

Laura Ojeda Abdul Jalbar

*Teoría de Morse discreta aplicada a
complejos simpliciales abstractos*

Discrete Morse Theory applied to abstract
simplicial complexes

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2023

DIRIGIDO POR

Francisco Javier Díaz Díaz

Francisco Javier Díaz Díaz
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quisiera dar las gracias a mi familia por su constante apoyo y confianza, incluso en aquellos momentos en los que yo misma dudaba.

A mis amigos, por haber hecho que estos cuatro años hayan merecido aún más la pena.

A ti Fran, por apostar por mí y ayudarme en todo lo que ha estado a tu alcance. Sin tu ayuda no hubiera sido lo mismo.

Pero sobre todo, gracias a las matemáticas, porque sin ellas, nada de esto tendría sentido.

Laura Ojeda Abdul Jalbar
La Laguna, 10 de julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

La Teoría de Morse clásica, desarrollada por Marston Morse, es un recurso eficaz que permite el estudio de las propiedades topológicas de una variedad diferenciable, mediante el análisis de los puntos críticos de ciertas funciones diferenciables. Robin Forman desarrolló una variante discreta de la Teoría de Morse, dando así lugar a una nueva teoría con aplicaciones en matemáticas, biología, entre otros. En este trabajo se presenta la construcción de la Teoría de Morse discreta de Forman aplicada a complejos simpliciales abstractos, así como sus principales teoremas. Destacamos el Teorema del Colapso, las desigualdades de Morse discretas, la homología de Morse y algunas implementaciones algorítmicas. En esta memoria se han realizado demostraciones de resultados ya existentes en literatura, adoptando en algunos casos enfoques diferentes. Además, se han resuelto ejercicios propuestos en la bibliografía y se ha organizado la materia de forma que el enfoque sea más claro y preciso, desde el punto de vista matemático.

Palabras clave: *Teoría de Morse discreta – Complejo simplicial – Homología – Funciones de Morse discretas – Campos vectoriales gradientes*

Abstract

The classical Morse Theory, developed by Marston Morse, is a highly effective resource that allows the study of the topological properties of a smooth manifold, by analyzing the critical points of certain differentiable functions. Robin Forman developed a discrete variant of Morse Theory, thus giving rise to a new theory with wide-ranging applications in the fields such as mathematics, computer science, biology, among others. This memoir presents the construction of Forman's discrete Morse Theory applied to abstract simplicial complexes, along with its main theorems. These include the Collapse Theorem, discrete Morse inequalities, Morse homology, and some algorithmic implementations. In this memoir, we have performed proofs of results already existing in the literature, adopting different approaches in some cases. In addition, exercises proposed in the bibliography have been resolved and the subject has been organized in such a way that the approach is clearer and more precise, from the mathematical point of view.

Keywords: *Discrete Morse Theory – Simplicial complex – Homology – Discrete Morse functions – Gradient vector fields*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Complejos simpliciales y homología	1
1.1. Fundamentos de los complejos simpliciales	1
1.1.1. Característica de Euler	3
1.1.2. Homotopía simple y colapsabilidad	4
1.2. Homología simplicial con coeficientes en \mathbb{Z}_2	8
1.2.1. Conceptos del álgebra lineal	8
1.2.2. Homología simplicial. Números de Betti	9
2. Teoría de Morse Discreta	17
2.1. Teoría de Morse clásica	17
2.2. Funciones de Morse discretas	19
2.3. Campos vectoriales gradientes	22
2.3.1. Relación entre campos vectoriales gradientes y equivalencia de Forman	24
2.3.2. Diagrama de Hasse	25
2.4. Subcomplejos de nivel	28
3. Principales teoremas de la Teoría de Morse discreta	31
3.1. El Teorema del colapso	31
3.2. Desigualdades de Morse discretas débiles	33
3.3. Optimizando funciones de Morse discretas	35
3.4. Homología de Morse y homología simplicial	38
4. Computaciones en teoría de Morse discreta	41
4.1. Teoría de Morse discreta aleatoria	41
4.2. Otros algoritmos en teoría de Morse discreta	44

Bibliografía	49
Poster	51

Introducción

La Teoría de Morse clásica, que debe su nombre a Marston Morse [9], fue desarrollada con el propósito de analizar la topología de una variedad mediante el estudio de los puntos críticos de ciertas funciones diferenciables en dicha variedad. Sin embargo, esta teoría es más conocida por John Milnor [8], quien posterior a Morse demostró resultados fundamentales acerca de las variedades diferenciables.

Robin Forman [5] desarrolló una variante discreta de la Teoría de Morse, obteniendo así aplicaciones en diversos campos de las matemáticas, informática o incluso biología. Muchos de los resultados clásicos, como el Teorema del colapso y las desigualdades de Morse discretas, tienen análogos discretos. La Teoría de Morse discreta presenta además numerosos aspectos computacionales interesantes.

Enfocaremos este trabajo en la aplicación de la Teoría de Morse discreta a complejos simpliciales. Aunque esta restricción no abarca toda su generalidad (ya que también se puede definir en complejos CW regulares), los complejos simpliciales resultan más accesibles.

El primer capítulo comienza con la noción fundamental sobre la que se construye la teoría, los complejos simpliciales. Introduciremos además algunas de sus principales propiedades, destacando la característica de Euler, la homotopía simple y la colapsabilidad. En particular, estaremos interesados en los complejos simpliciales abstractos. Seguidamente, introduciremos conceptos del álgebra lineal como la definición de espacio vectorial generado por un conjunto, que nos permitirán definir la homología de un complejo simplicial. Para facilitar los cálculos utilizaremos coeficientes en \mathbb{Z}_2 , aunque para un cuerpo arbitrario el desarrollo teórico es similar. En esta sección se definirán además los denominados números de Betti y su relación con la característica de Euler.

En el Capítulo 2 se presenta una breve motivación de la Teoría de Morse clásica sin centrarnos en sus demostraciones. A continuación se presenta la construcción de Forman de la Teoría de Morse discreta, con temas como las funciones de Morse discretas o sus campos vectoriales gradientes asociados. En particular se

hablará de los diagramas de Hasse. A modo de cierre se incluye una breve sección sobre los subcomplejos de nivel, que serán de interés para resultados posteriores.

El tercer capítulo está dedicado a los principales teoremas de la Teoría de Morse discreta, haciendo hincapié en el Teorema del colapso y las desigualdades de Morse discretas (débiles), que relacionan el número de simplices críticos de una función de Morse discreta con los números de Betti del complejo simplicial, así como el método de cancelación de simplices críticos para simplificar la estructura de un complejo simplicial sin cambiar sus propiedades topológicas. Terminamos estableciendo una manera de estudiar la homología simplicial mediante la Teoría de Morse discreta.

En el Capítulo 4 se presentan algunos algoritmos que pueden implementarse para realizar cálculos usando la Teoría de Morse discreta. Se introducirá la Teoría de Morse discreta aleatoria y se presentan además otros algoritmos para construir campos vectoriales gradientes. Existen más posibilidades relacionadas con homología simplicial u homología persistente, pero se escapan de los objetivos de este trabajo.

Complejos simpliciales y homología

En este primer capítulo introducimos algunos fundamentos relacionados con los complejos simpliciales y su teoría de homología. Nos centraremos en los complejos simpliciales abstractos usando los complejos simpliciales geométricos únicamente para su representación.

1.1. Fundamentos de los complejos simpliciales

Comenzamos la sección con la definición de complejo simplicial abstracto.

Definición 1.1. Sea n un número entero no negativo. Se define $[v_n] := \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ como cualquier conjunto de $n + 1$ elementos. Un **complejo simplicial (abstracto)** K en $[v_n]$ es una colección de subconjuntos no vacíos de $[v_n]$ verificando:

- (a) si $\sigma \in K$ y $\tau \subseteq \sigma$, entonces $\tau \in K$;
- (b) $\{v_i\} \in K$ para todo $v_i \in [v_n]$.

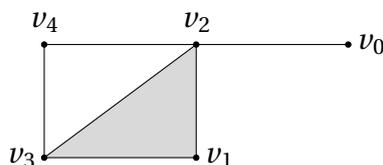
A los elementos de K los llamaremos **símplices**. A los elementos de la forma $\{v_i\}$ los llamaremos **vértices**.

Veamos a continuación un primer ejemplo.

Ejemplo 1.2. Sea $K := \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_2, v_4\}, \{v_0, v_2\}, \{v_1, v_2, v_3\}\}$. Es fácil comprobar que K es un complejo simplicial.

Observación 1.3. Un n -símplice geométrico es la envolvente convexa de un conjunto de $(n + 1)$ puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ geoméricamente independientes en \mathbb{R}^N . Intuitivamente hablando son puntos, segmentos, triángulos, tetraedros y sus generalizaciones n -dimensionales, que permiten construir la realización geométrica de un complejo simplicial abstracto K sin más que considerar tantos puntos geoméricamente independientes como vértices haya en K , y luego tomar los p -símplices geométricos correspondientes a los símplices de K . Esto permite representar los complejos simpliciales abstractos con cualquier figura homeomorfa a esa realización geométrica, sin olvidar su estructura simplicial.

El complejo simplicial K del Ejemplo 1.2 viene dado por la representación:

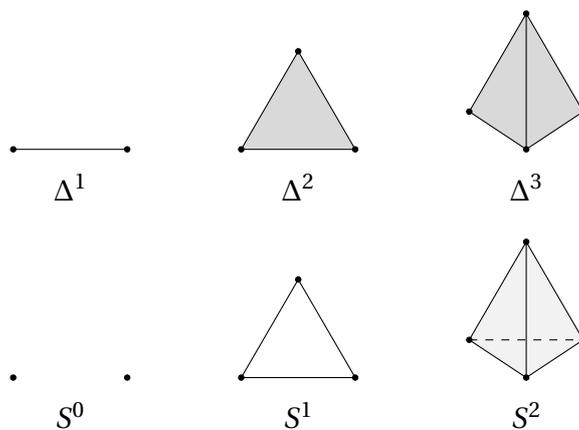


Definición 1.4. Dado un *símplice* $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ de un complejo simplicial K , se define la **dimensión de** σ , denotado por $\dim \sigma$, como el entero no negativo p , es decir, $\dim \sigma = |\sigma| - 1$, donde $|\sigma|$ denota al cardinal de σ . Diremos también que σ es un ***p*-símplice**, y cuando queramos remarcar esto lo denotaremos $\sigma^{(p)}$. La **dimensión del complejo simplicial** K se define como

$$\dim K = \text{máx}\{\dim \sigma : \sigma \in K\}.$$

A todo complejo simplicial de dimensión 1 lo llamaremos **grafo**. Denotando por c_p al número de *p*-símplices del complejo simplicial K , definimos el ***c*-vector** K por $\vec{c}_K = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, con $n = \dim(K)$.

Ejemplo 1.5. Para n un número natural se define el ***n*-disco simplicial** como $\Delta^n := \mathcal{P}([v_n]) \setminus \{\emptyset\}$ y la ***n*-esfera simplicial** como $S^n := \Delta^{n+1} \setminus \{[v_{n+1}]\}$, complejos simpliciales de dimensión n .

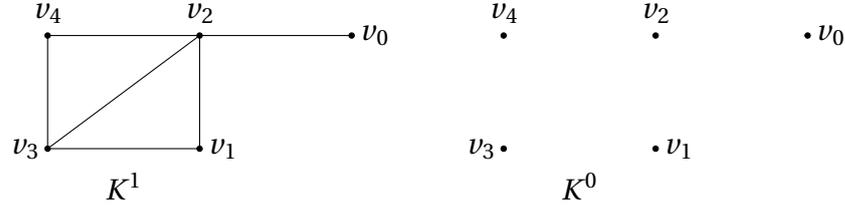


Las siguientes definiciones nos serán de utilidad.

Definición 1.6. Dados dos complejos simpliciales K y L , diremos que L es un **sub-complejo** de K si $L \subseteq K$.

Ejemplo 1.7. Para todo entero no negativo, el ***i*-esqueleto** de un complejo simplicial K , definido por $K^i = \{\sigma \in K : \dim \sigma \leq i\}$, es un subcomplejo de K con dimensión a lo sumo i . Nótese que si $\dim K = n$, entonces $K^i = K$, para todo $i \geq n$.

Para el complejo simplicial K del Ejemplo 1.2, se tienen el 0-esqueleto y 1-esqueleto de K de la forma:



Definición 1.8. Sean σ, τ dos *símplices* de un complejo simplicial K . Diremos que σ es *cara* de τ (o que τ es *cocara* de σ) si $\sigma \subseteq \tau$. Lo denotaremos por $\sigma \leq \tau$. Además, si σ es una cara de τ con $\dim \sigma < \dim \tau$, al número $\dim \tau - \dim \sigma$ se le conoce como **codimensión de σ con respecto a τ** . Si un *símplice* de K no es cara de ningún otro *símplice* de K , diremos que es un **símplice maximal** de K .

Definición 1.9. El **borde** de un *símplice* σ de un complejo simplicial K se define como el siguiente conjunto de *símplices*:

$$\partial(\sigma) := \{v \in K : v \text{ es una cara de codimensión } 1 \text{ de } \sigma\}.$$

Cabe destacar que $\partial(\sigma)$ no es un subcomplejo simplicial de K , salvo que $\dim(\sigma) = 1$.

En la siguiente definición, $\mathcal{P}([v_n])$ denotará el conjunto de las partes de $[v_n]$.

Definición 1.10. Si $H \subseteq \mathcal{P}([v_n]) \setminus \{\emptyset\}$, el **complejo simplicial generado por H** , denotado por $\langle H \rangle$, es el menor complejo simplicial que contiene a H .

Observación 1.11. Nótese que si H es un complejo simplicial entonces por definición $\langle H \rangle = H$.

Definición 1.12. Si σ es un *símplice* de un complejo simplicial K , llamaremos **clausura de σ** al subcomplejo generado por σ , es decir, $\overline{\sigma} := \{v \in K : v \subseteq \sigma\} = \langle \{\sigma\} \rangle$.

Ejemplo 1.13. El n -disco simplicial Δ^n definido en el Ejemplo 1.5 se puede escribir como la clausura del n -*símplice* $\sigma^{(n)} = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, esto es, $\Delta^n = \overline{\sigma^{(n)}}$.

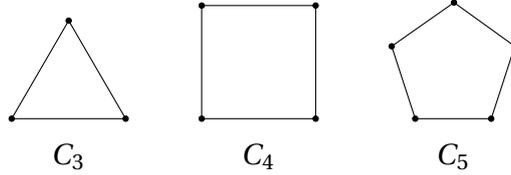
1.1.1. Característica de Euler

En esta sección veremos cómo asociar un número entero llamado característica de Euler a todo complejo simplicial. Este número es de gran relevancia en topología al tratarse de un invariante homotópico.

Definición 1.14. Sea K un complejo simplicial n -dimensional y sea $c_i(K)$ el número de i -*símplices* de K . La **característica de Euler** de K , denotada por $\chi(K)$, se define como

$$\chi(K) := \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i(K).$$

Ejemplo 1.15. Sea $n \geq 3$ un número entero y sea C_n el complejo simplicial definido en $[n-1]$ con símlices maximales dados por $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}, \{v_{n-1}, v_0\}$.



Como C_n es un grafo que contiene n símlices 0-dimensionales y n símlices 1-dimensionales, su característica de Euler es $\chi(C_n) = n - n = 0$.

Ejemplo 1.16. Dados $0 \leq k \leq n$ enteros, el número de formas de elegir k objetos de entre n objetos viene dado por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

A este valor se le conoce como **coeficiente binomial** y verifica propiedades conocidas como

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \text{ (Regla de Pascal)} \quad \text{y} \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \text{ para } 1 \leq k \leq n.$$

Teniendo esto en cuenta y sabiendo que el n -disco simplicial tiene $\binom{n+1}{i+1}$ i -símlices, podemos calcular su Característica de Euler como sigue.

$$\begin{aligned} \chi(\Delta^n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \left[\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} \right] = \\ &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] - \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] + \dots + (-1)^{n-1} \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] + (-1)^n \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1. \end{aligned}$$

Además, como la n -esfera simplicial S^n es simplemente $S^n = \Delta^{n+1} \setminus \{\sigma^{(n+1)}\}$, se deduce que para todo entero no negativo n ,

$$\chi(S^n) = \begin{cases} \chi(\Delta^{n+1}) + 1 = 2 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \chi(\Delta^{n+1}) - 1 = 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

1.1.2. Homotopía simple y colapsabilidad

Al igual que en el resto de las ramas de las matemáticas, la topología algebraica tiene nociones de equivalencia. En nuestro caso, para conocer qué significa que dos complejos simpliciales sean equivalentes, estaremos interesados en el tipo de homotopía simple.

Definición 1.17. Sea K un complejo simplicial y $\{\sigma^{(p-1)}, \tau^p\}$ un par de símlices en K con σ una cara de τ y σ no es cara de ningún otro símlice. Entonces $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ es un complejo simplicial llamado **colapso elemental de K** . Denotaremos en este caso $K \searrow K \setminus \{\sigma, \tau\}$. Equivalentemente, diremos que K es una **expansión elemental de $K \setminus \{\sigma, \tau\}$** y lo denotaremos por $K \setminus \{\sigma, \tau\} \nearrow K$. Al par $\{\sigma, \tau\}$ se le denomina **par libre**.

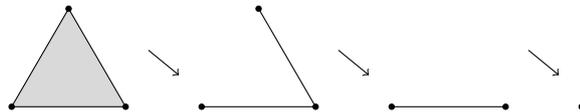
Se tiene entonces la siguiente definición.

Definición 1.18. Sean K y L dos complejos simpliciales. Diremos que K y L tienen el mismo **tipo de homotopía simple**, denotado por $K \sim L$, si existe una sucesión de colapsos y expansiones elementales entre K y L (o bien si $K = L$).

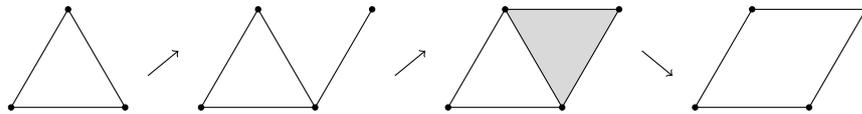
En el caso en el que $L = \{v\}$, decimos que K tiene el **tipo de homotopía simple de un punto** y denotaremos $K \sim *$.

Nótese que la homotopía simple es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los complejos simpliciales.

Ejemplo 1.19. La clausura de un símplice tiene el tipo de homotopía simple de un punto. Veámoslo para el 2-símplice, si bien el proceso es fácilmente generalizable.



Ejemplo 1.20. En el Ejemplo 1.15 definimos una colección de complejos simpliciales C_n . Se tiene que $C_n \sim C_m$, para cualquier $n, m \geq 3$. En particular, veamos a través de colapsos y expansiones elementales que $C_3 \sim C_4$.



Procediendo por inducción sobre n y utilizando el mismo conjunto de colapsos y expansiones anteriores se obtiene que $C_n \sim C_{n+1}$.

