Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Alexandra Mejías Herrera

Origen y evolución histórica de algunos conceptos del análisis matemático

Origin and historical evolution of some concepts from mathematical analysis

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2023

Dirigido por
María Isabel Marrero Rodríguez

María Isabel Marrero Rodríguez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
Apartado 456
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por no haberme presionado en estos años, por haber tenido paciencia y haber confiado siempre en mí. Cualquiera podría hacerlo, pero en mi caso, después de doce años viéndome ir y venir, con vaivenes de motivación y desmotivación total, las cartas no estaban a mi favor, sin embargo, puedo decir que tengo un gran círulo de apoyo que me quiere mucho y confía en mí.

También, quiero agradecer a mi segunda familia, mis queridos amigos, y compañeros de viaje, por apoyarme y nunca rendirse conmigo. Hay una frase que dice que se educa con el ejemplo, pues en este caso se cumple perfectamente, ellos son mi ejemplo, mi inspiración.

Y cómo no, agradecer a Isabel, mi tutora, por haberme dado un tema que me ha encantado desde el principio, darme la idea de hacer el libro de GeoGebra al mismo tiempo que el proyecto, y por ayudarme muchísimo en todo momento.

Por un motivo u otro, este fin de carrera ha llegado lentamente, pero feliz. Feliz de haber vivido y no haberme rendido. Debo agradecer a todos los que en este largo camino me han brindado su ayuda, confianza, apoyo y amor.

Alexandra Mejías Herrera
La Laguna, julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

Este trabajo se centra en los orígenes y desarrollo del cálculo infinitesimal desde las matemáticas griegas (VI a. C.-V d. C.), incluyendo el método de exhausción y el método por descubrimiento de Arquímedes, hasta las decisivas aportaciones de Newton y Leibniz a finales de siglo XVII, pasando por las soluciones propuestas por otros matemáticos a los problemas de cuadraturas (integración) y tangentes (derivación) en los siglos XVI y XVII.

Palabras clave: *Cálculo infinitesimal – Cálculo de diferencias – Cálculo sumatorio – Cuadratura – Diferencial – Fluxiones – Indivisibles – Infinitésimo – Máximo – Método de exhausción – Mínimo – Tangente.*

Abstract

This work focuses on the origins and development of the infinitesimal calculus from Greek mathematics (VI BC-V AD), including the method of exhaustion and the discovery method of Archimedes, to the decisive contributions made by Newton and Leibniz at the end of the 17th century, going through the solutions proposed by other mathematicians to the problems of quadratures (integration) and tangents (differentiation) in the 16th and 17th centuries.

Keywords: *Infinitesimal calculus – Calculus of differences – Summative calculus – Quadrature – Differential – Fluxions – Indivisibles – Infinitesimal – Maximum – Exhaustion method – Minimum – Tangent.*

Contenido

Introducción

Inicialmente, abordamos este trabajo fin de grado (TFG) con la pretensión de obtener una visión global del Análisis Matemático y de su evolución desde una perspectiva histórica, estudiando cómo se han ido gestando a lo largo del tiempo algunos conceptos de esta rama de las matemáticas y prestando atención tanto a las motivaciones de los matemáticos en cada época como a las dificultades de diversa índole que debieron afrontar. Debido a la limitación del número de páginas a la que reglamentariamente están sujetos los TFG en Matemáticas, finalmente hemos focalizado nuestra atención en los orígenes y desarrollo del Cálculo Infinitesimal hasta finales del siglo XVII, reservando la evolución de otras de las múltiples ramas del Análisis para posibles estudios futuros que profundicen en esta línea de trabajo. De ahí que, aunque se haga alguna referencia a otras cuestiones (por la influencia que tuvieron en el Cálculo), la exposición se centrará en la derivación e integración de funciones.

A mediados del siglo XVII, Europa había asimilado el acervo de la matemática griega, mientras que el desarrollo de la Geometría Analítica había contribuido a aumentar espectacularmente el catálogo de curvas conocidas. Por otra parte, la Física proporcionaba un punto de vista cinemático: una curva se podía interpretar como la trayectoria de un móvil. Surgieron entonces diversos problemas relativos a las curvas, que en terminología moderna se pueden agrupar en problemas de integración y problemas de derivación.

Los problemas de integración consisten en determinar longitudes de curvas, áreas encerradas por curvas, centroides... y también en problemas dinámicos: hallar el espacio recorrido por un móvil conocida la expresión de su velocidad, o el espacio recorrido por un cuerpo sometido a la atracción gravitatoria de otro. Los griegos, sobre todo Arquímedes, habían resuelto algunos casos particulares del cálculo de áreas (y volúmenes) por el método de exhausción: se supone que el área encerrada por una curva existe y se halla una sucesión de polígonos regulares inscritos en la curva cuya suma de áreas se aproxime a la buscada. En el siglo XVI, este método fue mejorado y aplicado a gran variedad de problemas sin temor al paso al límite, ni al infinito, ni a los números irracionales, dando lugar a una amalgama de procedimientos desprovistos de rigor, pero muy potentes. Dentro de este agrupamiento destacan dos subgrupos: los problemas de cuadratura (hallar el área entre un arco de curva y el eje de abscisas), y los problemas de rectificación (calcular la longitud de una curva).

Dentro de los problemas de derivación destacan, de nuevo, dos subgrupos. Los problemas de máximos y mínimos tienen un origen eminentemente práctico: ¿qué ángulo de inclinación de un cañón maximiza el alcance del proyectil?, ¿cuáles son las distancias máxima y mínima de un planeta al Sol? Por su parte, el problema de las tangentes consiste en hallar la ecuación de la tangente a una curva en un punto. Geométricamente, este problema proviene de la Antigüedad clásica, donde fue resuelto para algunas curvas. También era relevante en Física, para conocer la dirección instantánea de un movimiento curvo, y en Óptica, para el diseño de lentes.

Se considera a Isaac Newton y a Gottfried Leibniz como los inventores del Cálculo Infinitesimal precisamente porque unificaron y resumieron en dos conceptos generales, el de integral y derivada, toda esta variedad de problemas que, siendo de naturaleza similar, se abordaban con técnicas particulares. Además, desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales independientes de cualquier significado geométrico y que podían ser aplicadas a funciones algebraicas y trascendentes, lo que prácticamente automatizaba los procesos de resolución. Por último, supieron reconocer la relación inversa fundamental entre la derivación y la integración.

El 15 de febrero de 1676, en una carta a Robert Hooke, filósofo y físico que influyó decisivamente en su obra, Newton escribió la siguiente frase:

If I have seen further, it is by standing upon the shoulders of giants[1].

Siguiendo muy de cerca las referencias [19] y [21], a lo largo de los cuatro capítulos en que se estructura la presente memoria pasaremos revista con cierto detalle a algunos de estos gigantes y a los problemas que resolvieron. En el Capítulo 1 se recogen varios ejemplos de cuadraturas clásicas. El Capítulo 2 aborda la respuesta dada a los problemas de integración por Cavalieri, Roberval, Fermat y Wallis. El Capítulo 3 hace lo propio con las aportaciones de Fermat, Roberval, Torricelli y Barrow a la resolución de los problemas de derivación. En el Capítulo 4 y último se expone sucintamente una parte de los trabajos de Newton y Leibniz y se comparan las contribuciones de uno y otro al nacimiento del Cálculo.

El TFG se complementa con un libro de GeoGebra, disponible en la dirección `https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg`, donde se reproducen dinámicamente las construcciones desarrolladas a lo largo de la memoria. Consideramos que este material puede ser útil no sólo al lector interesado, sino también al docente o futuro docente que decida utilizar la historia de las matemáticas como recurso didáctico en la enseñanza del Análisis Matemático.

[1] Si he podido ver más lejos, es porque me subí a hombros de gigantes.

1

De la matemática griega a los precursores del Cálculo

1.1. La matemática griega

El paso de la edad de bronce a la edad del hierro, en torno al año 900 a. C., provoca la caída de las antiguas civilizaciones y da paso a la civilización griega. La matemática griega surge por la necesidad, básica en cualquier cultura, de contar, medir y calcular. Los griegos realizaron sus cálculos valiéndose de los dedos o con la ayuda de guijarros[1]. Aunque tomaron elementos de las matemáticas babilónicas y egipcias, cabe atribuirles el mérito primigenio de convertir la matemática en una ciencia racional, que se apoya en el razonamiento deductivo y la lógica para demostrar rigurosamente conclusiones, o teoremas, a partir de definiciones, axiomas y postulados.

La matemática escrita en griego comienza con Tales de Mileto (624-546 a. C.) y Pitágoras de Samos (582-507 a. C.). Tales usó la geometría para resolver problemas como el cálculo de la altura de las pirámides y de la distancia a los barcos desde la orilla. Se atribuye a Pitágoras la primera demostración del teorema que lleva su nombre, aunque la formulación de este resultado arrastra una larga historia.

Los pitagóricos probaron la existencia de números irracionales. Platón (c. 427-347 a. C.) consideraba la Matemática como la auténtica realidad perfecta de la que el mundo cotidiano no es más que un reflejo imperfecto, de modo que los conceptos matemáticos son independientes de la experiencia y tienen una realidad propia: se les descubre, y no se les inventa o crea. Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.) desarrolló el método exhaustivo, precursor de la moderna integración. Aristóteles (384-322 a. C.), discípulo de Platón, fue el primero en enunciar por escrito las leyes de la lógica. Euclides (325-265 a. C.) dio el ejemplo más temprano de la metodología matemática usada en la actualidad, con definiciones, axiomas, teoremas y demostraciones. Su obra los *Elementos* (300

[1] A medida que se iban complicando los cálculos, los guijarros se dispusieron en columnas, diferenciándose así las unidades pertenecientes a los distintos órdenes. Con el tiempo, las columnas fueron reemplazadas por hilos o varillas de alambre fijadas en un bastidor y los guijarros por cuentas ensartadas en los alambres, dando lugar al ábaco.

a. C.), escrita en Alejandría, el centro de estudio e investigación más importante del mundo entonces conocido, aborda todos los problemas fundamentales de la matemática de la época. Además de problemas geométricos propiamente dichos, se tratan problemas aritméticos, algebraicos y de análisis matemático, pero siempre bajo un lenguaje geométrico. Los *Elementos* incluyen la demostración de teoremas familiares sobre geometría, como el teorema de Pitágoras, o sobre teoría de números, como la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y la infinitud de los números primos. Más adelante se usaría la criba de Eratóstenes (230 a. C.) para el descubrimiento de nuevos primos.

Como tendremos ocasión de exponer, Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) perfeccionó el método exhaustivo, ideado por Eudoxo, para calcular el área bajo un arco de parábola con ayuda de la suma de una serie infinita, y obtuvo una aproximación notablemente exacta de π. También estudió la espiral que lleva su nombre, dio fórmulas para el volumen de superficies de revolución y propuso un ingenioso sistema para la expresión de números muy grandes.

Entre los principales matemáticos griegos cabe destacar también a Apolonio de Perga (c. 262-190 a. C.), a quien debemos el estudio mejor y más completo de las cónicas: circunferencia, elipse, hipérbola y parábola. Herón de Alejandría (c. 10-70 d. C.) es considerado uno de los científicos e inventores más importantes de la Antigüedad. Por su parte, Menelao de Alejandría (c. 70-140 d. C.), matemático y astrónomo que trabajó en Alejandría y en Roma a finales del siglo I y defensor entusiasta de la geometría clásica, fue pionero en concebir y definir el triángulo esférico y en reconocer las líneas geodésicas de una superficie curva como las análogas naturales de las líneas rectas en el plano. Por último, mencionaremos a Claudio Ptolomeo (c. 100-170 d. C.), astrónomo, astrólogo, químico, geógrafo y matemático, que aplicó sus conocimientos de trigonometría a la construcción de astrolabios y relojes de sol.

1.2. Problemas de cuadratura

El estudio de los problemas de cuadratura impulsó el desarrollo del cálculo en la antigua Grecia y, en consecuencia, el desarrollo del análisis matemático. Se trata de problemas geométricos que consisten en lo siguiente: dada una figura, construir otra, generalmente un cuadrado, con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Según lo establecido en los *Elementos* de Euclides [13, Libro II, Proposición 14], la construcción debe constar de un número finito de pasos.

La cuadratura del círculo es uno de los llamados problemas délicos, un grupo de tres problemas clásicos relacionados con las construcciones con regla y compás que hoy en día sabemos irresolubles. La imposibilidad de cuadrar el círculo[2] se debe a la trascendencia del número π, propiedad que no fue demostrada hasta 1882 por el matemático alemán Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852-1939). El segundo problema délico es la trisección de un ángulo, que consiste en encontrar un ángulo cuya medida sea un tercio de la de otro ángulo dado utilizando únicamente regla y compás. Esta cuestión fue resuelta negativamente en 1837 por el matemático francés Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), quien demostró, asimismo, la imposibilidad de resolver el tercer problema délico, la duplicación del cubo, consistente en construir, de nuevo con regla y compás, un cubo de volumen doble al de otro cubo dado.

Veamos algunos ejemplos de cuadratura.

1.2.1. Cuadratura del rectángulo

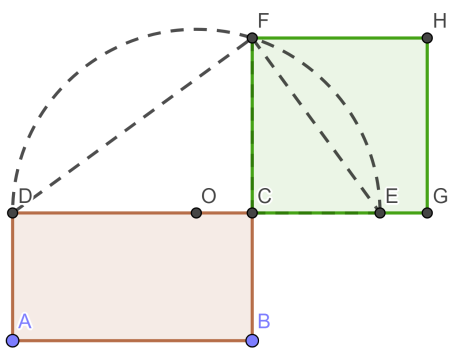


Figura 1.1. Cuadratura del rectángulo [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/jxz8dae5].

