

Ainhoa Muiño Fariña

*Métodos Runge-Kutta para la
resolución de ecuaciones diferenciales
ordinarias y aplicaciones*

Runge-Kutta methods for solving ordinary
differential equations and applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2023

DIRIGIDO POR
Soledad Pérez Rodríguez

Soledad Pérez Rodríguez
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi tutora, Soledad, por la paciencia, dedicación y ánimos, sobretodo cuando no veía el final.

A mi familia, por apoyarme en cada decisión en el largo y duro trayecto, y en especial, por la confianza en mí, por confiar en que puedo con todo lo que me proponga. Todo el esfuerzo es por vosotros.

A mis amigos de casa, por estar junto a mí a pesar de los kilómetros, por ser como siempre pase el tiempo que pase. Por cada momento a lo largo de estos años, lo vivido y lo que nos queda por delante. Gracias.

A mis amigos de las islas, por acogerme desde el primer día y acompañarme en esta etapa tan bonita. Por ser un apoyo incondicional y ser como familia para mí. Siempre nos quedará cada mañana de organización y barraquito, cada tarde de desesperación y biblioteca, cada noche de reflexión y cariño.

Desde luego, Canarias siempre será hogar.

Ainhoa Muiño Fariña
La Laguna, 22 de mayo de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo fundamental de esta memoria es el estudio de la ecuación de Black-Scholes y su resolución. El trabajo consta de tres capítulos. En el primero, introducimos los conceptos financieros, así como herramientas básicas, que se trabajarán a lo largo de la memoria. En el segundo, definiremos el concepto de cartera sin riesgo y deduciremos la ecuación de Black-Scholes, la cual resolveremos analíticamente. Por último, en el tercer capítulo, se resuelve la ecuación numéricamente, usando el método de Crank-Nicolson.

Palabras clave: *Opciones de compra – Cartera sin riesgo – Black-Scholes – Método de Crank-Nicolson – ...*

Abstract

The main objective of this report is to study the Black-Scholes equation and its solution. The project consists of three chapters. In the first chapter, we introduce the financial concepts, as well as basic tools, that will be worked throughout the report. In the second chapter, we define the concept of riskless portfolio and we will deduce the Black-Scholes equation, which we'll solve analytically. Finally, in the third chapter, the equation is solved numerically, using the Crank-Nicolson method.

Keywords: *Call options – Riskless portfolio – Black-Scholes – Crank-Nicolson method – ...*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Fundamentos financieros	1
1.1. Introducción al mercado de opciones	1
1.2. Procesos estocásticos	3
1.3. Modelo del precio de activos	5
1.4. Lema de Itô	6
1.4.1. Aplicación del lema de Itô al precio del activo	8
2. El modelo de Black-Scholes	11
2.1. Cartera sin riesgos	11
2.2. La ecuación de Black-Scholes	12
2.2.1. Condición final y de contorno	14
2.3. Resolución analítica de la ecuación de Black-Scholes	15
3. Resolución numérica de la ecuación de Black-Scholes	21
3.1. Preparación de la ecuación	21
3.2. Integración sobre malla uniforme	23
3.3. Integración sobre una malla no uniforme	27
3.4. Comparación de las mallas	30
3.5. Programa en Matlab	31
3.5.1. Malla uniforme	31
3.5.2. Malla no uniforme	34
A. Apéndice	37
A.1. Definiciones	37
A.2. Distribución normal	38

A.3. Distribución χ^2 de Pearson	39
A.4. Ecuación del calor	41
Bibliografía	43
Lista de símbolos y abreviaciones	45
Poster	47

Introducción

En el presente trabajo de fin de grado, abordaremos el estudio de la ecuación de Black-Scholes y su solución.

En la década de 1970, Fischer Black, Myron Scholes y Robert Merton lograron importantes avances en la determinación de precios de opciones, lo que llevó a la creación del modelo de Black-Scholes-Merton, también conocido como modelo de Black-Scholes. Su contribución fue tan significativa que en 1997, Robert Merton y Myron Scholes recibieron el premio Nobel de Economía, y se reconoció que Fischer Black también hubiera sido receptor del premio de no haber fallecido en 1995.

Black y Scholes emplearon el modelo de fijación de precios de activos y desarrollaron su modelo en 1973. Como resultado, crearon una fórmula que asumía que los movimientos de los precios seguían un proceso estocástico. Posteriormente, en 1976, Merton reconoció la importancia de la volatilidad en el modelo, lo que permitió desarrollar una nueva fórmula para valorar opciones financieras en mercados donde la volatilidad no era constante.

Desde entonces, el modelo ha sido fundamental en el desarrollo de los mercados de opciones, y hoy en día sigue siendo utilizado.

El objetivo de esta memoria será introducir el mundo financiero de las opciones y entender un modelo que ha servido como base para el desarrollo de otros modelos, la ecuación de Black-Scholes. Para ello, estructuraremos la memoria en tres capítulos.

En el capítulo 1 nos introduciremos en el mercado de opciones, estudiando en conceptos como las opciones de compra, precio *strike* y volatilidad, entre otros. Daremos un breve repaso a los procesos estocásticos, definiendo el proceso de Markov, el proceso de Wiener y el proceso de Itô. Explicaremos el modelo de precio de los activos que utilizaron Black y Scholes en el desarrollo de su modelo y el Lema de Itô, que es una herramienta fundamental en este ámbito. En este

capítulo hemos utilizado principalmente la bibliografía [1] y [2].

En el capítulo 2 trataremos en profundidad la ecuación de Black-Scholes. Para empezar, abordaremos el concepto de cartera sin riesgo, así como las suposiciones que debemos seguir para deducir la ecuación de Black-Scholes. Tras introducir los conceptos necesarios, deduciremos la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes. Presentaremos el problema diferencial junto con condiciones final y de contorno apropiadas, el cual resolveremos analíticamente. En este capítulo nos hemos guiado de los libros [1] y [2].

En el capítulo 3, plantearemos la resolución numérica de la ecuación. Mediante el método de Crank-Nicolson, como caso particular del Método de Líneas. Aproximaremos las derivadas de la variable espacial S usando diferencias finitas y luego aplicaremos la regla trapezoidal sobre la variable temporal t . Debido a la falta de regularidad de la condición inicial impuesta, en [3] se recomienda el uso de mallas no uniformes, por lo que haremos una comparación entre la integración con mallas uniformes y no uniformes, estudiando los resultados obtenidos. En este capítulo hemos usado el libro [3].

En conclusión, la memoria pretende ayudar a entender la ecuación de Black-Scholes y su aplicación al mundo financiero.

Fundamentos financieros

En este primer capítulo estudiaremos las opciones y cómo se relacionan con los procesos estocásticos en el mercado financiero. Las opciones financieras ofrecen al comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender un activo subyacente a un precio fijado en una fecha futura. Principalmente, trabajaremos con las opciones de compra por simplicidad.

Veremos cómo se modelan los precios de los activos y entenderemos el Lema de Itô, que es una herramienta fundamental para deducir la ecuación de Black-Scholes, que veremos en el siguiente capítulo.

Utilizaremos de la bibliografía [1, Capítulo 1 y 2] y [2, Capítulo 14].

1.1. Introducción al mercado de opciones

La opción financiera más sencilla, la **opción de compra** (*call option*), es un contrato donde el comprador tiene el derecho de poder comprar ciertos activos (típicamente acciones), a los que llamaremos **subyacentes**, por una cuantía prescrita, conocida como **precio de ejecución** (*strike price*), en un **plazo de vencimiento** (*maturity*).

Las opciones de compra otorgan al comprador el derecho, pero no la obligación, de adquirir ciertos activos en una fecha futura a un precio predeterminado. Por otro lado, la otra parte del contrato tiene la obligación de vender los activos al precio establecido en la fecha de vencimiento, y debe ser compensada por asumir esta obligación.

Se considera que un precio más alto de la acción en el presente implica un precio más alto en el futuro. De igual manera, un precio *strike* más bajo conlleva un coste menor al momento de ejercer la opción, lo que resulta en un mayor valor

de la opción al incrementar el riesgo para el vendedor.

Es importante tener en cuenta que el valor de la opción de compra varía según el tiempo de vencimiento. El comprador prefiere naturalmente un plazo de vencimiento lo mayor posible, ya que aporta mayor oportunidad para que el precio de los activos suba, pero esto a su vez aumenta el valor de la opción.

Además, el precio de la opción dependerá de la **volatilidad** del precio del activo, que es una medida de la aleatoriedad que puede darse en dicho precio. A mayor volatilidad, el precio del subyacente variará más a lo largo del tiempo, lo que aumenta el riesgo para el vendedor y aumenta el precio de la opción. Por último, las opciones dependen de los tipos de interés bancarios vigentes.

Vamos a ver un ejemplo de opción de compra, que es el producto que veremos en más profundidad.

Ejemplo 1.1. Supongamos que, hoy, 20 de enero de 2023, un comprador compra una opción que le permita comprar una acción X el 15 de agosto de 2023 a un precio *strike* de 250 €.

Podrían ocurrir dos casos el día del vencimiento (es decir, el 15 de agosto):

Si el precio de la acción el 15 de agosto es de 270 €, el comprador podría comprarla a 250 €. Esto le supondría un beneficio inmediato ya que la podría revender inmediatamente y tener un beneficio de 20 €.

Si, en cambio, el precio de X el 15 de agosto es de 230 €, evidentemente el comprador no ejecutará la opción.

Si el 20 de enero se estima que el precio de la acción X el día del vencimiento va a ser sólo 230 € o 270 € con igual probabilidad, la media del beneficio esperado será $\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 20 = 10\text{€}$. Por tanto, parece claro que el precio justo para la opción de compra será de 10 €.

Sin embargo, estimar cual sería el precio justo de una opción es más complicado en la realidad.

También existen las **opciones de venta**. Otorgan al comprador el derecho, pero no la obligación, de vender un activo a un precio predeterminado en una fecha futura.

Por otro lado, para valorar las opciones debemos tener en cuenta el valor actual del dinero en el momento del vencimiento o **valor descontado**. Debemos pensar cuánto tendríamos que pagar ahora para recibir una cantidad garantizada K en un momento futuro T .

Para calcular este **descuento**, en este ámbito se suele utilizar el **interés compuesto continuo**. Si suponemos que el tipo de interés r permanece cons-

tante en un intervalo de tiempo $[0, T]$ y en el día de hoy ($t = 0$) invertimos una cantidad K , ¿cuánto valdrá nuestra inversión cuando pasen T meses?

