados de la búsqueda bibliográfica.

Bases de datos consultadas	Scopus	Inglés	5
		Francés	0
		Español	0
	Google académico	Inglés	15
		Francés	6
		Español	17

Varios de los 43 artículos recopilados en esta búsqueda han resultado muy relevantes en el desarrollo del capítulo precedente, en el que se ha expuesto, como se recordará, una breve reseña histórica sobre las fracciones, una revisión del concepto, las principales dificultades detectadas en su aprendizaje y las alternativas que se han planteado para superarlas, que tienden a utilizar las TIC y, concretamente, applets como recurso para su enseñanza.

Las fases 3, 4 y 5 se expondrán en el capítulo 3, destinado a describir la situación de aprendizaje que se ha diseñado para su posterior implementación en el aula.

Capítulo 3. La situación de aprendizaje: fracciones

La situación de aprendizaje que se presenta se ha planificado para 4º curso de Educación Primaria en el área de Matemáticas. Se ha experimentado en el aula en el tercer trimestre del curso en el periodo del 26 de abril al 5 de mayo de 2023. Esta unidad de aprendizaje está planteada para que el alumnado revise y afiance sus conocimientos de fracciones, haciendo uso de la plataforma 'Math Learning Center'. Se pretende investigar la utilidad de dos applets seleccionados en esa web como recursos para trabajar las fracciones y sus propiedades, esto es, comprobar si es beneficioso para los escolares y los ayuda a comprender mejor el concepto de fracción y su utilidad en el campo de conocimiento matemático.

Finalidad

Esta situación de aprendizaje busca que el alumnado profundice en el significado de fracción, es decir, que sepa definir de diferentes formas el concepto, así como realizar problemas de razonamiento y operaciones básicas, como sumar o restar fracciones. La intención es que el alumnado indague en las múltiples interpretaciones de fracción, más allá de la recurrente explicación de la fracción como 'parte-todo'.

El trabajo nace con una motivación intrínseca que surge de la observación directa en el aula, al comenzar las prácticas, en la que se evidenció que el alumnado no comprendió totalmente los contenidos trabajados sobre las fracciones. A pesar de los esfuerzos realizados por la maestra, que empleó múltiples y variados recursos manipulativos, los estudiantes en general no tuvieron éxito en la evaluación, tanto es así que la docente les entregó una ficha de refuerzo para que pudieran mejorar su aprendizaje. Fue entonces cuando se tomó la decisión de investigar acerca de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, pues no comprendía cómo un tema tan importante e interesante en las matemáticas pudiera resultar tan complicado. De hecho, los expertos concuerdan en que tener un dominio y un manejo sólido de las fracciones es indispensable, tanto para estudiar otros conceptos y disciplinas matemáticas, como para desenvolverse bien en muchos campos profesionales, como hemos observado en la revisión teórica realizada. El problema está en que no existe un consenso generalizado acerca de cuál es el significado de fracción, ni, sobre todo, cuál es la estrategia didáctica idónea para trabajar este concepto en la enseñanza primaria. Se me plantea por esa razón un reto mayúsculo al tratar de averiguar si el uso de la tecnología y de los applets repercute positivamente en el aprendizaje de las fracciones y por qué.

Contextualización

Respecto al grupo con el que se experimentó en el aula la situación de aprendizaje, cabe destacar que se trata de una clase de 4º de Educación Primaria de 23 estudiantes de 9/10 años. Si bien es cierto que el grupo presenta algunos problemas de convivencia y socialización, he escogido esta clase porque realicé mis prácticas anteriores con estos niños y niñas y estoy familiarizada e integrada con ellos, un factor que considero que podrá ayudarme a desarrollar la unidad. En concreto, un alumno está diagnosticado de TDH y dislexia, para lo cual toma medicación. Además, una de las niñas cuenta con un alto grado de inmadurez y dificultades para leer, formular y comprender frases, así como para resolver cálculos sencillos; eso sumado a que tiene una autoestima muy baja, provoca que hable en un tono de voz muy bajo y que tenga una inseguridad constante a equivocarse. Otra niña tiene conductas disruptivas muy graves, dado que ha agredido seriamente a varios compañeros en distintas ocasiones; cuesta mucho calmarla y hacerla entrar en razón. Aparte de esos tres casos particulares, muchos escolares son inquietos y les gusta hacer reír a sus compañeros y armar escándalo. Según he podido observar, se influyen y contaminan unos a otros. Sin embargo, la docente cuenta con sus propias estrategias para llevar el control de la clase y conseguir que los aprendices progresen tanto académica como personalmente. Por ejemplo, está llevando a cabo iniciativas como ir a contar cuentos a 3º de Educación Infantil, o cuidar el recreo de los pequeños del colegio para que entre todos aprendan a respetarse, a resolver sus conflictos de forma pacífica y a tener empatía los unos con los otros.

En relación con el funcionamiento del centro, a pesar de que se trata de un colegio inmenso, con 6 líneas de clase por curso, e incluso bachillerato privado, se invierte mucho en el aprendizaje tecnológico, adaptándose de este modo al mundo al que nos enfrentamos. Es innegable que tanto la tecnología como los idiomas se fomentan especialmente, pues cada curso tiene a su disposición 30 Chromebook, que se van turnando entre los profesores a diario. También imparten clases destinadas a robótica y pensamiento computacional en inglés, cuentan con una sala croma y talleres de cine, edición y fotografía. No cabe duda de que el aprendizaje de las TIC tiene un gran peso en el colegio, un factor que creo que puede beneficiarme al poner en marcha mi unidad didáctica, pues el alumnado está muy habituado a utilizar la tecnología en clase y, en general, se maneja bien con ella.

Justificación curricular

Si bien está ya en vigor la LOMLOE (BOE, nº 340, de fecha 30 de diciembre de 2020), adaptada a la Comunidad Autónoma de Canarias en el BOC nº 231, de fecha 23 de noviembre de 2022, su aplicación no se ha iniciado con todos los niveles. El grupo que nos ocupa está regulado en el marco de la ley anterior, LOMCE (BOE, nº 295, de fecha 10 de diciembre de 2013), que para el ámbito de Canarias se publicó en el BOC nº 156, de fecha 13 de agosto de 2014.

Los criterios de evaluación, estándares de aprendizaje, contenidos y competencias que se trabajan en la situación de aprendizaje propuesta se exponen en la Tabla 4.

Tabla 4. Criterios de evaluación, estándares de aprendizaje, contenidos y competencias

Criterio de evaluación 2
Planificar, experimentar y aplicar estrategias de razonamiento para resolver retos o pequeñas investigaciones matemáticas, apoyándose en materiales manipulativos o recursos TIC, y explicar oralmente o por escrito el trabajo realizado y las conclusiones obtenidas, mostrando en el proceso actitudes del quehacer matemático.
Estándares de aprendizaje
13. Planifica el proceso de trabajo con preguntas adecuadas: ¿qué quiero averiguar?, ¿qué tengo?, ¿qué busco?, ¿cómo lo puedo hacer?, ¿no me he equivocado al hacerlo?, ¿la solución es adecuada?
15. Elabora conjeturas y busca argumentos que las validen o las refuten, en situaciones a resolver, en contextos numéricos, geométricos o funcionales.
16. Desarrolla y muestra actitudes adecuadas para el trabajo en matemáticas: esfuerzo, perseverancia, flexibilidad y aceptación de la crítica razonada.
17. Se plantea la resolución de retos y problemas con la precisión, esmero e interés adecuados al nivel educativo y a la dificultad de la situación.
19. Se inicia en el planteamiento de preguntas y en la búsqueda de respuestas adecuadas, tanto en el estudio de los conceptos como en la resolución de problemas.
20. Desarrolla y aplica estrategias de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones y uso de contraejemplos), para crear e investigar conjeturas y construir y defender argumentos.
Contenidos
1. Planteamiento de pequeñas investigaciones en contextos relacionados con las matemáticas.
Competencias
CMCT. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. La primera alude a las capacidades para aplicar el razonamiento matemático para resolver cuestiones de la vida cotidiana; la competencia en ciencia se centra en las habilidades para utilizar los conocimientos y metodología científicos para explicar la realidad que nos rodea; y la competencia tecnológica, en cómo aplicar estos conocimientos y métodos para dar respuesta a los deseos y necesidades humanas.
SIEE. Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor. Implica las habilidades necesarias para convertir las ideas en actos, como la creatividad o las capacidades para asumir riesgos y planificar y gestionar proyectos.
CD. Competencia Digital. Implica el uso seguro y crítico de las TIC para obtener, analizar, producir e intercambiar información.
AA: Aprender a aprender. Es una de las principales competencias, ya que implica que el alumno desarrolle su

capacidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él, organizar sus tareas y tiempo, y trabajar de manera individual o colaborativa para conseguir un objetivo.

CrITERIO DE EVALUACIÓN 3

Utilizar los números naturales de 6 cifras, leyendo, escribiendo, comparando, ordenando y redondeando cantidades para interpretar e intercambiar información en contextos de la vida cotidiana.

EstÁndARES DE APRENDIZAJE

6. Identifica e interpreta datos y mensajes de textos numéricos sencillos de la vida cotidiana (facturas, folletos publicitarios, rebajas ...).

28. Lee, escribe y ordena en textos numéricos y de la vida cotidiana, números (naturales, fracciones y decimales hasta las milésimas), utilizando razonamientos apropiados e interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.