Para cuadrar el rectángulo $ABCD$ se procede de la siguiente forma (fig. 1.1):

1. Se prolonga el lado $\overline{DC}$ y se determina sobre él un punto E tal que $\overline{CE} = \overline{CB}$.
2. Se traza, con centro en el punto medio O de $\overline{DE}$, una semicircunferencia de radio $\overline{OE}$.
3. Se traza por B una perpendicular a $\overline{DE}$ y se determina su punto de corte F con la semicircunferencia.
4. El segmento $\overline{FC}$ es el lado de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo $ABCD$. Esto es consecuencia de que la altura $\overline{FC}$ de un triángulo rectángulo $\triangle DEF$ es media proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa, es decir,

[2] La irresolubilidad de este problema tuvo tanta influencia social que el término «cuadratura del círculo» permanece en el imaginario colectivo con el significado de algo muy difícil o imposible de alcanzar, acepción con la que se halla recogido en el *Diccionario de la Lengua Española* de la Real Academia.

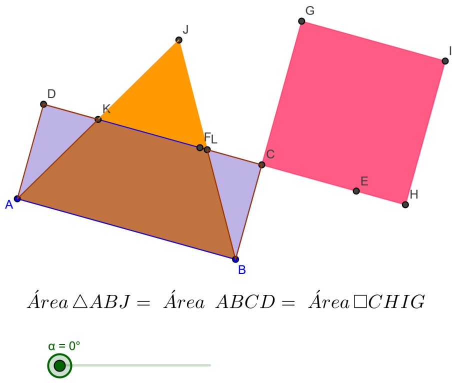
$$\frac{\overline{FC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{FC}}.$$

Por tanto,

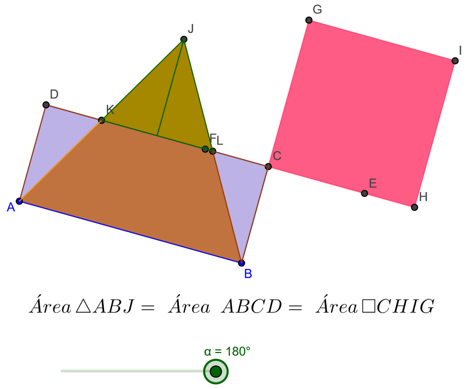
$$\overline{FC}^2 = \overline{DC} \cdot \overline{CE} = \overline{DC} \cdot \overline{CB}.$$

A partir de aquí es fácil obtener la cuadratura de un triángulo y, con ella, la de cualquier polígono, sin más que descomponerlo en triángulos.

1.2.2. Cuadratura del triángulo



(a) Ángulo 0°.



(b) Ángulo 180°.

Figura 1.2. Cuadratura del triángulo $\triangle ABJ$ [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/en6nbxu3].

El procedimiento para cuadrar el triángulo es el siguiente (fig. 1.2):

1. El arco con centro en C y radio $\overline{CB}$ proporciona el punto E.
2. El centro, F, del segmento $\overline{DE}$ es el centro de la circunferencia de radio $\overline{DF}$ que define al punto G.
3. El segmento $\overline{GC}$ es el lado del cuadrado de igual área que el rectángulo $ABCD$.

1.2.3. Cuadratura de un segmento de parábola por exhausción

Arquímedes escribió un tratado de geometría en forma de carta a su amigo Dositeo de Pelusio. Este tratado, que contiene 24 proposiciones sobre parábolas, se conoce con el nombre de *Sobre la cuadratura de la parábola*, y en él se calcula el área de un segmento parabólico (fig. 1.3) haciendo una descomposición exhaustiva del segmento parabólico por medio de triángulos, con el siguiente resultado:

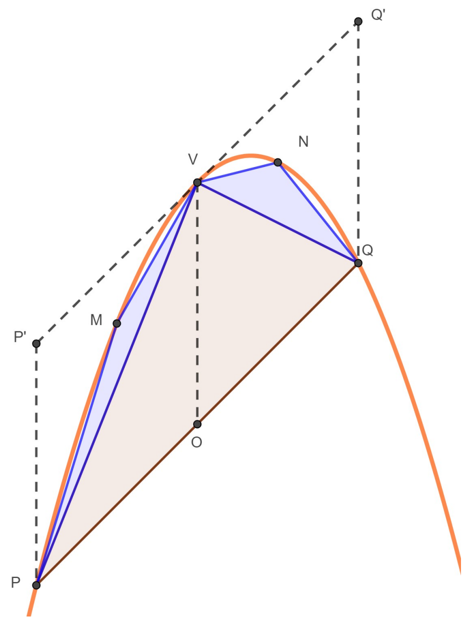


Figura 1.3. Cuadratura del segmento de parábola [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/bpyfavem].

Teorema 1.1. *El área del segmento parabólico PVQ es igual a $4/3$ del área del triángulo inscrito $\triangle PVQ$.*

Para demostrar el teorema empezaremos explicando la construcción geométrica, siempre referida a la fig. 1.3.

1. Una cuerda $\overline{PQ}$ de una parábola es un segmento que une dos de sus puntos. La región plana acotada cuya frontera está formada por la cuerda $\overline{PQ}$ y el arco de la parábola comprendido entre los puntos P y Q se llama un segmento parabólico.
2. El vértice de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.
3. Se verifica que el vértice de un segmento parabólico PVQ es el punto de intersección de la parábola con la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio $O = (P + Q)/2$ del segmento $\overline{PQ}$.
4. Llamamos triángulo inscrito al triángulo $\triangle PVQ$ cuya base es el segmento $\overline{PQ}$ y cuyo otro vértice es el vértice V del segmento parabólico.
5. Se han representado también los triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$ inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas $\overline{PV}$ y $\overline{VQ}$.

La primera parte de la demostración consiste en calcular el área de los dos triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$. Arquímedes demuestra que

$$\lambda(\triangle VNQ) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOQ),$$

$$\lambda(\triangle PMV) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOP),$$

$$\lambda(\triangle VOQ) = \frac{1}{2}\lambda(\triangle PVQ),$$

$$\lambda(\triangle VOP) = \frac{1}{2}\lambda(\triangle PVQ),$$

$$\lambda(\triangle VNQ) + \lambda(\triangle PMV) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle PVQ),$$

donde λ denota «área de». Llamando S al área del triángulo $\triangle PVQ$, el área de la suma de los dos nuevos triángulos es $S/4$. Se repite el proceso con cada uno de los cuatro segmentos parabólicos determinados por las cuerdas $\overline{PM}$, $\overline{MV}$, $\overline{VN}$ y $\overline{NQ}$, inscribiendo en ellos los respectivos triángulos, la suma de cuyas áreas será igual a $S/16$; y se prosigue así indefinidamente. Ahora cabría calcular el área del segmento parabólico hallando la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} S = \frac{4}{3} S.$$

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series, razona de forma muy elegante por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega. Para ello hace uso de la llamada propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes. Este axioma, que ya fue formulado por Eudoxo, aparece en tres libros del siracusano: *La esfera y el cilindro*, *Sobre la cuadratura de la parábola* y *Espirales.*

Axioma 1.2. *Dadas dos magnitudes cualesquiera $a > 0$ y $b > 0$, siempre es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b, conseguir que un múltiplo conveniente de a exceda a b, es decir, $na > b$ para algún número natural n.*

Partiendo de la propiedad arquimediana se deduce fácilmente el siguiente resultado, llamado principio de convergencia de Eudoxo, en el que se basa el método de exhausción:

> Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo estos procesos de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.

Sea K el área del segmento parabólico PVQ.

(I) Supongamos que $K > 4S/3$, es decir, que $K - 4S/3 > 0$. Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico PVQ es la mitad del área del paralelogramo circunscrito $PP'QQ'$, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo. Así, en la sucesión de áreas

$$K,\ K - S,\ K - \Big(S + \frac{1}{4}S\Big),\ K - \Big(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S\Big),\ \ldots$$

cada una es menor que la mitad de la que le precede, y por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa será

$$K - \frac{4}{3}S > K - \Big(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \ldots + \frac{1}{4^n}S\Big).$$

Esto implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \ldots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S,$$

contradiciendo la siguiente igualdad, conocida por Arquímedes:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \ldots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\,\frac{1}{4^n}S.$$

Luego, no puede ser $K > 4S/3$.

(II) Supongamos que $K < 4S/3$, es decir, que $4S/3 - K > 0$. Cada una de las áreas S, $S/4$, $S/16, \ldots, S/4^n$ es menor que la mitad de la que le precede, y por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa será

$$\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K.$$

Así pues,

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > \frac{1}{3}\,\frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \Big(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \ldots + \frac{1}{4^n}S\Big),$$

lo que implicaría que

$$K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \ldots + \frac{1}{4^n}S.$$

Pero esto es absurdo, pues la suma del segundo miembro es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico. Luego, no puede ser $K < 4S/3$.

Así pues, la única posibilidad es que $K = 4S/3$.

1.2.4. Cuadratura mecánica de un segmento de parábola

Para verificar heurísticamente[3] sus resultados teóricos, Arquímedes usa el método de la palanca. En el prefacio de su tratado *El método*, reconoce a Eratóstenes que, a diferencia de la exhausción, el método mecánico no proporciona una demostración acorde a los criterios y reglas de la matemática de la época, pero es práctico y clarificador [16, pp. 569–570].

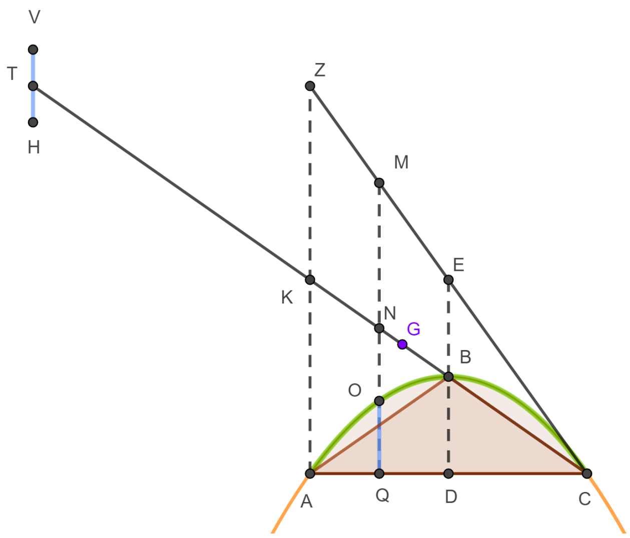


Figura 1.4. Cuadratura del segmento parabólico por el método de la palanca [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/uhfcqb5a].

En primer lugar, explicaremos la fig. 1.4:

1. La recta $\overline{CZ}$ es la recta tangente a la parábola en el punto C.
2. El punto B es el vértice del segmento parabólico ABC.
3. EL segmento $\overline{AZ}$ es perpendicular a la cuerda $\overline{AC}$.
4. El segmento $\overline{TC}$ está en la recta que pasa por los puntos B y C, de forma que K es el punto medio de $\overline{TC}$.
5. El segmento $\overline{TC}$ es la representación de un brazo de la palanca con fulcro (punto de apoyo) en K.

La aplicación del método de la palanca es como sigue:

1. Por ser ABC una parábola, la subtangente $\overline{ED}$ respecto de un punto C es igual al doble de $\overline{BD}$, es decir, $\overline{ED} = 2\overline{BD}$; luego, $\overline{EB} = \overline{BD}$. Deducimos por semejanza de triángulos que $\overline{MN} = \overline{NQ}$ y, además, que $\overline{ZK} = \overline{KA}$.

[3] El adjetivo «heurístico», etimológicamente del griego εὑρίσκω (hallar, inventar), hace referencia a la búsqueda de soluciones mediante reglas empíricas.

2. En *Sobre la cuadratura de la parábola*, Arquímedes demuestra que
$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}} \quad \text{y} \quad \frac{\overline{KC}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AQ}}.$$
Por construcción, obtenemos que
$$\frac{\overline{MQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{TK}}{\overline{KN}}$$
si, y sólo si,
$$\overline{MQ} \cdot \overline{KN} = \overline{OQ} \cdot \overline{TK}.$$
Si ahora trasladamos al punto T un segmento de longitud igual a $\overline{OQ}$ y lo disponemos como en la figura, el segmento $\overline{VH} = \overline{OQ}$ queda equilibrado por el segmento $\overline{MQ}$, pues el producto de dichos segmentos por la longitud correspondiente del brazo de la palanca es el mismo. Obsérvese que N es el centro de gravedad del segmento $\overline{MQ}$. Deducimos que K es el centro de gravedad de los segmentos $\overline{VH}$ y $\overline{MQ}$.
3. De forma análoga, cualquier paralela al eje de la parábola $\overline{ED}$ estará en equilibrio con los segmentos determinados sobre ella por el segmento parabólico trasladado al punto T, de manera que el centro de gravedad de cada par de segmentos será el punto K.
4. Tanto el triángulo $\triangle AZC$ como el segmento parabólico están formados por los segmentos paralelos a $\overline{ED}$ interiores a cada figura. Por tanto, $\triangle AZC$ estará en equilibrio respecto del punto K con el segmento parabólico trasladado hasta tener su centro de gravedad en T, de manera que el centro de gravedad del conjunto de ambos será K.
5. Dividimos ahora $\overline{CK}$ por el punto G de forma que $\overline{CK}$ sea el triple de $\overline{KG}$. El punto G será entonces el centro de gravedad de $\triangle AZC$, y puesto que $\triangle AZC$ está en equilibrio, respecto del punto K, con el segmento parabólico ABC trasladado con centro de gravedad en T, se verifica que la razón del triángulo $\triangle AZC$ al segmento parabólico ABC colocado alrededor del centro T es igual a la razón de $\overline{TK}$ a $\overline{KG}$. Ahora bien, como $\overline{TK}$ es el triple de $\overline{KG}$, el triángulo $\triangle AZC$ será el triple del segmento parabólico ABC. Además, $\triangle AZC$ es el cuádruple del triángulo inscrito $\triangle ABC$, ya que $\overline{ZK}$ es igual a $\overline{KA}$ y, al ser $\overline{AD}$ igual que $\overline{DC}$, se tiene que $\overline{KA}$ es el doble de $\overline{BD}$. Concluimos que el segmento parabólico ABC equivale a $4/3$ del triángulo inscrito $\triangle ABC$.