Si aplicásemos interés compuesto discreto en cada mes, $t = 1, \dots, T$, y llamamos M_t al valor de la inversión en el mes t

$$M_t = M_{t-1} + rM_{t-1} \Leftrightarrow \Delta M_t = M_t - M_{t-1} = rM_{t-1} \quad (1.1)$$

de donde podemos deducir por iteración que:

$$M_t = (1 + r)^t M_0 = (1 + r)^t K \quad (1.2)$$

La versión de tiempo continuo será $M = M(t), t \in [0, T]$, que verifica la ecuación diferencial

$$\frac{dM}{dt} = rM, \quad M(0) = K \quad (1.3)$$

Por tanto, resolviendo este problema de valor inicial, en cada $t \in [0, T]$

$$M(t) = M_0 e^{rt} = K e^{rt} \quad (1.4)$$

En algunos contratos de futuros como las opciones se suele aplicar este interés continuo de otra forma, prefijando el valor final en lugar del inicial. Es decir, se acuerda pagar una cierta cantidad K cuando pasen T meses a partir del momento de la firma del contrato ($M(T) = K$).

En este caso, se busca $M_0, t \in [0, T]$, tal que

$$M(T) = M_0 e^{rT} = K \Leftrightarrow M_0 = K e^{-rT} \Rightarrow M(t) = K e^{-r(T-t)} \quad (1.5)$$

que es lo que se llama el precio descontado o descuento.

1.2. Procesos estocásticos

Los precios de los activos de todo tipo suelen sufrir variaciones aleatorias a lo largo del tiempo dentro de un cierto intervalo de precio determinado. La manera habitual de modelizar estos precios es utilizando procesos estocásticos.

Para simplificar la exposición, en el Apéndice [A.1](#) recordamos algunos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad necesarios en esta sección.

Definición 1.2.1 *Un **proceso estocástico** es un conjunto de variables aleatorias que depende de un parámetro. En nuestro caso, será el tiempo t .*

Ejemplo 1.2. El *retorno financiero* es una medida del rendimiento de una inversión o activo financiero. Se calcula como la ganancia o pérdida que se obtiene en términos porcentuales en relación con el precio original de la inversión. Por ello, son un ejemplo de proceso estocástico. Más concretamente, los retornos diarios del cambio *EUR-USD* (euros-dólares), se puede intuir el rango de valores en el que se encontrará la variable, pero no se puede predecir con exactitud cuál será su valor en un día concreto.

Definición 1.2.2 Un *proceso de Markov* es un tipo particular de proceso estocástico donde solamente el valor actual de la variable t es relevante (o influye) en el futuro.

Un proceso de Markov implica que la distribución de probabilidad de un precio en cualquier momento particular del futuro no depende del camino seguido por dicho precio en el pasado.

Definición 1.2.3 Una variable z se dice que sigue un *proceso de Wiener* si:

- (1) El cambio Δz durante un periodo corto de tiempo Δt es $\Delta z = \epsilon \Delta t$, donde ϵ sigue una distribución estándar $\phi(0, 1)$.
- (2) Los valores de Δz para dos intervalos de tiempo cualesquiera son independientes. Esto implica que es un proceso de Markov.

Los procesos de Wiener también se suelen llamar **movimientos brownianos**.

Definición 1.2.4 Se dice que una variable x sigue un *proceso de Wiener generalizado* si

$$dx = a dt + b dz \quad (1.6)$$

donde z sigue un proceso de Wiener y a, b son constantes.

Por la proposición (A.2.1) del Apéndice, tenemos que x sigue una distribución normal estándar, por lo que $dx = a dt + b dz$ también seguirá una distribución normal estándar, pues $dx \sim a dt + b \phi(0, dt) = \phi(adt, b^2 dt)$.

Así, el término $a dt$ es la media de dx y a la constante a se le llama **tasa de deriva** (*drift rate*) de x . Esto mide la variación de la media por unidad de tiempo.

Por otro lado, la varianza de dx es $b^2 dt$, por lo que a b^2 se le llama **tasa de varianza** de x y es una medida de la variabilidad de x .

Cuando x sigue un proceso generalizado de Wiener, en un pequeño intervalo de tiempo Δt , el cambio de Δx en valor de x vendrá dado por :

$$\Delta x = a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1.7)$$

donde ϵ sigue una distribución normal estándar $\phi(0, 1)$.

Definición 1.2.5 Una variable x sigue un **proceso de Itô** si

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (1.8)$$

Los procesos de Itô se pueden entender como procesos de Wiener generalizados donde el *drift rate* y la varianza dependen del valor del subyacente x y de t .

En estos procesos, en un pequeño intervalo entre t y $t + \Delta t$, la variable x cambia a $x + \Delta x$, donde

$$\Delta x = a(x, t)\Delta t + b(x, t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (1.9)$$

donde la tasa de deriva y de variación dependen de x y t .

Tenemos que tener en cuenta que el proceso de Itô en (1.9) es de Markov, porque el camino en x en el tiempo t depende del valor de x en t y no en tiempos anteriores.

1.3. Modelo del precio de activos

El modelo más usado para simular el precio S de un activo es

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dz \quad (1.10)$$

o, en su forma discreta, en un intervalo de tiempo Δt , $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$,

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (1.11)$$

donde ϵ sigue una distribución normal $\phi(0, 1)$.

En el ámbito financiero dS/S se denomina **retorno** de la inversión y mide cuánto varía el precio respecto a dicho precio. Valorar este retorno es mejor que valorar sólo dS ya que la variación del precio de algo sería más o menos relevante según sea dicho precio. No es igual que la variación del precio de un producto sea 100 € si estamos hablando del precio de un coche o de un teléfono móvil.

El modelo (1.10) nos dice que el retorno del precio S sigue un proceso generalizado de Wiener, por lo que estima que el retorno en el futuro variará en cierto grado de forma determinista (reflejada en la parte μdt), pero también con

cierta aleatoriedad (reflejada en $\sigma dz \simeq \sigma \epsilon \sqrt{dt}$).

Si tomáramos $\sigma = 0$, entonces el precio del activo sería totalmente determinista y podríamos predecir su futuro con certeza. Es decir, tendríamos:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \Leftrightarrow \frac{dS}{dt} = \mu S \quad (1.12)$$

Por tanto, cuando μ es constante, tendríamos un crecimiento exponencial del valor del activo,

$$S = S_0 e^{\mu(t-t_0)} \quad (1.13)$$

siendo S_0 el valor del activo en $t = t_0$.

Por otro lado, como vimos antes, por ser un producto de Wiener generalizado seguirá una distribución normal estándar $dS/S \sim \phi(\mu dt, \sigma^2 dt)$ por lo que μdt es la media o esperanza del proceso. Por eso a μ se le suele llamar **retorno esperado**.

Además, σ^2 sería su varianza por unidad de tiempo por lo que σ será la estimación de la desviación típica del proceso. En otras palabras, una medida de su **volatilidad**.

1.4. Lema de Itô

Consideramos una función G continua y diferenciable de dos variables reales x e y . Si Δx es un pequeño incremento en x y Δy es un pequeño cambio en y , se tiene un incremento en G :

$$\Delta G = G(x + \Delta x, y + \Delta y) - G(x, y) \quad (1.14)$$

que por su desarrollo de Taylor:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Delta y^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \dots \quad (1.15)$$

Cuando Δx y Δy tienden a 0, despreciando los términos de mayor orden ($\Delta x^2, \Delta y^2, \dots$) la ecuación se convierte en la conocida aproximación por la diferencial:

$$\Delta G = dG = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y \quad (1.16)$$

El lema de Itô intenta generalizar esto para funciones diferenciales $G(x, t)$ cuando la variable x sigue un proceso de Itô, es decir, si

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (1.17)$$

donde dz es un proceso de Wiener.

Análogamente a (1.15), podemos escribir, para incrementos pequeños Δx , Δt

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta x \Delta t + \dots \quad (1.18)$$

Proposición 1.4.1 (Lema de Itô) *Supongamos que una variable x sigue un proceso de Itô*

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (1.19)$$

donde dz sigue un proceso de Wiener y a, b son funciones de x y t . Cualquier función de dos variables $G(x, t)$ suficientemente diferenciable sigue el proceso

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (1.20)$$

donde dz es el mismo proceso de Wiener que (1.19).

Por (1.17):

$$\Delta x = a(x, t) \Delta t + b(x, t) \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1.21)$$

Lo que sustituido en (1.17) resulta, (obviando la dependencia de x y t en la notación)

$$\begin{aligned} \Delta G &= \frac{\partial G}{\partial x} (a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t}) + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t})^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t} \Delta t (a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t}) + \dots \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} \right) \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} b \epsilon \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} (b^2 \epsilon^2 \Delta t + 2 a b \epsilon \Delta t^{3/2} + a^2 \Delta t^2) + \\ &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} \Delta t^2 + \dots \\ &= \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} \right) \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} b \epsilon \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \epsilon^2 \Delta t + \dots \end{aligned}$$

donde \dots representan términos con potencias Δt^p con $p > 1$.

Tenemos $\epsilon \sim N(0, 1)$, por lo que ϵ^2 es una χ^2 de Pearson de 1 grado de libertad podemos verlo en detalle en el Apéndice (A.3). Por tanto, $E[\epsilon^2] = 1$ y $Var[\epsilon^2] = 2$. De aquí, $E[\epsilon^2 \Delta t] = \Delta t$ y $Var[\epsilon^2 \Delta t] = 2 \Delta t^2$. Claramente

cuando hacemos $\Delta t \rightarrow 0$, Δt^2 es despreciable en comparación, lo que provoca que $Var[\epsilon^2 \Delta t] \rightarrow 0$, por lo que será aproximadamente su esperanza, es decir, $\epsilon^2 \Delta t \sim E[\epsilon^2 \Delta t] = \Delta t$.

En consecuencia,

$$\Delta G = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} b \epsilon \sqrt{\Delta t} \quad (1.22)$$

y se toma

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (1.23)$$

1.4.1. Aplicación del lema de Itô al precio del activo

Una aplicación directa del lema de Itô al modelo de valoración de precios de activos (1.10) demuestra que dichos precios siguen una distribución lognormal.