31. Descompone, compone y redondea números naturales y decimales, interpretando el valor de posición de cada una de sus cifras.

32. Ordena números enteros, decimales y fracciones básicas por comparación, representación en la recta numérica y transformación de unos en otros.

39. Utiliza diferentes tipos de números en contextos reales, estableciendo equivalencias entre ellos, identificándolos y utilizándolos como operadores en la interpretación y la resolución de problemas.

Contenidos

5. Lectura, escritura, comparación e identificación de números decimales: décimas y centésimas en medida y sistema monetario.

7. Concepto de fracción con denominador hasta 10 y denominador 100. Sus términos y representación gráfica.

8. Representación con modelos manipulativos, comparación y ordenación de fracciones sencillas ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{3}{4}$), sus números decimales (0,5; 0,25; y 0,75) y porcentajes equivalentes (50%, 25%, y 75%), para expresar particiones y relaciones sencillas.

9. Descomposición de los números naturales y decimales en los diferentes órdenes de unidades según su descomposición canónica.

Competencias

CL. Competencia en comunicación lingüística. Se refiere a la habilidad para utilizar la lengua, expresar ideas e interactuar con otras personas de manera oral o escrita.

CMCT. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. La primera alude a las capacidades para aplicar el razonamiento matemático para resolver cuestiones de la vida cotidiana; la competencia en ciencia se centra en las habilidades para utilizar los conocimientos y metodología científicos para explicar la realidad que nos rodea; y la competencia tecnológica, en cómo aplicar estos conocimientos y métodos para dar respuesta a los deseos y necesidades humanos.

CrITERIO DE EVALUACIÓN 4

Elegir y utilizar correctamente la operación de la multiplicación y la división para la resolución de problemas aritméticos significativos; plantear problemas que se resuelvan con una multiplicación o división dada; representar las situaciones problemáticas mediante gráficos y diagramas, así como, expresar verbalmente las relaciones entre número de partes, valor de cada parte y total.

EstÁndARES DE APRENDIZAJE

4. Reflexiona sobre el proceso de resolución de problemas: revisa las operaciones utilizadas, las unidades de los resultados, comprueba e interpreta las soluciones en el contexto de la situación, busca otras formas de resolución, etc.

7. Identifica patrones, regularidades y leyes matemáticas en situaciones de cambio, en contextos numéricos, geométricos y funcionales.

69. Resuelve problemas que impliquen dominio de los contenidos trabajados, utilizando estrategias

heurísticas, de razonamiento (clasificación, reconocimiento de las relaciones, uso de contraejemplos), creando conjeturas, construyendo, argumentando y tomando decisiones, valorando las consecuencias de las mismas y la conveniencia de su utilización.

Contenidos

1. Realización de diagramas partes-todo, disposiciones rectangulares y diagramas de árbol en situaciones problemáticas de multiplicación y división.

6. Resolución de problemas de la vida cotidiana (de razón, conversión, combinación y comparación).

Competencias

CL. Competencia en comunicación lingüística. Se refiere a la habilidad para utilizar la lengua, expresar ideas e interactuar con otras personas de manera oral o escrita.

CMCT. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. La primera alude a las capacidades para aplicar el razonamiento matemático para resolver cuestiones de la vida cotidiana; la competencia en ciencia se centra en las habilidades para utilizar los conocimientos y metodología científicos para explicar la realidad que nos rodea; y la competencia tecnológica, en cómo aplicar estos conocimientos y métodos para dar respuesta a los deseos y necesidades humanas.

AA: Aprender a aprender. Es una de las principales competencias, ya que implica que el alumno desarrolle su capacidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él, organizar sus tareas y tiempo, y trabajar de manera individual o colaborativa para conseguir un objetivo.

Criterio de evaluación 5

Conocer, comprender, utilizar y automatizar al menos dos algoritmos diferentes para la multiplicación y la división, y varias estrategias asociadas a cada operación que permitan realizar estimaciones y desarrollar un cálculo mental y escrito eficaz en situaciones de la vida cotidiana.

Estándares de aprendizaje

8. Realiza predicciones sobre los resultados esperados, utilizando los patrones y leyes encontrados, analizando su idoneidad y los errores que se producen.

41. Realiza operaciones con números naturales: suma, resta, multiplicación y división.

43. Resuelve problemas utilizando la multiplicación para realizar recuentos, en disposiciones rectangulares en los que interviene la ley del producto.

46. Realiza sumas y restas de fracciones con el mismo denominador. Calcula el producto de una fracción por un número.

51. Establece la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes.

55. Utiliza y automatiza algoritmos estándar de suma, resta, multiplicación y división con distintos tipos de números, en comprobación de resultados en contextos de resolución de problemas y en situaciones cotidianas.

66. Elabora y usa estrategias de cálculo mental.

Contenidos

3. Resta como acción de quitar, como acción de completar y en recta numérica.

5. Resolución de problemas utilizando la multiplicación para realizar recuentos en disposiciones rectangulares.

10. División mediante repartos sucesivos.

Competencias

CMCT. Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología. La primera alude a las capacidades para aplicar el razonamiento matemático para resolver cuestiones de la vida cotidiana; la competencia en ciencia se centra en las habilidades para utilizar los conocimientos y metodología científicos para explicar la realidad que nos rodea; y la competencia tecnológica, en cómo aplicar estos conocimientos y

métodos para dar respuesta a los deseos y necesidades humanos.

AA: Aprender a aprender. Es una de las principales competencias, ya que implica que el alumno desarrolle su capacidad para iniciar el aprendizaje y persistir en él, organizar sus tareas y tiempo, y trabajar de manera individual o colaborativa para conseguir un objetivo.

Elementos multidisciplinares

En esta unidad didáctica se van a trabajar las fracciones y los contenidos matemáticos a través de otras materias como son TIC y educación artística. Las TIC están muy presentes en el desarrollo de las actividades, puesto que los alumnos van a resolver los ejercicios utilizando la plataforma ‘Math Learning Center’, que ofrece un amplio abanico de applets y posibilidades. Además, en varias ocasiones el alumnado tendrá que realizar dibujos y representaciones artísticas, incluyendo a su vez la asignatura de educación artística en la unidad.

Justificación metodológica

Tal y como se indicó anteriormente, en esta propuesta se ha adoptado una metodología en el aula inspirada en el ABP (Aprendizaje Basado en Problemas) que, como señalan las referencias consultadas, resulta eficaz en el aprendizaje de las matemáticas. Consiste en plantear desafíos y situaciones-problema a los estudiantes, para que, de forma cooperativa, logren resolverlos. Con este planteamiento docente, se ha optado por aprovechar el potencial de los applets para desarrollar la adquisición del concepto de fracción. Se han seleccionado ‘Fractions’ y ‘Math clock’, elección que obedece a la sintonía con la programación de la docente en este momento del curso y a la variedad de opciones que ofrecen para representar las fracciones de manera gráfica y sencilla. Estos recursos se han escogido partiendo de la convicción de que favorecen la motivación y el aprendizaje del alumnado.

Cabe destacar que con el material elaborado y el trabajo desarrollado con el alumnado se han trabajado las fracciones con las cinco interpretaciones que las caracterizan: como parte-todo, como relación, como operador, como cociente y como medida, según se estableció en el marco teórico.

Secuenciación de actividades

Para la experimentación en el aula, se elaboró una propuesta didáctica compuesta por 3 bloques de actividades, divididas en 3 sesiones de clase de 55 minutos cada una. En la Tabla 5 se presentan las actividades de forma detallada. Se han planificado atendiendo a su título, los criterios de evaluación correspondientes, los recursos empleados, los agrupamientos

realizados con el alumnado, espacios, sesiones de trabajo y los productos finales en cada actividad. Los materiales elaborados se han consultado previamente con la maestra del grupo.

Tabla 5. Secuencia de actividades.