1.2.5. Cuadratura de una espiral

En su tratado *De las espirales*, Arquímedes definió la espiral de la siguiente forma:

> Si una línea recta, que permanece fija en un extremo, gira en un plano con velocidad constante y, al mismo tiempo, un punto se mueve sobre la recta con velocidad constante comenzando por el extremo fijo, entonces el punto describe en el plano una espiral.

En este ejemplo de cuadratura se sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo que más tarde seguiría Bernhard Riemann (Alemania, 1826-1866) para el cálculo de áreas.

Teorema 1.3. *El área del primer ciclo de una espiral es igual a* $1/3$ *del área del círculo circunscrito.*

Figura 1.5. Cuadratura de una espiral [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/xmwhvpvu].

Para demostrarlo, consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar $\rho = a\theta$, con $a > 0$ constante, y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, el área de la primera vuelta de la espiral (fig. 1.5). El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Dividimos este círculo en sectores de amplitud $\theta = 2\pi/n$, desde $\theta = 2\pi k/n$ hasta $\theta = 2\pi(k+1)/n$, para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular de radio r y amplitud φ radianes es $r^2\varphi/2$, resulta que el área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es $(a2\pi k/n)^2(2\pi/n)/2$, y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es $(a2\pi(k+1)/n)^2(2\pi/n/2)$. Deducimos así que el área, S, de la espiral verifica:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 < S < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2 \frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3 a^2}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Arquímedes conocía que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n\Big(n+1\Big)\Big(2n+1\Big).$$

Usando este resultado, podemos escribir la desigualdad anterior en la forma:

$$4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(2-\frac{1}{n}\Big) < S < 4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(2+\frac{1}{n}\Big).$$

Pongamos $K = \pi(2\pi a)^2/3$, que es una tercera parte del área del círculo circunscrito. Restando K en la desigualdad anterior y tras algunas operaciones sencillas, obtenemos:

$$K\Big(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big) < S-K < K\Big(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\Big);$$

y como $1/n^2 \leq 1/n$, encontramos que $-2K/n < S-K < 2K/n$. Usando ahora el axioma de Arquímedes se concluye que $S = K$.

1.3. Síntesis de las matemáticas hasta el siglo XVII

La carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, lo que condujo al desarrollo de un álgebra geométrica que fue usada por Euclides, Arquímedes y Apolonio para realizar sus cálculos. La consecuencia de esta actitud fue que en Europa, durante casi 2000 años, casi todo el razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

Las matemáticas griegas abarcan, aproximadamente, 1000 años, desde los pitagóricos en el siglo VI a. C., hasta los últimos representantes de la Escuela de Alejandría en el siglo V d. C.. El final de esta época suele situarse en el año 415 d. C., fecha en la que se produce el asesinato de Hipatia, una de las primeras mujeres matemáticas de la historia, por hordas de fanáticos cristianos. Es sabido que la civilización romana, excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las matemáticas; no obstante, el sistema de numeración romano se impuso, extendiéndose por todo el Imperio. Durante la época medieval, la herencia matemática griega pasó a los árabes, de donde regresó a Europa ya en el siglo XII. En estos siglos se desarrollaron, sobre todo, la aritmética y los comienzos del álgebra. Pero hay que esperar hasta el siglo XVII para que en Europa empiecen a notarse cambios significativos en la forma de hacer matemáticas y a lograr avances que abren nuevas perspectivas.

Las características principales de las matemáticas europeas en el siglo XVII son las siguientes:

1. Se impone la idea de «primero descubrir, y luego demostrar», por lo que se buscan procedimientos heurísticos para resolver los problemas, aunque se sigue admirando el rigor demostrativo euclidiano.

2. Se consiguen progresos decisivos en el simbolismo algebraico, a manos de François Viète (Francia, 1540-1603) y Simon Stevin (Bélgica, 1548-1620). Se asienta el concepto de cantidad abstracta.
3. Pierre de Fermat (sobre quien se profundizará más adelante) y René Descartes (Francia, 1596-1650) inventan la geometría analítica.
4. Surgen multitud de nuevas curvas, muchas de ellas mecánicas, como la cicloide, que traen consigo problemas de tangentes, cuadraturas, centros de gravedad, extremos y rectificaciones. Se usa libremente el infinito y estos problemas se abordan mediante métodos infinitesimales.
5. Aparece el concepto de cantidad variable y se inicia el estudio matemático del movimiento.
6. Se produce una revolución científica protagonizada por Nicolás Copérnico (Polonia, 1473-1543), Galileo Galilei (Italia, 1564-1642) y Johannes Kepler (Alemania, 1571-1630), que impone el mecanicismo.
7. John Neper o Napier (Escocia, 1550-1617) inventa los logaritmos. Se alcanzan progresos notables en astronomía y trigonometría, y se desarrolla la óptica.
8. Se crean instituciones científicas como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París, y aparecen las primeras publicaciones científicas periódicas.

Los matemáticos del siglo XVII se distancian gradualmente del álgebra geométrica griega. No se trata de un corte radical, sino de un proceso lento al que contribuyen muchos estudiosos. Respecto al Cálculo propiamente dicho, podemos destacar una primera etapa empírica, que comprende los dos primeros tercios del siglo XVII, en la que se introducen una serie de conceptos como «indivisibles» e «infinitésimos» a fin de desarrollar técnicas con las que calcular tangentes o cuadraturas. Tales técnicas carecen de rigor y son usadas de forma heurística, aunque los matemáticos que las aplican (Kepler, Fermat, Cavalieri, Wallis) afirman que podrían ser justificadas al estilo clásico.

Para hacernos una idea clara de los antecedentes que condujeron a la invención del Cálculo, estudiaremos cómo fueron solucionados algunos de estos problemas por los matemáticos de la época. Veremos de qué forma se originaron, desarrollaron y evolucionaron los métodos de integración y de derivación hasta llegar a los que hoy conocemos, desde los problemas de cuadratura hasta las integrales y desde el cálculo de tangentes hasta las derivadas. Cabe señalar que la derivada apareció mucho más tarde que la integral para resolver otros problemas que, en principio, no tenían nada en común con el cálculo integral. Nada más lejos de la realidad...

2

Orígenes y desarrollo de la integral

El método de integración geométrica considerado idóneo durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhausción, ideado, como sabemos, por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. Realmente, el nombre es desafortunado, porque la idea central de la exhausción es la de evitar el infinito y, por lo tanto, no lleva a un «agotamiento» de la figura cuya área se quiere determinar. La pretensión generalizada entre los matemáticos del siglo XVII era encontrar un método que, a diferencia del de exhausción, fuera directo y no solamente proporcionara resultados, sino que también pudiera ser utilizado para demostrarlos. La ruta que siguieron para alcanzar tal fin se deriva de una concepción intuitiva inmediata de las magnitudes geométricas.

2.1. Los indivisibles de Cavalieri

Kepler ya había hecho uso de métodos infinitesimales en sus obras. Su insatisfacción hacia el procedimiento empleado por el mercader de vinos para medir el volumen del barril con que celebró sus segundas nupcias dio como resultado el libro *Nova stereometria doliurum vinariorum*[1] (1615), donde consideraba que los sólidos de revolución estaban compuestos por una cantidad infinita de partes sólidas.

Siguiendo estas ideas de Kepler y de Galileo, Bonaventura Cavalieri (Italia, 1598-1647) publicó en 1635 el tratado *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*[2], en el que desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada método de los indivisibles. Según este método, el área de una región plana está formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de los cuales se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho, mientras que un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. Estos elementos son los denominados indivisibles

[1] *Nueva geometría sólida de los barriles de vino.*
[2] *Geometría de los continuos por indivisibles presentada por métodos nuevos.*

de área y volumen, respectivamente (fig. 2.1). Como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes geometricae sex*[3] (1647), los «indivisibilistas» sostenían que

> una línea está hecha de puntos, como una sarta de cuentas; un plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras; y un sólido, de áreas planas, como un libro de hojas.

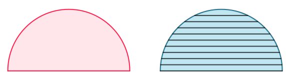


Figura 2.1. Indivisibles [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/x4adgyga].

El principio de Cavalieri dice así:

> Si dos sólidos tienen la misma altura, estando sus bases sobre un mismo plano, y si las secciones determinadas por planos paralelos a las bases y a igual distancia de ellas están siempre en la misma razón, entonces los volúmenes de los dos sólidos están en esa misma razón.

A continuación, procedemos a ilustrar con dos ejemplos la forma en que se aplicaba este principio. El primero es el cálculo del área del paralelogramo, muy sencillo, en contraposición al más intrincado cálculo del volumen de la esfera, que daremos en segundo lugar.

2.1.1. Área de un paralelogramo

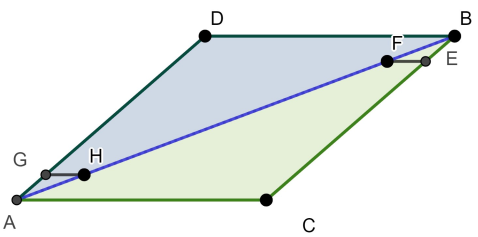


Figura 2.2. Paralelogramo [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/dncysdcy].

Para demostrar que el paralelogramo $ACBD$ (fig. 2.2) tiene área doble que cualquiera de los triángulos $\triangle ABD$ ó $\triangle ACB$, Cavalieri hace notar que cuando $\overline{GA} = \overline{BE}$, se tiene $\overline{GH} = \overline{FE}$. Por tanto, los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACB$ están constituidos por igual número de líneas idénticas, tales como $\overline{GH}$ y $\overline{FE}$, y, por tanto, sus áreas deben ser iguales.

[3] *Seis ejercicios geométricos.*

2.1.2. Volumen de la esfera

Vamos a explicar cómo calcula Cavalieri el volumen de la esfera [27][4]:

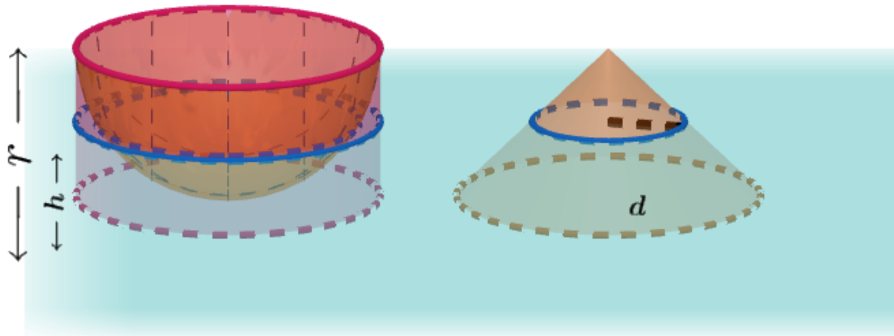


Figura 2.3. Volumen de la esfera [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/yambwvrp].

1. Inscribimos un hemisferio de la esfera de radio r en un cilindro de manera que la base superior del cilindro sea el círculo máximo del hemisferio. El centro del círculo correspondiente a la base inferior del cilindro también es un punto del hemisferio (fig. 2.3).
2. Al trazar un plano paralelo a las bases del cilindro intersectando al cilindro y al hemisferio en dos círculos concéntricos, se forma un anillo. Si trasladamos este plano desde la base inferior del cilindro hasta la tapa, el área del anillo va disminuyendo. Cuando el plano está en la base el área del anillo es máxima, pues se corresponde con el área del círculo de radio r, es decir, con la base del cilindro. Y cuando trazamos el plano a una altura r, que es la altura del cilindro, el anillo tiene área nula. Así pues, el área del anillo se comporta como la sección transversal de un cono recto de base circular congruente con la base del cilindro y altura la misma que la del cilindro.
3. Trazamos un plano paralelo a la base del cilindro y del cono a una altura h. Este plano intersecta al cilindro en un círculo de radio r; al hemisferio, en un círculo concéntrico con el anterior, de un cierto radio r'; y al cono, en un círculo de radio, digamos, d.

   Como $(r')^2 = r^2 - (r-h)^2$ y $d = r - h$, encontramos que

$$A_{ANILLO} = \pi r^2 - \pi (r')^2 = \pi (r-h)^2.$$

Pero esta última expresión también representa el área sombreada del cono. Luego, el cociente de las áreas sombreadas es 1, de donde, por el principio de Cavalieri, tenemos:

[4] También son interesantes el volumen del prisma y de la pirámide.

$$\frac{V_{CILINDRO} - V_{HEMISFERIO}}{V_{CONO}} = 1,$$
$$V_{HEMISFERIO} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3,$$
$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2.2. Roberval y la cuadratura de la cicloide

En 1634, el matemático Gilles Personne de Roberval (Francia, 1602-1675) calcula el área encerrada por un arco de la cicloide, utilizando esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri[5]. No había consenso entre los matemáticos de la época sobre la valoración de este método. La mayoría lo consideraba un método heurístico y creían necesaria una demostración por exhausción.