Para ello, definimos

$$G = \ln S \quad (1.24)$$

Luego,

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad (1.25)$$

Se deduce de (1.23) que G sigue un proceso tal que:

$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (1.26)$$

Cuando μ y σ son constantes, esta ecuación nos indica que $G = \ln S$ sigue un proceso generalizado de Wiener, con una tasa de deriva de $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ y una tasa de varianza constante de σ^2 .

El cambio respecto el tiempo en $\ln S$ entre 0 y un futuro T sigue una distribución normal. Esto implica que,

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \quad (1.27)$$

donde S_T es el precio del activo en T , S_0 el precio en $T = 0$ y $\phi(m, v)$ denota la distribución normal estándar con media m y varianza v .

Aplicando esto al modelo financiero, donde influye el retorno y la volatilidad. Tenemos que, en un periodo corto de tiempo:

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t) \quad (1.28)$$

donde ΔS es el cambio del precio del activo en un tiempo Δt y $\phi(m, v)$ denota la distribución normal estándar con media m y varianza v .

El modelo implica que:

$$\begin{aligned} \ln S_T - \ln S_0 &\sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \\ \Leftrightarrow \ln \frac{S_T}{S_0} &\sim \phi \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \\ \Leftrightarrow \ln S_T &\sim \phi \left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right] \end{aligned}$$

donde S_T es el precio del activo en T , S_0 el precio en $T = 0$. La variable $\ln S_T$ sigue una distribución normal estándar, por lo que sigue una distribución lognormal.

El modelo de Black-Scholes

En este capítulo introduciremos la ecuación diferencial de Black-Scholes, que es una ecuación utilizada para calcular el precio de los derivados financieros. Desarrollaremos esta ecuación y la resolveremos analíticamente para el caso de opciones de compra.

Previamente, introduciremos el concepto de cartera sin riesgos, así como algunos conceptos clave y suposiciones que nos acompañarán a lo largo del capítulo.

Utilizaremos mayoritariamente el libro [2, Capítulo 15] y [1, Capítulo 3]

2.1. Cartera sin riesgos

Se puede reducir el impacto de los cambios en los precios de los activos al crear una cartera (*portfolio*) que no tenga riesgo asociado, lo que consiste en una combinación de acciones y derivados, ya se compren (*long position*) o se vendan (*short position*).

El objetivo de la cartera es obtener un retorno que iguale la **tasa de interés libre de riesgo**, denotada como r . La tasa de interés libre de riesgo es la ganancia que se puede obtener por invertir en un activo financiero que se considera totalmente seguro y sin riesgo de incumplimiento, es decir, se espera que el emisor del activo cumpla con sus obligaciones financieras. Si se establece una cartera adecuada de acciones y derivados, las ganancias o pérdidas se compensan entre sí.

Ejemplo 2.1. Supongamos que en un momento cualquiera, la relación entre un pequeño cambio ΔS en el precio de un activo, y el resultante cambio Δf en el precio de una opción de compra sobre dicho activo viene dado por:

$$\Delta f = 0.4\Delta S, \quad (2.1)$$

es decir, la variación del precio de la opción es un 40 % de la variación del precio del activo.

Una cartera sin riesgos consistiría en la compra de 40 acciones por cada 100 opciones vendidas. Esto asegura que el valor de los cambios en el precio de las acciones se compense con los cambios en el precio de las opciones de compra.

Por ejemplo, supongamos que el precio del activo sube 10 céntimos, lo que provoca un aumento de 4 céntimos en el precio de la opción de compra. Al haber comprado 40 acciones habremos ganado $40 \cdot 10 = 400 \text{ cént.} = 4\text{€}$, y al haber vendido 100 opciones habremos perdido $100 \cdot 4 = 400 \text{ cént.} = 4\text{€}$. En este caso, la ganancia obtenida por la compra de acciones es igual a la pérdida sufrida por la venta de opciones, lo que resulta en una compensación y mantiene la cartera sin riesgos.

Sin embargo, para mantener la cartera sin riesgos, es necesario reajustarlo frecuentemente. Por ejemplo, si hoy la relación entre Δf y ΔS es de 0.4, en un tiempo cercano puede ser necesario ajustarla a 0.5 para mantener el equilibrio en la cartera y minimizar el riesgo.

El objetivo de la ecuación de Black-Scholes es estimar el precio justo de una opción de compra para conseguir una cartera sin riesgos.

Para deducir la ecuación de Black-Scholes se establecen las siguientes suposiciones:

- El precio de los activos sigue el modelo (1.10) visto en la Sección 1.3 del capítulo anterior con μ y σ constantes.
- No existen costes de transacciones o tasas.
- Los activos no pagan dividendos (beneficios que algunas empresas reparten anualmente entre sus accionistas).
- El comercio de valores es continuo.
- La tasa de interés libre de riesgo r es constante e igual para todos los vencimientos.

2.2. La ecuación de Black-Scholes

Aunque la ecuación de Black-Scholes se aplica a todos los derivados bajo estas suposiciones, vamos a suponer en lo que sigue que estamos considerando opciones de compra.

Asumimos que el precio del subyacente sigue el modelo (1.10) visto en la Sección 1.3, es decir:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (2.2)$$

donde $dz = \epsilon\sqrt{\Delta t}$, con $\epsilon \sim \phi(0, 1)$.

Sea $f = f(S, t)$ el precio de una opción de compra que suponemos diferenciable (u otro derivado dependiente de S). Por el Lema de Itô:

$$\Delta f = \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \Delta t + \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} \Delta z \quad (2.3)$$

La ecuación de Black-Scholes aparece cuando se busca el precio justo de la opción de compra que permita crear una cartera sin riesgo, por lo que hay que eliminar la incertidumbre de (2.2) y (2.3).

Hay que observar que a pesar de que se trabaja con las dos variables S y t como si fueran independientes, (2.2) nos dice que en realidad $S = S(t)$ y que en un pequeño intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ el precio $S = S(t)$ cambia aproximadamente $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$. Y lo mismo ocurre con f , es decir que Δf mide la variación de f en $[t, t + \Delta t]$.

Siguiendo el razonamiento de la sección anterior, la variación del precio de la opción respecto del precio del activo es $\partial f / \partial S$, y para construir la cartera sin riesgo se deben comprar $X \partial f / \partial S$ acciones por cada X opciones vendidas.

En otras palabras, por cada opción de compra que se vende a un precio f , se tienen que comprar $\partial f / \partial S$ acciones a precio S . Por tanto, si Π es el valor de la cartera sin riesgo (por unidad de opciones vendidas), tiene que ser:

$$\Pi = -f(S, t) + \frac{\partial f(S, t)}{\partial S} S(t) \quad (2.4)$$

Por tanto, en un intervalo $[t, t + \Delta t]$, suponiendo que el cambio es $\partial f / \partial S$ es despreciable,

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= \Pi(t + \Delta t) - \Pi(t) \\ &= -(f(S(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(S(t), t)) + \frac{\partial f}{\partial S}(S(t), t)[S(t + \Delta t) - S(t)] \end{aligned}$$

lo que implica $\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}(S, t)\Delta S$.

Aplicando (2.2) y (2.3),

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= - \left(\mu S \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \Delta t - \sigma S \frac{\partial f}{\partial S} \Delta z + \frac{\partial f}{\partial S} (\mu S \Delta t + \sigma S \Delta z) \\ &= - \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \Delta t \end{aligned}$$

Vemos que desaparece la parte estocástica de la ecuación y que no hay incertidumbre.

Por las suposiciones vistas en la sección anterior, podemos asumir que ganamos la misma tasa de retorno que los valores libres de riesgo, es decir, en un periodo corto de tiempo podemos expresar el cambio en el valor de nuestra cartera como:

$$\frac{\Delta \Pi}{\Delta t} = r\Pi \quad \text{ó} \quad \Delta \Pi = r\Pi \Delta t \quad (2.5)$$

lo que se cumple porque el tipo de interés se mantiene constante para todos los vencimientos.

Comparando las dos ecuaciones anteriores:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \left(f - S \frac{\partial f}{\partial S} \right) \quad (2.6)$$

o, reagrupando,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -rf \quad (2.7)$$

lo que se conoce como la **ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes**.

2.2.1. Condición final y de contorno

A la ecuación de Black-Scholes (2.7) se le imponen diferentes condiciones finales y de contorno según el tipo de derivado que se esté valorando.

En el caso de las opciones de compra, cuando se llega a la fecha de vencimiento ($T = t$), naturalmente el valor de la opción es

$$f(S, T) = \text{máx}\{S - K, 0\} \quad (2.8)$$

pues en dicho momento, si el precio del activo S es mayor que K , el dueño de la opción ejecutaría su derecho de comprar el activo a precio K y obtendría un beneficio (*payoff*) inmediato de $S - K > 0$. En cambio, si el precio S fuera menor que K , probablemente no compraría el activo y no ganaría nada.

En el caso $S = 0$, el activo no vale nada, claramente sería

$$f(0, t) = 0, \forall t \geq 0 \quad (2.9)$$

lo que constituye una condición de contorno para la ecuación (2.7). Por otro lado, si $S \rightarrow \infty$, es esperable que

$$f(S, t) \sim S, \forall t \geq 0 \quad (2.10)$$

lo que también se tendrá que imponer a (2.7).

2.3. Resolución analítica de la ecuación de Black-Scholes

Reescribiendo la ecuación de Black-Scholes (2.7) con las condiciones de contorno y final, tenemos que resolver el siguiente problema diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0, S \in [0, S_{max}] \\ f(0, t) = 0 \\ f(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow \infty \\ f(S, T) = \text{máx}\{S - K, 0\} \end{array} \right. , t \in [0, T] \quad (2.11)$$

Con ciertos cambios de variable este problema se transforma en uno con la bien conocida ecuación del calor ($u_t = u_{xx}$).