Un concepto muy útil en topología algebraica es el de invariante homotópico.

Definición 1.21. Sea K un complejo simplicial. Una aplicación α que asocia un número real $\alpha(K)$ a todo complejo simplicial K se dice que es un **invariante de homotopía simple** si $K \sim L$ implica que $\alpha(K) = \alpha(L)$.

Un ejemplo de aplicación que no es invariante de homotopía simple puede ser la dimensión o el número de vértices de un complejo simplicial. Sin embargo, la característica de Euler, como era de esperar, sí que lo es.

Proposición 1.22. La característica de Euler es un invariante de homotopía simple.

Demostración. Basta probar la invarianza para un colapso elemental, pero esto es claro, ya que al colapsar un par libre formado por símplices de dimensiones consecutivas, la característica de Euler no varía. \square

Ejemplo 1.23. Sabemos que $\Delta^n \sim *$ (ver Ejemplo 1.19), luego se tiene que $\chi(\Delta^n) = \chi(*) = 1$, para todo valor de n , como ya habíamos comprobado en el Ejemplo 1.16.

La Proposición 1.22 nos proporciona una forma de probar que dos complejos simpliciales no tienen el mismo tipo de homotopía simple.

Ejemplo 1.24. Del ejemplo 1.16 sabemos que $\chi(S^1) = 0$ y que $\chi(\Delta^2) = 1$, luego por la Proposición 1.22, $S^1 \approx \Delta^2$. Sin embargo, de momento la característica de Euler no nos permite distinguir si S^1 y S^3 tienen el mismo tipo de homotopía simple, ya que $\chi(S^1) = \chi(S^3) = 0$.

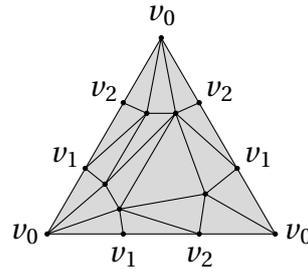
A continuación introduciremos un tipo especial de homotopía simple, obtenida cuando se utilizan exclusivamente colapsos para simplificar un complejo simplicial K a un punto.

Definición 1.25. Un complejo simplicial K es **colapsable** si para algún vértice $\{v\} \in K$ existe una sucesión de colapsos elementales de la forma

$$K = K_0 \searrow K_1 \searrow \cdots \searrow K_{n-1} \searrow K_n = \{\{v\}\}.$$

Lo denotaremos por $K \searrow *$.

Observación 1.26. Evidentemente, si un complejo simplicial es colapsable tiene el tipo de homotopía simple de un punto. Se podría pensar que el recíproco también es cierto, pero *el gorro de burro (Dunce Hat) D* es un ejemplo de que no lo es.



Se puede comprobar que $\chi(D) = 8 - 24 + 17 = 1$. Sin embargo, D no es colapsable. La prueba de este resultado es un poco técnica, ya que hay que tener cuidado en eliminar la sucesión adecuada de pares libres en el orden correcto. Bruno Benedetti y Frank H. Lutz [4] demostraron que el orden en que se realizan los colapsos marca una diferencia.

Definición 1.27. Sean K y L dos complejos simpliciales sin vértices en común. Llamaremos **join** de K y L al complejo simplicial dado por

$$K * L = \{\sigma, \tau, \sigma \cup \tau : \sigma \in K, \tau \in L\}$$

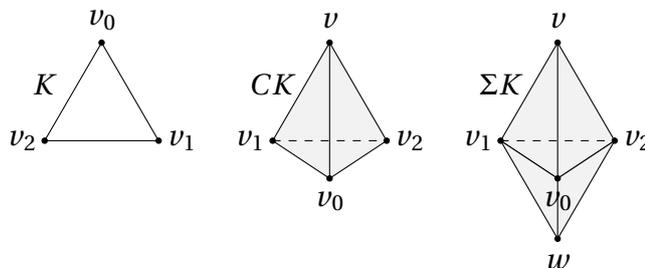
Claramente, $\dim K * L = \dim K + \dim L + 1$.

Observación 1.28. Si en la Definición 1.27 consideramos $L = \{\{v\}\}$, con $\{v\}$ un vértice que no está en K , denotaremos $CK = K * \{\{v\}\}$ y lo llamaremos **cono de K** . Así, $\dim CK = \dim K + 1$.

Otro caso especial de join es la suspensión de un complejo simplicial.

Definición 1.29. Sea K un complejo simplicial y sean $\{v\}, \{w\}$ vértices distintos que no están en K . Se define la **suspensión** de K como $\Sigma K := K * \{\{v\}, \{w\}\}$.

Ejemplo 1.30. Este ejemplo nos ayudará a ver la suspensión de K como dos conos en K unidos por la “base”. Sin embargo, ΣK no debe confundirse con el doble cono de K , ya que $\dim C(K) = \dim K + 2$ y $\dim \Sigma K = \dim K + 1$.



El siguiente objetivo será probar que, como indica la intuición, el cono de cualquier complejo simplicial es colapsable. Para ello veamos un interesante resultado previo.

Lema 1.31. Sean K un complejo simplicial y σ un simplece maximal de K . Si $CK = K * \{v\}$, entonces $CK \setminus CK \setminus \{\sigma, \sigma \cup \{v\}\} = C(K \setminus \{\sigma\})$.

Demostración. Como σ es un simplece maximal de K , se tiene que $\sigma \cup \{v\}$ es un simplece maximal de CK y σ no es cara en CK de ningún otro simplece. Luego $\{\sigma, \sigma \cup \{v\}\}$ es un par libre de CK y por tanto $CK \setminus CK \setminus \{\sigma, \sigma \cup \{v\}\}$.

Además, $C(K \setminus \{\sigma\})$ equivale a añadir el vértice $\{v\}$ a todos los simpleces de K salvo a σ , y por tanto coincide con $CK \setminus \{\sigma, \sigma \cup \{v\}\}$.

□

Proposición 1.32. El cono sobre cualquier complejo simplicial K es colapsable.

Demostración. Demostramos el resultado por inducción sobre n , siendo n el número de simpleces de K .

- Para $n = 1$, K está formado por un único simplece, en particular un 0-simplece. El cono sobre K es claramente colapsable por ser la clausura de un 1-simplece.
- Supongamos que el cono de todo complejo simplicial K con $n - 1$ simpleces es colapsable.
- Consideremos K un complejo simplicial con n simpleces y $CK = K * \{v\}$. Como hemos visto en el Lema 1.31, si $\sigma \in K$ es un simplece maximal de K , entonces $CK \setminus CK \setminus \{\sigma, \sigma \cup \{v\}\} = C(K \setminus \{\sigma\})$, que por la hipótesis de inducción es colapsable. Por tanto, $CK \setminus CK \setminus \{\sigma, \sigma \cup \{v\}\} \searrow *$.

□

Obsérvese, por último, que la suspensión de K no es en general colapsable, pero sí existen subcomplejos colapsables K_1 y K_2 de ΣK , dos conos, tales que $K_1 \cup K_2 = \Sigma K$ (ver Ejemplo 1.30).

1.2. Homología simplicial con coeficientes en \mathbb{Z}_2

1.2.1. Conceptos del álgebra lineal

En primer lugar repasaremos las herramientas del álgebra lineal que nos permitirán definir la homología. Comenzaremos recordando el concepto de espacio vectorial generado por un conjunto y lo haremos usando coeficientes en el cuerpo \mathbb{Z}_2 por motivos de computabilidad, como explicaremos más adelante. En caso de utilizar coeficientes en un cuerpo arbitrario puede realizarse un desarrollo teórico similar.

Definición 1.33. Dado un conjunto finito $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, definimos el **espacio vectorial** generado por S con coeficientes en \mathbb{Z}_2 como

$$V(S) = \{t_1 s_1 + \dots + t_n s_n / t_i \in \mathbb{Z}_2\}.$$

Los elementos de $V(S)$ se denominarán **vectores**, y $V(S)$ es un espacio vectorial de dimensión n con las operaciones

$$\begin{aligned} (t_1 s_1 + \dots + t_n s_n) + (t'_1 s_1 + \dots + t'_n s_n) &= (t_1 + t'_1) s_1 + \dots + (t_n + t'_n) s_n \\ c \cdot (t_1 s_1 + \dots + t_n s_n) &= (c \cdot t_1) s_1 + \dots + (c \cdot t_n) s_n. \end{aligned}$$

Los $s_1, \dots, s_n \in V(S)$ se denominan **vectores básicos**, y si $v = t_1 s_1 + \dots + t_n s_n$ se dice que (t_1, \dots, t_n) son las **componentes** de v respecto de la base $\{s_1, \dots, s_n\}$.

Dados $V(S), V(S')$ espacios vectoriales generados por S y S' , respectivamente, diremos que una aplicación $A: V(S) \rightarrow V(S')$ es una **transformación lineal** si para cada par de elementos $v, v' \in V(S)$, se tiene que $A(v + v') = A(v) + A(v')$.

Nótese que si $v \in V(S)$ y denotamos por 0 al neutro para la suma, entonces $A(0) = A(v + v) = A(v) + A(v) = 0$, por lo que $A(-v) = A(v) = -A(v)$.

Observación 1.34. Las transformaciones lineales pueden representarse mediante matrices, cuyas columnas representan las componentes de la imagen de los vectores básicos del espacio vectorial de partida en términos de la base del espacio vectorial de llegada. Es importante tener en cuenta que la matriz depende de las bases elegidas.

Ejemplo 1.35. Para $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ y $S' = \{s'_1, s'_2, s'_3\}$ consideremos una transformación lineal $f: V(S) \rightarrow V(S')$ con matriz asociada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se tiene que

$$f(s_1) = s'_1 + s'_2, f(s_2) = f(s_3) = s'_2 + s'_3, f(s_4) = s'_1 + s'_3.$$

Dada una transformación lineal $A: V(S) \rightarrow V(S')$, estaremos interesados en el subespacio vectorial

$$\ker(A) := \{x \in V(S) : A(x) = 0\} \subseteq V(S),$$

denominado **núcleo** de A . Llamamos a su dimensión la **nulidad** de A , denotada por $\text{null}(A)$.

También será de interés el **rango** o **imagen** de A , que es el subespacio vectorial $\text{Im}(A) = \{y \in V(S') : \text{existe } x \in V(S) \text{ tal que } A(x) = y\} \subseteq V(S')$. Llamamos **rango** de A a la dimensión de $\text{Im}(A)$, denotado por $\text{rank}(A)$, que coincide con el rango de la matriz asociada.

Podemos decir de manera intuitiva que la nulidad podrá detectar y contar todos los agujeros potenciales en una dimensión dada. Para ello, utilizaremos el teorema dado a continuación.

Teorema 1.36 (Teorema de rango-nulidad). *Sea $A : V(S) \rightarrow V(S')$ una transformación lineal con matriz asociada de orden $m \times n$. Entonces, $\text{rank}(A) + \text{null}(A) = n$.*

Como ya hemos dicho, $\text{rank}(A)$ coincide con el rango de la matriz asociada, y para calcularlo realizamos operaciones elementales en las filas de la matriz, obteniéndola así en su forma escalonada. Podremos así aplicar que el realizar operaciones elementales en las filas de una matriz A no cambia su rango.

Ejemplo 1.37. Recordemos la matriz A del Ejemplo 1.35. Podemos obtener su forma escalonada del siguiente modo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

Tenemos que la matriz escalonada A' se reduce a dos filas distintas de cero, luego $\text{rank}(A) = 2$. Aplicando el Teorema 1.36 obtenemos que $\text{null}(A) = 4 - 2 = 2$.

Recordemos por último la suma directa de espacios vectoriales, concepto que será de utilidad en la siguiente subsección.

Definición 1.38. *Sean U, U' subespacios de un espacio vectorial V . Se define la **suma** de estos espacios vectoriales como $U + U' := \{u + u' : u \in U, u' \in U'\}$.*

*Además, se dice que V es la **suma directa** de U y U' , escrita como $V = U \oplus U'$, si $V = U + U'$ y $U \cap U' = \{0\}$. Si $T : U \rightarrow V$ y $T' : U' \rightarrow V'$, se define $T \oplus T' : U \oplus U' \rightarrow V \oplus V'$ como $(T \oplus T')(u + u') := T(u) + T'(u')$.*

Proposición 1.39. *Sean $T : U \rightarrow V$ y $T' : U' \rightarrow V'$. Entonces, $\text{null}(T \oplus T') = \text{null}(T) + \text{null}(T')$ y $\text{rank}(T \oplus T') = \text{rank}(T) + \text{rank}(T')$.*

1.2.2. Homología simplicial. Números de Betti

En esta subsección seguiremos formalizando la intuición de lo que es un “agujero” en un complejo simplicial. Para ello, introducimos en primer lugar el siguiente concepto algebraico.

Definición 1.40. Un **complejo de cadenas** (de espacios vectoriales) $C = (V_i, \partial_i)$ es una sucesión de espacios vectoriales $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ con coeficientes en un cuerpo \mathcal{K} y una sucesión de transformaciones lineales $\{\partial_i : V_i \rightarrow V_{i-1}\}_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} V_i \xrightarrow{\partial_i} V_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} V_1 \xrightarrow{\partial_1} V_0 \xrightarrow{\partial_0} V_{-1} = 0,$$

verificando $\partial^2 = \partial_{i-1} \circ \partial_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

En este trabajo consideraremos espacios vectoriales con coeficientes en \mathbb{Z}_2 , salvo que se indique lo contrario.

Definición 1.41. Sean $C = (V_i, \partial_i), C' = (V'_i, \partial'_i)$ dos complejos de cadenas. Un **homomorfismo de complejos de cadenas** $f : C \rightarrow C'$ consiste en una familia de transformaciones lineales $f = \{f_i : V_i \rightarrow V'_i\}$ que hacen el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & V_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & V_i & \xrightarrow{\partial_i} & V_{i-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{i+1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & V'_{i+1} & \xrightarrow{\partial'_{i+1}} & V'_i & \xrightarrow{\partial'_i} & V'_{i-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Esto es, $\partial'_i \circ f_i = f_{i-1} \circ \partial_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Cabe destacar que la identidad en un complejo de cadenas C es el homomorfismo $1_C = \{1_{V_i} : V_i \rightarrow V_i\} : C \rightarrow C$, mientras que la composición de dos homomorfismos de complejos de cadenas $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$ es $g \circ f = \{g_i \circ f_i : V_i \rightarrow V''_i\} : C \rightarrow C''$.

Definición 1.42. Si $C = (V_i, \partial_i)$ es un complejo de cadenas y para todo $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos $V'_i \subseteq V_i$ subespacio vectorial con $\partial_i(V'_i) \subseteq V'_{i-1}$ ($i \in \mathbb{N}$), podemos definir $\partial'_i = \partial_i|_{V'_i}$. Diremos que el complejo de cadenas $C' = (V'_i, \partial'_i)$ es un **subcomplejo** de C .

Definición 1.43. Se dice que un complejo de cadenas $C = (V_i, \partial_i)$ **escinde** en subcomplejos de cadenas $C' = (V'_i, \partial'_i)$ y $C'' = (V''_i, \partial''_i)$ si $V_i = V'_i \oplus V''_i$ para todo i .

Para todo complejo de cadenas es posible definir una sucesión de espacios vectoriales (que llamaremos de homología) de la forma siguiente.

Definición 1.44. Dado un complejo de cadenas $C = (V_i, \partial_i)_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, para todo entero no negativo p se define:

- (i) $Z_p(C) = \ker(\partial_p)$, **subespacio de p -ciclos** de C .
- (ii) $B_p(C) = \text{Im}(\partial_{p+1})$, **subespacio de p -bordes** de C .

Como $\partial^2 = 0$, se tiene que $B_p(C)$ es subespacio vectorial de $Z_p(C)$ y por tanto podemos definir:

Definición 1.45. Dado un complejo de cadenas $C = (V_i, \partial_i)$, para todo entero no negativo p el espacio vectorial cociente $H_p(C) = Z_p(C)/B_p(C)$ se denomina **p -ésimo espacio vectorial de homología de C** .

Observación 1.46. Si C es un complejo de cadenas y consideramos su p -ésimo espacio vectorial de homología, entonces

$$\begin{aligned} \dim(H_p(C)) &= \dim(Z_p(C)/B_p(C)) = \dim(Z_p(C)) - \dim(B_p(C)) = \\ &= \text{null}(\partial_p) - \text{rank}(\partial_{p+1}). \end{aligned}$$

Todo homomorfismo de complejos de cadenas $f : C \rightarrow C'$ induce la siguiente transformación lineal entre los espacios vectoriales de homología:

$$\begin{aligned} f_* : H_p(C) &\rightarrow H_p(C') \\ [z] &\mapsto [f_p(z)] \end{aligned}$$

La transformación lineal f_* está bien definida pues $f_p(Z_p(C)) \subseteq Z_p(C')$ y es independiente del representante elegido ya que $f_p(B_p(C)) \subseteq B_p(C')$.

Además, esta asignación tiene carácter funtorial, esto es, $(1_C)_* = 1_{H_p(C)}$ y $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_p(C) \rightarrow H_p(C'')$ para todos $C \xrightarrow{f} C' \xrightarrow{g} C''$.

Un concepto que nos será de mucho interés para nuestro objetivo de identificar los “agujeros” de un complejo simplicial es el siguiente.

Definición 1.47. Dado un complejo de cadenas C , para todo entero no negativo p , a la dimensión de $H_p(C)$ se le conoce como **p -ésimo número de Betti de C** .

Como consecuencia directa de la Observación 1.46 y de la Proposición 1.39 se obtiene el siguiente resultado, que nos será de utilidad.

Lema 1.48. Si un complejo de cadenas $C = (V_i, \partial_i)$ escinde en $C' = (V'_i, \partial'_i)$ y $C'' = (V''_i, \partial''_i)$, entonces $b_i(C) = b_i(C') + b_i(C'')$.

Veremos ahora cómo asociar un complejo de cadenas a un complejo simplicial dado. Esto permitirá definir la homología del complejo simplicial.

Dado un complejo simplicial K , denotemos por K_i al conjunto de sus i -símplices y por c_i al cardinal de K_i , esto es, $c_i = |K_i|$. Para todo entero no negativo i podemos considerar el espacio vectorial generado por K_i , denotado por $V(K_i)$. El operador borde se definirá de la siguiente manera.

Definición 1.49. Dado $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$ un p -símplice de K , se define el **operador borde** $\partial_p : V(K_p) \rightarrow V(K_{p-1})$ como

$$\partial_p(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0, \\ \sum_{i=0}^p \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p\} & \text{si } p \neq 0 \end{cases}$$

y extendiéndolo por linealidad, donde \hat{v}_i denota excluir v_i .

Nótese el paralelismo entre el borde ahora definido y el introducido para símlices en la Definición 1.9.