A continuación se resuelve la cuadratura de la cicloide tal y como hizo Roberval. También se muestran tres capturas sobre una misma gráfica de GeoGebra que ayudarán a entender la demostración.

Teorema 2.1. *El área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.*

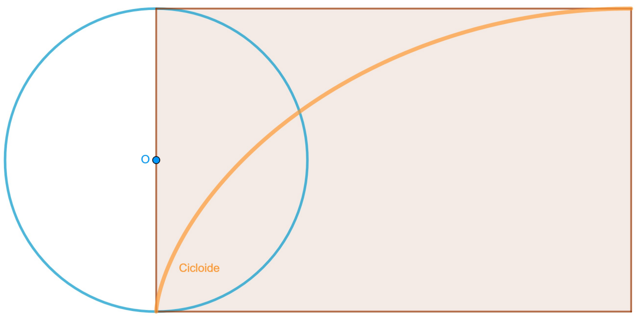


Figura 2.4. Cicloide y rectángulo generados por la circunferencia [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/vtsfamnz].

Recordemos que la cicloide es la curva plana descrita por un punto dado de una circunferencia cuando ésta rueda, sin deslizamiento, a lo largo de una línea recta. En la fig. 2.4, la cicloide se genera por el desplazamiento de la circunferencia de centro O y radio r, de modo que la base del rectángulo allí construido mide $L/2 = \pi r$, y su altura es $2r$. Por tanto, el área de dicho rectángulo vale

$$A_{RECTÁNGULO} = \pi r \cdot 2r = 2\pi r^2 = 2 \cdot A_{CÍRCULO}.$$

Ahora trazamos segmentos rectilíneos horizontales infinitesimales $\overline{AB}$, con lon-

[5] Aunque Roberval tenía su propio método de indivisibles, fue Cavalieri quien le dio nombre por haberlo publicado antes, como pasa con muchos otros descubrimientos.

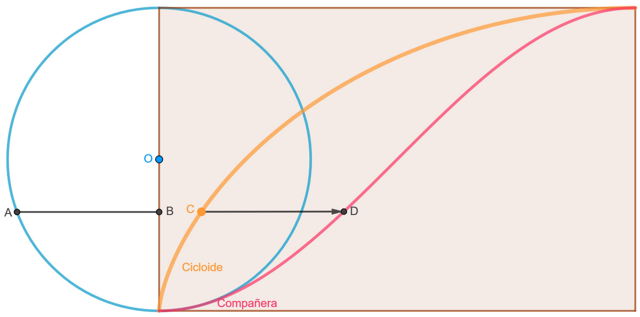


Figura 2.5. Compañera de la cicloide [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/vtsfamnz].

gitud acotada por el radio de la circunferencia, y sometemos cada punto C de la cicloide a una traslación horizontal hasta el punto D, satisfaciendo $\overline{CD} = \overline{AB}$. El lugar geométrico de los puntos que obtenemos tras estas traslaciones forman la denominada curva compañera de la cicloide (fig. 2.5). La construcción realizada garantiza que las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su curva compañera son segmentos de igual longitud, por lo que van a cubrir la misma área. Luego, llamando A_{CC} al área comprendida entre la cicloide y su compañera, resulta que

$$A_{CC} = \frac{A_{CÍRCULO}}{2} = \frac{\pi r^2}{2}. \tag{2.1}$$

La compañera de la cicloide divide al rectángulo en dos partes iguales. Rober-

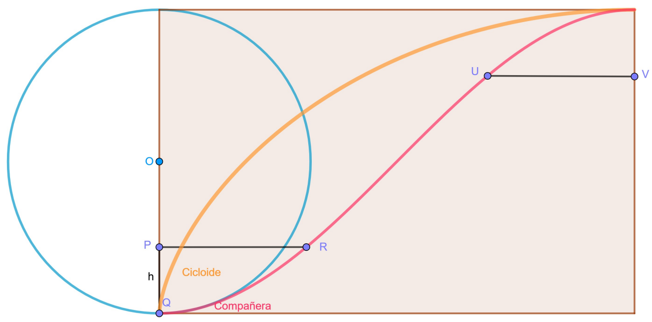


Figura 2.6. La compañera de la cicloide divide al rectángulo a la mitad [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/vtsfamnz].

val demostró que las secciones horizontales de altura h, que es la longitud del segmento $\overline{PQ}$, y $2r - h$ determinan segmentos de igual longitud en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo; es decir, que $\overline{PR} = \overline{UV}$ (fig. 2.6). Deducimos así que el área bajo la compañera es la mitad del área del rectángulo:

$$A_{COMP} = \frac{A_{RECTÁNGULO}}{2} = \frac{2 \cdot A_{CÍRCULO}}{2} = A_{CÍRCULO} = \pi r^2. \tag{2.2}$$

Denominando A al área encerrada por el arco de cicloide, la combinación de (2.1) y (2.2) muestra que

$$\frac{A}{2} = A_{CC} + A_{COMP} = \frac{\pi r^2}{2} + \pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2,$$

de donde, finalmente, $A = 3\pi r^2$.

2.3. Parábolas e hipérbolas de Fermat

El matemático Pierre de Fermat (Francia, 1601-1665) obtuvo la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ $(m, n \in \mathbb{N})$. Con anterioridad sólo se habían logrado cuadrar, por Cavalieri, las curvas $y = x^n$, con $n = 1, 2, \ldots, 9$ o bien un entero negativo $n \neq -1$, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes, que había resuelto geométricamente los casos correspondientes a $n = 1, 2, 3$.

Fermat siguió el método de exhausción clásico, pero con una idea feliz que consistió en considerar rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar y cuyas bases estaban en progresión geométrica. Ilustraremos este procedimiento con la cuadratura de la hipérbola generalizada $y = x^{-2}$ para $x \geq a$. Con el fin de simplificar la exposición, usaremos notación y terminología actuales.

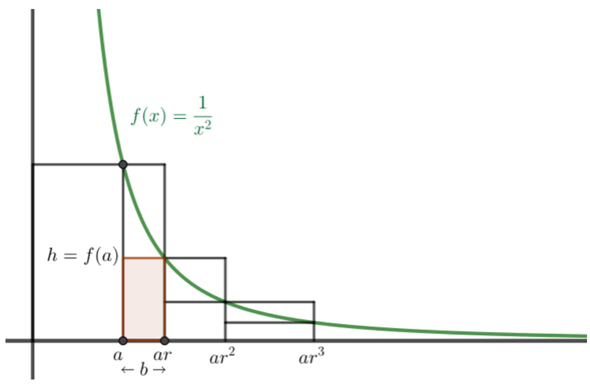


Figura 2.7. Rectángulos inscritos [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/fuxnwtsk].

Elegimos un número $r > 1$ y consideramos los puntos de abscisas a, ar, ar^2, ar^3, ... Los rectángulos inscritos tienen área $A = b \cdot h$, donde b es la base y h la altura, como se indica en la fig. 2.7. Se advierte fácilmente que el área del rectángulo coloreado en la figura es $A = (ar - a)/(ar)^2$, y el área de los siguientes se puede hallar de forma análoga. La suma de las áreas de estos rectángulos es igual a

$$(ar-a)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2}+\ldots=\frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}$$
$$=\frac{1}{ar}.$$

Por otra parte, el área del primer rectángulo circunscrito (fig. 2.8) viene dada

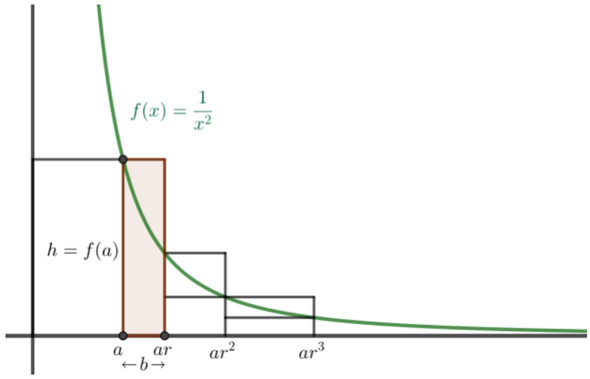


Figura 2.8. Rectángulos circunscritos [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/fuxnwtsk].

por $A=b\cdot h=(ar-a)/a^2$, así que no es difícil ver que la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos es

$$(ar-a)\frac{1}{a^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2}+\ldots=\frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{r}{a}.$$

Así pues, llamando S al área bajo la curva obtenemos

$$\frac{1}{ar}<S<\frac{r}{a}.$$

Como esta desigualdad es válida para todo $r>1$, concluimos que $S=1/a$. Obsérvese que dicho valor es, precisamente, el área del rectángulo de la fig. 2.9.

Las cuadraturas de Fermat de las hipérbolas y parábolas generalizadas anticipan aspectos esenciales de la integral definida:

1. La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
2. La aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva.
3. Un intento de expresar el límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras que éstos se hacen infinitamente pequeños.

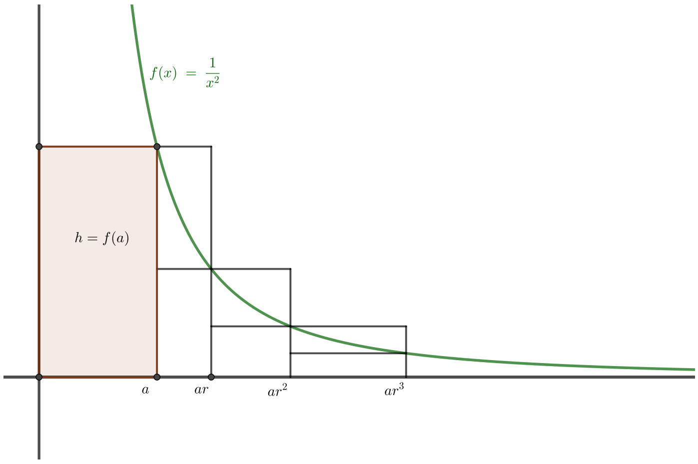


Figura 2.9. Primer rectángulo [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/fuxnwtsk].

2.4. La integración aritmética de Wallis

En 1655, John Wallis (Inglaterra, 1616-1703) publicó el tratado *Arithmetica infinitorum*[6], donde aritmetizaba el método de los indivisibles de Cavalieri. Ilustraremos el método de Wallis con el cálculo del área bajo la curva $y = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, y sobre el segmento $[0, a]$ (fig. 2.10). Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas de longitud igual a x^k. Si dividimos el segmento $\overline{PQ} = \overline{AB} = a$ en n partes de longitud $h = a/n$, donde n «es» infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es expresable como

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \ldots + (nh)^k.$$

Similarmente, el área del rectángulo $ABCD$ mide

$$a^k + a^k + a^k + \ldots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \ldots + (nh)^k.$$

La razón entre las áreas de la región PQR y el rectángulo $ABCD$ es

$$\frac{\acute{A}rea\, PQR}{\acute{A}rea\, ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k}. \tag{2.3}$$

Wallis estudia el valor de la expresión (2.3) cuando $n = \infty$[7]. Tras considerar varios casos para los valores $k = 1, 2, 3$, efectuando, en cada caso, sumas para distintos valores de $n = 1, 2, 3, 4$, Wallis observa ciertas regularidades y acaba afirmando que para $n = \infty$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, se cumple

[6] *La aritmética de los infinitos.*

[7] Fue precisamente Wallis quien, en su obra *De sectionibus conicis* (*De las secciones cónicas*, 1655), introdujo el símbolo del «lazo del amor», ∞, con el significado de «infinito».

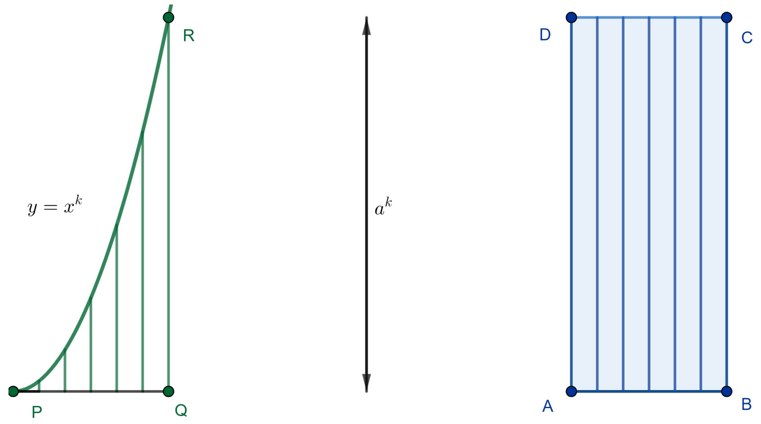


Figura 2.10. Comparando indivisibles [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/f7qhxy4m].

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \ldots + n^k} = \frac{1}{k+1}. \tag{2.4}$$

De aquí deduce el valor del área de la región PQR:

$$\frac{\acute{A}rea\, PQR}{\acute{A}rea\, ABCD} = \frac{\acute{A}rea\, PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1},$$

de modo que $\acute{A}rea\, PQR = a^{k+1}/(k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, un resultado que ya era conocido anteriormente. Wallis no se queda aquí y extiende la validez de (2.4) a todos los exponentes racionales positivos. Su peculiar razonamiento tiene interés porque sirvió como base a Isaac Newton (de quien nos ocuparemos en un capítulo posterior) para obtener la serie binomial.