En primer lugar, hacemos los cambios de variable:

$$S = Ke^x, \quad t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}, \quad f(S, t) = Kv(x, \tau) \quad (2.12)$$

donde

$$\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\sigma^2}{2}, \quad \frac{dx}{dS} = \frac{1}{Ke^x}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -K \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{e^x} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = \frac{K}{S^2 e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Aplicándolo a la ecuación (2.11),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0 \Rightarrow \\ K \frac{-\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + K^2 e^{2x} \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{K}{K^2 e^{2x}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{rK e^x}{e^x} \frac{\partial v}{\partial x} - rKv = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Simplificando y dividiendo por K :

$$-\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - rv = 0$$

Volviendo a dividir, esta vez por $\frac{\sigma^2}{2}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{r}{\sigma^2/2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\sigma^2/2} v \Rightarrow \\ &\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\gamma - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma v, \quad \gamma = \frac{r}{\sigma^2/2}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Obsérvese que cuando $t \in [0, T]$, se tiene $\tau \in \left[0, \frac{\sigma^2}{2}T\right]$ y que si $t = T$, $\tau = 0$, por lo que la condición final de (2.11) se transforma en la condición inicial en $v(x, \tau)$

$$Kv(x, 0) = \text{máx}\{Ke^x - K, 0\} \Rightarrow v(x, 0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\}\tag{2.15}$$

Con este cambio, además, el borde $S = 0$ se transforma ahora en $x \rightarrow -\infty$ y el borde $S \rightarrow \infty$ en $x \rightarrow \infty$, por lo que el problema (2.11) se transforma en el problema sobre toda la recta real $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\gamma - 1) \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma v, & -\infty < x < \infty, \tau \in \left[0, \frac{\sigma^2}{2}T\right] \\ v(x, 0) = \text{máx}\{e^x - 1, 0\} \end{cases}\tag{2.16}$$

Seguidamente, se buscan dos constantes α y β de modo que al hacer el cambio

$$v(x, \tau) = e^{\alpha x + \beta \tau} u(x, \tau)\tag{2.17}$$

La nueva función $u(x, \tau)$ verifica la **ecuación del calor**, ver en el Apéndice A.4, $u_\tau = u_{xx}$.

Derivando, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \tau} &= \beta e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= \alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\end{aligned}$$

Llevando el cambio anterior a la ecuación (2.16):

$$\begin{aligned}\beta e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \alpha^2 e^{\alpha x + \beta \tau} u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} e^{\alpha x + \beta \tau} + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \\ &(\gamma - 1) \left(\alpha e^{\alpha x + \beta \tau} u + e^{\alpha x + \beta \tau} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \gamma e^{\alpha x + \beta \tau} u\end{aligned}\tag{2.18}$$

Y, para simplificar, dividiendo por $e^{\alpha x + \beta \tau}$

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right) (\gamma - 1) - \gamma u \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} (2\alpha + (\gamma - 1)) + u(\alpha^2 + (\gamma - 1)\alpha - \gamma - \beta)$$
(2.19)

Por tanto, para que $u_t = u_{xx}$, α y β tienen que verificar:

$$\begin{cases} 2\alpha + (\gamma - 1) = 0 \\ \alpha^2 + (\gamma - 1)\alpha - \gamma - \beta = 0 \Rightarrow \left(\frac{1 - \gamma}{2} \right)^2 + (\gamma - 1) \left(\frac{1 - \gamma}{2} \right) - \gamma - \beta = 0 \end{cases}$$

de donde resulta:

$$\alpha = \frac{1 - \gamma}{2}, \quad \beta = \frac{(1 - \gamma)^2}{4}$$
(2.20)

Aplicando este cambio a la condición inicial:

$$v(x, 0) = e^{\alpha x} u(x, 0) \Rightarrow e^{-\frac{(1-\gamma)x}{2}} v(x, 0)$$

$$\Rightarrow u(x, 0) = \text{máx}\{e^{\frac{-1}{2}(\gamma+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x}, 0\}$$

Luego, el problema de valor inicial a resolver es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = u_0(x) = \text{máx}\{e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x}, 0\} \end{cases}$$

Primero, vamos a ver cuándo $u_0(x) = 0$, tal que:

$$e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x} \leq 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)x} \leq e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x} \Rightarrow \frac{1}{2}(\gamma + 1)x \leq \frac{1}{2}(\gamma - 1)x \Rightarrow x \leq 0$$

Por lo que:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x} & , x > 0 \end{cases}$$

La solución del problema es bien conocida, ver en el Apéndice A.4, como,

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} u_0(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} u_0(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} u_0(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau}} u_0(y) dy
\end{aligned}$$

Para resolver esta integral hacemos un cambio de variable, suponiendo $\tau > 0$,

$$\rho = \frac{y-x}{\sqrt{4\tau}}, \quad y = x + 2\sqrt{\tau}\rho, \quad dy = 2\sqrt{\tau}d\rho \quad (2.21)$$

Luego, si

$$y = 0 \Rightarrow \rho = \frac{-x}{2\sqrt{\tau}}, \quad y \rightarrow \infty \Rightarrow \rho \rightarrow \infty$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
u(x, \tau) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\tau}} u_0(y) dy = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\rho^2} u_0(x + 2\sqrt{\tau}\rho) 2\sqrt{\tau} d\rho \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\rho^2} e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)(x+2\sqrt{\tau}\rho)} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\rho^2} e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)(x+2\sqrt{\tau}\rho)} d\rho
\end{aligned}$$

Para evaluar la primera integral,

$$I^+ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-z^2} e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)(x+2\sqrt{\tau}\rho)} d\rho = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{(\gamma+1)}{2}x} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\rho^2 + (\gamma+1)\sqrt{\tau}\rho} \quad (2.22)$$

Haciendo suma de cuadrados para simplificar

$$I^+ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{(\gamma+1)}{2}x + \frac{(\gamma+1)^2}{4}\tau} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-(\rho - \frac{(\gamma+1)}{2}\sqrt{\tau})^2} d\rho \quad (2.23)$$

se hace el cambio de variable tal que:

$$\frac{s}{\sqrt{2}} = -\rho + \frac{(\gamma+1)}{2}\sqrt{\tau}, \quad ds = -\sqrt{2}d\rho$$

$$-\frac{s^2}{2} = -\left(\rho - \frac{(\gamma+1)}{2}\sqrt{\tau}\right)^2$$

Además,

$$\rho = \frac{-x}{2\sqrt{\tau}} \Rightarrow s = \frac{x}{2\sqrt{\tau}}\sqrt{2} + \frac{(\gamma+1)}{2}\sqrt{\tau}\sqrt{2} = \frac{x + \tau(\gamma+1)}{\sqrt{2\tau}} = d_1$$

$$\rho \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow -\infty,$$

por lo que,

$$\begin{aligned} I^+ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{(\gamma+1)}{2}x + \frac{(\gamma+1)^2}{4}\tau} \int_{d_1}^{-\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} \frac{ds}{(-\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(\gamma+1)}{2}x + \frac{(\gamma+1)^2}{4}\tau} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \\ &= e^{\frac{(\gamma+1)}{2}x + \frac{(\gamma+1)^2}{4}\tau} N(d_1) \end{aligned}$$

donde

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (2.24)$$

lo que es la función de distribución acumulada de la normal estándar, ver en el Apéndice A.2.2.

Análogamente, evaluamos la segunda integral, que resulta

$$I^- = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x}{2\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\rho^2} e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)(x+2\sqrt{\tau}\rho)} d\rho = e^{\frac{(\gamma-1)^2}{4}\tau + \frac{(\gamma-1)}{2}x} N(d_2), \quad d_2 = \frac{x + \tau(\gamma-1)}{\sqrt{2\tau}} \quad (2.25)$$

ya que es la misma integral que I^+ con $(\gamma-1)$ en lugar de $(\gamma+1)$.

Deshaciendo los cambios que hemos realizado, tenemos que:

$$\begin{aligned} v(x, \tau) &= e^{\frac{-1}{2}(\gamma-1)x - \frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau} u(x, \tau) \Rightarrow \\ v(x, \tau) &= e^{\frac{-1}{2}(\gamma-1)x - \frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau} \left(e^{\frac{(\gamma+1)}{2}x + \frac{(\gamma+1)^2}{4}\tau} N(d_1) - e^{\frac{(\gamma-1)}{2}x + \frac{(\gamma-1)^2}{4}\tau} N(d_2) \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Simplificando la ecuación:

$$v(x, \tau) = e^x N(d_1) - e^{-\gamma\tau} N(d_2) \quad (2.27)$$

que, sustituyendo por el primer cambio $S = Ke^x$, $\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t)$ y $f = Kv(x, \tau)$, y sabiendo que denotamos $\gamma = \frac{r}{\sigma^2/2}$,

$$\begin{aligned} f(S, t) &= Kv(x, \tau) = Ke^x N(d_1) - Ke^{-\gamma\tau} N(d_2) \Rightarrow \\ f(S, t) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Como

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{x + \tau(\gamma + 1)}{\sqrt{2\tau}} = \frac{\ln(S/K) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\left(\frac{r}{\sigma^2/2} + 1\right)}{2\sqrt{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} \\
 &= \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\
 d_2 &= \frac{2x + 2\tau(\gamma - 1)}{2\sqrt{2\tau}} = \frac{\ln(S/K) + 2\frac{\sigma^2}{2}(T-t)\left(\frac{r}{\sigma^2/2} - 1\right)}{2\sqrt{2\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}} \\
 &= \frac{\ln(S/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de la ecuación de Black-Scholes (2.11) viene dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} f(S, t) = S N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} \\ d_2 = \frac{\ln(S/K) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

Resolución numérica de la ecuación de Black-Scholes

En este capítulo abordaremos la resolución numérica de la ecuación de Black-Scholes, estudiada en el capítulo anterior. Para ello, aplicaremos el conocido método de Crank-Nicolson, visto como un caso particular del método de líneas.

Este método consiste en aproximar, en primer lugar, las derivadas respecto a la variable S , que en este ámbito se suele llamar variable espacial, usando diferencias finitas centrales de segundo orden sobre una malla espacial y luego aplicar la regla trapezoidal para resolver el problema de valor inicial resultante, respecto de la variable temporal t . En este caso, además, aplicaremos dos tipos de mallas espaciales, una uniforme y la otra no uniforme, propuesta en [3], analizando y comparando los resultados.

Nos guiaremos principalmente del libro [3, Capítulo 3, 4 y 5].

3.1. Preparación de la ecuación

Queremos aproximar numéricamente la solución del problema en ecuaciones en derivadas parciales de Black-Scholes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0, \quad S \in [0, S_{max}], \quad t \in [0, T] \\ f(0, t) = 0 \\ f(S, t) \sim S, \quad S \rightarrow \infty \\ f(S, T) = \max\{S - K, 0\} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Para aplicar el método de líneas a esta ecuación es más natural avanzar midiendo el tiempo "hacia adelante". Por ello, consideramos el cambio de variables

$u(S, t) = f(S, T - t)$. Así, $u(S, t)$ representa el precio justo de la opción cuando el precio del subyacente es S y faltan t días para el vencimiento T . Por tanto, el momento en que se ejecuta la opción es el instante $t = 0$ y el tiempo en que se firma el contrato es $t = T$.