Proposición 1.50. *El operador borde verifica que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$, para todo $p \geq 1$.*

Demostración. Veámoslo únicamente para los generadores. Consideremos un símlice $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ y sea $\tau = \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n\}$ una $(n-2)$ -cara de σ . Se tiene que τ es cara de $\{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n\}$ y $\{v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_n\}$, por lo que aparece exactamente dos veces en $(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(\sigma)$ y por tanto $(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(\sigma) = 0$. \square

Así, dado un complejo simplicial K , se obtiene el complejo de cadenas $C(K) = (V(K_i), \partial)$ asociado a K (con coeficientes en \mathbb{Z}_2) de la forma:

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} V(K_i) \xrightarrow{\partial_i} V(K_{i-1}) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} V(K_1) \xrightarrow{\partial_1} V(K_0) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Podemos entonces definir la homología de un complejo simplicial como la homología del complejo de cadenas asociado.

Definición 1.51. *Dado un complejo de cadenas $C(K) = (V(K_i), \partial)$ asociado al complejo simplicial K , para todo entero no negativo p , se define:*

- (i) $Z_p(K) = \ker \partial_p$, **subespacio de p -ciclos de K .**
- (ii) $B_p(K) = \text{Im } \partial_{p+1}$, **subespacio de p -bordes de K .**

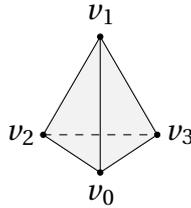
De aquí, definimos el **p -ésimo espacio vectorial de homología de K** como

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K),$$

y obtenemos el **p -ésimo número de Betti del complejo simplicial K** como

$$b_p(K) = \dim H_p(K) = \text{null } \partial_p - \text{rank } \partial_{p+1}.$$

Ejemplo 1.52. Consideremos la 2-esfera simplicial $K = S^2$.



Denotemos por $v_i = \{v_i\}$, $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$, con $i \in \{0, 1, 2\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ y $f_{ijk} = \{v_i, v_j, v_k\}$, con $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, 2\}$, $k \in \{2, 3\}$. Se tiene que

$$K_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\} \quad K_1 = \{e_{01}, e_{02}, e_{03}, e_{12}, e_{13}, e_{23}\} \quad K_2 = \{f_{012}, f_{013}, f_{023}, f_{123}\}$$

Esto induce el complejo de cadenas $0 \xrightarrow{\partial_2} V(K_2) \xrightarrow{\partial_1} V(K_1) \xrightarrow{\partial_0} 0$. Sabiendo que $\partial_1 : V(K_1) \rightarrow V(K_0)$, se tiene por definición

$$\begin{aligned} \partial_1(e_{01}) &= v_0 + v_1 & \partial_1(e_{02}) &= v_0 + v_2 & \partial_1(e_{03}) &= v_0 + v_3, \\ \partial_1(e_{12}) &= v_1 + v_2 & \partial_1(e_{13}) &= v_1 + v_3 & \partial_1(e_{23}) &= v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Obtenemos la forma escalonada de la matriz asociada a ∂_1 como sigue:

$$\partial_1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $\text{rank}(\partial_1) = 3$, y por el Teorema 1.36 se tiene $\text{null}(\partial_1) = 6 - 3 = 3$.

Por otro lado, $\partial_2 : V(K_2) \rightarrow V(K_1)$, donde

$$\begin{aligned} \partial_2(f_{012}) &= e_{01} + e_{02} + e_{12} & \partial_2(f_{013}) &= e_{01} + e_{03} + e_{13} \\ \partial_2(f_{023}) &= e_{02} + e_{03} + e_{23} & \partial_2(f_{123}) &= e_{12} + e_{13} + e_{23}. \end{aligned}$$

La forma escalonada de la matriz asociada a ∂_2 se obtiene como sigue:

$$\partial_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_4+F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_3+F_2 \\ F_5+F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \leftrightarrow F_4 \\ F_3 \leftrightarrow F_6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_4+F_3 \\ F_4+F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando de nuevo el Teorema 1.36 se tiene que $\text{rank}(\partial_2) = 3$ y $\text{null}(\partial_2) = 4 - 3 = 1$.

Por último, es claro que $\text{rank}(\partial_0) = 0$ y $\text{null}(\partial_0) = 4$. Concluimos entonces que los números de Betti de K son

$$\begin{aligned} b_0(K) &= \text{null } \partial_0 - \text{rank } \partial_1 = 4 - 3 = 1, \\ b_1(K) &= \text{null } \partial_1 - \text{rank } \partial_2 = 3 - 3 = 0, \\ b_2(K) &= \text{null } \partial_2 = 1. \end{aligned}$$

Observación 1.53. Los números de Betti con coeficientes en \mathbb{Z}_2 no siempre coinciden con los números de Betti usuales obtenidos a partir de grupos de homología. Elegimos trabajar en \mathbb{Z}_2 para facilitar los cálculos, pero esto conlleva cierta pérdida de información.

Por ejemplo, se puede comprobar que los números de Betti con coeficientes en \mathbb{Z}_2 del toro T son $b_0(T) = 1, b_1(T) = 2, b_2(T) = 1$, que coinciden con los números de Betti de la *botella de Klein* B . Sin embargo, el toro y la botella de Klein no tienen el mismo tipo de homotopía simple, y estos complejos simpliciales podrían haber sido distinguidos utilizando homología con coeficientes en \mathbb{Z} .

Sin embargo, sí que se verifica la clásica relación entre la característica de Euler y los números de Betti con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .

Teorema 1.54. *Sea K un complejo simplicial de dimensión n . Entonces,*

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(K).$$

Demostración. Como el número de columnas de la matriz asociada al operador borde ∂_i corresponde con el número c_i , por el Teorema 1.36 podemos escribir

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i = \sum_{i=0}^n (-1)^i [\text{rank}(\partial_i) + \text{null}(\partial_i)] = \\ &= 0 + b_0 - b_1 + \cdots + (-1)^{n-1} b_{n-1} + (-1)^n b_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i.\end{aligned}$$

□

Para terminar esta sección veremos algunas relaciones entre los números de Betti de un complejo y los de un determinado subcomplejo. Comencemos viendo que los números de Betti no cambian bajo expansiones y colapsos.

Proposición 1.55. *Sea K un complejo simplicial de dimensión n . Supongamos que $K \searrow K'$ es un colapso elemental (y por tanto $K' \nearrow K$). Entonces $b_i(K) = b_i(K')$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$*

Demostración. Sea K un complejo simplicial y supongamos que $K \searrow K' = K \setminus \{\tau^{(p-1)}, \sigma^{(p)}\}$, donde $\{\tau^{(p-1)}, \sigma^{(p)}\}$ es un par libre de K . Consideremos los complejos de cadenas $C(K) = (V(K_i), \partial)$, $C(K') = (V(K'_i), \partial')$ asociados a K y K' .

Definimos a continuación el complejo de cadenas $C_\sigma = (V_i, \partial'')$ de forma que V_p es el espacio vectorial generado por σ , V_{p-1} el espacio vectorial generado por $\partial(\sigma)$ y $V_i = 0$, para $i \neq p, p-1$. Observar que este complejo de cadenas no está asociado a ningún complejo simplicial. Definimos además $\partial''(\sigma) = \partial(\sigma)$. Nótese que para el resto de símlices el operador ∂'' es nulo.

$$C_\sigma : 0 \rightarrow V_d = \{\sigma, 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\partial'' \cong 1_{\mathbb{Z}_2}} V_{d-1} = \{\partial(\sigma), 1\} \cong \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Veamos que $C(K) = C(K') \oplus C_\sigma$.

- Para $i \neq p, p-1$, se tiene que $V_i(K) = V_i(K') \oplus 0$.
- Para $i = p$, $V_i(K) = V_i(K') \oplus V_i$, pues $\sigma \in V_i$ pero $\sigma \notin V_i(K')$.
- Para $i = p-1$, veamos que $V_{p-1}(K) = V_{p-1}(K') \oplus V_{p-1}$.

Por un lado, tenemos que ver que $V_{p-1}(K) = V_{p-1}(K') + V_{p-1}$:

“ \subseteq ” Sea $\alpha \in V_{p-1}(K)$ un elemento básico. Si $\alpha \in V_{p-1}(K')$ ya lo tenemos. Supongamos entonces que $\alpha \notin V_{p-1}(K')$. En este caso se tiene que $\alpha = \tau$, por ser τ el único $(p-1)$ -símplex de K que no está en K' . Consideramos $\sigma = \{v_0, \dots, v_p\}$, $\tau = \{v_0, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_p\}$. Podemos observar que

$$\tau = \left(\sum_{i \neq j} \{v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_p\} \right) + \partial_p(\sigma) \in V_{p-1}(K') + V_{p-1}.$$

“ \supseteq ” Esta inclusión es evidente.

Por otro lado, $V_{p-1}(K') \cap V_{p-1} = \{0\}$. Esto se debe a que τ es un sumando de la cadena $\partial(\sigma)$ pero $\tau \notin V_{d-1}(K')$.

De esta forma, hemos obtenido que $C(K) = C(K') \oplus C_\sigma$, y como $b_i(C_\sigma) = 0$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$, aplicando el Lema 1.48 se concluye que $b_i(K) = b_i(K') + 0 = b_i(K')$, para todo $i = 0, 1, 2, \dots$

□

Corolario 1.56. Si K y L son complejos simpliciales con el mismo tipo de homotopía simple, entonces $b_i(K) = b_i(L)$ para todo entero $i \geq 0$. Si K es colapsable, entonces $b_0(K) = 1$ y $b_i(K) = 0$ para todo $i \geq 1$.

Antes de terminar este capítulo, demostraremos otro resultado que facilita el cálculo de los números de Betti de ciertos complejos simpliciales.

Proposición 1.57. Sea K un complejo simplicial y $\sigma^{(p)} \in K$ un p -símplice maximal de K , con $p \geq 1$. Si $K' = K \setminus \{\sigma\}$ es un complejo simplicial, entonces:

- (a) Si $\partial_p(\sigma) \in \text{Im } \partial'$, entonces $b_p(K) = b_p(K') + 1$ y $b_{p-1}(K) = b_{p-1}(K')$.
(b) Si $\partial_p(\sigma) \notin \text{Im } \partial'$, entonces $b_{p-1}(K) = b_{p-1}(K') - 1$ y $b_p(K) = b_p(K')$.

Además, $b_i(K) = b_i(K')$ para todo $i \neq p, p-1$.

Demostración. Comencemos la demostración considerando los complejos de cadenas $C(K)$ y $C(K')$.

$$\begin{aligned} \dots &\xrightarrow{\partial_{i+1}} V(K_i) \xrightarrow{\partial_i} \dots \xrightarrow{\partial_2} V(K_1) \xrightarrow{\partial_1} V(K_0) \xrightarrow{\partial_0} 0, \\ \dots &\xrightarrow{\partial'_{i+1}} V(K'_i) \xrightarrow{\partial'_i} \dots \xrightarrow{\partial'_2} V(K'_1) \xrightarrow{\partial'_1} V(K'_0) \xrightarrow{\partial'_0} 0 \end{aligned}$$

Como σ es un símplice maximal de K , se tiene que $\partial_i = \partial'_i$, para todo $i \neq p$, y por tanto $b_i(K) = \dim(\ker \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}) = b_i(K')$, para $i \neq p, p-1$. Consideremos ahora los casos diferenciados.

- (a) Si $\partial_p(\sigma) \in \text{Im } \partial'$, entonces $\text{Im } \partial_p = \text{Im } \partial'_p$ y por tanto $\text{rank}(\partial_p) = \text{rank}(\partial'_p)$. Así,

$$b_{p-1}(K) = \text{null}(\partial_{p-1}) - \text{rank}(\partial_p) = \text{null}(\partial'_{p-1}) - \text{rank}(\partial'_p) = b_{p-1}(K').$$

Ahora bien, como $\partial_p(\sigma) \in \text{Im } \partial'$ y ya vimos que $\text{Im } \partial_p = \text{Im } \partial'_p$, se tiene que $\partial_p(\sigma) = \partial'_p(v') = \partial_p(v')$, donde $v' \in V(K'_p)$. De esta forma, $\partial_p(\sigma + v') = 0$ y por tanto $\sigma + v' \in \ker(\partial_p)$. Sin embargo, $\sigma + v' \notin V(K'_p)$, luego $\sigma + v' \notin \ker(\partial'_p)$. Esto nos dice que $\text{null}(\partial_p) > \text{null}(\partial'_p)$.

Además, si consideramos $\sigma + v'' \in \ker(\partial_p)$. Entonces,

$$0 = \partial_p((\sigma + v') + (\sigma + v'')) = \partial_p(v' + v'') = \partial'_p(v' + v'') \Rightarrow v' + v'' \in \ker(\partial'_p).$$

Como $\sigma + v'' = (\sigma + v') + (v' + v'')$, se obtiene que $\text{null}(\partial_p) = \text{null}(\partial'_p) + 1$ y

$$b_p(K) = \text{null}(\partial_p) - \text{rank}(\partial_{p+1}) = \text{null}(\partial'_p) + 1 - \text{rank}(\partial'_{p+1}) = b_p(K') + 1.$$

- (b) Supongamos ahora que $\partial_p(\sigma) \notin \text{Im } \partial'$. En este caso se tiene que $\ker(\partial_p) = \ker(\partial'_p)$, ya que si suponemos que $\sigma + v' \in \ker(\partial_p)$, con $v' \in V(K'_p)$, entonces se tendría $\partial_p(\sigma + v') = \partial_p(\sigma) + \partial_p(v') = 0$ y por tanto $\partial_p(\sigma) = \partial_p(v') = \partial'_p(v')$, lo cual contradice la hipótesis.

Obtenemos entonces que $\text{null}(\partial_p) = \text{null}(\partial'_p)$. Luego,

$$b_p(K) = \text{null}(\partial_p) - \text{rank}(\partial_{p+1}) = \text{null}(\partial'_p) - \text{rank}(\partial'_{p+1}) = b_p(K').$$

Por otro lado, es claro que $\partial_p(\sigma) \in \text{Im } \partial_p$ y $\partial_p(\sigma) \neq 0$, pero $\partial_p(\sigma) \notin \text{Im } \partial'_p$, luego $\text{rank}(\partial_p) > \text{rank}(\partial'_p)$. Además, si consideramos $\sigma + \nu' \in V(K_p)$, entonces $\partial_p(\sigma + \nu') = \partial_p(\sigma) + \partial_p(\nu') = \partial_p(\sigma) + \partial'_p(\nu')$. De esta forma, $\text{rank}(\partial_p) = \text{rank}(\partial'_p) + 1$. Así, $b_{p-1}(K) = \text{null}(\partial_{p-1}) - \text{rank}(\partial_p) = \text{null}(\partial'_{p-1}) - (\text{rank}(\partial'_p) + 1) = b_{p-1}(K') - 1$. \square

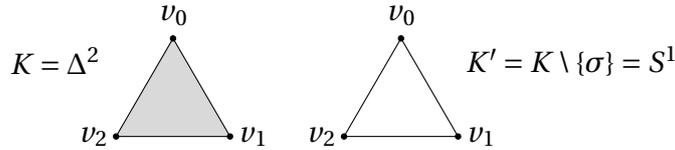
Observación 1.58. Para $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $S^n = \Delta^{n+1} \setminus \{\sigma^{(n+1)}\}$. Además, aplicando el Corolario 1.56 tenemos que $b_0(\Delta^{n+1}) = 1$ y $b_i(\Delta^{n+1}) = 0$ para todo $i \geq 1$. Considerando $K = \Delta^{n+1}$ y $K' = S^n$, basta comprobar que nos encontramos en las hipótesis del apartado (b) de la Proposición 1.57 ($\partial(\sigma^{(n+1)}) \notin \text{Im } \partial'$) para poder calcular $b_i(S^n)$.

$$0 = b_n(\Delta^{n+1}) = b_n(S^n) - 1, \text{ luego } b_n(S^n) = 1 \text{ y}$$

$$0 = b_{n+1}(\Delta^{n+1}) = b_{n+1}(S^n), \text{ luego } b_{n+1}(S^n) = 0.$$

Además, $b_i(S^n) = b_i(\Delta^{n+1})$ para todo $i \neq n, n + 1$. Concluimos entonces que

$$b_i(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$



Como consecuencia se tiene, aplicando el Corolario 1.56, que $S^n \approx S^m$ para $n \neq m$. Obsérvese que, en el Ejemplo 1.24 no fuimos capaces de distinguir mediante la característica de Euler si $S^1 \sim S^3$, lo cual ahora sí ha sido posible.

Utilizando ahora el apartado (a) de la Proposición 1.57 podemos calcular los números de Betti de $S^n \setminus \{\sigma\}$, siendo $\sigma \in S^n$ un n -símplex, con $n \geq 1$. Obtenemos que

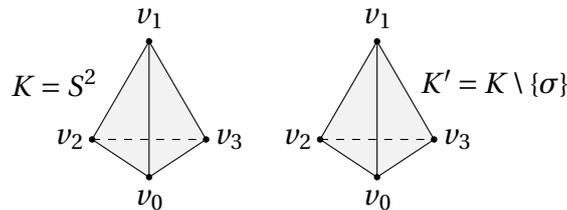
$$1 = b_n(S^n) = b_n(S^n \setminus \{\sigma\}) + 1, \text{ luego } b_n(S^n \setminus \{\sigma\}) = 0,$$

$$0 = b_{n-1}(S^n) = b_{n-1}(S^n \setminus \{\sigma\}), \text{ luego } b_{n-1}(S^n \setminus \{\sigma\}) = 0$$

y $b_i(S^n \setminus \{\sigma\}) = b_i(S^n)$ para todo $i \neq n, n - 1$. Por tanto,

$$b_i(S^n \setminus \{\sigma\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para ilustrar este caso consideremos $K = S^2$ y $K' = S^2 \setminus \{\sigma\}$, siendo $\sigma = \{v_0, v_1, v_2\}$.

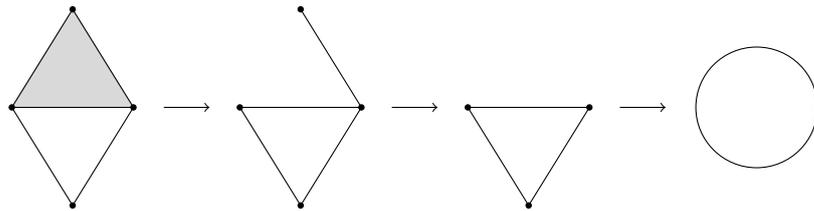


Como $\partial_2(\sigma) = \{v_0, v_1\} + \{v_0, v_2\} + \{v_1, v_2\} = \partial'_2(\{v_0, v_1, v_3\} + \{v_0, v_2, v_3\} + \{v_1, v_2, v_3\})$, estamos en las condiciones del apartado (a) de la Proposición 1.57 y se concluye que $b_0(K) = b_0(K')$, $b_1(K) = b_1(K')$ y $b_2(K) = b_2(K') + 1$.

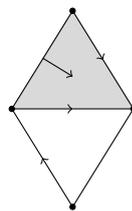
Teoría de Morse Discreta

La Teoría de Morse discreta nos ayudará a calcular la homología de un complejo simplicial sustituyéndolo, en esencia, por otro equivalente más pequeño.