ACTIVIDAD N.º: 1		Conociendo el 'Math Learning Center'.			
<p>En esta actividad el alumnado tendrá que familiarizarse con la aplicación 'Math Learning Center', concretamente con los dos applets seleccionados ('Fractions' y 'Math clock'). La sesión de clase estará destinada a introducir a los niños y las niñas en el uso de este recurso digital y a ver si les motiva o no el aprendizaje a través de estas herramientas. En primer lugar, se dividirá la clase en grupos de 3 integrantes, que serán los equipos de trabajo para el resto de la unidad. Cada grupo contará con un Chromebook y un manual de uso de la aplicación impreso (anexo 1), que también se proyectará en la pizarra digital, en donde se irán mostrando todas las opciones que se pueden realizar con este material didáctico. La clase se desarrollará entonces siguiendo el manual y paso a paso se irán explicando las diferentes funciones de los applets escogidos. Al finalizar la sesión, todos los grupos deberán enviar su trabajo a la maestra a través de un código que suban en una carpeta compartida de Google Drive. De esta manera se podrá visualizar también el trabajo de los compañeros y recibir una retroalimentación por parte del resto de la clase.</p>					
CRITERIOS	SESIONES	RECURSOS	AGRUPAMIENTOS	ESPACIOS	PRODUCTOS
C 2	1	Math Learning Center. ('Fractions' and 'Math clock') https://www.mathlearningcenter.org . Manual de uso (anexo 1). Google drive. Chromebooks (8 unidades). Material de escritura. Pizarra digital. Ordenador.	7 grupos de 3 y uno de 2.	Aula de clase	Archivos enviados por cada grupo.
ACTIVIDAD N.º: 2		Aprendiendo a usar el 'Math Learning Center' para trabajar con fracciones.			
<p>En esta segunda sesión de la propuesta, se le entregará al alumnado una ficha con 3 ejercicios (anexo 2) que se tendrán que ir resolviendo de forma cooperativa, en los grupos designados en la sesión anterior. En la primera actividad, los estudiantes observarán cuatro tartas partidas de diferente manera, unas en más trozos y otras en menos. Su cometido será colorear las porciones necesarias en cada círculo para que se coma la misma cantidad en todas. A continuación, tendrán que escribir la fracción de tarta que se come en cada una. Además, lejos de representar las fracciones únicamente en el papel, los niños y niñas tendrán que dibujarlas en los Chromebook, haciendo uso del applet 'Fractions'. Continuando con la segunda actividad, visualizarán una pizza que han compartido 3 amigos para cenar. En diferentes colores, tendrán la porción que se ha comido cada uno y en una tabla al lado, tendrán que escribir la fracción correspondiente de cada personaje, así como la fracción que les ha sobrado. Igual que en la actividad anterior, el alumnado tendrá que representar la fracción que se come cada uno en la aplicación, de manera que sigan profundizando en el uso de esta herramienta tecnológica. Por último, resolverán la actividad 3, en la cual se trabajarán las fracciones partiendo de la hora y el reloj. El problema en cuestión relata que 3 amigas han quedado a las 13:30 h, y los alumnos y alumnas deben marcar en el reloj la hora a la que sale de casa cada una de ellas y posteriormente, en forma de fracción, el tiempo que tardan en llegar. Además, tal y como han hecho en las actividades anteriores, los niños tendrán que representar en la aplicación 'Math clock' los relojes con la hora a la que sale cada una de su casa, así como sus respectivas fracciones. De esta manera podrán ir aprendiendo a utilizar este segundo recurso (Math clock). Una vez finalizada la sesión, todos los grupos tendrán que enviar su progreso al drive compartido (anexo 3), copiando y pegando el código en el documento para que todos los compañeros puedan observar el trabajo de los demás y aprender de él.</p>					

CRITERIOS	SESIONES	RECURSOS	AGRUPAMIENTOS	ESPACIOS	PRODUCTOS
C2 C3 C4 C5	1	Ficha (anexo 3) Chromebooks (8 unidades) Math learning center. (Fractions and math clock) https://www.mathlearningcenter.org Manual de uso (anexo 1) Google drive Chromebooks (8 unidades) Material de escritura. Pizarra digital. Ordenador.	7 grupos de 3 y uno de 2	Aula de clase	Ficha (anexo 2). Archivos enviados por cada grupo.
ACTIVIDAD N.º: 3		Aprendiendo las fracciones con el 'Math Learning Center'.			
<p>En la tercera y última sesión del proyecto, el alumnado, organizado en los mismos grupos, continuará realizando ejercicios utilizando los applets 'Fractions' y 'Math clock', esta vez en una nueva ficha (anexo 3). En la primera actividad resolverán un problema en el que cuatro amigos comparten una caja de bombones. En los datos señalan los bombones que se ha comido cada amigo e indican que ha sobrado uno. Los estudiantes tendrán que completar una tabla con la fracción que se come cada amigo, la fracción que sobra y cuántos bombones hay en la caja en total. Además, deberán representar la caja de bombones en un dibujo, tanto en su ficha como en su Chromebook. Luego pasarán a la siguiente actividad, para la cual cada uno recibirá un código que le dará acceso a una figura. Todos observarán círculos, divididos de diferentes formas, y tendrán que representar dicha figura en su ficha. Una vez tengan lista su fracción, tendrán que recortar el círculo y buscar al compañero que tiene coloreada la misma porción que ellos, es decir, al que tenga su fracción equivalente. Claro está, la maestra les habrá explicado previamente el concepto de fracción equivalente, de manera que los niños y las niñas lo recuerden y lo puedan observar gráficamente en esta actividad. A continuación, cada pareja tendrá que exponer a sus compañeros sus fracciones, explicar por qué son equivalentes y escribir cada uno su fracción correspondiente. Al ser impares, uno de los niños se pondrá de pareja con la maestra. Continuando con la última actividad, los niños indicarán la hora que será en cada reloj, al sumarle diferentes fracciones. De esta manera, serán capaces de relacionar la hora con el contenido matemático que han estado trabajando. También en esta ocasión el alumnado enviará su trabajo realizado en la aplicación y la maestra se encargará de subirlo al drive compartido para que se pueda visualizar el trabajo de otros grupos y se obtenga una retroalimentación.</p> <p>Por último, para cerrar esta unidad didáctica, se pondrá en marcha el procedimiento de evaluación de la actividad. Para ello, tanto la tutora como los estudiantes tendrán que rellenar una rúbrica de coevaluación (tablas n° 5 y n° 6) y hacer un comentario global sobre la experiencia. Esto se explicará más detalladamente en el apartado de evaluación.</p>					
CRITERIOS	SESIONES	RECURSOS	AGRUPAMIENTOS	ESPACIOS	PRODUCTOS
C2 C3 C4 C5	1	Ficha (anexo 4) Chromebooks (8 unidades) Math learning center. (Fractions and math clock) https://www.mathlearningcenter.org Manual de uso (anexo 1).	7 grupos de 3 y uno de 2. Individual. Parejas.	Aula de clase.	Ficha (anexo 3). Archivos enviados por cada grupo. Rúbrica de evaluación (tablas n° 5 y n° 6).

		Google drive. Chromebooks (8 unidades). Material de escritura. Pizarra digital. Ordenador.			
--	--	--	--	--	--

Análisis y evaluación de la experiencia

Una vez presentada la situación de aprendizaje diseñada, corresponde en este espacio dar cuenta de lo que ha supuesto ponerla en práctica. La experimentación estaba prevista para el viernes 28 de abril, día en el que la tutora ofreció toda la mañana para trabajarla con el alumnado, es decir, 3 sesiones completas de clase. Inicialmente se planificó contando con periodos horarios de 55 minutos, no teniéndose en cuenta por desconocimiento que los viernes las clases son más cortas de lo normal, ya que los escolares tienen dos recreos, de modo que su duración fue de 45 minutos. Esta reducción ha supuesto media hora de trabajo menos de lo inicialmente proyectado, un tiempo que influyó en la realización de las actividades, pues no se pudieron completar, razón por la que se terminaron de trabajar en la sesión siguiente. Atendiendo a esta circunstancia y para rentabilizar al máximo los tiempos, se optó por realizar las actividades del applet Fractions (1, 2, 4 y 5) el primer día y las del applet ‘Math clock ‘(3 y 6) el martes siguiente.

La primera sesión comenzó como estaba previsto, con unos primeros minutos para que los estudiantes se familiarizaran con los applets, apoyados también con el material elaborado al respecto (anexo 1). Si bien en los primeros instantes estaban desconcertados, se pudo constatar que los niños se hicieron con el control de la aplicación rápidamente y supieron seguir todas las pautas aportadas para realizar las tareas. Valenzuela et al. (2016) expresan en este sentido una reacción similar del alumnado. Las figuras 2 y 3 reflejan ese momento.



Fig. 2. Explicación de los applets en el aula.



Fig. 3. Estudiantes interactuando con la aplicación.

Fue necesario realizar algunos ajustes en el agrupamiento del alumnado, pues estaban previstos siete grupos de tres educandos y una pareja, pero por ausencias y por clase de apoyo de la alumna con dificultades, finalmente se trabajó con seis grupos de tres y dos parejas, una de las cuales estaba conformada por la alumna con conductas disruptivas y una compañera. La situación de estas dos niñas desembocó en una falta de entendimiento y problemas en la realización de las actividades, lo que implicó que se tomara la decisión de dejar a esta estudiante sola en su trabajo y acoplar a su compañera en otro grupo.

En el desarrollo de la experiencia surgieron algunos imprevistos que merecen ser comentados y que se resolvieron sobre la marcha. Para las tres primeras actividades se habían dispuesto ocho Chromebooks, mientras que para la cuarta, de fracciones equivalentes, hubo que buscar más para que cada uno de los estudiantes pudiera visualizar su círculo. En general, les costó enviar su código al correo, razón por la que hubo que ayudarlos uno por uno. Esta dependencia del alumnado con respecto a los docentes parece guardar relación con la observada por Valenzuela et al. (2016) en su trabajo. Con respecto a las fichas, se había previsto que uno de los ejercicios fuera de recortar, pero se imprimió a doble cara y fue necesario adaptarlo en el momento. Se observó también que a muchos niños y niñas les costó dibujar en el círculo en blanco la fracción que visualizaban en el Chromebook, pues no sabían o no podían dividir partes muy grandes (octavos, doceavos, décimos, etc.). Quizás esta tarea de reparto podría ser más fácil para los estudiantes si se les facilitara el círculo con el centro señalado; otra posibilidad es que se aproveche esta situación para que sean ellos mismos los que averigüen ese punto utilizando reglas, lo que supondría la aplicación de conceptos como diámetro, radio,

Para valorar la experiencia se han utilizado como instrumentos los productos elaborados por los estudiantes (obtenidos de la aplicación con el manejo de los applets y los dibujos producidos); la rúbrica desarrollada para esta propuesta, que respondieron tanto ellos como la maestra y la observación directa reflejada en las anotaciones registradas durante el proceso, que ha servido también para trabajar este apartado.