Entonces, tenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(S, t) = -\frac{\partial f}{\partial t}(S, T - t),$$

$$\frac{\partial u}{\partial S}(S, t) = \frac{\partial f}{\partial S}(S, T - t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial S^2}(S, T - t)$$

y la ecuación de Black-Scholes resulta

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + rS\frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} = ru \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = rS\frac{\partial u}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2} - ru \quad (3.2)$$

Con este cambio, la condición final $f(S, T) = \max\{S - K, 0\}$ se transforma en la condición inicial

$$u(S, 0) = \max\{S - K, 0\} \quad (3.3)$$

y la condición de contorno cuando $S = 0$ sigue siendo de forma natural la condición de Dirichlet homogénea

$$u(0, t) = 0, \forall t \in [0, T] \quad (3.4)$$

Sin embargo, la condición $u(S, t) \sim S$ cuando $S \rightarrow \infty$ no es aplicable cuando intentamos aproximar la solución de la ecuación numéricamente. Por ello, hay que fijar un dominio finito $S \in [0, S_{max}]$ con S_{max} suficientemente grande y una condición de contorno en dicho punto $S = S_{max}$. En [3] se recomienda imponer la condición de frontera de Dirichlet

$$u(S_{max}, t) = S_{max} - Ke^{-rt} \quad (3.5)$$

es decir, el beneficio tras aplicar el descuento e^{-rt} , donde $S_{max} = 3K$.

Resumiendo, vamos a aproximar numéricamente la solución del problema en ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + rS \frac{\partial u}{\partial S} - ru, \quad S \in [0, S_{max}], \quad t \in [0, T] \\ u(0, t) = \text{máx}\{S - K, 0\}, \quad S \in [0, S_{max}] \\ u(0, t) = 0 \\ u(t, S_{max}) = S_{max} - Ke^{-rt} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

usando el **método de Crank-Nicolson**. Este es un método bien conocido para la resolución de problemas parabólicos como (3.6). Aunque se puede introducir como una discretización directa en ambas variables S y t , en esta memoria lo veremos como un caso particular del Método de Líneas.

3.2. Integración sobre malla uniforme

El Método de Líneas más que un método concreto es un procedimiento para discretizar el problema (3.6).

En primer lugar, dado un entero positivo $m \geq 1$, consideramos la malla uniforme

$$S_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, m+1, \quad h = \frac{S_{max}}{m+1} \quad (3.7)$$

Para aproximar la derivada primera respecto de S sobre cada punto interior de la malla, aplicaremos la fórmula de diferencias finitas de segundo orden para la derivada primera, cuya fórmula viene dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial S}(S_i, t) \simeq \frac{u(S_i + h, t) - u(S_i - h, t)}{2h}, \quad h \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

Si aproximamos $u(S_i, t) \simeq u_i(t)$, se tiene

$$u_S(S_i, t) \simeq \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta las condiciones de contorno, $u_0 = 0$, $u_{m+1} = S_{max} - Ke^{-rt}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_S(S_1, t) = \frac{u_2 - u_0}{2h} = \frac{u_2}{2h} \\ u_S(S_2, t) = \frac{u_3 - u_1}{2h} \\ u_S(S_3, t) = \frac{u_4 - u_2}{2h} \\ \vdots \\ u_S(S_m, t) = \frac{u_{m+1} - u_{m-1}}{2h} = \frac{S_{max} - Ke^{-rt}}{2h} - \frac{u_{m-1}}{2h} \end{array} \right.$$

Para aproximar u_{SS} , aplicaremos la fórmula de diferencias finitas de segundo orden para la segunda derivada, dada por:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S_i, t) \simeq \frac{u(S_i + h, t) - 2u(S_i, t) + u(S_i - h, t)}{h^2}, \quad h \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

Por tanto,

$$u_{SS}(S_i, t) \simeq \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (3.11)$$

Igual que con la derivada primera, incluyendo las condiciones de contorno,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{SS}(S_1, t) = \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} = \frac{u_2 - 2u_1}{h^2} \\ u_{SS}(S_2, t) = \frac{u_3 - 2u_2 + u_1}{h^2} \\ u_{SS}(S_3, t) = \frac{u_4 - 2u_3 + u_2}{h^2} \\ \vdots \\ u_{SS}(S_m, t) = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2} = \frac{-2u_m + u_{m-1}}{h^2} + \frac{S_{max} - Ke^{-rt}}{h^2} \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se buscan las aproximaciones $\{u_i(t)\}_{i=1}^m$ que verifican:

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_1(t) = \frac{\sigma^2 S_1^2}{2} \frac{u_2 - 2u_1}{h^2} + rS_1 \frac{u_2}{2h} - ru_1 \\ u'_i(t) = \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + rS_i \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - ru_i, \quad 2 \leq i \leq m-1 \\ u'_m(t) = \frac{\sigma^2 S_m^2}{2} \frac{-2u_m + u_{m-1}}{h^2} + rS_m \frac{-u_{m-1}}{2h} - ru_m + \left(\frac{\sigma^2 S_m^2}{2h^2} + \frac{rS_m}{2h} \right) (S_{max} - e^{-rt}K) \end{array} \right.$$

Matricialmente, si denotamos

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

este sistema de ecuaciones se expresa:

$$U' = (A_1 + A_2 - rI)U + B(t) \quad (3.13)$$

donde A_1 y A_2 son

$$A_1 = \frac{\sigma^2}{2h^2} \begin{pmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_3^2 & -2S_3^2 & S_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_m^2 & -2S_m^2 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

$$A_2 = \frac{r}{2h} \begin{pmatrix} 0 & S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -S_2 & 0 & S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -S_3 & 0 & S_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -S_m & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

e I es la matriz identidad de dimensión m . Además,

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad z_1 = \left(\frac{\sigma^2 S_m^2}{2h^2} + \frac{r S_m}{2h} \right) (S_{max} - e^{-rt} K) \quad (3.16)$$

Finalmente, definiendo $U_0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_m))^T$, $U_0(S) = \max\{S - K, 0\}$, resolveremos el problema de valor inicial de dimensión m ,

$$\begin{cases} U' = AU + B(t), t \in [0, T] \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

siendo $A = A_1 + A_2 - rI$, con la regla trapezoidal.

La **regla trapezoidal** es un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales. Dada una aproximación U_n a la solución en el instante t_n , la regla trapezoidal de una aproximación a la solución U_{n+1} en un instante $t_{n+1} = t_n + \tau$, $\tau > 0$ mediante la fórmula:

$$U_{n+1} = U_n + \frac{\tau}{2} (f(U_n, t_n) + f(U_{n+1}, t_{n+1})), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

que arranca con el vector inicial U_0 .

Aplicando esta regla a nuestro problema (3.17), con N pasos iguales de tamaño $\tau = T/N$, $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$,

$$\begin{aligned} U_{n+1} - \frac{\tau}{2}A U_{n+1} &= U_n + \frac{\tau}{2}A U_n + \frac{\tau}{2}B(t_n) + \frac{\tau}{2}B(t_{n+1}) \Rightarrow \\ \left(I - \frac{\tau}{2}A\right) U_{n+1} &= \left(I + \frac{\tau}{2}A\right) U_n + \frac{\tau}{2}(B(t_n) + B(t_{n+1})) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Por tanto, la aproximación U_{n+1} se obtiene resolviendo la ecuación:

$$\left(I - \frac{\tau}{2}A\right) U_{n+1} = \left(I + \frac{\tau}{2}A\right) U_n + \frac{\tau}{2}(B(t_n) + B(t_{n+1})), \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (3.20)$$

Este sistema ha sido resuelto mediante la factorización LU de *Matlab*. La factorización LU descompone la matriz cuadrada A en el producto de dos matrices, L y U , es decir, $A = LU$, con L matriz triangular inferior y U matriz triangular superior.

El código de *Matlab* se puede ver en la sección 3.5.1 de esta malla uniforme. Al usar un tamaño de paso τ constante, en el código se hace la factorización sólo una vez, lo que proporciona una forma eficiente de resolver el sistema.

En primer lugar, analizaremos gráficamente los resultados de la resolución numérica sobre la malla uniforme, que se recogen en la 3.1. En las dos gráficas se representan los errores:

$$\varepsilon_m = |U_{N,i} - u(S_i, T)|, \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (3.21)$$

donde $U_{N,i}$ es la solución numérica dada por el método y $u(S_i, T)$ es la solución analítica dada en (2.29) del capítulo anterior. Para ambos experimentos hemos usado $N = 1000$ pasos temporales para asegurarnos de que el error temporal (el cometido por la regla trapezoidal) sea despreciable frente al error espacial (el cometido por la discretización con diferencias finitas). Además, en nuestro caso,

$$r = 0.05, \quad \sigma = 0.25, \quad T = 1, \quad K = 100 \quad (3.22)$$

Considerando una malla uniforme (equiespaciada) $m = 49$. La figura de la izquierda muestra el error espacial ($\varepsilon_{49}(S_i)$) frente al precio (S_i). Podemos ver que el error es pequeño en todo el dominio $[0, 300]$ y siendo mayor cerca del precio *strike*.

Ahora, consideramos otra malla uniforme pero con $m = 50$, manteniendo $n = 100$ pasos. La figura de la derecha dibuja el error espacial para $m = 50$. Podría esperarse un error similar o menor, pues solamente aumentamos un nodo de la malla anterior, pero se puede observar cómo el error es mucho mayor que del precio *strike*.