En términos actuales, el razonamiento de Wallis se puede resumir como sigue. Definamos el índice, $\sigma(f)$, de una función f mediante el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}{f(n) + f(n) + f(n) + \ldots + f(n)} = \frac{1}{\sigma(f)+1},$$

si este límite existe. En particular, (2.4) expresa que el índice de la función $f_k(x) = x^k$ es $\sigma(f_k) = k$, para $k \in \mathbb{N}$. Wallis observó que, dada una progresión geométrica de potencias de x como, por ejemplo, $x, x^3, x^5, x^7, \ldots$, la correspondiente sucesión de índices $1, 3, 5, 7, \ldots$ está en progresión aritmética. Puesto que $\sigma(f_k) = k$, esta observación es trivial, pero le permite deducir (por analogía y sin demostración) que los índices de la progresión geométrica $1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x$ deben formar una progresión aritmética, y que, por lo tanto, se ha de tener $\sigma((\sqrt[q]{x})^p) = p/q$ para $p = 1, 2, \ldots, q$. Concluye así que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[q]{0})^p + (\sqrt[q]{1})^p + (\sqrt[q]{2})^p + (\sqrt[q]{3})^p + \ldots + (\sqrt[q]{n})^p}{(\sqrt[q]{n})^p + (\sqrt[q]{n})^p + (\sqrt[q]{n})^p + (\sqrt[q]{n})^p + \ldots + (\sqrt[q]{n})^p} = \frac{1}{p/q+1}.$$

Este método, conocido posteriormente como interpolación de Wallis, puede ser considerado como un intento de resolver el siguiente problema: dada una sucesión P_k, definida para valores enteros de k, encontrar el significado de P_α cuando α no es un número entero. Además, Wallis deduce que, necesariamente, $(\sqrt[q]{x})^p = x^{p/q}$. Sería Newton quien, siguiendo los pasos de Wallis, introduciría, un poco más tarde, el uso de potencias fraccionarias y negativas.

Wallis llega, incluso, a afirmar que la igualdad

$$\int_0^a x^r dx = \frac{a^{r+1}}{r+1} \tag{2.5}$$

es válida no solamente para exponentes r racionales, sino también para otros como $r = \sqrt{3}$, si bien no puede dar ninguna justificación.

Obtenida, a su manera, la cuadratura fundamental (2.5), Wallis intenta evaluar directamente la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$$

cuyo valor es $\pi/8$, porque representa el área bajo la semicircunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$. No tuvo éxito en este empeño (el logro corresponde, de nuevo, a Newton), pero sus resultados le condujeron a la llamada fórmula de Wallis:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}.$$

3

Orígenes y desarrollo de la derivada

Durante el siglo XVII se vinieron aplicando técnicas en las que podemos reconocer el uso implícito de derivadas, aunque no fue hasta el último tercio de dicho siglo cuando Newton y Leibniz las formularon de manera explícita como fluxiones y cocientes incrementales, respectivamente. En los siglos XVIII y XIX la noción de derivada fue ampliamente desarrollada y aplicada a campos muy diversos, pero su concepción en los términos que manejamos hoy en día presupone los conceptos de función y límite funcional, los cuales experimentaron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual; de ahí que la definición de derivada no se formalizase hasta el último tercio del siglo XIX.

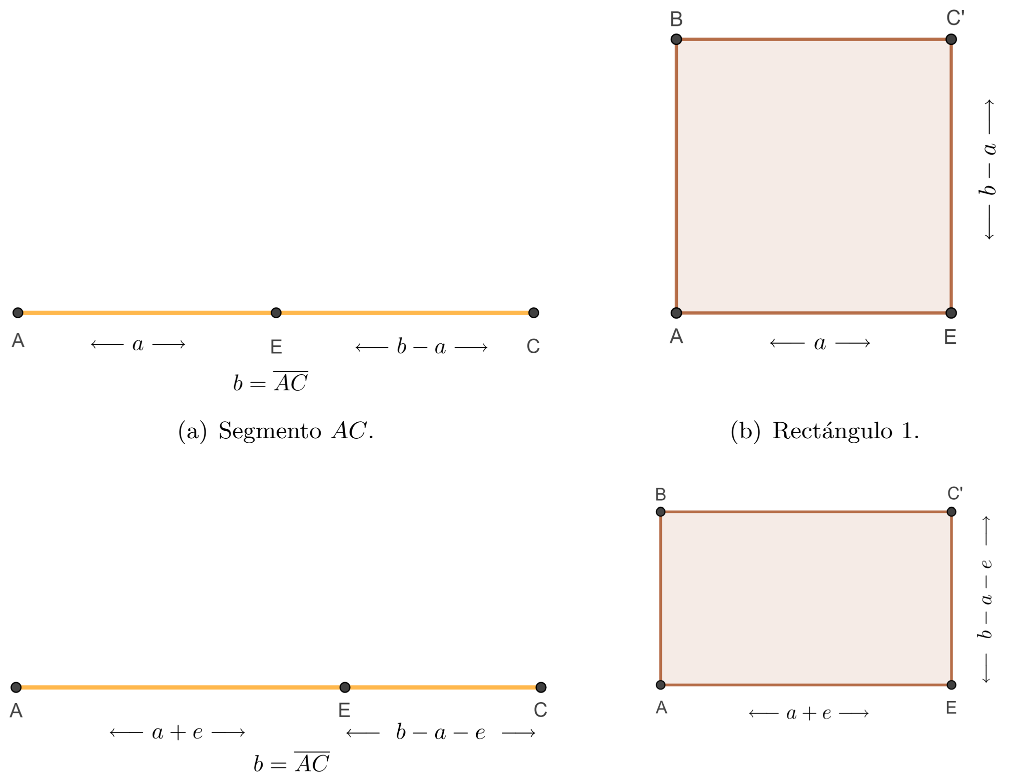
3.1. Cálculo de tangentes y de valores extremos

Los matemáticos de la Antigüedad clásica sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla, definición que resultaba apropiada para la circunferencia, pero no para otras curvas. En el siglo III a. C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso mediante técnicas geométricas. Sin embargo, para curvas como la espiral de Arquímedes o la concoide de Nicomedes estas técnicas no eran de gran utilidad.

Con la invención de la Geometría Analítica sobrevino una enorme variedad de curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales, lo que obligó a los matemáticos del siglo XVII a idear nuevos procedimientos para calcular tangentes. En el periodo de 1630 a 1660 se empiezan a usar técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos de forma empírica, que no se justifican *a priori*; simplemente, se aplican y se comprueba que las soluciones obtenidas son correctas *a posteriori*. En este capítulo consideraremos algunas de las aportaciones más significativas.

3.2. El método de máximos y mínimos de Fermat

En 1637, Fermat escribió una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*[1], donde establecía el primer procedimiento general conocido para calcular extremos.



(a) Segmento AC.

(b) Rectángulo 1.

(c) Segmento AC modificado.

(d) Rectángulo 2.

Figura 3.1. Máximos y mínimos de Fermat [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/c8z9duxj].

Fermat ilustraba su método hallando el punto E de un segmento AC que maximiza el área del rectángulo $\overline{AE} \cdot \overline{EC}$ (fig. 3.1):

1. Pongamos $\overline{AC} = b$. Si a es uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
2. El producto a maximizar es $ba - a^2$, ya que corresponde al área del rectángulo que se forma al dividir el segmento $\overline{AC}$ en dos segmentos $\overline{AE} = a$ y $\overline{EC} = b - a$ (fig. 3.1(b)).

[1] *Método para la investigación de máximos y mínimos.*

3. Sea ahora $a+e$ el primer segmento de b; el segundo segmento será $b-a-e$, y el producto de ambos, $ba-a^2+be-2ae-e^2$ (fig. 3.1(c)). De esta manera se forma el nuevo rectángulo de la fig. 3.1(d).
4. El nuevo rectángulo se debe «adigualar»[2] al precedente: $ba-a^2+be-2ae-e^2 \sim ba-a^2$.
5. Cancelando términos comunes: $be \sim 2ae+e^2$.
6. Dividiendo todos los términos por e: $b \sim 2a+e$.
7. Suprimiendo la e: $b=2a$.
8. Para resolver el problema se ha de tomar, por tanto, la mitad de b.

El método de Fermat da una condición necesaria para los extremos, pero esa condición no es suficiente y tampoco distingue máximos de mínimos. Se trata de un método puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.

Pasos	**Notación Fermat**	**Notación actual**
$1-5$	$be \sim 2ae+e^2$	$f(x+\Delta x)-f(x) \sim 0$
6	$b \sim 2a+e$	$\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \sim 0$
7 y 8	$b=2a \Rightarrow b/2=a$	$\left(\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}=0$

Tabla 3.1. Comparativa de notaciones.

Haciendo $a=x$, $e=\Delta x$, y poniendo $f(x)=x(b-x)$ es posible reformular la notación y el razonamiento de Fermat en términos actuales, como se recoge en la Tabla 3.1. Para funciones derivables podríamos interpretar todo esto diciendo que el valor de x que maximiza o minimiza a $f(x)$ es la solución de la ecuación

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0.$$

Sin embargo, debemos ser cautos con esta extrapolación. En primer lugar, Fermat pensaba en una cantidad máxima o mínima, no en una función que alcance un máximo o un mínimo. Tampoco tiene clara la noción de variable independiente, sino que está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas. Además, no especifica nada acerca de que e sea un infinitésimo, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no involucra ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico. Por último, la condición 6 no tiene sentido bajo esta interpretación.

[2] La idea de «adigualdad» en Fermat se puede interpretar como «cantidades infinitamente próximas». De alguna forma, Fermat está considerando cantidades infinitesimales.

3.3. El método de las tangentes de Fermat

En la misma memoria antes referida, Fermat determina la subtangente a una parábola haciendo uso de su método para hallar máximos y mínimos, como procedemos a explicar.

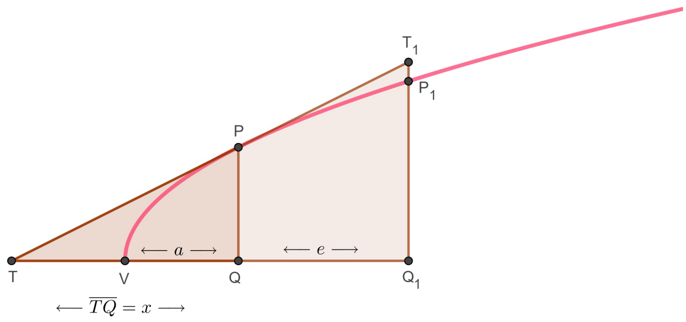


Figura 3.2. Cálculo de la subtangente [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/j4ng89s9].

En la fig. 3.2, el segmento $\overline{TQ}$ es la subtangente a la parábola en un punto dado P. El vértice de la parábola es V. La semejanza de los triángulos $\triangle TQP$ y $\triangle TQ_1T_1$ (posición de Tales) implica

$$\frac{\overline{T_1Q_1}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{TQ_1}}{\overline{TQ}}.$$

Teniendo en cuenta la propiedad de la parábola

$$\frac{\overline{VQ_1}}{\overline{VQ}} = \frac{\overline{P_1Q_1}^2}{\overline{PQ}^2}$$

y la relación $\overline{P_1Q_1} < \overline{T_1Q_1}$, deducimos que

$$\frac{\overline{VQ_1}}{\overline{VQ}} < \frac{\overline{TQ_1}^2}{\overline{TQ}^2}. \tag{3.1}$$

Pongamos ahora $\overline{VQ} = a$, que es la abscisa de la parábola en P, conocida porque se conoce P. Hagamos también $\overline{TQ} = x$, que es la subtangente que queremos calcular, y $\overline{QQ_1} = e$, como se refleja en la fig. 3.2. La igualdad (3.1) se expresa por

$$\frac{a+e}{a} < \frac{(x+e)^2}{x^2},$$

o bien $ax^2 + ex^2 < ax^2 + 2aex + ae^2$. Fermat aplica su método de máximos y mínimos y sustituye esta desigualdad por la «adigualdad» $ax^2 + ex^2 \sim ax^2 +$

$2aex + ae^2$. Cancelando términos y dividiendo por e, obtenemos $x^2 \sim 2ax + ae$. Eliminando ahora el término que queda en e, igualando y simplificando en x, se concluye que $x = 2a$, resultado ya conocido y que expresa que la subtangente es el doble de la abscisa.

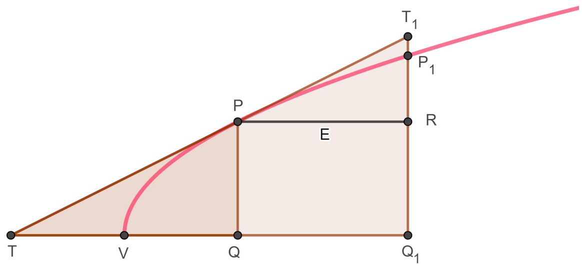


Figura 3.3. Cálculo de la tangente [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/j4ng89s9].