Se han analizado detenidamente las tareas realizadas por todos los grupos en la aplicación, pues todos lo han enviado al correo. Si bien es cierto que algunos no han logrado elaborar las representaciones que se pedían, todos se han esmerado por hacerlo bien y haciendo una valoración global del conjunto de actividades, la mitad de los dibujos han sido correctos. La figura 4 muestra algunas de estas producciones obtenidas de la aplicación.



Fig. 4. Producciones de los estudiantes obtenidas de los applets.

En la figura 5 se observa la interacción del alumnado con la aplicación. Esta actividad se desarrolló individualmente. Como se verá, se ponen de manifiesto los problemas relativos al centro del círculo para su reparto antes comentados.

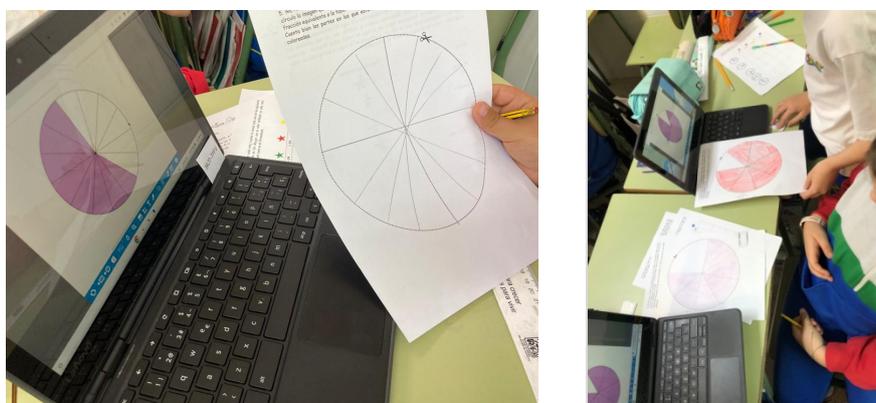


Fig. 5. Estudiantes realizando el cuarto ejercicio.

El alumnado se organizó en gran grupo para desarrollar la actividad de fracciones equivalentes. Si bien es cierto que se generó un gran barullo en el aula en la resolución de este problema, que es habitual en actividades de esta naturaleza, la socialización de los estudiantes fue intensa y positiva, pues se trabajó la interacción entre iguales y la motivación por encontrar entre los compañeros la fracción correspondiente. No siempre fue la correcta, pero el ejercicio mental de la comparación favoreció la adquisición del concepto de fracción equivalente. Este momento de la unidad didáctica se refleja en la figura 6.



Fig. 6. Búsqueda de la fracción equivalente.

Para evaluar esta situación de aprendizaje, se ha diseñado una rúbrica de evaluación de siete indicadores: motivación y cooperación en el trabajo grupal; manejo responsable y efectivo de los recursos TIC; respeto en el diálogo con los compañeros; representación correcta de las fracciones y de la hora en la plataforma digital y en el papel; realización correcta de sumas y restas de fracciones con el mismo denominador; y, por último, comprensión y explicación clara del concepto de fracción. Se ha establecido un rango del 1 al 5, siendo 1 el valor más bajo y 5 excelente. Se planificó como un ejercicio de coevaluación, de manera que los grupos se intercambiaron sus trabajos entre sí, actuando como jueces, para valorarlos y, al tiempo, aprender a ser objetivos los unos con los otros. Finalmente, cada grupo de estudiantes contó con un espacio para añadir algún comentario final sobre la actividad, sintetizar brevemente su opinión general y aportar información útil para la valoración de esta experiencia, si así lo consideraban. En la gráfica que se muestra en la figura 7 se resume la respuesta conjunta del grupo, señalando cuántos grupos o parejas se han posicionado en cada nivel para cada uno de los criterios.

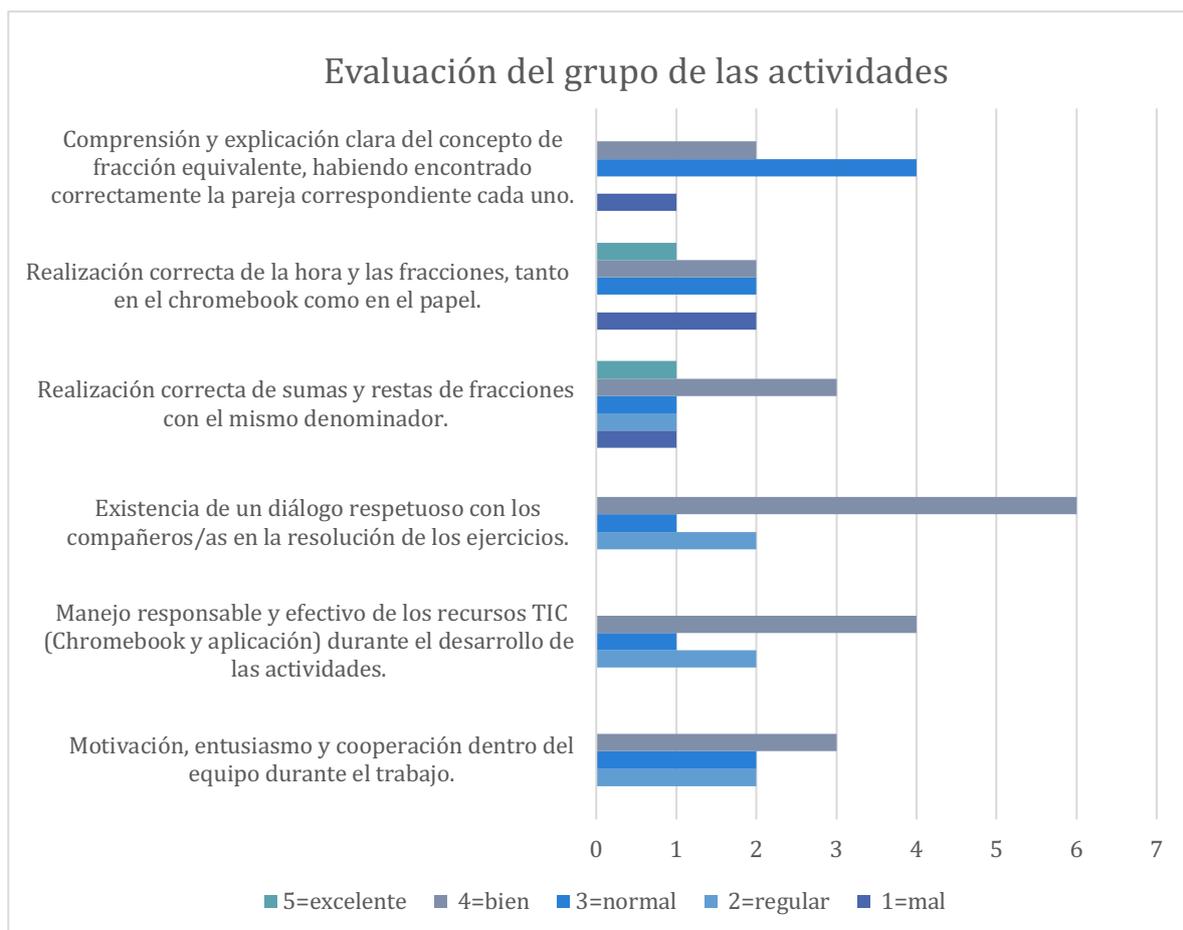


Fig.7: evaluación conjunta de la situación de aprendizaje.

En la gráfica anterior, cada barra refleja el número de grupos que se han situado en los distintos niveles definidos. Como vemos, los diferentes grupos han valorado el trabajo de sus compañeros en su mayoría con el indicador 4, esto es, consideran que el trabajo del grupo que les ha tocado evaluar está bien hecho. Atendiendo a sus opiniones, la experiencia les ha resultado satisfactoria, si bien es cierto que en la representación de los dibujos en el Chromebook les ha dado ciertos problemas como demuestra el segundo indicador.

La observación ha aportado también elementos para la valoración de la experiencia. En la línea de lo que Streefland (1993) plantea, se diseñó la situación de aprendizaje con la pretensión de que el alumnado estableciera un puente para vincular el concepto con la vida cotidiana (pizza, bombones, hora, etc.), utilizando diferentes recursos (applets, lápiz y papel); este propósito se ha logrado porque se ha percibido que los estudiantes tenían claro el concepto de fracción una vez estudiado con la propuesta didáctica. El material elaborado se planificó teniendo como referente el aprendizaje basado en problemas, que, como señalan Crisancho y Crisancho (2018), favorece el trabajo colaborativo, la comunicación, la reflexión y el desarrollo de competencias matemáticas. El trabajo cooperativo generado en el aula fomentó que los participantes se ayudaran unos a otros (Perera y Valdemoros, 2009), de manera que estuvieran equiparados de cierta forma en la actividad, con respecto a su nivel. La actitud de los alumnos durante todo el taller ha sido en general proactiva, pues estaban participativos y motivados con el nuevo aprendizaje, a excepción de algún caso particular. Igualmente, como se fueron corrigiendo los ejercicios uno por uno en voz alta, la mayor parte de las respuestas y sus respectivas representaciones eran correctas, lo que sirvió para medir la utilidad que estaba teniendo el taller para ellos.