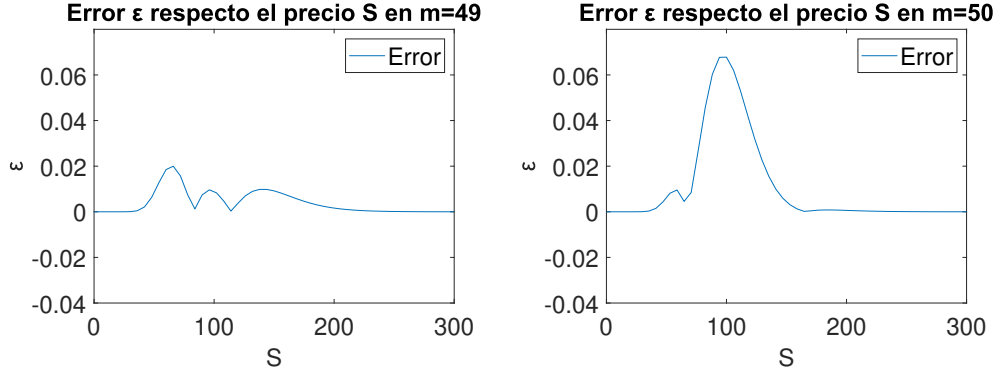


Figura 3.1: Error espacial utilizando malla uniforme

3.3. Integración sobre una malla no uniforme

Para evitar los problemas que aparecen cuando se usan mallas espaciales uniformes cerca del punto de no-derivabilidad $S = K$, se puede aplicar la malla no uniforme propuesta en [3].

$$S_i = \varphi(\xi_i), \quad \xi_i = \xi_{min} + i\Delta\xi, \quad \Delta\xi = \frac{\xi_{max} - \xi_{min}}{m} \quad (3.23)$$

donde

$$h_i = S_i - S_{i-1}, \quad \varphi(\xi) = K + L \sinh(\xi),$$

$$\xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{max}, \quad L = K/3 > 0$$

En este caso hay que aplicar las fórmulas de diferencias finitas aplicadas a una malla no uniforme. Para la derivada primera, la fórmula de las diferencias centrales de segundo orden es

$$\frac{\partial u}{\partial S}(S_i, t) \simeq \alpha_{i,-1} u(S_{i-1}, t) + \alpha_{i,0} u(S_i, t) + \alpha_{i,1} u(S_{i+1}, t) \quad (3.24)$$

siendo

$$\alpha_{i,-1} = \frac{-h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad \alpha_{i,0} = \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i h_{i+1}}, \quad \alpha_{i,1} = \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \quad (3.25)$$

Luego, teniendo en cuenta las condiciones de contorno,

$$\begin{cases} u_S(S_1, t) = \alpha_{1,0}u_1 + \alpha_{1,1}u_2 \\ u_S(S_2, t) = \alpha_{2,-1}u_1 + \alpha_{2,0}u_2 + \alpha_{2,1}u_3 \\ \vdots \\ u_S(S_m, t) = \alpha_{m,-1}u_{m-1} + \alpha_{m,0}u_m + \alpha_{m,1}(S_{max} - Ke^{-rt}) \end{cases}$$

Ahora para aproximar u_{SS} aplicamos las diferencias centrales de segundo orden sobre una malla no uniforme:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}(S_i, t) \simeq \gamma_{i,-1} f(S_{i-1}) + \gamma_{i,0} f(S_i) + \gamma_{i,1} f(S_{i+1}) \quad (3.26)$$

con

$$\gamma_{i,-1} = \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad \gamma_{i,0} = \frac{-2}{h_i h_{i+1}}, \quad \gamma_{i,1} = \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} \quad (3.27)$$

por lo que

$$\begin{cases} u_{SS}(S_1, t) = \gamma_{1,0}u_1 + \gamma_{1,1}u_2 \\ u_{SS}(S_2, t) = \gamma_{2,-1}u_1 + \gamma_{2,0}u_2 + \gamma_{2,1}u_3 \\ \vdots \\ u_{SS}(S_m, t) = \gamma_{m,-1}u_{m-1} + \gamma_{m,0}u_m + \gamma_{m,1}(S_{max} - Ke^{-rt}) \end{cases}$$

En conjunto, se buscan las aproximaciones $\{u_i(t)\}_{i=1}^m$ que verifican:

$$\begin{cases} u'_1(t) = \frac{\sigma^2 S_1^2}{2} (\gamma_{1,0}u_1 + \gamma_{1,1}u_2) + rS_1(\alpha_{1,0}u_1 + \alpha_{1,1}u_2) - ru_1 \\ u'_i(t) = \frac{\sigma^2 S_i^2}{2} (\gamma_{i,-1}u_{i-1} + \gamma_{i,0}u_i + \gamma_{i,1}u_{i+1}) + rS_i(\alpha_{i,-1}u_{i-1} + \alpha_{i,0}u_i \\ \quad + \alpha_{i,1}u_{i+1}) - ru_i, \quad 2 \leq i \leq m-1 \\ u'_m(t) = \frac{\sigma^2 S_m^2}{2} (\gamma_{m,-1}u_{m-1} + \gamma_{m,0}u_m) + rS_m(\alpha_{m,-1}u_{m-1} + \alpha_{m,0}u_m) - ru_m \\ \quad + (S_{max} - Ke^{-rt}) \left(\frac{1}{2} \sigma^2 S_m^2 \gamma_{m+1,1} + rS_m \alpha_{m+1,1} \right) \end{cases}$$

Al igual que en la sección anterior, expresamos este sistema como:

$$U' = (A_1 + A_2 - rI)U + B(t) \quad (3.28)$$

donde

$$A_1 = \frac{\sigma^2}{2} \begin{pmatrix} \gamma_{1,0}S_1^2 & \gamma_{1,1}S_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_{2,-1}S_2^2 & \gamma_{2,0}S_2^2 & \gamma_{2,1}S_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_{3,-1}S_3^2 & \gamma_{3,0}S_3^2 & \gamma_{3,1}S_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{m,-1}S_m^2 & \gamma_{m,0}S_m^2 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$A_2 = r \begin{pmatrix} \alpha_{1,0}S_1 & \alpha_{1,1}S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{2,-1}S_2 & \alpha_{2,0}S_2 & \alpha_{2,1}S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{3,-1}S_3 & \alpha_{3,0}S_3 & \alpha_{3,1}S_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{m,-1}S_m & \alpha_{m,0}S_m \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z_2 = \left(\frac{\sigma^2}{2} S_m^2 \gamma_{m,1} + r S_m \alpha_{m,1} \right) (S_{max} - K e^{-rt}) \quad (3.31)$$

Finalmente, con $u_0 = (u_0(x_1), \dots, u_0(x_m))^T$, resolveremos el problema de valor inicial

$$\begin{cases} U' = AU + B(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

siendo $A = A_1 + A_2 - rI$, con la regla trapezoidal, como explicamos en la sección anterior, con N pasos temporales equiespaciados de tamaño $\tau = T/N$ $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \dots, N$,

$$\left(I - \frac{\tau}{2} A \right) U_{n+1} = \left(I + \frac{\tau}{2} A \right) U_n + \frac{\tau}{2} (B(t_n) + B(t_{n+1})), \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (3.33)$$

Podemos ver el código de esta malla no uniforme en la sección 3.5.2.

En la Figura 3.2 podemos ver unas gráficas similares a las de la Figura 3.1, pero usando la malla no uniforme (3.23). Igual que antes, se integra el método con $N = 1000$ pasos temporales y con

$$r = 0.05, \quad \sigma = 0.25, \quad T = 1, \quad K = 100 \quad (3.34)$$

En comparación con las gráficas de la malla uniforme 3.1, claramente podemos observar una mayor precisión de la malla no uniforme.

Además, vemos que aumentando m , se obtiene una mayor precisión lo que refleja que el método converge apropiadamente.

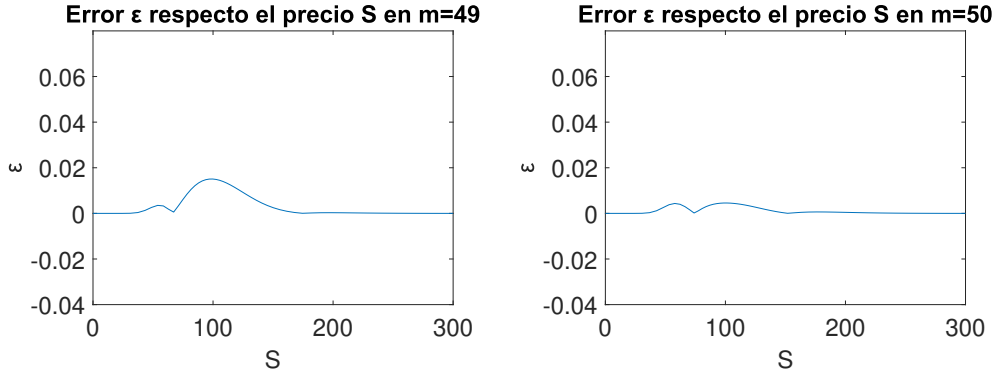


Figura 3.2: Error espacial utilizando una malla no uniforme

En la Figura podemos ver la aproximación numérica a la solución del problema de Black-Scholes (3.1) con una malla de $m = 500$ nodos y $n = 500$ pasos temporales.

3.4. Comparación de las mallas

Para observar con más claridad la diferencia entre la resolución con una malla uniforme y con no uniforme, en la Tabla 3.1 comparamos los errores obtenidos entre la solución exacta (2.28) y la solución numérica sobre la malla uniforme (3.17) y la malla no uniforme (3.32). En todos los casos se han integrado con $N = 1000$ pasos temporales, por lo que la tabla principalmente refleja los errores debido a la discretización espacial ($\varepsilon_m = \max\{\varepsilon_m(S_i)\}$, $0 \leq i \leq m$).

m	ε_m (Malla uniforme)	ε_m (Malla no uniforme)
50	6.78×10^{-2}	4.50×10^{-3}
100	4.80×10^{-3}	1.30×10^{-3}
200	4.40×10^{-3}	6.40×10^{-4}
400	3.03×10^{-4}	1.74×10^{-4}
800	2.75×10^{-4}	6.44×10^{-5}
1600	1.89×10^{-5}	1.76×10^{-5}

Tabla 3.1: Errores espaciales entre la solución analítica y la solución numérica

Como podemos observar en la Tabla 3.1, y como hemos comprobado gráficamente en la sección anterior (3.3), las aproximaciones obtenidas sobre la malla no uniforme son más precisas que las obtenidas por la malla uniforme, aportando una mayor eficiencia y fiabilidad a los resultados obtenidos.

Para finalizar el capítulo, en la Figura 3.3 hemos representando la solución numérica obtenida con $m = 500$ nodos y $N = 500$ pasos temporales. En ella se puede observar como el valor de las opciones varía casi proporcionalmente con los precios S a partir de cierto precio $S > K$. En cambio, alrededor de $S < K$, $u(S, t) > 0$ aunque $u(S, 0) = 0$.