Dado un complejo simplicial K , para calcular su homología simplicial nos interesa conocer su tipo de homotopía. Intuitivamente, si se consideran cierto tipo de “deformaciones” en K (pensando como su espacio topológico subyacente) que darán como resultado un espacio con el mismo tipo de homotopía que K .



Para codificar estas deformaciones será de interés la noción de “campo vectorial” que proporciona la Teoría de Morse discreta, donde cada flecha indica un colapso que no modifica el tipo de homotopía del complejo simplicial. Los símlices que sobreviven a las deformaciones son aquellos que no tienen flechas.

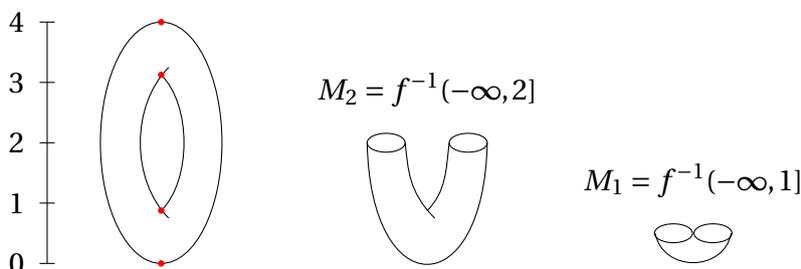


Pero antes de formalizar esta idea, introduzcamos algunos fundamentos y resultados de la Teoría de Morse clásica que motivarán el caso discreto.

2.1. Teoría de Morse clásica

La Teoría de Morse clásica, desarrollada por M. Morse [9], permite estudiar la topología de una variedad a través de ciertas funciones diferenciables sobre ella.

El ejemplo más habitual para introducir sus fundamentos es considerar un toro T como se muestra en la figura y la función altura $f : T \rightarrow \mathbb{R}$.



Si imaginamos que el toro se llena de agua progresivamente, la región cubierta de agua a una altura x es $M_x = f^{-1}((-\infty, x])$. Estas regiones cambiarán su topología en los denominados puntos críticos, marcados en rojo. Esto proporciona cuatro subespacios distinguidos M_0, M_1, M_3 y M_4 , que contienen suficiente información para estudiar aspectos topológicos del espacio original tales como su homología.

Formalicemos a continuación esta idea, presentando algunos fundamentos teóricos y resultados de la Teoría de Morse clásica.

Definición 2.1. Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Un punto $x \in X$ se dice **crítico** si para toda (alguna) carta alrededor de x se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Un punto crítico se dice **no degenerado** si el hessiano de f en x es no degenerado, es decir, no tiene valores propios nulos.

Definición 2.2. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathbb{R}$. Se define el conjunto de nivel M_a por $M_a = \{x \in M : f(x) \leq a\}$.

En general, el comportamiento de la función en torno a sus puntos críticos degenerados es difícil de observar. Esto motiva la elección de la siguiente familia de funciones.

Definición 2.3. Una **función de Morse** es una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que todos sus puntos críticos son no degenerados.

Un conocido resultado es el dado a continuación.

Teorema 2.4 (Teorema de la esfera de Reeb). Sea M una variedad compacta. Si existe una función de Morse en M con exactamente dos puntos críticos, entonces M es homeomorfo a una esfera.

Para terminar esta breve sección presentaremos uno de los principales teoremas de Teoría de Morse (Teorema 3.1, [9]), que tendrá un equivalente discreto.

Teorema 2.5. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse y $a < b$. Si el conjunto $f^{-1}([a, b])$ es compacto y no contiene puntos críticos de f , entonces M_a es difeomorfo a M_b . Además, M_a es un retracto por deformación de M_b .*

2.2. Funciones de Morse discretas

En esta sección definiremos una familia de funciones sobre los complejos simpliciales que se corresponden a las funciones de Morse sobre variedades diferenciables. Estas funciones serán la base de todo el estudio posterior.

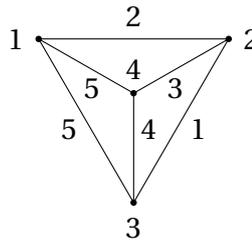
Usaremos la definición original, articulada por el fundador de la teoría de Morse discreta Robin Forman, que es la que tiende a utilizarse en la mayor parte de la literatura.

Definición 2.6. *Una **función de Morse discreta** f sobre un complejo simplicial K es una función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada p -símplice $\sigma \in K$, se tiene que*

$$|\{v^{(p-1)} < \sigma : f(v) \geq f(\sigma)\}| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\{\tau^{(p+1)} > \sigma : f(\tau) \leq f(\sigma)\}| \leq 1.$$

La idea de esta definición es que, en general, la función aumenta a medida que se incrementa la dimensión de los símlices, permitiéndose como máximo una “excepción” para cada símlice.

Ejemplo 2.7. La siguiente figura muestra un ejemplo de una función de Morse discreta sobre un grafo.



Definición 2.8. *Se dice que un p -símplice $\sigma \in K$ es **crítico** con respecto a una función de Morse discreta f si no tiene excepciones, es decir, si*

$$|\{v^{(p-1)} < \sigma : f(v) \geq f(\sigma)\}| = 0 \quad \text{y} \quad |\{\tau^{(p+1)} > \sigma : f(\tau) \leq f(\sigma)\}| = 0.$$

Si σ es un símlice crítico al valor $f(\sigma)$ se le llama **valor crítico**. En caso contrario diremos que σ es un **símplice regular** y que $f(\sigma)$ es un **valor regular**.

Un importante resultado es el siguiente, que garantiza que todo símlice regular tendrá una única excepción.

Lema 2.9 (Lema de exclusión). Sean $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta y $\sigma \in K$ un símlice regular. Entonces las condiciones

- (i) Existe $\nu^{(p-1)} < \sigma$ tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$.
- (ii) Existe $\tau^{(p+1)} > \sigma$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$.

no pueden ser ambas verdaderas.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que las condiciones anteriores son ambas verdaderas. Entonces, si $\tau^{(p+1)} > \sigma$ y $\nu^{(p-1)} < \sigma$, se tiene que $f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(\nu)$. Supongamos además $\sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_p\}$, $\nu = \{a_0, \dots, a_{p-1}\} < \sigma$ y $\tau = \{a_0, \dots, a_{p+1}\} > \sigma$ y consideremos $\tilde{\sigma} = \{a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}\}$. Tenemos que $\tilde{\sigma}$ satisface $\nu < \tilde{\sigma} < \tau$, luego por ser f una función de Morse discreta, $f(\nu) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tau)$. De aquí, $f(\tau) \leq f(\sigma) \leq f(\nu) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tau)$, lo cual es un absurdo. □

Observación 2.10. Nótese que si K es un complejo simplicial, existe una función de Morse discreta en K tal que todo símlice de K es crítico. En efecto, definimos $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(\sigma) = \dim(\sigma)$, para todo $\sigma \in K$. Sea $\sigma \in K$ un p -símlice de K y consideremos $\nu^{(p-1)} < \sigma$. Se tiene que $f(\sigma) = p$, $f(\nu) = p - 1$, luego $f(\nu) < f(\sigma)$. De la misma forma se tiene que, si $\tau^{(p+1)} > \sigma$, entonces $f(\tau) > f(\sigma)$. Así,

$$|\{\nu^{(p-1)} < \sigma : f(\nu) \geq f(\sigma)\}| = 0 \quad \text{y} \quad |\{\tau^{(p+1)} > \sigma : f(\tau) \leq f(\sigma)\}| = 0.$$

Observación 2.11. Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse discreta, entonces f tiene al menos un símlice crítico. En particular, un 0-símlice crítico.

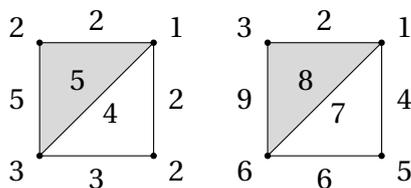
En efecto, supongamos que f no tiene ningún símlice crítico. Entonces, existe al menos un 1-símlice $\{v_i, v_j\}$, ya que de lo contrario $\{v_i\}$ y $\{v_j\}$ serían críticos. Como $\{v_i\}$ es regular, tenemos que $f(\{v_i\}) \geq f(\{v_i, v_j\})$. Por la definición de función de Morse discreta se tiene que $f(\{v_i, v_j\}) > f(\{v_j\})$. Si $\{v_j\}$ no es cara de ningún otro 1-símlice entonces $\{v_j\}$ es crítico. En caso contrario repetimos el proceso anterior hasta obtener un 0-símlice crítico, lo cual es posible por ser K finito.

Dado que la característica definitoria de las funciones de Morse discretas parece ser la relación de orden de los valores entre sí, es lógico definir una equivalencia entre funciones de Morse discretas del siguiente modo.

Definición 2.12. Sean f, g funciones de Morse discretas sobre un complejo simplicial K . Diremos que f y g son **equivalentes de Forman** si para cada par de símlices $\sigma^{(p)} < \tau^{(p+1)}$ en K , se tiene que $f(\sigma) < f(\tau)$ si y sólo si $g(\sigma) < g(\tau)$.

Nótese que la equivalencia de Forman es una relación de equivalencia sobre el conjunto de las funciones de Morse discretas sobre un complejo simplicial K .

Ejemplo 2.13. Estas funciones de Morse discretas son equivalentes de Forman:



Introducimos a continuación un nuevo tipo de función de Morse discreta que tiene un buen comportamiento.

Definición 2.14. Se dice que una función de Morse discreta $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es **excelente** si f es 1-1 en el conjunto de los simplices críticos. En otras palabras, una función de Morse discreta es excelente si todos los valores críticos son distintos.

El siguiente lema afirma que salvo equivalencia de Forman, podemos suponer que cualquier función de Morse discreta es excelente.

Lema 2.15. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta. Entonces existe una función de Morse discreta excelente $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ que es equivalente de Forman a f .

Demostración. Si f no fuera excelente, en cuyo caso habríamos acabado, consideraríamos $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ simplices críticos tales que $f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$. Definimos $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(\sigma) = f(\sigma)$ para todo $\sigma \neq \sigma_2$ y $g(\sigma_2) = f(\sigma_2) + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ y $f(\sigma_2) + \varepsilon$ menor que el menor valor de f que es mayor que $f(\sigma_2)$. De esta forma, $g(\sigma_1) \neq g(\sigma_2)$ y g es equivalente de Forman a f , ya que ninguna de las desigualdades inducidas por f es cambiada por g (también implica que σ_1 y σ_2 permanecen como simplices críticos bajo g). Si no hay otros dos simplices críticos que tengan el mismo valor bajo f , entonces hemos terminado. En caso contrario, se repite la construcción. Como solo hay un número finito de simplices, podremos construir una función de Morse discreta excelente que sea equivalente de Forman a f .

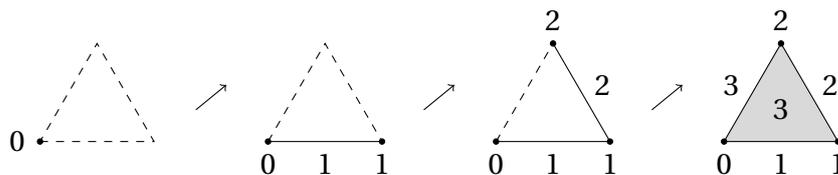
□

Observación 2.16. Si K es un complejo simplicial colapsable, existe una función de Morse discreta $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ con exactamente un simple crítico. En efecto, supongamos la sucesión de expansiones siguiente (en lugar de colapsos).

$$\{\{v\}\} = K_0 \nearrow K_1 = K_0 \cup \{\sigma_1, \tau_1\} \nearrow \cdots \nearrow K_n = K_{n-1} \cup \{\sigma_n, \tau_n\} = K.$$

Basta considerar $f(v) = 0$ y definir $f(\sigma_i) = f(\tau_i) = i$. De esta forma se obtiene que f es una función de Morse discreta en K cuyo único simple crítico es $\{v\}$.

Ejemplo 2.17. En este ejemplo se representa la función de Morse discreta descrita en la Observación 2.16 en el 2-disco simplicial.

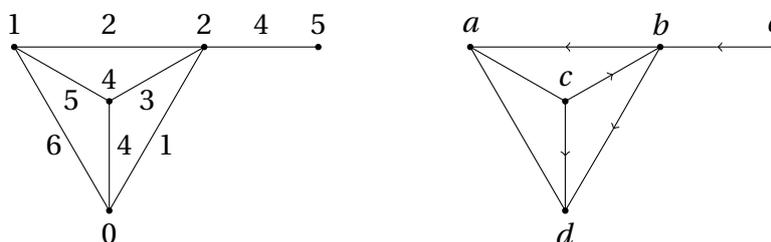


Observación 2.18. Es fácil comprobar que si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse discreta con exactamente un simple crítico, entonces K es conexo por caminos.

2.3. Campos vectoriales gradientes

Dada $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta, en esta sección mostramos cómo determinar el campo vectorial gradiente asociado. La idea intuitiva es mostrar gráficamente mediante un conjunto de flechas cómo actúa una función de Morse discreta, dibujando una flecha en τ apuntando hacia la dirección contraria a un símlice σ , siempre que σ tenga asociado un valor mayor o igual que una de sus cocaras τ de codimensión 1.

Ejemplo 2.19. El complejo simplicial con la función de Morse discreta del Ejemplo 2.7 se transformaría de la siguiente forma:



Si bien esto solo se puede dibujar hasta dimensión 3, la idea se generaliza a cualquier dimensión. La formalización del concepto de campo vectorial gradiente es la dada a continuación.

Definición 2.20. Sea f una función de Morse discreta sobre un complejo simplicial K . Se define el **campo vectorial gradiente inducido por f** como

$$V_f := \{(\sigma^{(p)}, \tau^{(p+1)}) : \sigma < \tau, f(\sigma) \geq f(\tau)\}.$$

Al par $(\sigma, \tau) \in V_f$ se le llama **vector o flecha**, donde σ se denomina **cola** del vector y τ **punta** del vector.

Ejemplo 2.21. Volviendo a la función de Morse discreta definida en el Ejemplo 2.19, se tiene que, eliminando llaves y comas en los símlices para simplificar notación, el campo vectorial gradiente inducido por f es

$$V_f = \{(e, eb), (b, ab), (b, bd), (c, dc), (c, bc)\}.$$

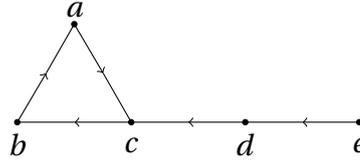
Un concepto íntimamente relacionado con el de campo vectorial gradiente es el siguiente.

Definición 2.22. Un **campo vectorial discreto** V en un complejo simplicial K está definido por

$$V := \{(\sigma^{(p)}, \tau^{(p+1)}) : \sigma < \tau \text{ y cada símlice de } K \text{ está como máximo en un par}\}.$$

Para los pares de un campo vectorial discreto seguiremos usando la misma nomenclatura de vector o flecha.

Observación 2.23. Claramente todo campo vectorial gradiente es un campo vectorial discreto. El recíproco no es cierto, como podemos observar en el siguiente contraejemplo.



La figura anterior muestra un campo vectorial discreto. Sin embargo, no podemos encontrar una función de Morse discreta f que lo convierta en un campo vectorial gradiente, pues tal función de Morse discreta debería satisfacer

$$f(a) \geq f(ac) > f(c) \geq f(bc) > f(b) \geq f(ab) > f(a)$$

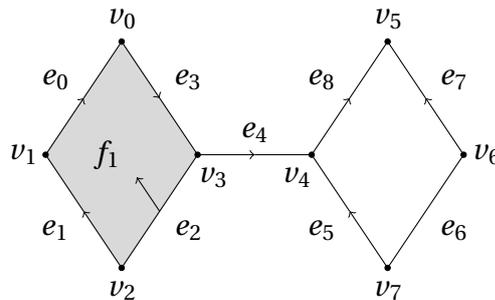
lo cual no es posible. Este ejemplo parece mostrar que el problema es que las flechas no pueden formar un “camino cerrado”, lo cual nos proporciona una valiosa intuición. Para corroborarla formalicemos en primer lugar la noción de camino en este contexto.

Definición 2.24. Dado un campo vectorial discreto V sobre un complejo simplicial K , llamaremos V -camino o camino gradiente de dimensión p , con $1 \leq p \leq \dim(K)$, a cualquiera de los siguientes conceptos:

- (i) Una sucesión $(\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2), \dots, (\sigma_k, \tau_k), \sigma_{k+1}$, con $(\sigma_i, \tau_i) \in V, \dim(\sigma_i) = p - 1, \tau_{i-1} > \sigma_i, \sigma_i \neq \sigma_{i-1}$.
- (ii) Una sucesión $\tau_0, (\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2), \dots, (\sigma_k, \tau_k), \sigma_{k+1}$, con τ_0 un simplex crítico, $(\sigma_i, \tau_i) \in V, \dim(\tau_0) = p, \dim(\sigma_i) = p - 1, \tau_{i-1} > \sigma_i, \sigma_i \neq \sigma_{i-1}$.
- (iii) Una sucesión $(\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2), \dots, (\sigma_k, \tau_k)$, con $(\sigma_i, \tau_i) \in V, \dim(\sigma_i) = p - 1, \tau_{i-1} > \sigma_i, \sigma_i \neq \sigma_{i-1}$.

Si $k \neq 0$, el V -camino se dice que es **no trivial**. Además, diremos que es **maximal** si no está contenido en ningún otro V -camino. Por último, diremos que un V -camino del tipo (i) es **cerrado** si $\sigma_1 = \sigma_{k+1}$.

Ejemplo 2.25. Volviendo al ejemplo de la Observación 2.23, podemos observar que $(a, ac), (c, bc), (b, ab), a$ es un V -camino cerrado. Consideremos ahora el campo vectorial discreto V sobre el complejo simplicial siguiente



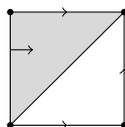
Se tiene que $(v_2, e_1), (v_1, e_0), (v_0, e_3), (v_3, e_4), (v_4, e_8), v_5$ es un V -camino maximal de dimensión 1. Hay que tener en cuenta que los subconjuntos del V -camino anterior se consideran también V -caminos. Un ejemplo puede ser $(v_0, e_3), (v_3, e_4)$. Otro ejemplo de V -camino es $e_6, (v_7, e_5), (v_4, e_8), v_5$ ó $(e_2, f_1), e_3$.

Una vez introducida la noción de V -camino podemos enunciar cuándo un campo vectorial discreto es campo vectorial gradiente inducido por alguna función de Morse discreta. Sin embargo, la demostración de este resultado la pospondremos hasta la Sección 2.3.2, una vez introducidos los diagramas de Hasse.

Teorema 2.26. *Un campo vectorial discreto V es el campo vectorial gradiente inducido por una función de Morse discreta f si y solo si V no contiene V -caminos cerrados no triviales.*

2.3.1. Relación entre campos vectoriales gradientes y equivalencia de Forman

Comencemos esta nueva sección recordando las funciones de Morse discretas equivalentes de Forman del Ejemplo 2.13. El campo vectorial gradiente inducido por dichas funciones de Morse discretas coincide y viene dado por la siguiente representación



Esto no es una coincidencia. El teorema presentado a continuación muestra que el campo vectorial gradiente caracteriza las funciones de Morse discretas equivalentes de Forman.