Las posibilidades que ofrecen los applets para mejorar el aprendizaje de conceptos matemáticos son muchas; esta experiencia con su uso en fracciones es un ejemplo. Pero no todos los niños obtuvieron buenos resultados. El dominio de las fracciones requiere un enfoque global que va más allá de la partición y anima a explorar su potencial y su historia (Tsung-Lung y Hui-Chuan, 2016). Este proceso de conceptualización es lento y progresivo (Vergnaud, 1990); el repaso a las fracciones, que se habían trabajado ya en febrero con poco éxito, utilizando esta vez herramientas tecnológicas ha resultado productivo en términos de aprendizaje conceptual y de actitudes favorables para lograrlo. La formación del profesorado debería incluir y mejorar conocimientos tendentes al uso fundamentado de las TIC, que no siempre están aceptadas e integradas en el quehacer docente (González y Arnal-Bailera, 2021). Mi aproximación a este mundo de posibilidades me ha resultado altamente satisfactoria

y gratificante desde un punto de vista personal y académico. Los aprendizajes previstos se han desarrollado, tanto por parte del alumnado, como por parte de la docente que ha intervenido.

Por su parte, la tutora del grupo consideró excelente el manejo de los recursos TIC, y el trabajo de los alumnos con las sumas y restas de fracciones, así como sus respectivas representaciones en el Chromebook. Además, puntualizó que, dadas las características del aula, el clima de trabajo fue favorable y los alumnos, por lo general, adquirieron los contenidos trabajados (anexo 4).

Capítulo 4. Conclusiones

La revisión bibliográfica que se ha realizado del concepto de fracción en el capítulo 1, ha resultado especialmente reveladora porque nos ha permitido darnos cuenta de que, efectivamente, hay una explicación a las dificultades de aprendizaje que había detectado al empezar las prácticas, dificultades que nos motivaron para desarrollar este trabajo. Esta aproximación al concepto desde un punto de vista teórico nos ha ayudado a conocer la complejidad que supone su comprensión, profundizar en su significado y aprender aspectos que desconocíamos, que son relevantes para planificar su enseñanza y su aprendizaje de manera efectiva. Para que los estudiantes consigan entender el concepto de fracción y tener éxito en su dominio, es obvio que quien las enseña tiene que tener un profundo conocimiento de su significado, así como de las diferentes situaciones y diversas circunstancias en las que se aplican, de modo que pueda facilitarles su conceptualización. Las cinco interpretaciones atribuidas al complejo concepto de fracción deben formar parte de los saberes del docente antes de planificar su estrategia didáctica. El proceso seguido en el análisis bibliográfico realizado ha tenido, pues, como resultado el logro del primero de los objetivos propuestos en este trabajo.

La investigación educativa en el ámbito de las matemáticas aporta abundantes referencias relativas a los problemas que presentan los estudiantes para comprender las fracciones y operar con ellas o aplicarlas. Las referencias bibliográficas consultadas han permitido conocer e identificar las principales dificultades que muestra el alumnado cuando se enfrenta a este contenido, lo que constituye el segundo de los objetivos propuestos. La complejidad del concepto de fracción es una de las principales fuentes de conflictos en su comprensión, como se ha expuesto, y la forma de plantear su enseñanza es otra. El compromiso docente por mejorar este aprendizaje ha quedado claramente de manifiesto, como muestran las alternativas didácticas que se nos ofrecen.

Precisamente poniendo el foco en esos nuevos modos de abordar la enseñanza de las fracciones para que el alumnado pueda comprenderlas, interiorizarlas y aplicarlas a su vida diaria, como plantea el tercer objetivo, se ha recurrido a nuevos modos de trabajar en el aula. La resolución de problemas y el trabajo colaborativo se han mostrado como formas eficaces para desarrollar los aprendizajes esperados. El uso de las TIC ha supuesto una ayuda inestimable porque permiten visualizar y manipular los objetos matemáticos que, de otro modo, son muy difíciles de aprehender y conceptualizar. La interacción de los estudiantes con

la aplicación es una magnífica ayuda en la comprensión y el aprendizaje, más valiosa aun cuando este trabajo se desarrolla en grupos, porque el debate y la reflexión ayudan en ese proceso y constituyen una fuente de motivación. GeoGebra y Math Learning Center son dos productivas fuentes de applets puestas a disposición del profesorado ya listas para su aplicación, que han sido contrastadas en la investigación educativa y han mostrado resultados de aprendizaje altamente positivos. Sin embargo, es importante dejar constancia de la necesidad de tener formación sobre lo que estas tecnologías aportan y sobre la forma de desarrollar una aplicación fundamentada de las mismas.

El último de los objetivos propuestos es el diseño, contrastación y evaluación de una situación de aprendizaje de fracciones articulada en torno al uso de dos applets. La descripción hecha en el capítulo anterior pone de manifiesto que el objetivo se ha cumplido. El diseño y la experimentación de esta unidad didáctica han generado reflexiones personales y aprendizajes prácticos que han contribuido a mi formación como docente. La experiencia ha resultado altamente enriquecedora en términos conceptuales, metodológicos y motivacionales, pues ha abierto un nuevo modo de enfrentarme a este contenido en el aula, con recursos tecnológicos como herramientas de trabajo que resultan muy ilusionantes y son aplicables a la enseñanza de otros conceptos matemáticos.

A la vista de expuesto, retomamos el objetivo general formulado: analizar de qué manera la utilización de algunos applets que se encuentran libremente accesibles en la web pueden contribuir al aprendizaje de las fracciones en el alumnado de Educación Primaria. Si nos planteamos de nuevo la pregunta que guía este trabajo, ¿Los applets pueden favorecer el aprendizaje de las fracciones?, la respuesta es sí. Nuestra experiencia evidenció de manera clara que los applets favorecieron la construcción del concepto de fracción en el alumnado que participó en nuestra experiencia.

Referencias bibliográficas

- Andonegui Zabala, Martín. (2006). Fracciones: concepto y representación. Serie: Desarrollo del pensamiento matemático. Número 6. Caracas: Fe y Alegría. Recuperado de <http://publicaciones.caf.com/media/1209/61.pdf>.
- Angulo Cruz, Mónica y Castaño Hernández, Óscar y Bernal, Julián. (2011). Actividades didácticas en enseñanza secundaria para el desarrollo de pensamiento aleatorio. *Scientia Et Technica*, 16(49), 158-162. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/849/84922625027.pdf>
- Area Moreira, Manuel. (2012). La alfabetización en la Sociedad Digital. En Alfabetización digital y competencias informacionales. Fundación Telefónica. Madrid: Ariel. Recuperado de http://www.observatorioabaco.es/biblioteca/docs/147_FT_ALFABETIZACION_DIGITAL_2012.pdf
- Arenas-Peñaloza, Jhonatan Andrés y Rodríguez-Vásquez, Flor Monserrat (2021). Enseñanza y aprendizaje del concepto fracción en la educación primaria: estado del arte. *Cultura, Educación y Sociedad*, 12(2), 49-64. DOI: <http://dx.doi.org/10.17981/cultedusoc.12.2.2021.03>
- Ávila, Alicia. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22–60. <https://doi.org/10.24844/em3102.02>.
- Barba, M^a Isabel; Varon, Cristina y Binimelis, M^a Antònia. (2019). Las matemáticas medievales europeas.
- Bautista, Viancha Anahi y Rodríguez Vásquez, Flor Montserrat. (2012). Argumentos históricos y la enseñanza de las fracciones. En: Sosa, Landy; Aparicio, Eddie y Rodríguez Flor (Eds.) Memoria de la XV Escuela de Invierno en Matemática Educativa (pp. 138–143). Ciudad de México: Red Cimates. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/16525/1/Bautista2012Argumentos.pdf>
- BOC (Boletín Oficial de Canarias, núm 156) (2014), Gobierno de Canarias. Recuperado de <http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/web/primaria/informacion/contenidos/>
- Butto, Cristianne (2013). El aprendizaje de fracciones en educación primaria: una propuesta de enseñanza en dos ambientes. *Horizontes Pedagógicos*, 15(1), 33–45. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4892957>

- Cáceres Garcí, María José (2017). Carrillo, José; Contreras, Luis Carlos; Climent, Nuria; Montes, Miguel Ángel; Escudero, Dinazar Isabel y Flores, Eric (coords.) (2016) *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Ediciones Paraninfo, S. A., 357 pp. *Aula: Revista De Pedagogía De La Universidad De Salamanca*, 23, 334–336. <https://doi.org/10.14201/17556>. (Cap. 4. Fracciones y decimales).
- Camacho-Machín, Matías; Perdomo-Díaz, Josefa; Hernández, Adelto (2019). Actividades para la formación de profesores derivadas del uso de GeoGebra en la resolución de problemas. En Badillo, Edelmira; Climent, Nuria; Fernández, Ceneida; González, María Teresa (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional* (págs. 373-396). España: Ediciones Universidad de Salamanca. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/22736/1/Camacho2019Actividades.pdf>
- Cristancho Cárdenas, Deisy Marieta y Cristancho Cárdenas, Leidy Yalima. (2018). Aprendizaje basado en problemas en matemáticas: el concepto de fracción. *Educación y Ciencia* (21), 45-58. <https://doi.org/10.19053/0120-7105.eyc.2018.21.e9387>
- Department for Education of England-DFE, (2011).
- Escolano Vizcarra, Rafael y Gairín Sallán, José María. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en educación primaria. *Revista Iberoamericana de educación matemática*, (1), 17-35. Recuperado de [file:///C:/Users/usuario/Downloads/1397-Texto%20del%20artículo-3842-1-10-20220823%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/usuario/Downloads/1397-Texto%20del%20artículo-3842-1-10-20220823%20(1).pdf)
- Fandiño Pinilla Martha Isabel. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. Capítulo 2 del libro: Hernández Rebollar, Lidia Aurora; Juárez López, José Antonio y Slisko Ignjatov, Josip (Eds.) (2015). *Tendencias en la educación matemática basada en la investigación. Volumen 1*. Puebla (México): BUAP Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (Facultad de Ciencias Físico Matemáticas). Págs. 25-38. ISBN 978-607-525-002-1. Recuperado de <http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/fandino/261%20Fandino%20Capitulo%20Tendencias%20Puebla.pdf>
- Fazio, Lisa y Siegler, Robert. (2010). La enseñanza de las fracciones (Prácticas Educativas 22). Ginebra: Oficina Internacional de Educación-OIE. Recuperado de http://www.ibe.unesco.org/sites/default/files/resources/edu-practices_22_spa.pdf.