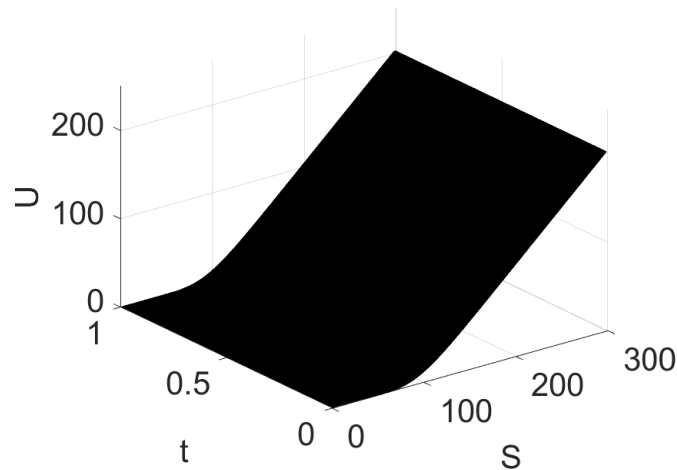


Figura 3.3: Aproximación numérica a la solución de (3.32) en una malla no uniforme

3.5. Programa en Matlab

3.5.1. Malla uniforme

En el siguiente código, utilizaremos el método de Crank-Nicolson para resolver el problema (3.6) sobre una malla uniforme (3.7).

```
function mallauniforme

%%%%%% DATOS
K = 100;
Smx = 3*K;
```

```

tf=1;
m=50; % dimension
r=0.05;
sigma=0.25;
n=1000; % numero de pasos regla
tau=tf/n;

% MALLA UNIFORME
h=Smx/(m+1);
stotal = h*(0:m+1)'; % dimension m+2
s = stotal(2:m+1); % dimension m

% CONSTRUCCION MATRICES DE VALOR INICIAL
ctea1=(sigma^2/(2*h^2));
ctea2 = r/(2*h);
s2=s.^2;
for i=1:m
    diag1 = -2*ctea1*s2; % diagonal principal A1
    l1 = [ctea1*s2(2:m);0]; % diagonal inferior A1
    up1 = [0;ctea1*s2(1:m-1)]; % diagonal superior A1
    l2=[-ctea2*s(2:m);0]; % diagonal inferior A2
    up2=[0;ctea2*s(1:m-1)]; % diagonal superior A2
end

A1 = spdiags([l1,diag1,up1],[-1:1,m,m]);
A2 = spdiags([l2,up2],[-1 1],m,m);
rI=r*speye(m);
M=A1+A2-rI; % U'=MU+B

u0=max(s-K,0); % vector u inicial
U= u0; % almacenar los valores en cada paso de tiempo
I = speye(m);
t=0;

% REGLA TRAPEZOIDAL
A = I-tau*M/2;
[L, Ulu] = lu(A);
for j = 1:n
    BE = be(t) + be(t+tau);
    Un = Ulu\ (L\ (U+tau*M*U/2 + tau*BE/2));
    t = t+tau;
    U = Un;
end

```

```

end

% CREACION DE GRAFICOS Y FICHEROS
Uttotal=[0;U;Smx-K*exp(-r*tf)];
Uexacta=[0;uex(tf);Smx-K*exp(-r*tf)];
error=abs(Uexacta-Utotal);
mx = max(error);

figure;
plot(stotal, error), xlabel('S'), ylabel('e'),
title('Error e respecto el precio S en m=50');
legend("Error");
ylim([-0.04,0.08]);
fichero = fopen('fichero','w');
fprintf(fichero, 'Partes de la malla: %i \n', m);
fprintf(fichero, 'Pasos regla trapezoidal: %i \n', n);
fprintf(fichero, 'Error maximo: %f',mx);

% SUBFUNCIONES B Y EXACTA

function B=be(t)

    B=zeros(m,1);
    B(m)=(ctea1*s(m).^2+ ctea2*s(m))*(Smx -K*exp(-r*t));

end

function f=uex(t)

    d1=(log(s/K)+(r+sigma^2/2)*t)/(sigma*sqrt(t));
    d2=d1-sigma*sqrt(t);
    n1=0.5+erf(d1/sqrt(2))/2;
    n2=0.5+erf(d2/sqrt(2))/2;
    f=s.*n1-K*exp(-r*t).*n2;

end

end

```

3.5.2. Malla no uniforme

En este código implementaremos el método de Crank-Nicolson para resolver el problema (3.6) sobre una malla espacial no uniforme (3.23).

```
function mallanouniforme

%%%%%%%%%% DATOS
K = 100;
Smx = 3*K;
tf=1;
m=50; % dimension
r=0.05;
sigma=0.25;
n=1000; % numero de pasos regla

% MALLA NO UNIFORME
L=K/3;
ximin = asinh(-K/L);
ximax = asinh((Smx-K)/L);
hxi = (ximax-ximin)/(m+1);
xitotal = ximin+hxi*(0:m+1)';
stotal = K+L*sinh(xitotal); % dimension m+2
s = stotal(2:m+1);
hs=diff(stotal); % dimension m+1

% CONSTRUCCION MATRICES DE VALOR INICIAL
cteal=(sigma^2)/2;
s2=s.^2;

b0 = -2./(hs(1:m).*hs(2:m+1)); % vector diag princ A1
b1 = 2./(hs(1:m).*(hs(1:m)+hs(2:m+1))); % vector diag inf A1
b2 = 2./(hs(2:m+1).*(hs(1:m)+hs(2:m+1))); % vector diag sup A1
c0 = (hs(2:m+1)-hs(1:m))./(hs(1:m).*hs(2:m+1)); % vector diag princ A2
c1 = (-hs(2:m+1))./(hs(1:m).*(hs(1:m)+hs(2:m+1))); % vector diag inf A2
c2 = hs(1:m)./(hs(2:m+1).*(hs(1:m)+hs(2:m+1))); % vector diag sup A2

diag1 = cteal*s2.*b0; % diagonal principal A1
l1 = [cteal*s2(2:m).*b1(2:m);0]; % diagonal inferior A1
up1 = [0;cteal*s2(1:m-1).*b2(1:m-1)]; % diagonal superior A1
diag2 = r*s.*c0; % diagonal principal A2
```

```

l2 = [r*s(2:m).*c1(2:m);0]; % diagonal inferior A2
up2 = [0;r*s(1:m-1).*c2(1:m-1)]; %diagonal superior A2

A1 = spdiags([l1,diag1,up1],-1:1,m,m);
A2 = spdiags([l2,diag2, up2],-1:1,m,m);
rI=r*speye(m);
M=A1+A2-rI; % U'=MU+B

tau=tf/n;
u0=max(s-K,0);

U= u0; % almacenar los valores en cada paso de tiempo
I = speye(m);
t=0;

% REGLA TRAPEZOIDAL
A = I-tau*M/2;
[L, Ulu] = lu(A);
for j = 1:n
    BE = be(t) + be(t+tau);
    Un = Ulu\(L\(U+tau*M*U/2 + tau*BE/2));
    t = t+tau;
    U = Un;
end

% CREACION DE GRAFICAS Y FICHEROS
Uttotal=[0;U;Smx-K*exp(-r*tf)];
Uexacta=[0;uex(tf);Smx-K*exp(-r*tf)] ;
error=abs(Uexacta-Uttotal);
mx = max(error);

figure;

plot(stotal,error), xlabel('S'), ylabel('e'),
title('Error e respecto el precio S en $m=50$');
xlim([0,300]);
ylim([-0.04,0.08]);
%legend("Error");

Z = repmat(U',m,1); % valores de U en Z para graficar 3D
t_values = linspace(0, tf, size(Z, 2)); % vector tiempo para el eje Y

```

```

[X,Y] = meshgrid(s,t_values); % generar malla X,Y

figure;
surf(X,Y,Z), xlabel('S'), ylabel('t'), zlabel('U');

fichero2 = fopen('fichero2','w');
fprintf(fichero2, 'Partes de la malla: %i \n', m);
fprintf(fichero2, 'Pasos regla trapezoidal: %i \n', n);
fprintf(fichero2, 'Error maximo: %f',mx);

% SUBFUNCIONES B Y EXACTA
function B=be(t)

    B=zeros(m,1);
    B(m)=(b2(m)*cte1*s(m).^2+ c2(m)*r*s(m))*(Smx -K*exp(-r*t));

end

function f=uex(t)

    d1=(log(s/K)+(r+sigma^2/2)*t)/(sigma*sqrt(t));
    d2=d1-sigma*sqrt(t);
    n1=0.5+erf(d1/sqrt(2))/2;
    n2=0.5+erf(d2/sqrt(2))/2;
    f=s.*n1-K*exp(-r*t).*n2;

end

end

```

A

Apéndice

A.1. Definiciones

Definición A.1.1 Un **espacio muestral** es un conjunto de los posibles resultados de una situación o experimento aleatorio, lo denotaremos como Ω .

Definición A.1.2 Un **suceso** es una afirmación sobre el resultado de una experiencia aleatoria que puede ser verificada o negada tras conocer el resultado.

Definición A.1.3 Dado un conjunto Ω diremos que una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ es un **álgebra** si

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\bar{A} \in \mathcal{A}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.

y diremos que es un **σ -álgebra** si $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_i A_i \in \mathcal{A}$.

Definición A.1.4 La **σ -álgebra de Borel**, que denotaremos β , es la mínima σ -álgebra sobre el conjunto de los reales que contiene a todos los abiertos de la topología usual de \mathbb{R} .

Definición A.1.5 Dado un conjunto Ω y una σ -álgebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, con $\mathcal{P}(\Omega)$ una familia de sucesos, una función $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ es una **medida de probabilidad** si

1. Para todo $A \in \mathcal{A}$, $P(A) \geq 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Dada una sucesión A_1, A_2, \dots de sucesos de \mathcal{A} incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$), entonces $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Definición A.1.6 Diremos que (Ω, \mathcal{A}, P) es un **espacio de probabilidad**.

Definición A.1.7 Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) , una **variable aleatoria** X sobre él es una función $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, w \rightarrow X(w)$ de manera que la imagen inversa de todo boreliano pertenece a \mathcal{A} , esto es, $\forall B \in \beta, X^{-1}(B) = \{w \in \Omega / X(w) \in B\} \in \mathcal{A}$

Definición A.1.8 Dado un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{A}, P) y una variable aleatoria X , la **función de distribución**, F_X , viene dada por $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{w \in \Omega / X(w) \leq x\})$, cuando no haya confusión la denotaremos F .

Definición A.1.9 Una variable aleatoria X con función de distribución $F(x)$ se denomina continua si existe una función no negativa $f(x)$, denominada **función de densidad**, de manera que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$.

Definición A.1.10 Una variable aleatoria sigue una **distribución lognormal** si el logaritmo de la variable se distribuye normalmente.