Teorema 2.27. *Dos funciones de Morse discretas definidas en un complejo simplicial son equivalentes de Forman si y solo si inducen el mismo campo vectorial gradiente.*

Demostración. Sean $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de Morse discretas equivalentes de Forman. De la definición se sigue inmediatamente que, si $\sigma^{(p)} < \tau^{(p+1)}$, entonces $f(\sigma) \geq f(\tau)$ si y solo si $g(\sigma) \geq g(\tau)$. Por lo tanto, $(\sigma, \tau) \in V_f$ si y sólo si $(\sigma, \tau) \in V_g$.

Recíprocamente, supongamos ahora que f y g inducen el mismo campo vectorial gradiente en K , es decir, $V_f = V_g = V$. Supongamos que $\sigma^{(p)} < \tau^{(p+1)}$.

(i) Si $(\sigma, \tau) \in V$, entonces $f(\sigma) \geq f(\tau)$ y $g(\sigma) \geq g(\tau)$.

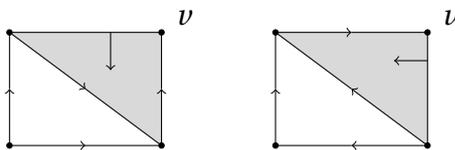
(ii) Si $(\sigma, \tau) \notin V$, entonces $f(\sigma) < f(\tau)$ y $g(\sigma) < g(\tau)$.

En cualquier caso, $f(\sigma) < f(\tau)$ si y solo si $g(\sigma) < g(\tau)$.

□

Observación 2.28. Si dos funciones de Morse discretas son equivalentes de Forman, entonces tienen los mismos símlices críticos. Esto se debe a que los símlices críticos son aquellos de los que no sale ni llega ninguna flecha en el campo vectorial gradiente asociado.

Sin embargo, el recíproco no es cierto en general. Para mostrarlo, basta considerar el complejo simplicial siguiente con dos campos vectoriales gradientes dados por

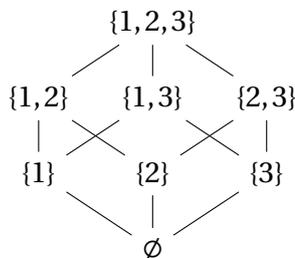


Por el Teorema 2.26 sabemos que son campos vectoriales gradientes dado que no contienen V -caminos cerrados no triviales. Además, en ambos casos, el único sím- plice crítico es el 0-sím- plice $\{v\}$, pero por el Teorema 2.27 se tiene que las funciones de Morse discretas que los inducen no son equivalentes de Forman, pues no indu- cen el mismo campo vectorial gradiente.

2.3.2. Diagrama de Hasse

En esta sección introduciremos los diagramas de Hasse, una herramienta que será de utilidad para estudiar las propiedades de colapso del complejo simplicial y comparar diferentes funciones de Morse discretas.

Para mostrar la idea intuitiva de lo que es un diagrama de Hasse considere- mos el conjunto $X = \{1, 2, 3\}$. Representamos como vértices todos los elementos de $\mathcal{P}(X)$ y dibujamos una línea entre todo subconjunto A de X y aquellos subconjun- tos $B \subseteq A$ que tengan un elemento menos.



Veamos cómo asociar uno de estos diagramas a un complejo simplicial.

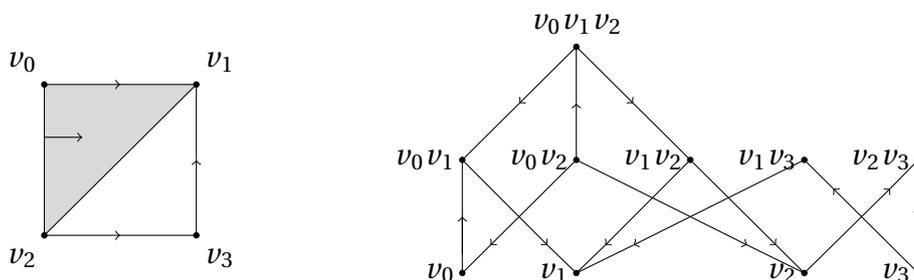
Definición 2.29. Dado un complejo simplicial K , llamaremos **diagrama de Hasse de K** , denotado por \mathcal{H}_K , ó \mathcal{H} si no hay posibilidad de confusión, a un grafo tal que existe una correspondencia 1-1 entre los vértices de \mathcal{H} (que llamaremos **nodos**) y los sím- plices de K (denotaremos $\sigma \in \mathcal{H}$). Existirá una arista entre dos nodos $\sigma, \tau \in \mathcal{H}$ cuando τ sea una cara de codimensión 1 de σ .

Para representar el diagrama de Hasse de K se colocan en filas los nodos co- rrespondientes a sím- plices de la misma dimensión. En general, $\mathcal{H}(i)$ denotará a los nodos de \mathcal{H} correspondientes a los i -sím- plices de K . Nos referiremos a $\mathcal{H}(i)$ como **nivel i** .

Observación 2.30. Nótese que el diagrama de Hasse de un complejo simplicial es el conjunto parcialmente ordenado de los símlices de K , con la relación $\sigma R\tau$ si y solo si $\sigma < \tau$, es decir, la relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Definición 2.31. Sea K un complejo simplicial y V un campo vectorial discreto sobre K . El **diagrama de Hasse dirigido inducido por V** , denotado por \mathcal{H}_V , es el diagrama de Hasse \mathcal{H}_K con una flecha sobre cada arista de \mathcal{H}_K . Estas flechas tendrán un sentido ascendente cuando los dos nodos de la arista son un par en V y descendente en otro caso. Un V -camino cerrado no trivial de \mathcal{H}_V se denomina **ciclo dirigido**.

Ejemplo 2.32. Observemos el siguiente campo vectorial gradiente V sobre un complejo simplicial K (a la izquierda) y su diagrama de Hasse inducido (a la derecha).



Hemos visto la manera de asociar diagramas de Hasse a campos vectoriales discretos (sean campos gradientes o no). Veremos a continuación algunos resultados que nos permitirán probar cuándo un campo vectorial discreto es un campo vectorial gradiente (Teorema 2.26).

Lema 2.33. Sea V un campo vectorial discreto sobre un complejo simplicial K . Si el diagrama de Hasse inducido por V contiene un ciclo dirigido, este está contenido exactamente en dos niveles.

Demostración. Supongamos que en el diagrama de Hasse inducido por V hay un ciclo dirigido, y supongamos además que dicho ciclo abarca más de dos niveles. Entonces, en algún punto, tendremos dos flechas ascendentes consecutivas, es decir, existirán símlices $\sigma^{(p-1)}$, $\tau^{(p)}$ y $\nu^{(p+1)}$ tales que $(\sigma, \tau), (\tau, \nu) \in V$. Sin embargo, por definición de campo vectorial discreto esto no es posible, ya que el símplex τ se encontraría en dos pares diferentes.

□

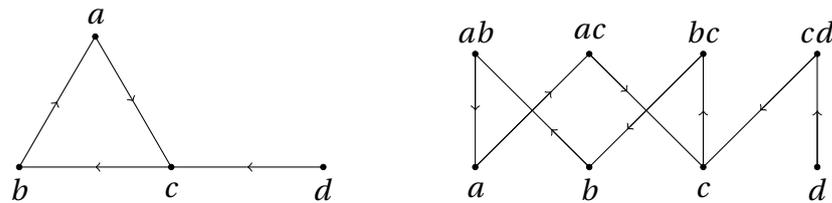
Teorema 2.34. Sea K un complejo simplicial, V un campo vectorial discreto sobre K y \mathcal{H}_V el diagrama de Hasse dirigido inducido por V . Entonces, existen V -camino cerrados no triviales si y solo si existen ciclos dirigidos en \mathcal{H}_V .

Demostración. En primer lugar, supongamos que existe un V -camino cerrado no trivial de la forma $(\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2), \dots, (\sigma_k, \tau_k), \sigma_{k+1} = \sigma_1$. Veamos que existe un ciclo dirigido en \mathcal{H}_V . Partimos de $\sigma_1 \in \mathcal{H}_V$ y atravesamos la flecha ascendente de σ_1

a τ_1 , la cual existe ya que $(\sigma_1, \tau_1) \in V$. Seguimos a continuación por una flecha descendente desde τ_1 a σ_2 . Esta flecha descendente existe ya que $\tau_1 > \sigma_2$ y $(\sigma_2, \tau_1) \notin V$, debido a que τ_1 no puede estar en dos pares distintos. Siguiendo así, observamos que el V -camino cerrado forma un ciclo dirigido en \mathcal{H}_V .

Recíprocamente, supongamos que hay un ciclo dirigido en \mathcal{H}_V . Entonces, aplicando el Lema 2.33, este debe estar contenido en exactamente dos niveles. Por tanto, podemos escribir el ciclo dirigido de la forma $(\sigma_1, \tau_1), (\sigma_2, \tau_2), \dots, (\sigma_k, \tau_k), \sigma_{k+1} = \sigma_1$. Dentro de este ciclo, cada flecha ascendente, es decir, cada par de símplices (σ, τ) , representa un elemento de V . Además, cada flecha descendente cumple la condición $\tau > \sigma$. Concluimos entonces que este ciclo dirigido es también un V -camino cerrado en K . \square

Ejemplo 2.35. Consideremos el siguiente campo vectorial discreto V y su diagrama de Hasse inducido:



Siguiendo la dirección de las flechas que parten del nodo a , recorreremos el camino $(a, ac), (c, bc), (b, ab), a$, lo que nos devuelve al punto de partida. Este ciclo dirigido, combinando los Teoremas 2.26 y 2.34, impide que V sea un campo vectorial gradiente.

Veamos un lema más, puramente de teoría de grafos.

Lema 2.36. *Sea V el conjunto de vértices de un diagrama de Hasse \mathcal{H} . Entonces, existe una aplicación $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v_i) > f(v_j)$ siempre que haya una flecha de v_i a v_j si y solo si \mathcal{H} no tiene ningún ciclo dirigido.*

Demostración. Por un lado, supongamos que existe $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(v_i) > f(v_j)$ siempre que haya una flecha de v_i a v_j y supongamos por reducción al absurdo que existe un ciclo dirigido en \mathcal{H} de la forma

$$(\{v_{i_0}\}, \{v_{i_0}, v_{i_1}\}), (\{v_{i_1}\}, \{v_{i_1}, v_{i_2}\}), \dots, (\{v_{i_{n-1}}\}, \{v_{i_{n-1}}, v_{i_n}\}), \{v_{i_0}\}.$$

Aplicando la hipótesis se tiene que $f(v_{i_0}) > f(v_{i_1}) > \dots > f(v_{i_n}) = f(v_{i_0})$, lo cual es imposible. Así, concluimos que no existe ningún ciclo dirigido en \mathcal{H} .

Recíprocamente, supongamos ahora que \mathcal{H} no contiene ningún ciclo dirigido y veamos cómo construir f . Podemos garantizar que existe un vértice w_0 en H al cual no le llega ninguna flecha. En efecto:

Si suponemos que no existe tal vértice, es decir, que a todo vértice llega al menos una flecha, y consideramos uno de ellos, desplazándonos en el sentido contrario

a dicha flecha y repitiendo el proceso llegaremos de nuevo al principio, formando así un ciclo.

A continuación, eliminando de \mathcal{H} el vértice w_0 y todas las flechas que salen de él, el grafo resultante tampoco tiene ningún ciclo dirigido, por lo que repetimos el proceso hasta que no quede ningún vértice, obteniendo una sucesión de vértices $W = \{w_0, \dots, w_i, \dots, w_n\}$.

Supongamos ahora que hay una flecha de w_i a w_j con $i > j$. Esto significa que w_j fue elegido y eliminado antes que w_i , por lo que no puede haber ninguna flecha entrando en w_j cuando fue elegido, lo cual es una contradicción. De esta forma concluimos que $i < j$ y definimos $f(v_i) = n - k$, obteniendo así una función con las propiedades deseadas. □

Ahora sí estamos en condiciones de probar el Teorema 2.26. Recordemos su enunciado.

Teorema 2.26. *Un campo vectorial discreto V es el campo vectorial gradiente inducido por una función de Morse discreta f si y solo si V no contiene V -camino cerrado no triviales.*

Demostración. Para la implicación directa, si V es el campo vectorial gradiente inducido por una función de Morse discreta f , el mismo razonamiento utilizado en la Observación 2.23 permite comprobar que V no contiene V -camino cerrado no triviales.

Recíprocamente, supongamos que el campo vectorial discreto V no contiene ningún V -camino cerrado no trivial. Por el Teorema 2.34 sabemos que no existen ciclos dirigidos en \mathcal{H}_V . Aplicando ahora el lema anterior, obtenemos que existe una función $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(\sigma) > f(\tau)$, siempre que haya una flecha de σ a τ , siendo σ, τ vértices de \mathcal{H}_V .

Se deduce que f es una función de Morse discreta del hecho de que para cualquier $(\sigma, \tau) \in V$, ninguno de los símplexes puede estar en otro par.

Si V_f es el campo vectorial gradiente inducido por f , veamos que $V = V_f$:

“ \subseteq ” Sea $(\sigma, \tau) \in V$. Entonces, $\sigma < \tau$ y $f(\sigma) > f(\tau)$. Luego, $(\sigma, \tau) \in V_f$.

“ \supseteq ” Sea $(\sigma, \tau) \in V_f$, entonces $\sigma < \tau$. Aplicando el Lema 2.9 (de exclusión) obtenemos que ninguno de los símplexes σ, τ está en otro par, por lo que $(\sigma, \tau) \in V$.

Concluimos entonces que V es el campo vectorial gradiente inducido por la función de Morse discreta f . □

2.4. Subcomplejos de nivel

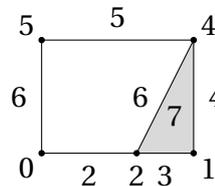
Introduzcamos por último los subcomplejos de nivel, los cuales serán necesarios para próximos resultados como el Teorema del colapso.

Definición 2.37. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta. Dado $c \in \mathbb{R}$, se define el **subcomplejo de nivel** $K(c)$ como el subcomplejo de K formado por todos los simplices $\tau \in K$ tales que $f(\tau) \leq c$, así como sus caras. Esto es,

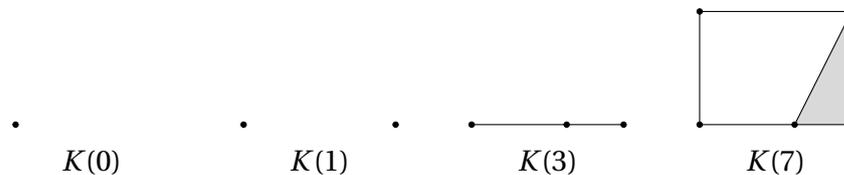
$$K(c) = \bigcup_{f(\tau) \leq c, \sigma \leq \tau} \sigma.$$

En general, estaremos interesados en estudiar los subcomplejos de nivel inducidos por los valores críticos de una función de Morse discreta.

Ejemplo 2.38. Sea K el complejo simplicial con función de Morse discreta siguiente



Los valores críticos son 0, 1, 3 y 7. Cada uno de estos valores críticos induce un subcomplejo de nivel. Dichos subcomplejos vienen representados de la manera siguiente



El siguiente resultado será muy útil a la hora de trabajar con subcomplejos de niveles, y lo utilizaremos en la primera sección del siguiente capítulo al probar el Teorema del colapso y un resultado relacionado.

Lema 2.39. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta y sea $\sigma^{(p)} \in K$ verificando que $f(\tau^{(p+1)}) > c$ para todo $\tau^{(p+1)} > \sigma$. Entonces, $f(\eta) > c$ para todo $\eta > \sigma$.

Demostración. Consideremos $\hat{\tau}^{(p+2)} > \sigma$ y veamos que $f(\hat{\tau}) > c$. El proceso se puede repetir inductivamente hasta obtenerlo para $\eta > \sigma$ de cualquier dimensión. Si $f(\hat{\tau}) \leq c$ entonces para $\sigma < \tau^{(p+1)} < \hat{\tau}$ se tiene que $f(\tau) > c \geq f(\hat{\tau})$. Pero $\hat{\tau}$ tiene al menos dos $(p + 1)$ -caras que tienen a σ como cara, por lo que $\hat{\tau}$ tendría dos “excepciones”, lo cual no es posible.

□

Principales teoremas de la Teoría de Morse discreta

Dedicaremos este capítulo a algunos de los resultados principales de la Teoría de Morse discreta. La primera sección está dedicada al Teorema del colapso, equivalente discreto del Teorema 2.5 de Teoría de Morse clásica. En la segunda sección se verán las desigualdades de Morse discretas débiles, que relacionan los números de Betti de un complejo simplicial y el número de simplices críticos de una función de Morse discreta. En la tercera sección se presenta cómo “optimizar” una función de Morse discreta reduciendo el número de simplices críticos. Finalmente, en una última sección se introduce la relación de entre la homología de Morse y la homología simplicial.

3.1. El Teorema del colapso

En el Capítulo 2 vimos cómo una colección de flechas en un complejo simplicial podía considerarse como la codificación de una secuencia de colapsos. El Teorema del colapso nos indicará cuándo podemos llevar a cabo un colapso, y para tratarlo de forma precisa, utilizaremos los subcomplejos de nivel (Sección 2.4).

Lema 3.1. *Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta y $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo que no contiene valores críticos. Entonces, existe una función de Morse discreta $f' : K \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:*

- (i) f' es 1-1 en $(a, b]$.
- (ii) f' no tiene valores críticos en $(a, b]$.
- (iii) $K_f(a) = K_{f'}(a)$ y $K_f(b) = K_{f'}(b)$.
- (iv) $f = f'$ en $\mathbb{R} \setminus (a, b]$.

Demostración. Podemos modificar ligeramente f para que sea 1-1 sin cambiar $K(a)$ o $K(b)$, de forma similar a como se hizo en la prueba del Lema 2.15.

□

Teorema 3.2 (Teorema del colapso). *Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta y $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo que no contiene valores críticos. Entonces $K(b) \searrow K(a)$.*

Demostración. En virtud del Lema 3.1 podemos suponer que f es 1-1 en $(a, b]$. Por un lado, si $f^{-1}((a, b]) = \emptyset$, entonces $K(a) = K(b)$ por no haber ningún símplice para el que f tome un valor entre $K(a)$ y $K(b)$ y por tanto ya lo tenemos.

En el caso contrario sabiendo que f es 1-1 en $(a, b]$ podemos dividir dicho intervalo en subintervalos también semiabiertos y más pequeños, en los cuales hay exactamente un valor regular, lo que nos permite suponer que existe un único valor regular $f(\sigma)$ en $(a, b]$ correspondiente a un único $\sigma \in K$. Nótese que $\sigma \in K(b)$.