- Gabriel, Florence; Coché, Frédéric; Szucs, Dénes; Carette, Vincent; Rey, Bernard and Content, Alain (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in Psychology*, 4(715), 1–12. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00715>.
- Gallardo, Jesús, González, José Luis y Quispe, Wenceslao. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (2008), 11(3): 355-382. Recuperado de file:///C:/Users/usuario/Downloads/Dialnet-InterpretandoLaComprensionMatematicaEnEscenariosBa-2766159.pdf
- Gascón Salillas, Dayana. (2018). El uso de las TIC en la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria: aplicación a las fracciones. Universidad de Valladolid. Facultad de Educación de Soria. TFG. Recuperado de <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/34939>
- George, Lois Grace. (2017). Children's learning of the partitive quotient fraction sub-construct and the elaboration of the don't need boundary feature of the pirie-kieren theory. [Doctoral Thesis]. University of Southampton, UK. Available: <http://eprints.soton.ac.uk/id/eprint/411237>.
- González Retana, Juan Francisco y Eudave Muñoz, Daniel. (2018). Conocimiento común del contenido del estudiante para profesor sobre fracciones y decimales. *Educación Matemática*, 30(2), 106–139. <https://doi.org/10.24844/em3002.05>
- González, Antonio, y Arnal-Bailera, Alberto (2021). Dificultades de maestros en formación integrando tecnología en la resolución y enseñanza de problemas sobre el número racional. *Acta Sci. (Canoas)*, 23(2), 162-192, Mar./Apr. 2021. Recuperado de https://zagan.unizar.es/record/110589/files/texto_completo.pdf
- Hidalgo Paredes, Hernán Darío, Mera Gutiérrez, Eduardo Andrés, López Ordoñez, Jairo, Patiño Giraldo, Luz Elena. (2015). Aprendizaje basado en problemas como potencializador del pensamiento matemático. *Plumilla Educativa*, (15), 299-312. horizontespedagogicos.iberro.edu.co/article/view/403.
- León Robles, Gloria. (2011). Unidad didáctica: fracciones. TFM. Universidad de Granada. Recuperado de https://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Gloria_Leon.pdf
- Ministerio de Educación, Cultura y Deportes (2001). Dificultades del aprendizaje de las matemáticas. Aulas de verano. Instituto Superior de Formación del profesorado.

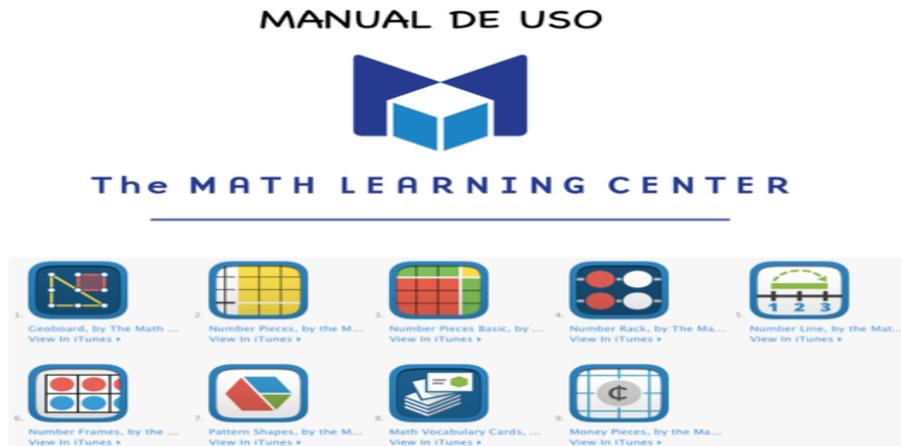
<https://sede.educacion.gob.es/publivena/PdfServlet?pdf=VP10333.pdf&area=E>

- Perera Dzul, Paula B. y Valdemoros Álvarez, Marta E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. En M. Camacho, P. Flores y M. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 209–218). San Cristóbal de la Laguna: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1254/>
- Perera Dzul, Paula B. y Valdemoros Álvarez, Marta E. (2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *Educación matemática*, 21, 29-61.
- Salazar Molina, Julio Ramiro. (2021). Recursos en el aula de clase para la enseñanza de fracciones en Educación General Básica Media de las instituciones de educación públicas de la ciudad de Latacunga (ecuador). Tesis Doctoral. Universidad de Extremadura. Recuperado de <https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1289>
- Silva Laya, Marisol y Rodríguez Fernández, Adriana. (2011). ¿Por qué fallan los alumnos al resolver problemas matemáticos? *Didáctica, enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, (56), 21-28.
- Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. En T.P. Carpenter, E. Fennema, T.A. Romberg (eds), *Rational Numbers. An Integration of Research*. Nueva Yersey, Estados Unidos: University of Wisconsin Madison Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Tsung-Lung Tsai & Hui-Chuan Li (2016) Towards a framework for developing students' fraction proficiency, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48:2, 244-255, DOI: 10.1080/0020739X.2016.1238520.
- Valenzuela García, Carlos, and Figueras, Olimpia. (2019). Learning fractions using a teaching model designed with applets and the number line: The cases of Alvaro and Fernanda. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pág. 503-510. Recuperado de <https://hal.science/hal-02401102/document>
- Valenzuela García, Carlos; Figueras, Olimpia; Arnau Vera, David y Gutiérrez-Soto, Juan (2016). Hacia un modelo de enseñanza para las fracciones basado en el uso de applets. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(2), 1-20. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5712478>
- Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), 133-170.

Anexos

Anexo 1. Manual de uso

En el anexo 1 se presenta el manual de uso del alumnado, herramienta que utilizarán en su aprendizaje del Math Learning Center, y con la que podrán manejar todos los controles.



Bienvenido/a a esta guía para aprender a utilizar la aplicación 'Math Learning center'.

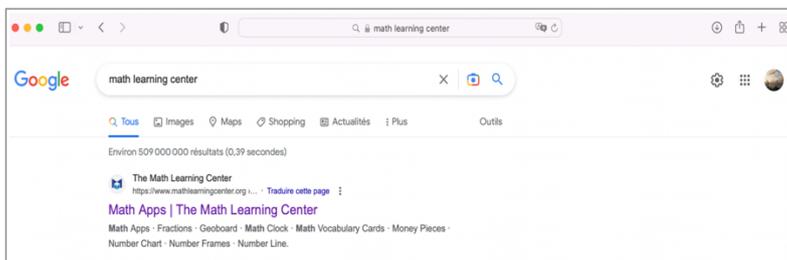


● En primer lugar, ¿Qué es el 'Math learning center' ?

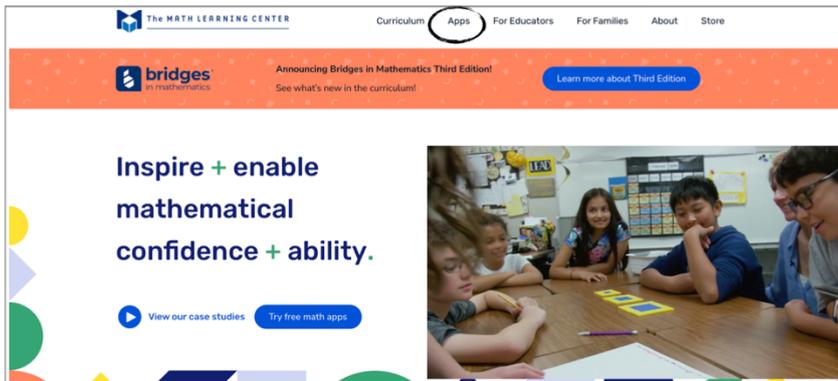
El Centro de Aprendizaje de Matemáticas (Math Learning Center) es una organización americana cuya misión es inspirar y permitir que las personas descubran y desarrollen su confianza y habilidad matemática. Ofrecen recursos innovadores, entre los que destacan 9 a applets con diversas utilidades.

● Pero, ¿Cómo entramos en el 'Math learning center'?