No está clara la razón por la que Fermat usa su método de máximos y mínimos para calcular tangentes; de hecho, Descartes criticó duramente esta forma de proceder. En 1638, como respuesta a esta crítica, Fermat desarrolló un procedimiento bastante general para calcular tangentes que, usando la notación actual, y con las mismas acotaciones que las ya expresadas respecto a la interpretación del método análogo para máximos y mínimos, podemos transcribir como sigue (fig. 3.3). Dado un punto $P = (a, f(a))$ en una curva $y = f(x)$, se trata de calcular la pendiente de la curva en P. Sea $\overline{QQ_1}$ un incremento de $\overline{TQ}$ en una cantidad E. Ya que los triángulos $\triangle TQP$ y $\triangle PRT_1$ son semejantes, se tiene:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{T_1R}}{E}.$$

Pero $\overline{T_1R}$ es casi igual a $\overline{P_1R}$; por tanto, tenemos la «adigualdad»

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{TQ}} \sim \frac{\overline{P_1Q_1} - \overline{QP}}{E}.$$

Poniendo $\overline{PQ} = f(a)$, la igualdad precedente puede escribirse como:

$$\frac{f(a)}{\overline{TQ}} \sim \frac{f(a+E) - f(a)}{E}.$$

Se cancelan los términos iguales en $f(a+E)-f(a)$, se divide por E y, finalmente, se ignoran los términos que aún contengan E (lo que equivale a hacer $E = 0$), y el resultado es la pendiente de la tangente en P. Está claro que el procedimiento que indica Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}.$$

Ejemplo 3.1. Sean $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $a = 2$; entonces, $f(2) = 3$, y $c = \overline{TQ}$ es la longitud de la subtangente. Se tiene la «adigualdad»

$$\frac{3}{c} = \frac{f(2+E) - f(2)}{E} = \frac{2E + E^2}{E} = 2 + E.$$

Haciendo $E = 0$ resulta $3/c = 2$, por lo que la subtangente es $c = 3/2$ y el valor de la pendiente de la tangente es $3/c = 2$, que, efectivamente, es igual a la derivada de f en $x = 2$.

3.4. El método de Roberval y Torricelli para las tangentes

En 1630, Roberval y el físico Evangelista Torricelli (Italia, 1608-1647) descubrieron, independientemente, un método para calcular tangentes mediante consideraciones cinemáticas, análogo al empleado en la Antigüedad por Arquímedes para trazar la tangente a su espiral. Este método se apoya en dos ideas básicas: la curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente, y la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. Si la razón entre las velocidades de los dos movimientos es conocida, la dirección del movimiento resultante se puede hallar mediante la ley del paralelogramo. Siguiendo las ideas de Galileo, este procedimiento relacionaba la Geometría con la Dinámica, pero su aplicación estaba limitada a curvas mecánicas.

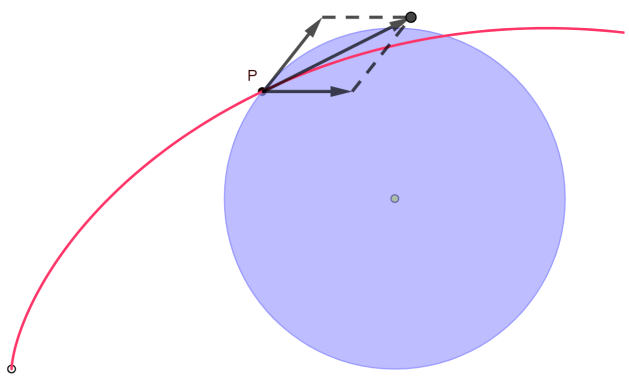


Figura 3.4. Tangente de la cicloide [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/dam5w6kr].

Ejemplo 3.2. El punto que genera una cicloide tiene velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal; por tanto, su tangente en un punto P se obtiene sumando el vector tangente a la circunferencia generadora en P con un vector horizontal en P, y ambos vectores tienen igual módulo (fig. 3.4).

3.5. El resultado fundamental de Barrow

Isaac Barrow (Inglaterra, 1630-1677) también ideó un método para calcular tangentes. Admirador de los geómetras antiguos, editó y comentó las obras de Euclides, Apolonio y Arquímedes a la vez que publicó las suyas propias, *Lectiones opticae*[3] (1669) y *Lectiones geometricae*[4] (1670), contando, según afirma en el prefacio, con la colaboración de su discípulo Isaac Newton. El tratado *Lectiones geometricae* se considera una de las principales aportaciones al Cálculo. En él, Barrow estudia con detalle los últimos descubrimientos sobre problemas de tangentes y cuadraturas, incluyendo conceptos como tiempo y movimiento y usando métodos infinitesimales y métodos de indivisibles.

Barrow estuvo muy cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer un uso efectivo de esta relación. En efecto, la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones geometricae* establece que para trazar una recta tangente a una curva, esta última debe estar relacionada con la cuadratura de otra curva, resultado que ha sido reconocido por diversos historiadores de las matemáticas como una versión preliminar del teorema fundamental del Cálculo en un contexto geométrico. Traducimos de [9, pp. 116–117] dicha proposición, referida al diagrama de la fig. 3.5.

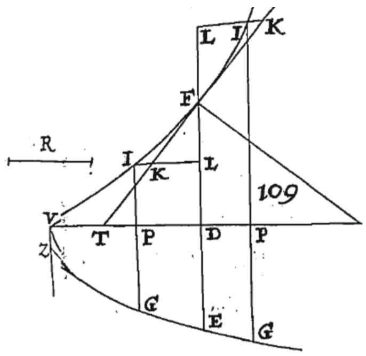


Figura 3.5. Diagrama de Barrow.

> Sea ZGE cualquier curva cuyo eje es VD; y sean VZ, PG, DE, ordenadas aplicadas a este eje que crecen continuamente desde la ordenada inicial VZ; sea también VIF una línea tal que, si se traza cualquier línea recta EDF perpendicularmente a VD, cortando a las curvas en los puntos E, F, y a VD en D, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio $VDEZ$; sea también $DE : DF = R : DT$, y unamos DT. Entonces, TF tocará a la curva VIF.

[3] *Lecciones de óptica.*
[4] *Lecciones de geometría.*

Pues, si se toma cualquier punto I de la línea VIF (primero del lado de F hacia V), y si a través de él se traza IG paralelo a VZ, e IL paralelo a VD, cortando a las líneas dadas como se muestra en la figura; entonces $LF : LK = DF : DT = DE : R$, o bien $R \cdot LF = LK \cdot DE$.

Pero, por la naturaleza afirmada de las líneas DF, PK, tenemos $R \cdot LF = \acute{A}rea\, PDEG$; por tanto, $LK \cdot DE = \acute{A}rea\, PDEG < DP \cdot DE$; luego, $LK < DP < LI$.

De nuevo, si se toma el punto I del otro lado de F, y se hace la misma construcción que antes, claramente se puede probar sin dificultad que $LK > DP > LI$.

De donde es completamente evidente que toda la línea $TKFK$ queda dentro o por debajo de la curva $VIFI$.

Bajo las mismas condiciones, si las ordenadas VZ, PG, DE decrecen continuamente, se alcanza la misma conclusión mediante un argumento similar; sólo hay una diferencia, a saber, que en este caso, al contrario que en el otro, la curva $VIFI$ es cóncava respecto al eje VD.

A continuación se transcribirá la construcción geométrica que demuestra la proposición de Barrow (fig. 3.6). Sean el segmento $\overline{AB}$ definido en el eje horizontal y la curva continua y creciente $y = f(x)$[5]. Sea C un punto en el segmento $\overline{AB}$, y tracemos las perpendiculares por los puntos A y C, las cuales cortan a la curva f en los puntos E y D, respectivamente. Ahora, sea F el punto sobre la recta $\overline{CD}$ que cumple lo siguiente: el área de $EDCA$ es igual al área del rectángulo determinado por el segmento $\overline{FC}$ y una longitud constante h, de modo que $\acute{A}rea\, EDCA = \overline{FC} \cdot h$. Al desplazar el punto C, el punto F describe un nuevo lugar geométrico $y = g(x)$, que corresponde a una curva definida también sobre el segmento $\overline{AB}$.

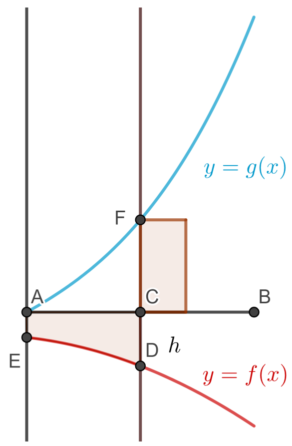


Figura 3.6. $\acute{A}rea\, EDCA = \overline{FC} \cdot h$ [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/auew87ru].

[5] Aunque en nuestros días diríamos que la curva es decreciente, en la geometría del siglo XVII no tenían cabida las magnitudes negativas, por lo que un desplazamiento hacia abajo en el eje vertical también se consideraba positivo.

4

El nacimiento del Cálculo: Newton y Leibniz

A finales del siglo XVII, Isaac Newton (Inglaterra, 1643-1727) y Gottfried Leibniz (Alemania, 1646-1716), trabajando de forma independiente, inventaron el Cálculo Infinitesimal. Se considera que esto es así porque:

1. Unificaron y resumieron en dos conceptos generales, el de integral y derivada, una gran variedad de problemas similares que, como hemos visto, se abordaban con técnicas particulares.
2. Desarrollaron un simbolismo y unas reglas formales de «cálculo» independientes de cualquier significado geométrico y que podían ser aplicadas a funciones algebraicas y trascendentes, lo que prácticamente automatizaba los procesos de resolución.
3. Supieron reconocer la relación inversa fundamental entre la derivación y la integración.

Leibniz interpretó la derivada como una razón de diferencias infinitesimales y la llamó «cociente diferencial», mientras que para Newton era una razón de cambio o flujo que denominó «fluxión». Newton hizo sus primeras contribuciones diez años antes que Leibniz, quien, sin embargo, fue el primero en publicar las suyas. La atribución de la paternidad del descubrimiento del Cálculo dio origen a la disputa más célebre de la historia de la ciencia.

4.1. El cálculo de Newton

Newton es considerado como el científico más grande de todos los tiempos. En los *Philosophiae naturalis principia mathematica*[1] (1687) describe la ley de la gravitación universal y establece las bases de la mecánica clásica. Entre sus otros descubrimientos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica. En relación con el tema que nos ocupa, hablaremos primero del cálculo de fluxiones, luego del teorema fundamental del cálculo y, por último, de las series infinitas.

[1] *Principios matemáticos de la filosofía natural.*

4.1.1. Cálculo de fluxiones

Los principales descubrimientos matemáticos de Newton en el campo del Cálculo Infinitesimal datan de 1665 y 1666, los llamados *anni mirabiles*[2]. No obstante, Newton desarrollaría hasta tres versiones de su cálculo.

El tratado *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*[3] puede ser considerado el escrito fundacional del Cálculo. Newton lo entregó a su maestro Barrow en 1669 y circuló entre otros colegas y conocidos antes de ser publicado en 1711. En él, Newton utiliza conceptos infinitesimales de manera similar a como hacía el propio Barrow.

Una segunda presentación es la que Newton realiza en su obra póstuma *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*[4], escrita hacia 1671 aunque no sería publicada hasta mucho después, en 1736. Aquí, Newton considera cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las que llama «fluentes» y representa con las letras $x, y, z, \ldots$. Después introduce las razones de cambio instantáneas de las fluentes, es decir, sus derivadas respecto al tiempo, a las que denomina «fluxiones», y que representa con letras punteadas $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ldots$. Los incrementos de las fluentes o «momentos» se representan por medio de las correspondientes fluxiones en la forma $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o, \ldots$ donde o es entendido como un incremento infinitesimal de tiempo. En esta obra, Newton desarrolló una serie de algoritmos y redujo muchos problemas (determinación de tangentes, máximos y mínimos, áreas y superficies, curvaturas, longitudes de arco, centros de gravedad, etc.) a dos problemas fundamentales, que pueden formularse tanto en términos mecánicos como en términos matemáticos:

> **Problema 1.** Determinación de la velocidad de movimiento en un momento de tiempo dado según un camino dado: dada la relación entre las cantidades fluentes, determinar la relación entre las fluxiones.

> **Problema 2.** Dada la velocidad de movimiento, determinar el camino recorrido en un tiempo dado: determinar la relación entre las fluentes, dada la relación entre las fluxiones.

El Problema 2 entraña una dificultad mucho mayor que el Problema 1, pues implica resolver una ecuación diferencial que puede ser muy general. Newton consideró varias posibilidades y resolvió algunos casos particulares aplicando técnicas de cálculo de primitivas y desarrollos en serie.

---

[2] «Años milagrosos» o «de las maravillas». La expresión fue acuñada en 1667 por el poeta inglés John Dryden para referirse a los terribles acontecimientos que habían asolado Inglaterra durante el año anterior: la gran plaga, el gran incendio de Londres y las batallas contra los ejércitos holandeses. Precisamente, la epidemia de peste forzó a Newton a abandonar el Trinity College de Cambridge, donde estudiaba tras graduarse, para recluirse en su casa natal. La locución latina fue luego adoptada por la historia de la ciencia en conmemoración de los extraordinarios avances conseguidos por Newton durante su confinamiento.

[3] *Del análisis por medio de ecuaciones con un número infinito de términos.*

[4] *El método de las fluxiones y series infinitas.*

Es preciso señalar que Newton no piensa en términos de funciones con el significado actual del término, sino que imagina curvas o superficies descritas por las variables; o sea, considera relaciones entre las fluentes del tipo $f(x, y, z, \dots) = 0$, donde f es, para él, una expresión analítica finita o infinita. Así, el Problema 1 puede ser contemplado como un problema de derivación implícita: dada la expresión analítica que satisfacen las fluentes $f(x, y, z, \dots) = 0$, obtener la expresión analítica $F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dots) = 0$ satisfecha por las fluxiones. Newton introdujo un algoritmo que sistematizaba los cálculos necesarios para resolver este problema.