Aplicando el Lema 2.9 (Lema de exclusión), se cumple exactamente una de las siguientes propiedades:

- (i) Existe $\nu^{(p-1)} < \sigma$ tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$.
 - (ii) Existe $\tau^{(p+1)} > \sigma$ tal que $f(\tau) \leq f(\sigma)$.
- Si el segundo caso es cierto, como $f(\tau) \leq f(\sigma)$, f es 1-1 y σ es el único símplice regular tal que $f(\sigma) \in (a, b]$, entonces $f(\tau) \leq a$ y por tanto $\tau \in K(a)$. Pero $\sigma < \tau$, por lo que $\sigma \in K(a)$, lo cual solo puede ocurrir cuando $K(a) = K(b)$. De esta forma queda probado.
 - Supongamos ahora que el primer caso es cierto, esto es, existe $\nu^{(p-1)} < \sigma$ tal que $f(\nu) \geq f(\sigma)$. Es claro que $\sigma, \nu \in K(b)$ pues $f(\sigma) \in (a, b]$. Veamos que $\sigma, \nu \notin K(a)$ y que $K(b) = K(a) \cup \{\nu, \sigma\}$, siendo además $\{\nu, \sigma\}$ un par libre. Con ello quedaría probado que $K(b) \setminus K(a)$.

Comencemos probando que $\sigma \notin K(a)$. Sabemos por el Lema de exclusión que (ii) no puede ser cierto, por lo que para todo $\tau^{(p+1)} > \sigma$ se tiene que $f(\tau) > f(\sigma)$ y por tanto $f(\tau) > b$ por ser σ el único símplice tal que $f(\sigma) \in (a, b]$. Es más, aplicando el Lema 2.39 sabemos que $f(\tilde{\tau}) > b$ para toda cocara $\tilde{\tau}$ de σ de cualquier dimensión. Como consecuencia $\sigma \notin K(a)$.

Veamos ahora que $\nu \notin K(a)$. Sabemos que $f(\nu) \geq f(\sigma) > a$. Además, si consideramos $\sigma'^{(p)} > \nu$, se tiene que $f(\sigma') > a$. En efecto,

- Si $\sigma' = \sigma$ ya lo tenemos pues $f(\sigma) \in (a, b]$.
- Si $\sigma' \neq \sigma$, entonces $f(\sigma') > f(\nu) \geq f(\sigma) > a$.

De nuevo por el Lema 2.39, $f(\hat{\sigma}) > a$ para toda cocara $\hat{\sigma}$ de ν de cualquier dimensión. Obtenemos así que $\nu \notin K(a)$.

Por otro lado, $\{\nu, \sigma\}$ es un par libre en $K(b)$, ya que ν no tiene otras cocaras en $K(b)$. Esto es cierto pues para todo $\hat{\sigma} > \nu$ tal que $\hat{\sigma} \neq \sigma$ se tiene que $f(\hat{\sigma}) > b$, ya que vimos que $f(\hat{\sigma}) > a$ y σ es el único símplice cuyo valor está en $(a, b]$.

Por último, $K(b) = K(a) \cup \{\nu, \sigma\}$, pues el hecho de que $\sigma \notin K(a)$ no implica que algunas de sus caras tampoco estén en $K(a)$. En efecto, si consideramos $\nu'^{(p-1)} < \sigma$ tal que $\nu' \neq \nu$, entonces $f(\nu') < f(\sigma)$ y por tanto $f(\nu') \leq a$, concluyendo así que $\nu' \in K(a)$, así como todas sus caras.

□

Una vez visto el Teorema 3.2 nos encontramos en condiciones de probar el recíproco de la Observación 2.16, muy útil para determinar que ciertos complejos simpliciales son colapsables.

Proposición 3.3. *Si $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de Morse discreta con exactamente un símplice crítico, entonces K es colapsable.*

Demostración. Por la Observación 2.11 sabemos que toda función de Morse discreta debe tener al menos un 0-símplice crítico. Sea $\{v_0\}$ el único símplice crítico y denotemos $f(\{v_0\}) = a \in \mathbb{R}$. Sabemos además por la Observación 2.18 que K debe ser conexo por caminos al existir un único símplice crítico. Consideremos $b = \max_{\sigma \in K} \{f(\sigma)\}$. Es claro que en $(a, b]$ no hay valores críticos por ser $a = f(\{v_0\})$ el único. Podemos aplicar el Teorema 3.2 (del colapso) y tenemos que $K = K(b) \searrow K(a)$.

Basta probar que $K(a) = \{\{v_0\}\}$ para concluir la prueba. En efecto, todo 1-símplice $\{v_0, v_1\} \in K(a)$ (de existir) debe verificar que $f(\{v_0, v_1\}) > f(\{v_0\}) = a$, por ser $\{v_0\}$ un símplice crítico. Por el Lema 2.39 obtenemos que toda cocara τ de $\{v_0\}$ verifica que $f(\tau) > a$. Así, toda cocara v de $\{v_0, v_1\}$ también verifica que $f(v) > a$ y $\{v_0, v_1\} \notin K(a)$. Por tanto, $\{v_0\}$ no es cara de ningún símplice en $K(a)$ y $K(a) = \{\{v_0\}\}$. \square

Corolario 3.4. *Un complejo simplicial K es colapsable si y solo si admite una función de Morse discreta con exactamente un símplice crítico.*

3.2. Desigualdades de Morse discretas débiles

Existe una fuerte relación entre la homología de un complejo simplicial (en particular sus números de Betti) y el número de símplices críticos de cualquier función de Morse discreta en ese mismo complejo simplicial. Esta relación se observa en las desigualdades de Morse discretas débiles.

Teorema 3.5 (Desigualdades de Morse discretas débiles). *Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta con m_i símplices críticos de dimensión i , para $i = 0, 1, \dots, n = \dim(K)$. Entonces,*

- (i) $b_i \leq m_i$, para todo $i = 0, 1, \dots, n$
- (ii) $\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i$.

Demostración. En ambos apartados podremos asumir por el Lema 2.15 que f es excelente.

Para (i) procedemos por inducción sobre m , el número de símplices de K .

- Para $m = 1$ se tiene que $K = *$, luego $b_0(K) = 1$ y $b_i(K) = 0$ para todo $i \geq 1$. Aplicando la Observación 2.11 concluimos que $m_0 = 1 = b_0$.

- Suponemos que el enunciado es cierto para complejos simpliciales con j simplices, donde $1 \leq j \leq m$.

- Supongamos ahora que K es un complejo simplicial con $m + 1$ simplices y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta excelente. Considerando $M = \max\{f\}$ se distinguen los siguientes casos:

- (a) Si M es un valor crítico le corresponderá un único p -simplex crítico σ , que además es maximal. Podemos entonces considerar $K' = K \setminus \{\sigma\}$ y $f' = f|_{K'} : K' \rightarrow \mathbb{R}$. Es claro que f' es una función de Morse discreta satisfaciendo $m_p(K) = m_p(K') + 1$ y $m_i(K) = m_i(K')$ para todo $i \neq p$. Además, al eliminar el simple σ de K , por la Proposición 1.57 se tiene que $b_p(K) = b_p(K') + 1$, o bien $b_{p-1}(K) = b_{p-1}(K') - 1$, mientras que $b_i(K) = b_i(K')$ para el resto de valores.

Supongamos en primer lugar que $b_p(K) = b_p(K') + 1$ (y $b_{p-1}(K) = b_{p-1}(K')$). Por la hipótesis inductiva tenemos que $b_i(K') \leq m_i(K')$ para todo i . Así,

$$\begin{aligned} b_p(K) &= b_p(K') + 1 \leq m_p(K') + 1 = m_p(K) \\ b_i(K) &= b_i(K') \leq m_i(K') = m_i(K), \text{ para } i \neq p \end{aligned}$$

Por otro lado, supongamos que $b_{p-1}(K) = b_{p-1}(K') - 1$ (y $b_p(K) = b_p(K')$). En este caso de nuevo podemos aplicar la hipótesis inductiva para obtener que $b_i(K') \leq m_i(K')$ para todo i . De esta forma,

$$\begin{aligned} b_p(K) &= b_p(K') \leq m_p(K') < m_p(K) \\ b_{p-1}(K) &= b_{p-1}(K') - 1 \leq m_{p-1}(K') - 1 = m_{p-1}(K) - 1 < m_{p-1}(K) \\ b_i(K) &= b_i(K') \leq m_i(K') = m_i(K), \text{ para } i \neq p, p-1 \end{aligned}$$

- (b) Si M no es un valor crítico le corresponderá un simple σ regular, el cual parte de un par libre. La eliminación del par libre equivale a un colapso elemental, por lo que aplicando el Corolario 1.56 obtenemos que el complejo simplicial K' resultante tiene los mismos números de Betti, luego por la hipótesis inductiva se concluye que para todo i , $b_i(K) = b_i(K') \leq m_i(K') = m_i(K)$.

Para el apartado (ii) definimos d_i^+ y d_i^- , el número de i -simplices regulares que forman un vector gradiente con un $(i + 1)$ -simplex y con un $(i - 1)$ -simplex, respectivamente. Recordemos también que c_i es el número total de i -simplices de K . Para cualquier dimensión i se tiene que $c_i = m_i + d_i^- + d_i^+$.

Además, $d_0^- = 0$, $d_n^+ = 0$ y $d_i^+ = d_{i+1}^-$ para $0 \leq i \leq n - 1$. De aquí,

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i c_i = \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i m_i \right) + \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^- \right) + \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^+ \right) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i.$$

□

Estas desigualdades de Morse permiten obtener interesantes propiedades. Por ejemplo, el primer apartado garantiza que si f no tiene p -simplices críticos entonces $H_p(M) = 0$.

3.3. Optimizando funciones de Morse discretas

Una vez estudiado el Teorema 3.5 (desigualdades de Morse discretas débiles), nos interesa saber cuándo tienen lugar las igualdades. Para estudiar esto, introduzcamos primero la siguiente definición.

Definición 3.6. Sea K un complejo simplicial de dimensión n y $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta. Se define el **vector de Morse discreto de f** como

$$\vec{f} = (m_0^f, m_1^f, \dots, m_n^f),$$

donde m_i^f es el número de i -símplices críticos de f .

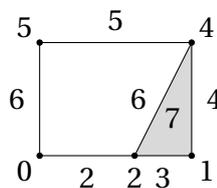
Observando el apartado (i) del Teorema 3.5 parece lógico destacar aquellas funciones de Morse discretas cuyo número de i -símplices críticos se acerca lo máximo posible al i -ésimo número de Betti del complejo simplicial asociado.

Definición 3.7. Dada una función de Morse discreta $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, diremos que

- (i) El vector de Morse discreto \vec{f} es **óptimo** si $\sum_{i=0}^n m_i^f$ es mínimo, es decir, si para cualquier otra función de Morse discreta $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene que $\sum_{i=0}^n m_i^f \leq \sum_{i=0}^n m_i^g$.
- (ii) El vector de Morse discreto \vec{f} se dice que es **perfecto** si $\vec{f} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$, donde b_i denota el i -ésimo número de Betti de K .

Nótese que si \vec{f} es perfecto, entonces \vec{f} es único y óptimo.

Es fácil encontrar funciones de Morse discretas que no sean perfectas. Por ejemplo, tomando la función de Morse discreta f sobre el complejo simplicial K del Ejemplo 2.38.



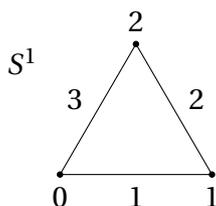
Podemos observar que el vector de Morse discreto es $\vec{f} = (2, 1, 1)$, el cual no es perfecto pues haciendo uso de homología se tiene que $b_0(K) = 1, b_1(K) = 1, b_2(K) = 0$.

A continuación se presentan algunos complejos simpliciales que admiten funciones de Morse discretas perfectas.

Ejemplo 3.8. Todo complejo simplicial K colapsable admite una función de Morse discreta perfecta. En particular esto es cierto para el n -disco simplicial Δ^n , para todo $n = 0, 1, \dots$ La demostración es inmediata aplicando la Observación 2.16, pues

una función de Morse discreta con un único símplice crítico verifica que $m_0 = b_0 = 1$ y $m_i = b_i = 0$ para todo $i > k$ (ver Corolario 1.56).

Además, la n -esfera simplicial S^n también admite una función de Morse discreta perfecta para $n = 0, 1, \dots, n$. Basta observar que $S^n = \Delta^{n+1} \setminus \{\sigma^{(n+1)}\}$ y definir $g = f|_{S^n}$, siendo $f : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función de Morse discreta con un único símplice crítico definida en la Observación 2.16 y que se ilustra para $n = 2$ en el Ejemplo 2.17.



Sin embargo, no todo complejo simplicial admite una función de Morse discreta perfecta.

Proposición 3.9. Si K es un complejo simplicial no colapsable con $b_0(K) = 1$, $b_i(K) = 0$ para todo $i > 0$, entonces K no admite una función de Morse discreta perfecta.

Demostración. Consecuencia directa de la Proposición 3.3. □

Observación 3.10. No es difícil calcular los números de Betti del “sombrero de burro” D , que resultan ser $b_0(D) = 1$ y $b_i(D) = 0$ para $i > 0$. Además, en la Observación 1.26 se comentó que no es colapsable, por lo que en virtud de la Proposición 3.9 no admite una función de Morse discreta perfecta.

Lo visto hasta ahora nos da a entender que una función de Morse discreta es “mejor” si induce menos símplices críticos. Recordemos el Teorema del colapso, el cual nos dice que si no hay ningún valor crítico en cierto intervalo podemos simplificar el complejo simplicial sin cambiar su tipo de homotopía simple. Así, si podemos encontrar una función de Morse discreta perfecta sobre un complejo simplicial, entonces podremos simplificar su estructura sin cambiar sus propiedades topológicas. Uno de los posibles métodos para mejorar las funciones de Morse discretas es el que veremos a continuación.

Proposición 3.11 (Cancelación de símplices críticos). Sea V el campo vectorial gradiente sobre un complejo simplicial K . Supongamos que $\sigma^{(p)}$ y $\tau^{(p+1)}$ son símplices críticos y que existe, fijado $\sigma_0^p < \tau$, un único V -camino γ de la forma

$$\tau, (\sigma_0^{(p)}, \tau_0^{(p+1)}), (\sigma_1^{(p)}, \tau_1^{(p+1)}), \dots, (\sigma_{n-1}^{(p)}, \tau_{n-1}^{(p+1)}), \sigma_n^{(p)} = \sigma$$

desde τ hasta σ . Entonces, existe otro campo vectorial gradiente \tilde{V} en K que coincide con V fuera de γ y tiene los mismos símplices críticos que V , excepto σ y τ que ya no lo son.

Demostración. Definimo \tilde{V} verificando:

- (a) $\tilde{V} - \gamma = V - \gamma$, es decir, los pares donde no aparece ningún símplice implicado en γ se mantienen.
- (b) $(\sigma_0, \tau) \in \tilde{V}$.
- (c) $(\sigma_{i+1}, \tau_i) \in \tilde{V}$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Nótese que σ y τ no son críticos en \tilde{V} .

De (a) obtenemos que los símplices críticos de $\tilde{V} - \gamma$ son exactamente los de $V - \gamma$. Además, $\tilde{V} - \gamma$ no puede contener ningún V -camino cerrado ya que no lo puede contener el campo vectorial gradiente V (Teorema 2.26). Supongamos que existe un V -camino \tilde{V} en γ , esto es, supongamos sin pérdida de generalidad que existe $\sigma_j^{(p)} = \sigma_i^{(p)}$ para algún $0 < i < j < n$. Sin embargo, esto implica que

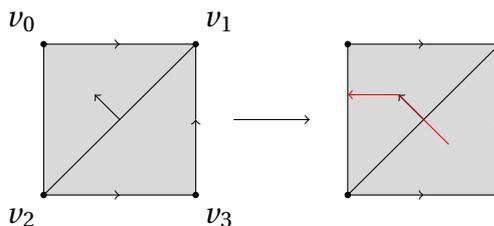
$$\gamma' = \tau, (\sigma_0, \tau_0), \dots, (\sigma_i = \sigma_j, \tau_j), \dots, (\sigma_{n-1}, \tau_{n-1}), \sigma_n = \sigma$$

es un V -camino desde τ hasta σ y $\gamma' \neq \gamma$, lo cual contradice que γ sea el único V -camino de la forma dada. Concluimos así que \tilde{V} es un campo vectorial gradiente donde existe el \tilde{V} -camino $\tilde{\gamma} = (\sigma, \tau_{n-1}), \dots, (\sigma_1, \tau_0), (\sigma_0, \tau)$ que invierte a γ .

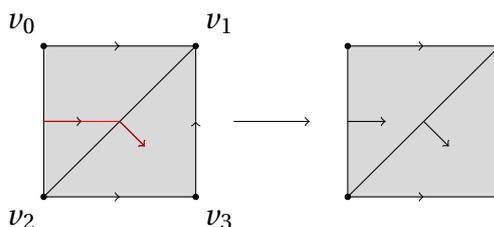
□

La idea principal de este método se basa en invertir un camino para construir un nuevo campo vectorial gradiente con menos símplices críticos. De hecho, este camino invertido es único, lo cual puede demostrarse de forma similar a la prueba anterior.

Ejemplo 3.12. Dado el siguiente campo vectorial gradiente V sobre un complejo simplicial K , podemos considerar el V -camino $\gamma = v_1 v_2 v_3, (v_1 v_2, v_0 v_1 v_2), v_0 v_2$ que representaremos en rojo



γ une $v_1 v_2 v_3$ con $v_0 v_2$, ambos símplices críticos en V . El método de cancelación de símplices críticos define un camino inverso $\tilde{\gamma} = (v_0 v_2, v_0 v_1 v_2), (v_1 v_2, v_1 v_2 v_3)$, el cual cobra sentido en un nuevo campo vectorial gradiente \tilde{V} , que coincide con V fuera de γ y donde $v_1 v_2 v_3$ y $v_0 v_2$ ya no son críticos.



3.4. Homología de Morse y homología simplicial

En la Sección 3.2 relacionamos la homología simplicial y la Teoría de Morse discreta mediante las desigualdades de Morse discretas. En esta sección presentamos una conexión más profunda entre ambas, usando la Teoría de Morse discreta para dar métodos que simplifiquen el cálculo de la homología simplicial.

Para ello, será necesario redefinir el concepto de campo vectorial gradiente inducido (Definición 2.20) en forma de aplicación sobre un complejo simplicial.

Definición 3.13. Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta. Definimos la función $V_p : V(K_p) \rightarrow V(K_{p+1})$ como

$$V_p(\sigma) = \begin{cases} \tau & \text{si existe } \tau > \sigma \text{ tal que } f(\tau) \leq f(\sigma) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

extendiéndola por linealidad ($V_p(\sum \sigma) = \sum V_p(\sigma)$). La colección de funciones $V = \{V_p\}$, con $p = 0, 1, \dots, n$, siendo $n = \dim(K)$, se denomina **campo vectorial gradiente inducido por f** .