Las definiciones de esta sección son conceptos básicos estudiados en la asignatura *Probabilidades* del grado, [5], [6].

A.2. Distribución normal

Definición A.2.1 La función de distribución de la distribución normal como:

$$P(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}} ds, x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

siendo μ la media, σ la desviación típica y σ^2 la varianza.

Denotaremos la distribución normal como $N(\mu, \sigma)$ o $\phi(\mu, \sigma^2)$.

Proposición A.2.1 Consideramos X variable aleatoria. Si $X \sim N(\mu, \sigma)$, entonces si $aX + b \sim N(a\mu + b, a\sigma)$ (o $\phi(a\mu + b, a^2\sigma^2)$).

Demostración:

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ (o $\phi(\mu, \sigma^2)$) e $Y = aX + b$.

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(aX + b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Si realizamos el cambio, $u = \frac{s-b}{a}$, $du = \frac{1}{a}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} u - \mu &= \frac{s-b}{a} - \mu \Rightarrow \frac{s-b-a\mu}{a} = \frac{s-(a\mu+b)}{a} \\ \Rightarrow \frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2} &= \frac{(s-(a\mu+b))^2}{2a^2\sigma^2} \end{aligned}$$

Por lo que, siguiendo de (A.2),

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(s - (a\mu + b))^2}{2a^2\sigma^2}} \frac{ds}{a} \Rightarrow P(Y \leq y) = \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(s - (a\mu + b))^2}{2a^2\sigma^2}} ds$$

$$\Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a\sigma)$$

■

Definición A.2.2 Dada una variable aleatoria con distribución normal estándar, la **función de distribución normal estándar** nos permite calcular la probabilidad de que la variable tome un valor menor o igual a un valor dado. Se define como:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds \quad (\text{A.3})$$

En esta sección, repasamos conceptos vistos en la asignatura *Probabilidades* del grado, [5], [6].

A.3. Distribución χ^2 de Pearson

Definición A.3.1 Si X_1, \dots, X_n son n variables aleatorias independientes que se distribuyen con $N(0, 1)$, entonces la variable X_1^2, \dots, X_n^2 se distribuye como una chi-cuadrado χ^2 de parámetro n . Al parámetro se le denomina grados de libertad [6, Capítulo 7].

Se representa mediante la función de probabilidad, y su forma varía dependiendo del número de grados de libertad. En nuestro caso, consideramos grado de libertad 1.

Podemos demostrar fácilmente con el uso de la función generatriz y de la relación de la χ^2 con la distribución Gamma que la esperanza de una distribución χ^2 de 1 grado de libertad vale 1 y su varianza 2.

Si $X \sim \phi(0, 1)$, teniendo en cuenta $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, podemos ver sencillamente que:

$$\begin{cases} E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = 0 \\ Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = 1 \end{cases}$$

Con esto, definimos $Y = \chi^2 \sim \chi_1^2$, que sigue una distribución χ^2 de Pearson con 1 grado de libertad, con función de distribución:

$$\tilde{f}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{y}}, & y > 0 \\ 0 & , y \leq 0 \end{cases}$$

Por lo que estudiamos la esperanza:

$$E[y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \tilde{f}(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-\frac{y}{2}} dy = \quad (\text{A.4})$$

Hacemos un cambio de variable $y = x^2$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} 2x dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{A.5})$$

Tenemos que $\sigma^2(X) = 1$, por lo que siguiendo (A.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Como la función es par,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = E[y] \Rightarrow E[\chi^2] = 1 \end{aligned}$$

Y ahora, veremos la varianza:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\chi^2) &= \sigma^2(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} (y - 1)^2 \tilde{f}(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \tilde{f}(y) dy - 2 \int_{-\infty}^{\infty} y \tilde{f}(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(y) dy \Rightarrow \end{aligned}$$

Como $E[Y] = 1$ y la tercera integral es igual a 1,

$$\text{Var}(\chi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \tilde{f}(y) dy - 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{y}{2}} dy - 1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} 2x dx - 1$$

Hacemos un cambio de variable $y = x^2$

$$= -1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{A.6})$$

Como la función es par

$$= -1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (\text{A.7})$$

Hacemos otro cambio de variable $u = x^3$,

$$\begin{aligned} &= -1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left([-e^{-\frac{x^2}{2}} x^3]_{-\infty}^{\infty} + 3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) \\ &= -1 + 3 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right) = -1 + 3 = 2 \end{aligned}$$

Esto es por $-e^{-\infty} - e^{-\infty} = 0$ y $E[\chi^2] = 1$.

Concluimos con $E[\chi^2] = 1$ y $Var(\chi^2) = 2$

A.4. Ecuación del calor

Definición A.4.1 *La solución de la **ecuación del calor** en toda la recta real:*

$$\begin{cases} u_{\tau} = u_{xx} & , -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

es

$$u(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4\tau} g(y) dy \quad (\text{A.8})$$

La demostración de la solución exacta para el problema inicial (ecuación del calor) ha sido detallada en la asignatura de *Ecuaciones en Derivadas Parciales* del grado [4, Capítulo 5].

Bibliografía

- [1] Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. *The mathematics of financial derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press. 1995.
- [2] Hull, J. C. *Options, futures, and Other Derivatives*. Pearson. 9th edition. 2018.
- [3] In't Hout, K. *Numerical Partial Differential Equations in Finance Explained: An Introduction To Computational Finance*. Springer. 2017.
- [4] Sabina de Lis, J. C. *Ecuaciones en Derivadas Parciales. Curso de Introducción*. Departamento de Análisis Matemático Universidad de La Laguna. 2014.
- [5] Ayala, G., Montes F. *Probabilidad básica*. Universidad de Valencia. 2020.
- [6] Martín Pliego, F. J., Ruiz-Maya, L. *Fundamentos de probabilidad*. Editorial AC. 1998.
- [7] Cheney, W., Kincaid, D. *Numerical mathematics and computing*. Thomson Brooks/Cole. 2008.
- [8] Butcher, J., *Numerical methods for ordinary differential equations*, Wiley, 2008.
- [9] *MATLAB* <https://es.mathworks.com/>

Lista de símbolos y abreviaciones

S	Precio del activo
K	precio de ejecución (<i>strike price</i>)
M	Valor descontado
μ	Retorno esperado
σ	Volatilidad
r	Tasa de interés libre de riesgo
Π	Portfolio
N	Función de distribución acumulada normal estándar
I	Matriz identidad
E	Esperanza
Var	Varianza

Runge-Kutta methods for solving ordinary differential equations and applications

Ainhoa Muño Fariña

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101279794@ull.edu.es

Abstract

The main objective of this report is to study the Black-Scholes equation and its solution. The project consists of three chapters. In the first chapter, we introduce the financial concepts, as well as basic tools, that will be worked throughout the report. In the second chapter, we define the concept of riskless portfolio and we will deduce the Black-Scholes equation, which we'll solve analytically. Finally, in the third chapter, the equation is solved numerically, using the Crank-Nicolson method.

1. Financial fundamentals

A CALL OPTION is a contract where the buyer has the right, but not the obligation, to buy certain assets (**underlying assets**) for a prescribed amount (**strike price** K) within a maturity period (T).

On the other hand, the other part of the contract has the obligation to sell the assets at the established price on the expiration date and must be compensated for assuming the obligation.

Asset prices follow stochastic processes. The most common model to describe the price S of an asset is

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

where μ is called drift rate and σ volatility.

In this chapter, the following lemma, which is very important in the field of stochastic processes, is proved.

ITÔ'S LEMMA. Suppose a variable follows an Itô process

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz \quad (2)$$

, where dz follows a Wiener process and a, b are functions of x and t . Any sufficiently differentiable function of two variables (x, t) follows the process

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + a \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial G}{\partial x} dz \quad (3)$$

where dz is the same Wiener process as in Itô process.

This lemma is fundamental to obtain the Black-Scholes equation, which we study in the next chapter.

2. The Black-Scholes model

The Black-Scholes model is an equation used to calculate the price of financial derivatives.

Let $f(S, t)$ be the price of a call option, that we assume differentiable. The Black-Scholes equation tries to value this price. In order to do that, a risk-free portfolio is created such that its price is

$$\Pi = -f(S, t) + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (4)$$

We apply the risk-free portfolio (4) to remove uncertainty of the price of the underlying that follows the model (1) and the Itô's lemma (3). We derive the differential problem with boundary and final conditions:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} + rS \frac{\partial f}{\partial S} - rf = 0, & S \in [0, S_{max}], t \in [0, T] \\ f(0, t) = 0 \\ f(S, t) \sim S, & S \rightarrow \infty \\ f(S, T) = \max\{S - K, 0\} \end{cases} \quad (5)$$

With certain changes of variable, we transform it into to the heat equation on the whole line

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = u_0(x) = \max\{e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)x} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)x}, 0\} \end{cases}$$

Finally, with another change of variable, we prove that the solution of (5) is

$$f(S, t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + \left(\frac{\sigma^2}{2} + r\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} \quad (6)$$

where N is the standard normal cumulative distribution function.

3. Numerical resolution of the Black-Scholes equation

A NUMERICAL APPROXIMATION TO THE SOLUTION of the Black-Scholes equation is obtained by the Crank-Nicolson method. In this work, two different codes have been built in *Matlab*. In the first one, a uniform spacial mesh is applied. In the second one, a non-uniform grid proposed in [3] is carried out.

The numerical experiments in this chapter show the improvement in accuracy of the non-uniform mesh, when the numerical solution is compared with the analytical solution (6).

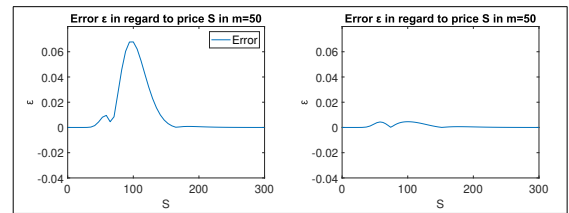


Figure 1: Error with uniform (left) and non-uniform (right) grids with 50 nodes.

References

- [1] Wilmott, P., Howison, S., & Dewynne, J. *The mathematics of financial derivatives: A Student Introduction*. Cambridge University Press. 1995
- [2] Hull, J. C. *Options, futures, and Other Derivatives*. Pearson. 9th edition. 2018.
- [3] In't Hout, K. *Numerical Partial Differential Equations in Finance Explained: An Introduction To Computational Finance*. Springer. 2017.