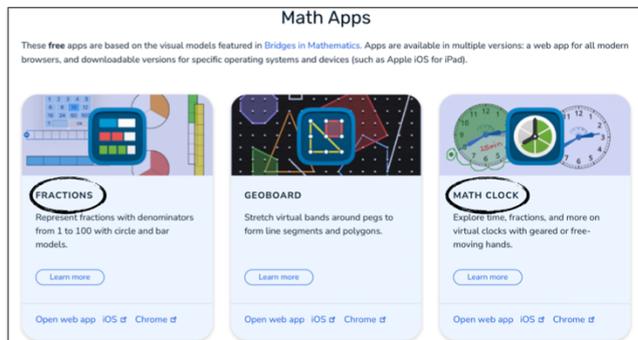
- 1) Haz una búsqueda en google.
- 2) Pincha en la primera opción que aparece.



3) En la página de inicio, pincha en apps.



4) Te aparecerán hasta 9 opciones diferentes. Nosotros vamos a utilizar la primera y la tercera.



3

¿Cómo utilizar el applet 'FRACTIONS'? ¡Analicemos la barra de herramientas!

<p>Aquí puedes añadir una fracción rectangular o circular, dividida en tantos pedazos como quieras.</p>	<p>Pulsando aquí puedes voltear tu fracción, y cambiar el diseño de tu dibujo.</p>	<p>En este icono puedes maximizar o disminuir la pantalla.</p>	<p>Aquí puedes escribir operaciones matemáticas.</p>	<p>Con este botón puedes dibujar como si de un rotulador se tratara.</p>	<p>Pulsando aquí puedes borrar cualquier objeto seleccionado.</p>	<p>Este botón permite compartir tu trabajo con los demás.</p>
						
<p>Este botón permite reiniciar tu trabajo y poner la pizarra en blanco.</p>	<p>Con este botón puedes añadir una etiqueta a tu representación, donde se señala la fracción numérica.</p>	<p>Aquí puedes obtener colorear el numerador de la fracción, escogiendo entre varias tonalidades.</p>	<p>Pulsando aquí puedes añadir una nota o comentario.</p>	<p>Este botón permite añadir texto.</p>	<p>En este icono puedes duplicar la figura que quieras.</p>	<p>En esta llave puedes introducir un código para abrir dibujos ya hechos.</p>

¿Cómo utilizar el applet 'MATH CLOCK'? ¡Analicemos la barra de herramientas!

<p>Aquí puedes añadir un reloj analógico.</p>	<p>En esta etiqueta puedes añadir la hora digital.</p>	<p>Aquí puedes calcular lo rápido que se mueven las agujas.</p>	<p>Pulsando aquí puedes colorear las partes que quieras del reloj.</p>	<p>Aquí puedes escribir operaciones matemáticas.</p>	<p>Con este botón puedes dibujar como si de un rotulador se tratara.</p>	<p>Pulsando aquí puedes borrar cualquier objeto seleccionado.</p>	<p>Este botón permite compartir tu trabajo con los demás.</p>
							
<p>Este botón permite reiniciar tu trabajo y poner la pizarra en blanco.</p>	<p>Pulsando aquí puedes configurar las agujas del reloj en horas y minutos.</p>	<p>Aquí puedes insertar un cronómetro.</p>	<p>En este botón puedes fraccionar el reloj en las partes que quieras.</p>	<p>Pulsando aquí puedes añadir una nota o comentario.</p>	<p>Este botón permite añadir texto.</p>	<p>En este icono puedes duplicar el reloj que quieras.</p>	<p>En esta llave puedes introducir un código para abrir dibujos ya hechos.</p>

Anexo 2. Ficha 1

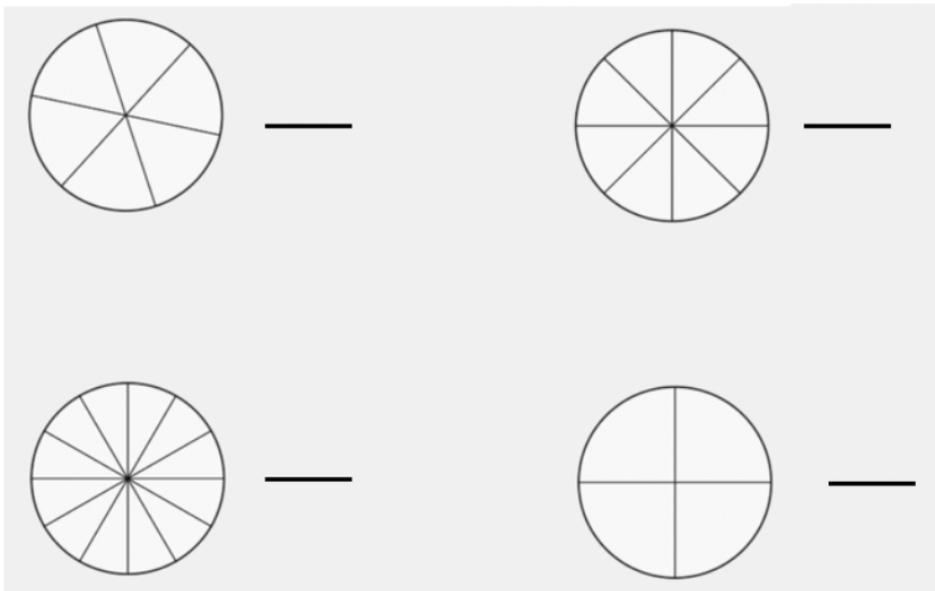
En el anexo 2 se presenta la primera ficha que realizará el alumnado, que contiene dos ejercicios de fracciones y uno de la hora.

Nombre:

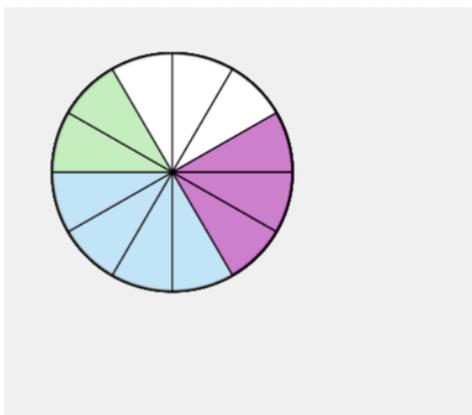
Fecha:

Nº de lista:

1. ¡PONTE A PRUEBA! Las siguientes tartas están divididas de diferente forma. Colorea las porciones necesarias en cada una para que comas la misma cantidad en todas. A continuación, escribe al lado la fracción que te comes de cada tarta. Hazlo tanto en el papel como en el Chromebook.

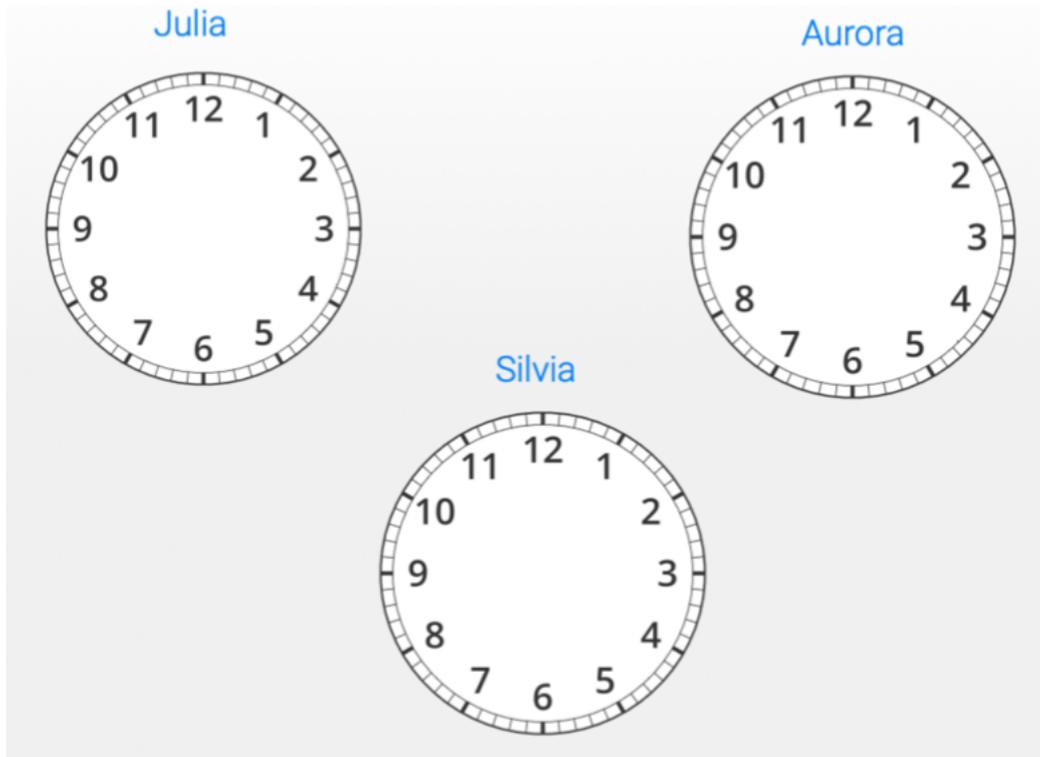



2. Ismael, Natalia e Irene comparten una pizza para cenar. Ismael es el que más ha comido, e Irene la que menos. ¿Qué fracción de pizza se ha comido cada uno? ¿Qué fracción les ha sobrado? Hazlo tanto en el papel como en el Chromebook.