Ejemplo 4.1. Sea la curva $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$. Sustituyendo x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$ y agrupando, resulta:

$$\begin{aligned}(x^3 &+ 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3) - a(x^2 + 2\dot{x}ox + \dot{x}^2o^2)\\ &+ a(xy + \dot{x}oy + \dot{y}ox + \dot{x}\dot{y}o^2) - (y^3 + 3\dot{y}ox^2 + 3\dot{y}^2o^2y + \dot{y}^3o^3) = 0.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, dividiendo por o y despreciando los demás términos que contienen a o, encontramos que

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + ax\dot{y} - 3\dot{y}y^2 = 0.$$

Esta es la relación que satisfacen las fluxiones. A partir de ella se puede obtener la tangente a la curva $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ en cualquier punto (x, y), que viene dada por:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{3x^2 - 2ax + ay}{3y^2 - ax}.$$

Newton usa el teorema fundamental del cálculo para efectuar cuadraturas:

> **Problema 9.** Determinar el área de cualquier curva propuesta.
>
> La resolución del problema está basada en el establecimiento de la relación entre la cantidad fluente y su fluxión (Problema 2).

Con ello reduce la integración al proceso inverso del cálculo de fluxiones, esto es, al cálculo de primitivas.

Finalmente, en *Tractatus de quadratura curvarum in usum studiosae iuventutis mathematicae*[5], escrita en 1676 y publicada en 1704, Newton fundamenta su cálculo de fluxiones en lo que llama «razones primera y última de incrementos evanescentes». Se refiere con esa denominación a los cocientes de los incrementos infinitesimales de las cantidades variables, y su objetivo es determinarlos en el momento en que dichas cantidades nacen desde cero («razón primera») o se anulan («razón última»).

Ilustraremos mediante un ejemplo el significado de estas ideas.

[5] *Tratado sobre la cuadratura de las curvas para uso de jóvenes estudiantes de matemáticas.*

Ejemplo 4.2. Para calcular la fluxión de x^n, Newton considera un incremento o de forma que x pasa a $x+o$. Entonces x^n se convierte en

$$(x+o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots .$$

Los incrementos de x y x^n, a saber, o y

$$nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \dots ,$$

están entre sí en la misma razón que 1 a

$$nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \dots .$$

Dice Newton:

> Dejemos ahora que los incrementos se anulen y su última proporción será 1 a nx^{n-1}. Por tanto, la fluxión de la cantidad x es a la fluxión de la cantidad x^n como $1 : nx^{n-1}$.

Se han sugerido múltiples razones que habrían inducido a Newton a exponer su cálculo de una u otra forma. La más extendida es que pretendía fundamentarlo rigurosamente; la primera presentación, basada en el concepto de cantidad infinitesimal entendida como una cantidad menor que cualquier cantidad positiva pero no nula, presentaba problemas de coherencia lógica de los que Newton era muy consciente, hasta el punto de admitir que su cálculo estaba «concisamente explicado más que exactamente demostrado».

4.1.2. El teorema fundamental del cálculo según Newton

El ya referido *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*, además del teorema binomial y los descubrimientos de Newton relativos a series infinitas, contiene un claro reconocimiento de la relación inversa entre problemas de cuadraturas y de tangentes. Aunque Newton explica el método con un ejemplo, queda perfectamente claro su carácter general.

Newton llama z al área bajo la curva

$$z = \frac{n}{m+n}ax^{(m+n)/n} \tag{4.1}$$

hasta el punto de abscisa x (fig. 4.1); la relación entre x y z se supone conocida. Por comodidad, escribiremos $r = (m+n)/n$. Newton imagina que el punto $P = (x, y)$ se mueve a lo largo de la curva y plantea el siguiente argumento. Incrementemos la abscisa x a $x+o$, donde o es una cantidad infinitesimal o momento (fig. 4.1). Tomemos $\overline{KB} = v$, de forma que $ov = \acute{A}rea\, BbHK = \acute{A}rea\, BbPd$ (figs. 4.2 y 4.3). El incremento de área viene dado por:

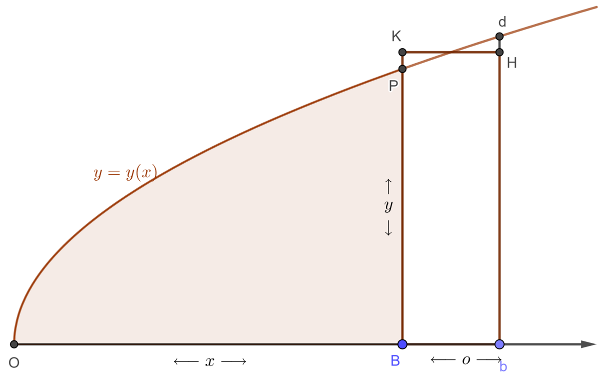


Figura 4.1. $z = z(x) = \acute{A}rea\, OBP$ [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/sm4tpxrr].

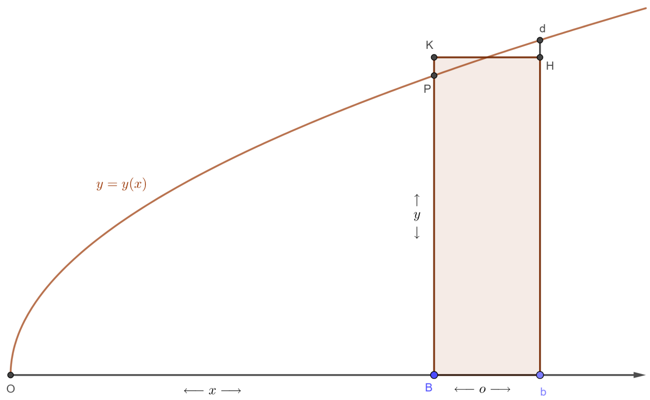


Figura 4.2. $\acute{A}rea\, BbHK$ [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/sm4tpxrr].

$$ov = z(x+o) - z(x) = \frac{a}{r}(x+o)^r - \frac{a}{r}x^r. \tag{4.2}$$

Desarrollando en potencias,

$$\begin{aligned} \frac{a}{r}(x+o)^r &= \frac{a}{r}x^r\Big(1+\frac{o}{x}\Big)^r \\ &= \frac{a}{r}x^r\Big(1 + r\frac{o}{x} + \frac{r(r-1)o^2}{2x^2} + \frac{r(r-1)(r-2)o^3}{1\cdot 2\cdot 3x^3} + \dots\Big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tras dividir por o, deducimos de (4.2) y (4.3) que:

$$v = ax^{r-1} + \frac{a(r-1)}{2}ox^{r-2} + \frac{a(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}o^2x^{r-3} + \dots.$$

Si en esta igualdad suponemos que o va disminuyendo «hasta llegar a ser nada», en cuyo caso v coincidirá con y, una vez eliminados los términos que contienen o resulta

$$y = ax^{r-1} = ax^{m/n}. \tag{4.4}$$

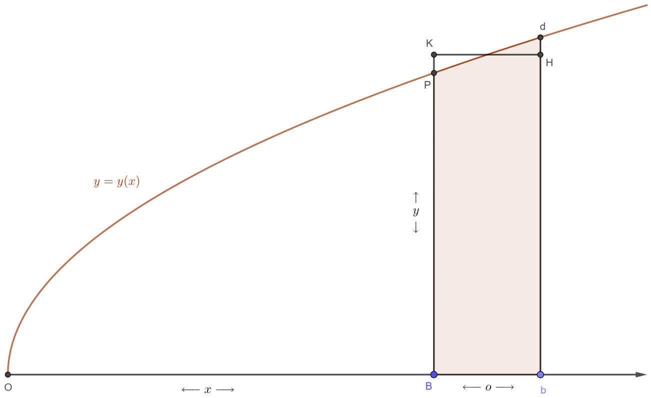


Figura 4.3. *Área BbdP* [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/sm4tpxrr].

Este es, por tanto, el valor de la ordenada de la curva en $P = (x, y)$. El proceso se puede invertir y, de hecho, ya se sabía que la cuadratura de (4.4) viene dada por (4.1).

Obsérvese que Newton no ha usado el significado tradicional de la integral al estilo de sus predecesores, es decir, no ha interpretado la integral como un límite de sumas de áreas infinitesimales, sino que ha probado que la expresión que proporciona la cuadratura es correcta, estudiando la variación momentánea de dicha expresión. De hecho, lo que Newton ha probado es que la razón de cambio del área bajo la curva, esto es, el cociente $[z(x + o) - z(x)]/o$, se hace igual a la ordenada de la curva cuando o «se hace nada». En términos actuales: la derivada de $z(x)$ es la función $y = y(x)$. De esta manera se hace evidente la relación simétrica entre cuadraturas y derivadas; para calcular cuadraturas basta con calcular una antiderivada, lo que hoy llamamos una primitiva de la función $y = y(x)$.

4.1.3. Newton y las series infinitas

Newton conocía la obra de Wallis *Arithmetica infinitorum*. Siguiendo las ideas de interpolación allí expuestas, descubrió la serie del binomio que hoy lleva su nombre. Dicha serie es una generalización del desarrollo del binomio, que era bien conocido para exponentes naturales y había sido usado intensivamente por Blaise Pascal (Francia, 1623-1662) para resolver una gran variedad de problemas.

Newton consideró la cuadratura del círculo, es decir, el cálculo de la integral

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{1/2} \, dx,$$

como un problema de interpolación, relacionándola con las cuadraturas análogas

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n \, dx,$$

conocidas para exponentes naturales $n \in \mathbb{N}$. Sustituyó el límite superior de integración por un valor genérico x, con lo que obtuvo las siguientes cuadraturas (Newton no disponía de símbolo para la integral; usamos la notación actual):

$$\begin{aligned}
\int_0^x (1-t^2)\,dt &= x - \frac{1}{3}x^3,\\
\int_0^x (1-t^2)^2\,dt &= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5,\\
\int_0^x (1-t^2)^3\,dt &= x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7,\\
\int_0^x (1-t^2)^4\,dt &= x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9.
\end{aligned}$$

Newton observó que el primer término de cada expresión es x, que aumenta en potencias impares; que los signos algebraicos de los coeficientes se van alternando; y que los segundos términos

$$\frac{1}{3}x^3,\ \frac{2}{3}x^3,\ \frac{3}{3}x^3,\ \frac{4}{3}x^3$$

están en progresión aritmética. Razonando por analogía, supuso que los dos primeros términos de

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,dt$$

deberían ser

$$x - \frac{1/2}{3}x^3.$$

De la misma manera, también por analogía, pudo encontrar algunos términos más:

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}dt = x - \frac{1/2}{3}x^3 - \frac{1/8}{5}x^5 - \frac{1/16}{7}x^7 - \frac{1/128}{9}x^9 - \dots.$$

Representando por $Q_n(x)$ el polinomio

$$\int_0^x (1-t^2)^n dt, \quad n \in \mathbb{N},$$

se tiene que

$$Q_n(x) = \int_0^x (1-t^2)^n\,dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1},$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}, \qquad \binom{n}{0} = 1.$$

Haciendo ahora $n = 1/2$ en $Q_n(x)$, resulta

$$Q_{1/2}(x) = x - \frac{1/2}{3}x^3 - \frac{1/8}{5}x^5 - \frac{1/16}{7}x^7 - \frac{1/128}{9}x^9 - \dots.$$

Lo anterior llevó a Newton a concluir que

$$\int_0^x (1-t^2)^{1/2}\,dt = Q_{1/2}(x),$$

siendo

$$Q_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

una suma con infinitos términos. A partir de aquí, Newton dedujo el desarrollo de $(1-x^2)^{1/2}$ por derivación:

$$(1-x^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{128}x^8 - \dots.$$

El teorema del binomio de Newton apareció impreso por primera vez en 1685, en un libro de Wallis (quien reconoce la autoría de Newton), titulado *Treatise of algebra*[6], ya que Newton nunca publicó ni dio una demostración general de su resultado. Es más, en una carta a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society, conocida como *La epístola prior* (1676), Newton expone el teorema binomial, a requerimiento de Leibniz, mediante una fórmula críptica:

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \dots,$$

donde $A = P^{m/n}$ y $B, C, D, \dots$ son el segundo y sucesivos términos del desarrollo.

Como Newton era consciente de que su razonamiento por analogía carecía de rigor, comprobó su resultado de varias maneras. Aplicó su algoritmo a diversos resultados conocidos y verificó que las soluciones obtenidas eran siempre correctas. Redescubrió la serie de Mercator[7] para el logaritmo,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

y obtuvo las series del arcoseno y del seno:

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \dots,$$

[6] *Tratado de álgebra.*

[7] Nikolaus Kauffman, en latín Nicholas Mercator (Alemania, c. 1620-1687).

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Newton encontró que el método de desarrollos en serie proporcionaba un algoritmo casi universal para calcular cuadraturas y resolver multitud de problemas. En su reiteradamente citada *De analysi* propuso un método para cuadrar una curva, consistente en tres reglas:

1. El área bajo la curva de ecuación $y = ax^{m/n}$ es
$$\frac{na}{m+n} ax^{(m+n)/n}.$$
2. Si la ecuación $y = y(x)$ de la curva está dada por un número finito de términos $y_1 + y_2 + y_3 + \dots$, el área bajo la curva y es igual a la suma de las áreas de todos los términos $y_1, y_2, y_3, \dots$
3. Si la curva tiene una forma más complicada, entonces se debe desarrollar la ecuación de la curva en una serie del tipo $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, y aplicar las reglas 1 y 2.

Newton supuso que cualquier cantidad expresada analíticamente podía desarrollarse en una serie de la forma $\sum a_k x^{r_k}$, donde r_k es un número racional, la cual puede ser cuadrada término a término usando la regla 1.