Proposición 3.14. Sea V un campo vectorial gradiente sobre un complejo simplicial K y sea $\sigma^{(p)} \in K$. Entonces

- (i) $V_{i+1} \circ V_i = 0$, para todo $i = 0, 1, \dots$
- (ii) $|\{v^{(p-1)} : V(v) = \sigma\}| \leq 1$.
- (iii) σ es crítico si y solo si $\sigma \notin \text{Im}(V)$ y $V(\sigma) = 0$.

Demostración. Consecuencia de la definición de función de Morse discreta. □

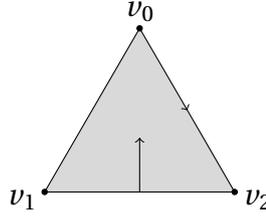
Esta definición permite ver un campo vectorial gradiente como un *flujo*, enviando cada símplice desde la cola de una flecha hasta su punta. Para estudiarlo formalmente de esta manera, Forman [5] definió lo que se conoce como *flujo de gradiente discreto*.

Definición 3.15. Sea V un campo vectorial gradiente sobre un complejo simplicial K . El **flujo gradiente (discreto)**, o simplemente *flujo*, inducido por V se define como la transformación lineal $\phi_p : V(K_p) \rightarrow V(K_p)$ dada por

$$\phi_p(\sigma) = \sigma + \partial_{p+1}(V_p(\sigma)) + V_{p-1}(\partial_p(\sigma)).$$

Escribiremos $\phi(\sigma) = \sigma + \partial(V(\sigma)) + V(\partial(\sigma))$ cuando p esté claro en el contexto.

Ejemplo 3.16. Consideremos el campo vectorial gradiente V sobre el complejo simplicial siguiente



Denotando por $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$, con $i \in \{0, 1\}$, $j \in \{1, 2\}$ y $f_{012} = \{v_0, v_1, v_2\}$,

$$\begin{aligned} \phi(e_{01}) &= e_{01} + \partial(0) + V(v_0 + v_1) = e_{01} + e_{02}, \\ \phi(e_{02}) &= e_{02} + \partial(0) + V(v_0 + v_2) = e_{02} + e_{02} = 0, \\ \phi(e_{12}) &= e_{12} + \partial(f_{012}) + V(v_1 + v_2) = e_{12} + e_{01} + e_{02} + e_{12} = e_{01} + e_{02}. \end{aligned}$$

La siguiente propiedad será de gran utilidad a la hora de interpretar la homología simplicial utilizando la teoría de Morse discreta.

Lema 3.17. *El flujo gradiente sobre un complejo simplicial K conmuta con el operador frontera, es decir, $\phi \circ \partial = \partial \circ \phi$.*

$$\begin{array}{ccc} V_p(K) & \xrightarrow{\phi} & V_p(K) \\ \partial_p \downarrow & & \downarrow \partial_p \\ V_{p-1}(K) & \xrightarrow{\phi} & V_{p-1}(K) \end{array}$$

Demostración. Es claro utilizando la Definición 3.15 (de flujo gradiente) y recordando que $\partial^2 = 0$ (Proposición 1.50). □

Se dice que una función $f : X \rightarrow X$ se **estabiliza** en x si existe m tal que $f^{m+1}(x) = f^m(x)$. Por supuesto, si f se estabiliza en x , entonces $f^{m'}(x) = f^m(x)$ para cualquier $m' > m$. Esta idea se puede aplicar al flujo gradiente como se muestra en el siguiente resultado, cuya prueba no incluiremos debido a su longitud y tecnicidad (se puede ver en [7]).

Teorema 3.18. *Sea $\sigma \in V(K_p)$, con $p = 0, 1, \dots, n$. Entonces, existe N tal que $\phi^i(\sigma) = \phi^j(\sigma)$ para todo $i, j \geq N$.*

Ahora estamos en condiciones de introducir el complejo flujo, un nuevo complejo de cadenas que nos permitirá redefinir la homología simplicial en términos de la Teoría de Morse discreta.

Definición 3.19. *Sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta. Definimos $F_p(K) = \{c \in V(K_p) : \phi(c) = c\}$. Debido a la linealidad de ϕ , podemos restringir el operador borde $\partial_p : V(K_p) \rightarrow V(K_{p-1})$ a $\partial_p : F_p(K) \rightarrow F_{p-1}(K)$, obteniendo el complejo de cadenas $F(K)$ denominado **complejo flujo** en K (asociado a f).*

$$\dots \rightarrow F_{p+1}(K) \xrightarrow{\partial_{p+1}} F_p(K) \xrightarrow{\partial_p} F_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} F_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Presentamos ahora el principal resultado de la sección.

Teorema 3.20. *Dada $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función de Morse discreta, se tiene que $H_p(K) \cong H_p(F(K))$ para todo $p \geq 0$.*

Demostración. Por el Teorema 3.18 sabemos que, para todo p , todo elemento de $V_p(K)$ estabiliza en algún momento a un elemento de $F_p(K)$. Esto nos proporciona un morfismo de complejos de cadenas $\phi^\infty : V(K) \rightarrow F(K)$.

$$\begin{array}{ccc} V_p(K) & \xrightarrow{\partial} & V_{p-1}(K) \\ \phi_p^\infty \downarrow & & \downarrow \phi_{p-1}^\infty \\ F_p(K) & \xrightarrow{\partial} & F_{p-1}(K) \end{array}$$

Veamos que la transformación lineal inducida $\phi_*^\infty : H_i(K) \rightarrow H_i(F(K))$ es un isomorfismo cuya inversa es i_* , siendo $i : F(K) \rightarrow V(K)$ el morfismo de cadenas con i_p la inclusión en el nivel p .

Por un lado, es evidente que $\phi^\infty \circ i = 1_{F(K)}$, luego por la funtorialidad de H_i se tiene que $\phi_*^\infty \circ i_* = 1_{H_p(F(K))}$, para $0 \leq p \leq n$.

Consideremos ahora $[z] \in H_p(K)$. Entonces, $(i_* \circ \phi_*^\infty)([z]) = [(i \circ \phi_p^\infty)(z)] = [\phi_p^\infty(z)]$. Basta ver que $[\phi_p^\infty(z)] = [z]$ para concluir la prueba.

Veamos que $\phi(z) \in [z]$ y aplicando ϕ repetidamente obtenemos que $\phi^N(z) \in [z]$, con $N \in \mathbb{N}$ tal que $\phi^N(z) = \phi^\infty(z)$. Por definición, $\phi(z) = z + \partial(V(z)) + V(\partial(z))$. Nótese que, claramente, $\partial(V(z)) \in \text{Im}(\partial)$ y $V(\partial(z)) = 0$ pues $z \in \ker(\partial)$, por lo que $\phi(z) \in [z]$ y $[\phi^\infty(z)] = [\phi^N(z)] = [z]$.

□

Computaciones en teoría de Morse discreta

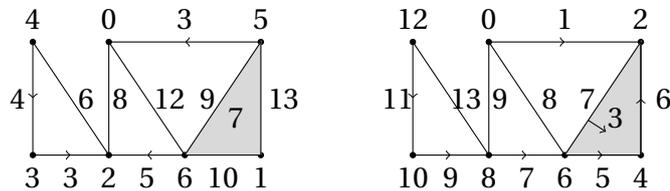
Para terminar este trabajo presentaremos algunos algoritmos que pueden ser implementados para realizar cálculos usando la Teoría de Morse discreta. En la primera sección introduciremos la denominada Teoría de Morse discreta aleatoria, mientras que en la segunda sección se presentará de manera breve y a modo introductorio otros algoritmos útiles para construir “buenos” campos vectoriales gradientes. Existen más posibilidades relacionadas con homología simplicial u homología persistente, pero se escapan de los objetivos de este trabajo.

4.1. Teoría de Morse discreta aleatoria

En esta sección se introduce una nueva forma de ver una función de Morse discreta desde un punto de vista algorítmico.

Como ya sabemos, el concepto de función óptima y perfecta (Definición 3.7) nos indican cuándo una función de Morse discreta es “mejor” que otra.

Ejemplo 4.1. Sea K el siguiente complejo simplicial, sobre el cual se muestra dos funciones de Morse discretas f (a la izquierda) y g (a la derecha) y sus campos vectoriales gradientes inducidos.



Se tiene que $\vec{f} = (3, 6, 1)$ y $\vec{g} = (1, 3, 0)$. Como $\vec{g} = (b_0, b_1, b_2)$, es óptimo.

Aunque todo complejo simplicial admite al menos una función de Morse discreta óptima, encontrar una puede ser un reto. Nótese que un vector de Morse discreto óptimo no tiene por qué ser único. De hecho, K. Adiprasito, B. Benedetti y F. Lutz demostraron el siguiente resultado en [1].

Teorema 4.2. Para cada $n \geq 3$ existe un complejo simplicial n -dimensional no colapsable con vectores de Morse discretos óptimos $(1, 0, \dots, 1, 1, 0)$ y $(1, 0, \dots, 1, 1)$.

Estudiamos ahora una aproximación “aleatorizada” a la teoría de Morse discreta para definir una función de Morse discreta aleatoria sobre un complejo simplicial. Un intento de ordenar los valores de f adecuadamente elimina la aleatoriedad y parece complicado. El algoritmo de Benedetti-Lutz [3] evita estas dificultades viendo las funciones de Morse discretas en términos de su geometría. Formalmente, el algoritmo B-L se describe de la siguiente forma:

Algoritmo 1 B-L algorithm

Input : A n -dimensional abstract finite simplicial complex given by its list of facets
 Output : The resulting discrete Morse vector (c_0, c_1, \dots, c_n)

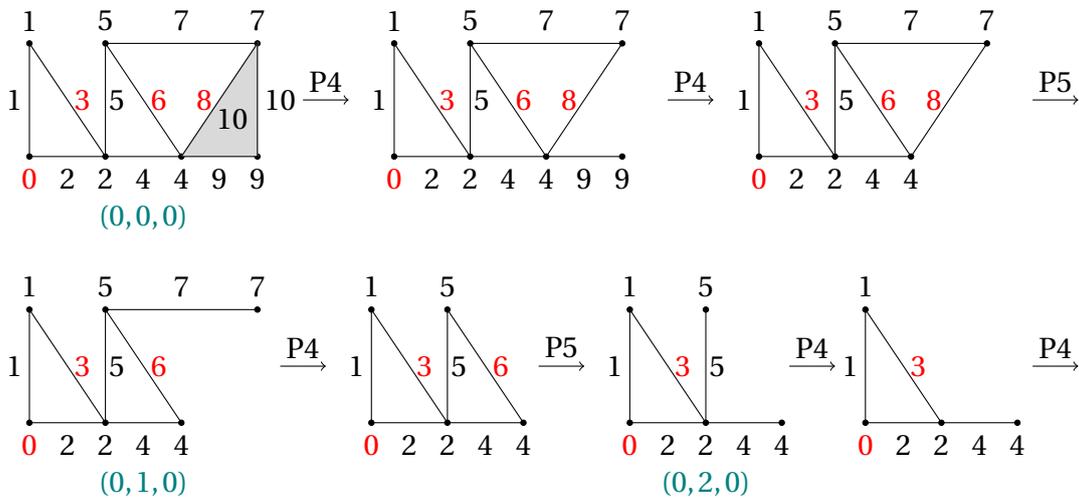
- 1 Initialize $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$
- 2 If the simplicial complex is empty, STOP. Otherwise, go to Step 3
- 3 If there is a free codimension-1 face, go to Step 4. If not, go to Step 5
- 4 Pick a free codimension-1 coface uniformly at random and delete it with the unique face that contains it. Go back to Step 2
- 5 Pick a top-dimensional i -face uniformly at random and delete it, and set $c_i = c_i + 1$. Go back to Step 2

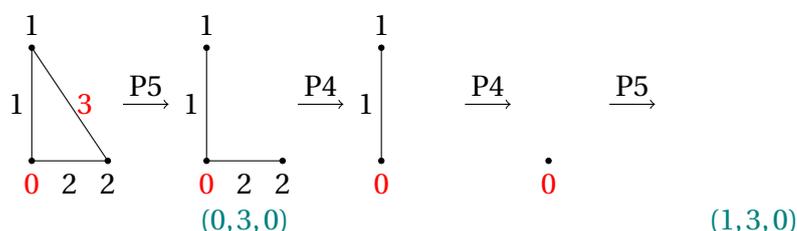
Ejemplo 4.3. Para ilustrarlo, vamos a aplicar el Algoritmo 1 al complejo simplicial del Ejemplo 4.1. La idea es simple: se inicia con un vector de Morse discreto trivial $(0, 0, \dots, 0)$ y se realizan los siguientes pasos, dando preferencia al paso (1):

- (1) Elimina un par libre
- (2) Elimina una cara maximal de la máxima dimensión posible

Tras la realización de cada paso (2), la dimensión de la cara maximal eliminada suma 1 en la correspondiente componente del vector de Morse discreto.

En la siguiente figura, sobre la flecha que marca cada transición señalaremos el paso del algoritmo aplicado. El vector de Morse discreto se va actualizando en verde.





Obsérvese además cómo, realizando el algoritmo en sentido inverso, se obtiene la función de Morse discreta que señalamos en la figura de la siguiente manera:

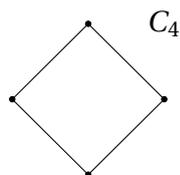
- A cada símlice que “aparece” al deshacer un paso 5 del algoritmo se le asigna el valor consecutivo al máximo de los valores existentes.
- A los dos símlices de cada par libre que “aparece” al deshacer un paso 4 del algoritmo se les asigna el valor consecutivo al máximo de los existentes.

Los cuatro símlices críticos obtenidos son los marcados en rojo.

Definición 4.4. El *espectro de Morse discreto* de un complejo simplicial K es la colección de todos los posibles vectores de Morse discretos producidos por el algoritmo B-L junto con la distribución de las respectivas probabilidades.

Si p_i es la probabilidad de obtener un vector de Morse discreto \vec{c}_i , entonces el espectro de Morse discreto de K se denota por $\{p_1 - \vec{c}_1, p_2 - \vec{c}_2, \dots, p_k - \vec{c}_k\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$, donde $\sum p_i = 1$ y $p_i \neq 0$ para todo i .

Ejemplo 4.5. Es claro que el espectro de Morse discreto del complejo simplicial C_n es $\{1 - (1, 1)\}$ para todo $n \geq 3$.



Por la definición del algoritmo, el siguiente resultado es inmediato.

Proposición 4.6. Sea K un complejo simplicial. El vector de Morse discreto de salida en una sola ejecución del algoritmo B-L es $(1, 0, 0, \dots, 0)$ si y solo si K es colapsable.

Sin embargo, dado un complejo K , es posible que no se obtenga una función de Morse discreta óptima ni siquiera después de muchas implementaciones del algoritmo, como se muestra en el siguiente resultado.

Proposición 4.7. Para todo $\varepsilon > 0$ existe un complejo simplicial K para el cual la probabilidad de que el algoritmo B-L da lugar a una función de Morse discreta óptima (o a un vector de Morse discreto óptimo) de K es menor que ε .

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $\frac{6}{n+6} < \varepsilon$. Consideremos el siguiente complejo simplicial con n aristas entre los triángulos.



Una condición necesaria para que un vector de Morse discreto obtenido por el algoritmo B-L sea óptimo es que la primera arista eliminada pertenezca a uno de los triángulos, como se puede comprobar fácilmente realizando el proceso en un caso sencillo, $n = 2$ por ejemplo. La probabilidad de elegir en primer lugar una arista de un triángulo es menor o igual que $\frac{6}{n+6} < \varepsilon$.

□

4.2. Otros algoritmos en teoría de Morse discreta

En esta sección introduciremos un algoritmo desarrollado por King et al. [6], que utiliza los valores de una función definida sobre los vértices de un complejo simplicial para construir un campo vectorial gradiente con “pocos” simplices críticos. Este algoritmo utiliza como subrutinas otros que implementan algunos de los resultados probados en el Capítulo 3, por lo que es de interés presentarlos. Pero antes, fijemos alguna notación y terminología.

Definición 4.8. Sea K un complejo simplicial, V el conjunto de sus vértices y $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva. Se define la **filtración estrella inferior sobre K inducida por f_0** como la aplicación $\text{máx } f_0 : K \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\text{máx } f_0(\sigma) := \text{máx}_{0 \leq j \leq i} \{f_0(v_j)\}$, para $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_i\}$.

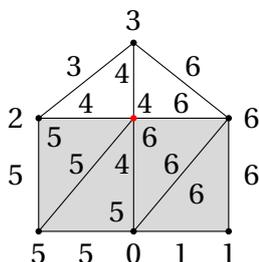
Cabe destacar que la filtración estrella inferior no tiene por qué ser una función de Morse discreta. Definiremos a continuación algunos subcomplejos distinguidos de un complejo simplicial K fijado un vértice v .

Definición 4.9. Dado un vértice v de un complejo simplicial K , definimos:

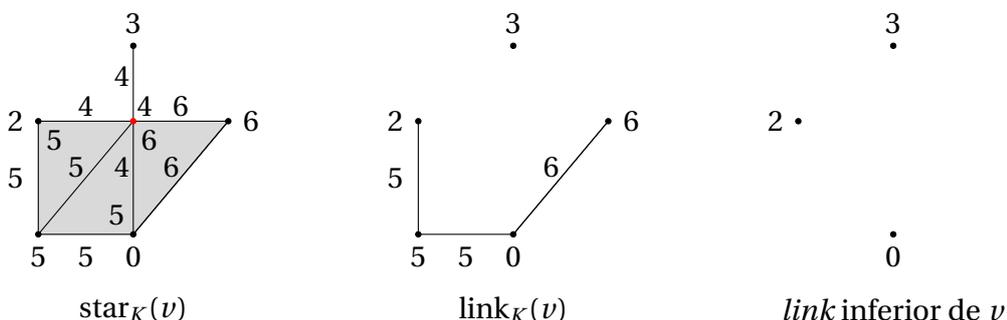
- (a) La **estrella de v en K** $\text{star}_K(v)$ es el complejo simplicial inducido por el conjunto de todos los simplices de K que contienen a v .
- (b) El **link de v en K** se define como $\text{link}_K(v) := \text{star}_K(v) \setminus \{\sigma \in K : v \in \sigma\}$.
- (c) El **link inferior de v** es el subcomplejo maximal de $\text{link}_K(v)$ cuyos vértices tienen valor por f_0 menor que $f_0(v)$.

Nótese que el link inferior depende de la función f_0 elegida, mientras que el link no. Ilustramos las definiciones anteriores en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.10. Sea K el siguiente complejo simplicial y $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación sobre los vértices. Inducimos sobre el resto de los simplices $\sigma \in K$ el valor $\text{máx } f_0(\sigma)$.



Denotando $v = f_0^{-1}(4)$ al vértice marcado en rojo, tenemos:



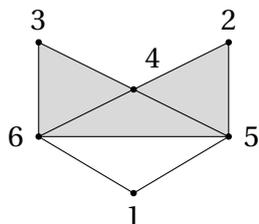
Observación 4.11. Si $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación inyectiva sobre los vértices de un complejo simplicial K y $f_0(u) = \min_{v \in V} f_0(v)$, entonces el *link inferior* de u en K es vacío. Esto es evidente por la Definición 4.9 (c), pues no hay vértices con valor menor que $f_0(u)$.