ISMAEL	
NATALIA	
IRENE	
Sobra	

3. Julia, Aurora y Silvia han quedado para comer a las 13:30h. Julia, que vive más lejos, sale de casa a las 12:00h, Aurora a las 12:45h (una menos cuarto) y Silvia, que vive cerca, a las 13:15h (una y cuarto). Marca en los tres relojes la hora a la que salen de casa (en la aplicación y en el papel) y señala en la tabla la fracción que tarda cada una en llegar. Realízalo tanto en el papel como en el Chromebook.



	Fracción que tarda en llegar
Julia	
Aurora	
Silvia	

Anexo 3. Ficha 2

En el anexo 3 se presenta la segunda ficha que elaborará el alumnado, que contiene dos ejercicios de fracciones y uno de la hora.

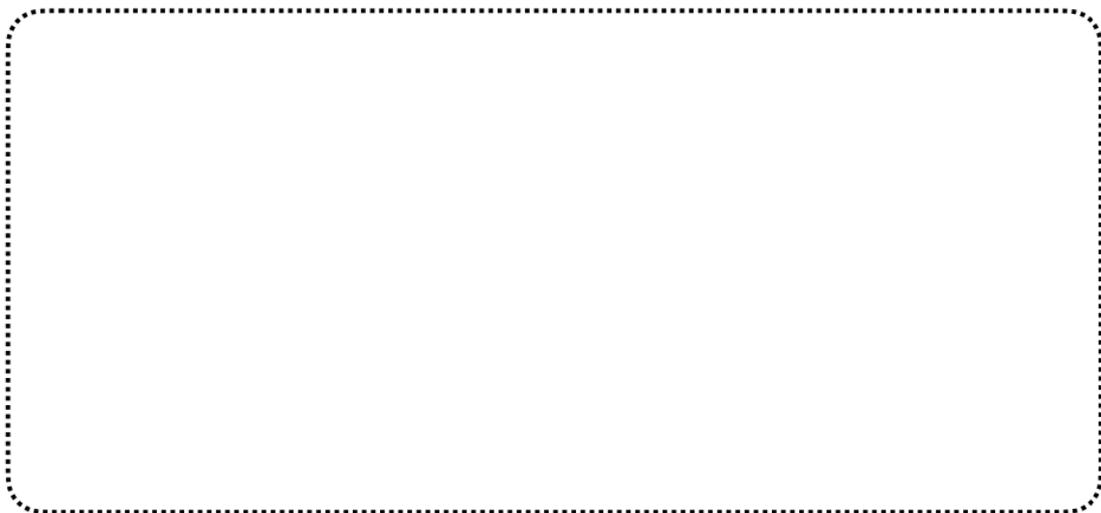
Nombre:

Fecha:

4. Sandra, Ester, Marina y Guillermo comparten una caja de bombones. Ester se ha comido cinco, Marina tres, Guillermo cuatro y Sandra uno. Si han sobrado dos bombones. ¿Cuántos bombones había en la caja en total? ¿Qué fracción se come cada uno? Representalo con un dibujo, coloreando en la caja las partes que se come cada uno, tanto en el papel como en el Chromebook.

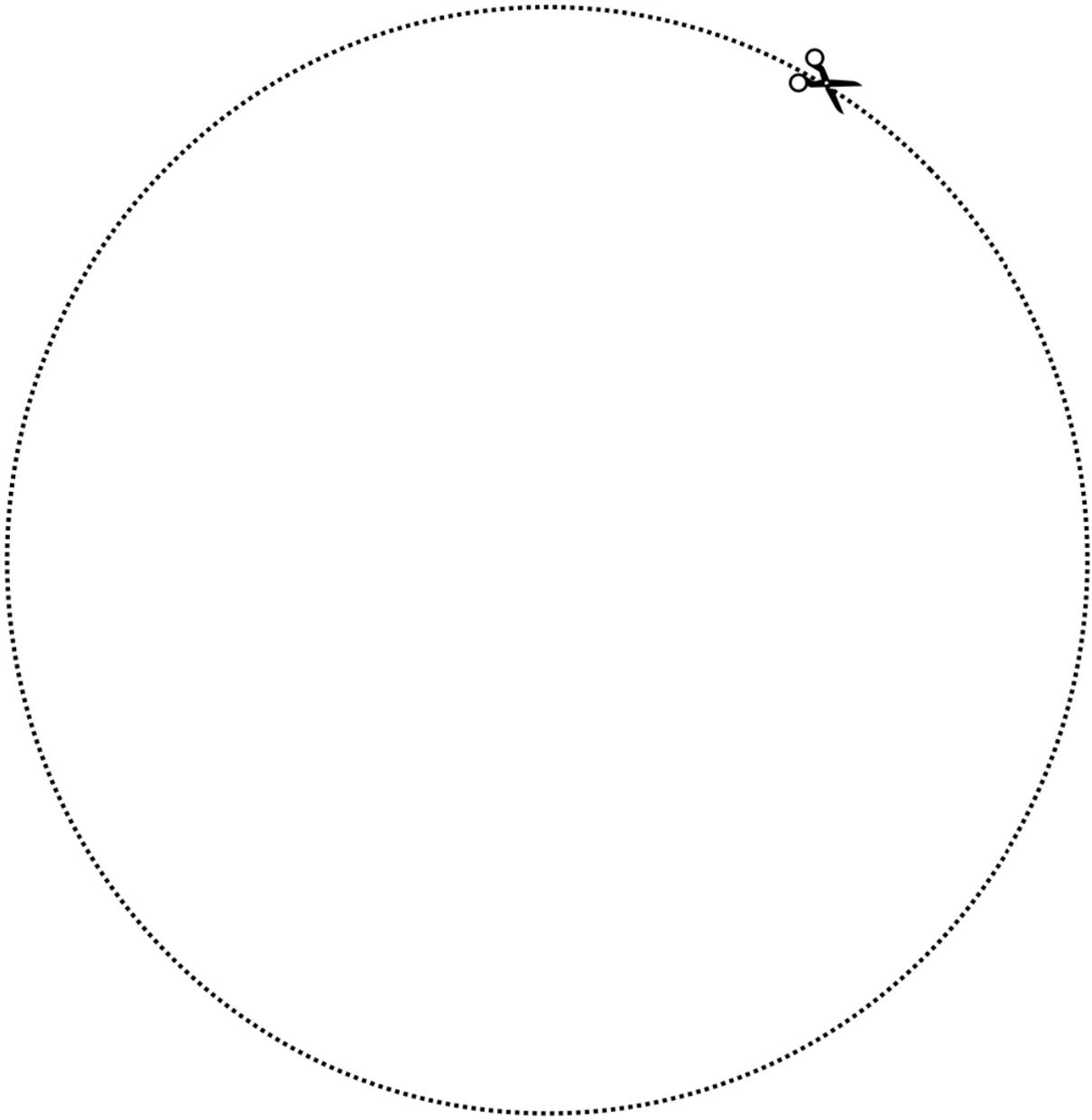
	Fracción que se come
Ester	
Marina	
Sandra	
Guillermo	
Fracción que sobra	

DIBUJO:

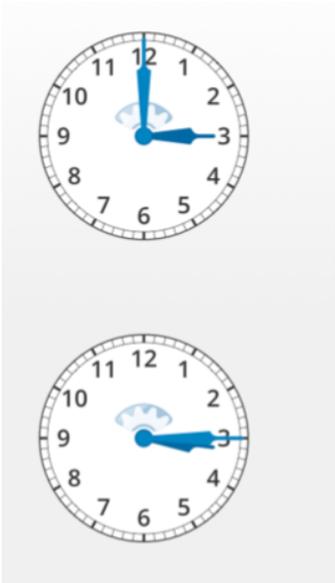


5. ¡RETO! Vas a recibir un código que te dará acceso a una figura. Copia en este círculo la imagen que visualizas, recórtala y luego, busca al compañero/a que tiene la fracción equivalente a la tuya.

Cuenta bien las partes en las que está dividido tu círculo y las partes que están coloreadas.



6. Indica la hora que será en cada reloj cuando le sumes cada una de las siguientes fracciones. Señálalo también en los dibujos con el color señalado en cada caso. Representalo tanto en el papel como en el Chromebook.



+ 1/4	+ 2/4	+ 3/4	+ 4/4

Anexo 4. Evaluación de la maestra del grupo.

En este anexo se presenta la evaluación de la maestra del grupo, que da su valoración sincera sobre el desarrollo de las actividades, y añade un comentario final.

Marca con una x del 1 al 5 cada uno de los siguientes criterios, siendo 1 = mal; 2 = regular; 3 = normal; 4 = bien; 5 = excelente					
	1	2	3	4	5
Motivación, entusiasmo, y cooperación dentro del equipo durante el trabajo.				x	
Manejo responsable y efectivo de los recursos TIC (Chromebook y aplicación) durante el desarrollo de las actividades.					x
Existencia de un diálogo respetuoso con los compañeros/as en la resolución de los ejercicios.				x	
Representación correcta de las fracciones y de la hora, tanto en el Chromebook como en el papel.				x	
Realización correcta de sumas y restas de fracciones con el mismo denominador.					x
Comprensión y explicación clara del concepto de fracción equivalente, habiendo encontrado correctamente la pareja correspondiente cada uno.					x
Comentarios y observaciones: Dadas las características del aula, el clima ha sido favorable y los alumnos han adquirido los contenidos trabajados.					