En la Definición 1.27 vimos el concepto de *join* entre dos complejos simpliciales. Introduzcamos ahora la definición de *join* entre dos símlices.

Definición 4.12. Dados $\sigma^{(i)}$ y $\tau^{(j)}$ dos símlices disjuntos de un complejo simplicial K , llamaremos *join* de σ y τ a

$$\sigma * \tau = \begin{cases} \sigma \cup \tau & \text{si } \sigma \cup \tau \in K \\ \text{indefinido} & \text{si } \sigma \cup \tau \notin K. \end{cases}$$

Ejemplo 4.13. Sean K el siguiente complejo simplicial y $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$.



Se tiene que $\{f_0^{-1}(2)\} * \{f_0^{-1}(5)\} = \{f_0^{-1}(2), f_0^{-1}(5)\}$, mientras que $\{f_0^{-1}(2)\} * \{f_0^{-1}(3)\}$ no está definido.

Observación 4.14. Por definición, el *link inferior* de v también está dado por el conjunto de símlices $\sigma \in K$ tales que $\sigma * v$ está definido y $\max f_0(\sigma) < \max f_0(v)$.

A continuación presentamos el algoritmo principal de esta sección, denominado Extract, el cual produce un campo vectorial gradiente a partir de un conjunto de valores en los vértices. Nótese que en él se “llama” a otros dos algoritmos, ExtractRaw y ExtractCancel, que serán definidos posteriormente.

Algoritmo 2 Extract

Input : A n -dimensional simplicial complex K , injective $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ and $p \geq 0$

Output : A gradient vector field $(A, B, C, r : B \rightarrow A)$ on K

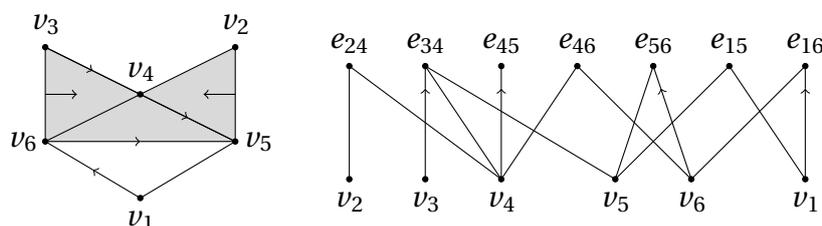
- 1 ExtractRaw(K, f_0) (Algoritmo 3)
- 2 **for** $j = 1, \dots, n$ **do**
- 3 ExtractCancel(K, h, p, j) (Algoritmo 5)
- 4 **end for**

Obsérvese que el *Output* es un campo vectorial gradiente expresado de la forma $(A, B, C, r : B \rightarrow A)$. Los símlices críticos forman el conjunto C y para $(\sigma, \tau) \in K$, la cola σ se coloca en A y la punta τ en B .

Antes de ilustrar el algoritmo definamos un subgrafo R_i , con $i = 1, \dots, n$, del diagrama de Hasse dirigido inducido por un campo vectorial gradiente. Para cada i consideramos $A_i = A \cap K_i$, $B_i = B \cap K_i$ y $C_i = C \cap K_i$, donde recordemos que $K_i = \{\sigma \in K : \dim(\sigma) = i\}$. Los vértices de R_i son los $(i-1)$ -símlices de $A_{i-1} \cup C_{i-1}$ y los i -símlices de $B_i \cup C_i$, mientras que las aristas de R_i van desde σ a sus caras de codimensión 1, a no ser que $\sigma \in B_i$. En ese caso van desde $r(\sigma)$ a σ .

A partir de ahora se utilizará la notación $e_{ij} = \{v_i, v_j\}$, con $i < j$.

Ejemplo 4.15. Consideremos el siguiente campo vectorial gradiente sobre el complejo simplicial K del Ejemplo 4.13 (a la izquierda). Se puede comprobar que $A_0 = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$, $B_1 = \{e_{16}, e_{34}, e_{45}, e_{56}\}$, $C_0 = \{v_2, v_5\}$ y $C_1 = \{e_{15}, e_{24}, e_{46}\}$, por lo que R_1 viene dado por el grafo de la derecha.



Para comprender el Algoritmo 2 es necesario desarrollar previamente los Algoritmos 3 y 5.

Algoritmo 3 ExtractRaw

Input : A n -dimensional simplicial complex K and injective $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$

Output : A gradient vector field $(A, B, C, r : B \rightarrow A)$ on K

- 1 Initialize A, B, C to be empty
- 2 **for all** $v \in K_0$ **do**
- 3 Let K' be the lower link of v
- 4 **if** $K' = \emptyset$ **then** add v to C

```

5  else
6    Add  $v$  to  $A$ 
7    Let  $f'_0 : K'_0 \rightarrow \mathbb{R}$  be the restriction of  $f_0$ 
8     $(A', B', C', r') \leftarrow \text{Extract}(K', f'_0, \infty)$ 
9    Find the  $w_0 \in C'_0$  such that  $f'_0(w_0)$  is the smallest
10   Add  $vw_0$  to  $B$ 
11   Define  $r(vw_0) := v$ 
12   for each  $\sigma \in C' - \{w_0\}$  add  $v * \sigma$  to  $C$ 
13   for each  $\sigma \in B'$  add  $v * \sigma$  to  $B$ 
14   Add  $v * r'(\sigma)$  to  $A$ 
15   Define  $r(v * \sigma) = v * r'(\sigma)$ 
16 end if
17 end for

```

El Algoritmo 3 funciona inductivamente sobre el *link* de un vértice. Se elige un vértice v en el paso 2 y se calcula su *link* inferior. Entonces se determina si v es crítico o regular. Si es crítico, seguimos adelante y se elige otro vértice. De lo contrario, el paso 8 pasa este enlace al Algoritmo 2, que a su vez lo devuelve al Algoritmo 3. Esto da un campo vectorial gradiente en el *link* de v . A partir de esta información, los pasos 9-15 determinan un vector en el campo vectorial gradiente.

Ejemplo 4.16. En este ejemplo ilustraremos el Algoritmo 3 sobre el complejo simplicial K con la aplicación f_0 del Ejemplo 4.13 junto con la notación en los vértices del Ejemplo 4.15.

Comenzamos estableciendo $A = B = C = \emptyset$. Para el paso 2 consideremos $v_4 \in K_0$. El *link* inferior de v_4 es $K' = \{v_2, v_3\}$, por lo que por el paso 6 tenemos $A = \{v_4\}$ y $f'_0 : K'_0 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f'_0(v_2) = 2, f'_0(v_3) = 3$ por el paso 7. En el paso 8 pasamos (K', f'_0, ∞) al Algoritmo 2, que nos envía de vuelta al Algoritmo 3 con una nueva entrada. Para el paso 2 de esta nueva ejecución del Algoritmo 3 podemos considerar únicamente $v_2, v_3 \in K'$ con *links* inferiores vacíos, luego $C' = \{v_2, v_3\}$, completando así esta ejecución del Algoritmo 3. Continuando con el paso 2 del Algoritmo 2 observamos que $\dim(K') = 0$, por lo que se finaliza la ejecución del Algoritmo 2 con $A' = B' = \emptyset$ y $C' = \{v_2, v_3\}$. Para los pasos 9-11 del Algoritmo 3 consideramos $w_0 := v_2$, añadimos $B = \{e_{24}\}$ y definimos $r(e_{24}) = v_4$. Ahora, como $C' \setminus \{w_0\} = \{v_3\}$ añadimos $C = \{v_3 * v_4\}$. Como $B' = \emptyset$ saltamos los pasos 13-15. Volviendo al paso 2 elegimos un vértice en K distinto de v_4 y repetimos el proceso.

Una forma de mejorar un campo vectorial gradiente es utilizar el método de cancelación de símlices críticos descrito en la Proposición 3.11. Esto se hará mediante los siguientes dos algoritmos. El primero de ellos tiene la función de invertir las flechas en el único camino gradiente entre dos símlices críticos.

Algoritmo 4 Cancel

Input : A n - dimensional simplicial complex K , injective $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau \in C_{j-1}$ and $\sigma \in C_j$, $1 \leq j \leq n$

Output : A gradient vector field $(A, B, C, r : B \rightarrow A)$ on K

- 1 Find unique gradient path $\sigma = \sigma_1 \rightarrow \tau_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_k = \tau$
- 2 Delete τ and σ from C , add σ to B , and add τ to A
- 3 **for** $i = 1, \dots, k$ **do**
- 4 Redefine $r(\sigma_i) = \tau_i$
- 5 **end for**

Algoritmo 5 ExtractCancel

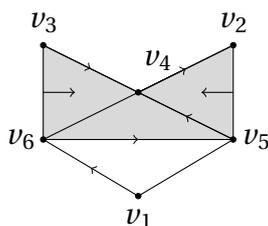
Input: A n - dimensional simplicial complex K , injective $f_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$, $p \geq 0$ and $1 \leq j \leq n$

Output: A gradient vector field $(A, B, C, r : B \rightarrow A)$ on K

- 1 **for all** $\sigma \in C_j$ **do**
- 2 Find all gradient paths $\sigma = \sigma_{i1} \rightarrow \sigma_{i2} \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_{il_i} \in C_{j-1}$ with $\max f_0(\sigma_{il_i}) > \max f_0(\sigma) - p$
- 3 **for all** i **do**
- 4 if σ_{il_i} does not equal any other σ_{jl_j} let $m_i := \max f_0(\sigma_{il_i})$
- 5 **if** at least one m_i is defined **then**
- 6 Choose j with $m_j = \min m_i$
- 7 Cancel($K, f_0, \sigma_{jl_j}, \sigma, j$)
- 8 **end if**
- 9 **end for**
- 10 **end for**

Ejemplo 4.17. Para ilustrar los Algoritmos 4 y 5 utilizamos el campo vectorial gradiente sobre el complejo simplicial K del Ejemplo 4.13 y consideramos $j = 1$.

Sabemos del Ejemplo 4.15 que $C_1 = \{e_{15}, e_{24}, e_{46}\}$ y $C_0 = \{v_2, v_5\}$. Para el primer paso del Algoritmo 5 consideramos $\sigma := e_{24}$. Para el paso 2 se tienen los caminos gradientes e_{24}, v_2 y $e_{24}, (v_4, e_{45}), v_5$. Tenemos que $\max f_0(v_2) = 2$, $\max f_0(v_5) = 5$ y $\max f_0(e_{24}) = 4$. Solo si $p = 3$ el primer camino gradiente verifica $\max f_0(v_2) > \max f_0(e_{24}) - p$, mientras que para el segundo, $\max f_0(v_5) > \max f_0(e_{24}) - p$ si $0 \leq p < 4$. Como $\sigma_{1l_1} = v_2$ y $\sigma_{2l_2} = v_5$ no se igualan a ningún otro σ_{jl_j} definimos $m_1 = \max f_0(v_2) = 2$ y $m_2 = \max f_0(v_5) = 5$. Siguiendo con el paso 6, consideramos $j = 5$ y por tanto pasamos $(K, f_0, v_5, e_{24}, 5)$ al Algoritmo 4. Para el primer paso, el único camino gradiente es $e_{24}, (v_4, e_{45}), v_5$. Para el paso 2 eliminamos v_4 y e_{24} de C , añadimos e_{24} a B y añadimos v_5 a A . Por último, para el paso 3 redefinimos $r(e_{24}) = v_4$ y $r(e_{45}) = v_5$. Esto tiene el efecto de invertir el camino, obteniendo el siguiente campo vectorial gradiente sobre K con un símplice crítico menos.



Observación 4.18. Los Algoritmos 2, 3 y 4 no producen ciclos dirigidos en el diagrama de Hasse resultante, luego por el Teorema 2.26 dichos algoritmos están bien definidos.

Bibliografía

- [1] ADIPRASITO, K.A., BENEDETTI, B. and LUTZ, F.H. *Extremal examples of collapsible complexes and random discrete Morse theory*. Discrete Comput. Geom. 57, no. 4, 2017.
- [2] AYALA, R., FERNÁNDEZ-TERNERO, D. and VILCHES, J.A. *Perfect discrete Morse functions on 2-complexes*. Dpto de Geometría y Topología, Universidad de Sevilla.
- [3] BENEDETTI, B. and LUTZ, F.H. *Random discrete Morse theory and a new library of triangulations*, Exp. Math. 23 (2014), no. 1, 66-94.
- [4] BENEDETTI, B. and LUTZ, F.H. *The dunce hat in a minimal non-extendably collapsible 3-ball*. 2013.
- [5] FORMAN, R. *Morse theory for cell complexes*. Advances in Mathematics 134, pp. 90-145, 1998.
- [6] KING, H., KNUDSON, K. and MRAMOR, N. *Generating discrete Morse functions from point data*, Experiment. Math. 14 (2005), no. 4, 435-444.
- [7] LU, L. *An Exposition of Discrete Morse Theory and Applications*. Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Arts (Mathematics) at Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, 2021.
- [8] MILNOR, J. *Morse theory*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1963.
- [9] MORSE, M. *Relations between the critical points of a real function of n independent variables*. Transactions of the American Mathematical Society 27, 1925, pp. 345-396.
- [10] SCOVILLE, N.A. *Discrete Morse Theory*. Student Mathematical Library, Volume 90. American Mathematical Society, 2019.
- [11] SIROLLI, N.M. *Teoría de Morse discreta*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2007.

Discrete Morse Theory applied to abstract simplicial complex

Laura Ojeda Abdul Jalbar

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101364315@ull.edu.es

Abstract

The classical Morse Theory of M. Morse allows the study of the topological properties of a smooth manifold through the analysis of the critical points of certain differentiable functions. In this memoir, discrete Morse Theory, developed by R. Forman, is applied to abstract simplicial complexes. Main theorems and algorithms that allow perform computations using discrete Morse Theory are also studied.

1. Simplicial complexes and homology

Let $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. We define $[v_n] := \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ as any set of $n + 1$ elements. A **simplicial (abstract) complex** K is a collection of nonempty subsets of $[v_n]$ verifying:

- (a) if $\sigma \in K$ and $\tau \subseteq \sigma$, then $\tau \in K$.
- (b) $v_i \in K$ for all $v_i \in [v_n]$.

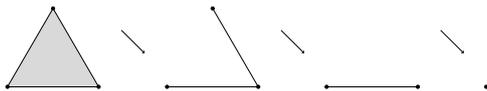
The elements of the simplicial complex are called **simplices**.

The simplicial complex $K \setminus \{\sigma, \tau\}$, where $\{\sigma^{(p-1)}, \tau^{(p)}\}$ is a pair of simplices in K (called free pair) with σ a face of τ but of no other simplex, is called an **elementary collapse** of K and is denoted by $K \searrow K \setminus \{\sigma, \tau\}$. Equivalently, K is an **elementary expansion** of $K \setminus \{\sigma, \tau\}$ and we denote it by $K \setminus \{\sigma, \tau\} \nearrow K$.

Two simplicial complexes K and L have the **same type of simple homotopy**, denoted by $K \sim L$, if there exists a succession of elementary collapses and expansions between K and L (or else if $K = L$).

A simplicial complex K is **collapsible** if for some vertex $\{v\} \in K$ there exists a succession of elementary collapses

$$K = K_0 \searrow K_1 \searrow \dots \searrow K_{n-1} \searrow K_n = \{\{v\}\}.$$



Given a simplicial complex K , the **complex of chains** $C(K) = (V(K_i), \partial)$ **associated to** K (with coefficients in \mathbb{Z}_2) is given by

$$\dots \xrightarrow{\partial_{i+1}} V(K_i) \xrightarrow{\partial_i} V(K_{i-1}) \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} V(K_1) \xrightarrow{\partial_1} V(K_0) \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

where $V(K_i)$ is the vector space with coefficients in \mathbb{Z}_2 generated by the set of i -simplices of K .

Then, we define the **p -th homology vector space** of K as

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K) = \ker \partial_p / \text{Im} \partial_{p+1},$$

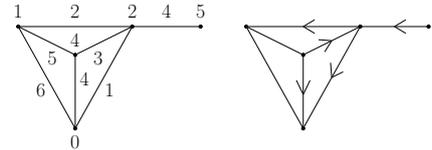
obtaining the **p -th Betti number** of the simplicial complex K

$$b_p(K) = \dim H_p(K) = \text{null } \partial_p - \text{rank } \partial_{p+1}.$$

2. Discrete Morse Theory

A **discrete Morse function** f on a simplicial complex K is a function $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ such that for all p -simplex $\sigma \in K$, we have $|\{v^{(p-1)} < \sigma : f(v) \geq f(\sigma)\}| \leq 1, |\{\tau^{(p+1)} > \sigma : f(\tau) \leq f(\sigma)\}| \leq 1$. If both cardinalities are equal to zero, we will say that σ is **critical**. In this case, the value $f(\sigma)$ is called **critical value**.

Given a discrete Morse function, we can determine its associated gradient vector field by drawing a set of arrows on it.



The underlying idea is to encode a deformation of the simplicial complex without varying the simple homotopy type, so that the critical simplices are those without arrows on them.

3. Main theorems of discrete Morse Theory

Collapse theorem

Let $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ be a discrete Morse function and $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ an interval that does not contain critical values. Then, $K(b) \searrow K(a)$.

Weak discrete Morse inequalities

Let $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ be a discrete Morse function with m_i critical i -dimensional simplices, for $i = 0, 1, \dots, n = \dim(K)$. Then,

$$(i) b_i \leq m_i, \text{ for } i = 0, 1, \dots, n. \quad (ii) \chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i m_i.$$

Canceling critical simplices

It is a method to replace a gradient vector field V by another one with less critical simplices using the notion of V -path.

Morse homology

The **(discrete) gradient flow** induced by a gradient vector field V induced by $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ is the linear transformation $\phi_p : V(K_p) \rightarrow V(K_p)$ given by $\phi_p(\sigma) = \sigma + \partial_{p+1}(V_p(\sigma)) + V_{p-1}(\partial_p(\sigma))$.

Defining $F_p(K) = \{c \in V(K_p) : \phi(c) = c\}$, the **flow complex**

$$\dots \rightarrow F_p(K) \xrightarrow{\partial_p} F_{p-1}(K) \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} F_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

verifies $H_p(K) \cong H_p(F(K))$.

4. Computations in discrete Morse Theory

We also present some algorithms that can be implemented to perform computations using discrete Morse Theory, such as random discrete Morse Theory and the computation of discrete Morse functions or gradient vector fields.

References

- [1] LU, L. *An Exposition of Discrete Morse Theory and Applications*. Concordia University, Montreal, Quebec, Canada, 2021.
- [2] SCOVILLE, N.A. *Discrete Morse Theory*. Student Mathematical Library, Volume 90. American Mathematical Society, 2019.
- [3] SIROLLI, N.M. *Teoría de Morse discreta*. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2007.