Ejemplo 4.3. Para calcular

$$\int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}\, dx,$$

Newton procede como sigue:

$$(x - x^2)^{1/2} = x^{1/2}(1-x)^{1/2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \frac{1}{128}x^{9/2} - \dots.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/4} (x - x^2)^{1/2}\, dx &= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{5}x^{5/2} - \frac{1}{28}x^{7/2} - \frac{1}{72}x^{9/2} - \frac{5}{704}x^{11/2} - \dots\right]_0^{1/4} \\ &= \frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \frac{5}{704\cdot 2^{11}} - \dots. \quad (4.5)\end{aligned}$$

En la fig. 4.4 se ha representado el semicírculo de centro $O(1/2, 0)$ y radio $r = 1/2$. El sector circular AOC tiene amplitud $\pi/3$, por lo que su área es la tercera parte de la del semicírculo, es decir, $\pi/24$; nótese que el área del semicírculo es

$$\frac{\pi(1/2)^2}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

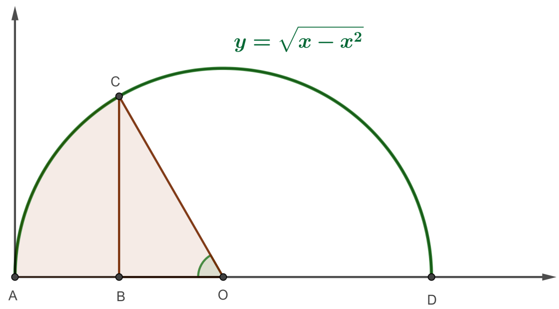


Figura 4.4. Cuadratura del círculo [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/druqejt9].

Como $\overline{BO} = 1/4$ y $\overline{CO} = 1/2$, necesariamente $\overline{CB} = \sqrt{3}/4$. Luego, el área del triángulo $\triangle BOC$ es $\sqrt{3}/32$. Por otra parte, la integral calculada en (4.5) es el área de la región ABC (fig. 4.4), con lo cual

$$\int_0^{1/4} (x - x^2)^{1/2}\, dx + \frac{\sqrt{3}}{32} = \frac{\pi}{24}.$$

De lo anterior deducimos que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\Big(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \frac{5}{704 \cdot 2^{11}} - \dots\Big).$$

Así pues, Newton expresa la cuadratura del círculo por medio de una serie infinita que, además, converge rápidamente.

Newton no sólo descubrió el teorema binomial, sino el hecho de que las series infinitas proporcionaban un método de análisis con la misma consistencia interna que el álgebra de ecuaciones finitas.

4.2. El cálculo de Leibniz

Leibniz desarrolló muchas actividades a lo largo de su vida. Entre sus contribuciones a las matemáticas destaca la invención de la primera máquina de calcular, capaz de realizar las operaciones de multiplicación, división y extracción de raíces cuadradas. Como filósofo se propuso la creación de un álgebra del pensamiento humano, a modo de lenguaje simbólico universal para escribir los razonamientos con símbolos y fórmulas, cuyas reglas de combinación permitieran reducir cualquier discurso racional a cálculos rutinarios. Esto explica el gran interés de Leibniz por desarrollar una notación matemática apropiada para su cálculo; no en vano esa notación, muy superior a la de Newton, es la que continuamos usando actualmente. Las contribuciones de Leibniz al álgebra (determinantes, resolución de ecuaciones), a la historia natural, la geología y la lingüística también son importantes.

Leibniz fundó, en 1700, la Academia de Ciencias de Berlín, de la que fue primer presidente, y promovió la creación de la primera revista científica alemana, el *Acta Eruditorum*, que vio la luz en 1682. Aunque él mismo publicó poco, mantuvo correspondencia con más de 600 eruditos. Sus manuscritos se conservan en el archivo que lleva su nombre en la ciudad alemana de Hannover.

En 1672, estando en París en misión diplomática, Leibniz se dedicó intensamente al estudio de la matemática superior, teniendo como guía al matemático y físico Christiaan Huygens (Países Bajos, 1629-1695). En los años 1673 y 1676 realizó, también en misión diplomática, dos viajes a Londres, donde tuvo acceso al reiteradamente citado manuscrito de Newton *De analysi*. Esta circunstancia fue aprovechada para acusarle de plagio, hoy sabemos que injustamente, cuando se produjo la agria controversia sobre la prioridad en el descubrimiento del Cálculo. Los progresos matemáticos realizados por Leibniz en estos cuatro años fueron extraordinarios.

Leibniz llamó *calculus differentialis*, esto es «cálculo de diferencias», a la parte de su cálculo que se ocupa del estudio de tangentes, y *calculus summatorius*, o sea, «cálculo de sumas», a la que se ocupa de problemas de cuadratura. En esta sección expondremos sus avances en relación con el cálculo de diferencias y la invención del cálculo sumatorio.

4.2.1. Leibniz y el cálculo de diferencias

En las matemáticas de Leibniz son importantes los estudios sobre sucesiones numéricas y sus sucesiones de diferencias consecutivas asociadas. Dada una sucesión de números

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots,$$

podemos formar la sucesión de sus diferencias primeras:

$$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 - a_1,\ b_3 = a_3 - a_2,\ b_4 = a_4 - a_3, \ldots,\ b_n = a_n - a_{n-1}, \ldots.$$

Leibniz se había percatado de la relación

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n = a_n,$$

indicativa de que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y de que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla devuelve la sucesión inicial, es decir, ambas operaciones son inversas la una de la otra. Esta sencilla idea, llevada al campo de la geometría, conduce al concepto central del cálculo de Leibniz, que es el de «diferencial», aunque el término tuvo para él diversos significados en distintas épocas. Curiosamente, los términos «abscisa», «ordenada» y «coordenadas», tan propios de la Geometría Analítica, nunca fueron usados por su fundador René Descartes (Francia, 1596-1650), sino que se deben a Leibniz; y mientras que nosotros hablamos de «diferenciales», Leibniz siempre hablaba de «diferencias».

Leibniz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Una tal curva lleva asociada una sucesión de abscisas $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$, donde todos los puntos (x_i, y_i) están en la curva y vienen a ser los vértices de la poligonal de infinitos lados que la forman. La diferencia entre dos valores sucesivos de x es llamada la diferencial de x, y se representa por dx; dy tiene un significado análogo. La diferencial dx es una cantidad fija, no nula, infinitamente pequeña en comparación con x; de hecho, es una cantidad infinitesimal. Los lados del polígono que constituye la curva son representados por ds. Resulta así el denominado triángulo característico de Leibniz, ya considerado por Barrow.

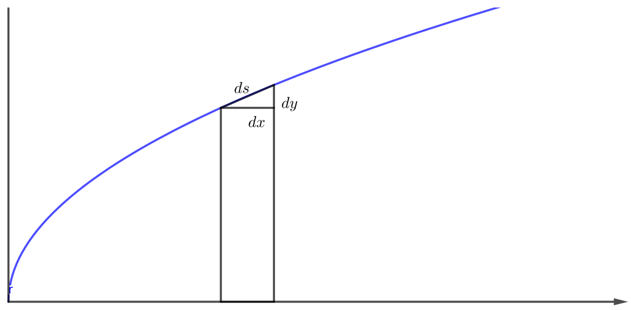


Figura 4.5. Triángulo característico [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/qqtdepcr].

El triángulo característico tiene lados infinitesimales dx, dy, ds, y se verifica la relación $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ (fig. 4.5). El lado ds sobre la curva o polígono se hace coincidir con la tangente a la curva en el punto (x, y). La pendiente de dicha tangente viene dada por dy/dx, que es un cociente de diferenciales al que Leibniz llamó cociente diferencial. Leibniz nunca consideró la derivada como un límite.

Tras investigar durante algún tiempo, Leibniz encontró las reglas correctas para diferenciar productos y cocientes, fácilmente expresables en su notación diferencial:

$$d(xy) = ydx + xdy, \qquad d\Big(\frac{x}{y}\Big) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

La manera en que Leibniz llegó a estas fórmulas pudo ser la siguiente. Consideremos

$$z_n = \Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} y_j\Big).$$

Entonces,

$$z_{n+1} - z_n = x_{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} y_j + y_{n+1} \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{4.6}$$

Si, con Leibniz, interpretamos que x_j e y_j son diferencias de valores consecutivos de las cantidades x e y respectivamente, entonces los valores de dichas cantidades vendrán dados por las sumas respectivas $x = \sum_{j=1}^{n} x_j$ e $y = \sum_{j=1}^{n} y_j$, mientras que $dx = x_{n+1}$ y $dy = y_{n+1}$ por ser diferencias de valores consecutivos. Análogamente, la diferencial de $z = xy$ sería $z_{n+1} - z_n$. Por tanto, la igualdad (4.6) es interpretada por Leibniz en la forma $d(xy) = xdy + ydx$, lo que le conduce a la regla para la diferencial de un producto. A partir de ésta, Leibniz obtuvo la regla correspondiente a la diferencial de un cociente $z = x/y$: poniendo $x = zy$ se tiene que $dx = ydz + zdy$, de donde, despejando dz, resulta

$$dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{dx - (x/y)dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

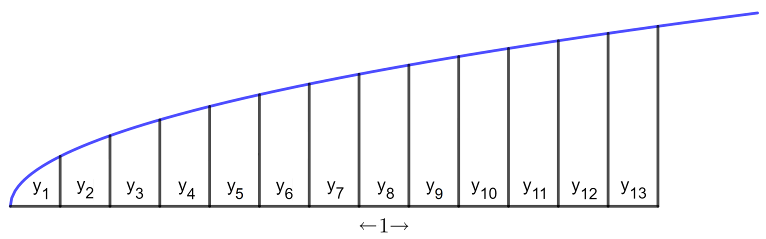


Figura 4.6. Aproximación de una cuadratura [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/nnznqtnx].

La suma de las ordenadas es una aproximación de la cuadratura de la curva (del área bajo la curva), y la diferencia entre dos ordenadas sucesivas es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeña se elija la unidad 1 en la fig. 4.6, tanto mejor serán estas aproximaciones. Leibniz razonaba que si la unidad pudiera ser tomada «infinitamente pequeña», estas aproximaciones se harían exactas, esto es, la cuadratura sería igual a la suma de las ordenadas, y la pendiente de la tangente sería igual a la diferencia de dos ordenadas sucesivas. Como las operaciones de tomar diferencias y sumar son recíprocas entre sí, Leibniz dedujo que el cálculo de cuadraturas y de tangentes también eran operaciones inversas una de otra.

Las investigaciones de Leibniz sobre la integración y el origen de sus notaciones para la integral y las diferenciales se pueden seguir con todo detalle en una serie de manuscritos del 25 de octubre al 11 de noviembre de 1675. En 1676, Leibniz ya había obtenido prácticamente todos los resultados descubiertos por Newton un poco antes.

La primera publicación sobre Cálculo Diferencial data de 1684 y fue el artículo de Leibniz *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractals nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*[8], aparecido en *Acta Eruditorum*. En este trabajo, que da nombre al Cálculo como rama de las matemáticas, Leibniz definía la diferencial dy de forma que evitaba el uso de las sospechosas cantidades infinitesimales. Poco después, en 1686, publicó un trabajo con sus estudios sobre la integración.

4.2.2. La invención del *calculus summatorius*

Recapitulando, las principales ideas que guiaron a Leibniz en la invención del Cálculo fueron:

1. La creación de un simbolismo matemático que automatizara los cálculos y permitiera formular fácilmente procesos algorítmicos.
2. La apreciación de que las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente, y que el proceso de formar la sucesión de diferencias y después sumarla recupera la sucesión inicial, es decir, que se trata de operaciones inversas la una de la otra.
3. La consideración de las curvas como polígonos de infinitos lados de longitud infinitesimal y de las variables como sucesiones que toman valores consecutivos infinitamente próximos.

Leibniz investiga la posibilidad de formular simbólicamente los problemas de cuadratura, e introduce la notación que actualmente usamos para la integral y la diferencial. En sus manuscritos plantea algunos casos particulares de la regla de integración por partes, como, por ejemplo, la siguiente igualdad (se supone $f(0) = 0$):

$$\int_0^a x f'(x)\, dx = af(a) - \int_0^a f(x)\, dx = a\int_0^a f'(x)\, dx - \int_0^a dx \int_0^x f'(t)\, dt. \quad (4.7)$$

Naturalmente, Leibniz no la escribe así. La notación que usamos para la derivada se debe a Joseph Louis Lagrange (Italia/Francia, 1736-1813) y es bastante tardía, de finales del siglo XVIII, mientras que la notación que usamos para indicar los límites de integración fue introducida por Joseph Fourier (Francia, 1768-1830) en el primer tercio del siglo XIX. El término «integral» tampoco se debe a Newton ni a Leibniz. Para Leibniz, una integral es una suma de infinitos rectángulos infinitesimales. El símbolo que ideó para representarlas, «$\int$», tiene forma de una «s» alargada, como las que en aquel tiempo se usaban en la imprenta; además, es la primera letra de la palabra latina *summa*, o sea, «suma». Fue Johann Bernoulli

[8] *Un nuevo método para máximos y mínimos, y para tangentes, que no se ve obstaculizado por cantidades fraccionarias o irracionales, y un tipo singular de cálculo para ellos.*

quien, en 1690, sugirió llamar *calculus integralis* al cálculo de cuadraturas, de donde deriva el término «integral» que usamos actualmente.

De hecho, Leibniz obtuvo la fórmula (4.7) antes de inventar su notación para las integrales y las diferenciales. Es interesante mostrar cómo lo hizo. Para ello vamos a recorrer el camino inverso al seguido por Leibniz, modificando la notación de dicha fórmula hasta llegar a escribirla como lo hizo él.

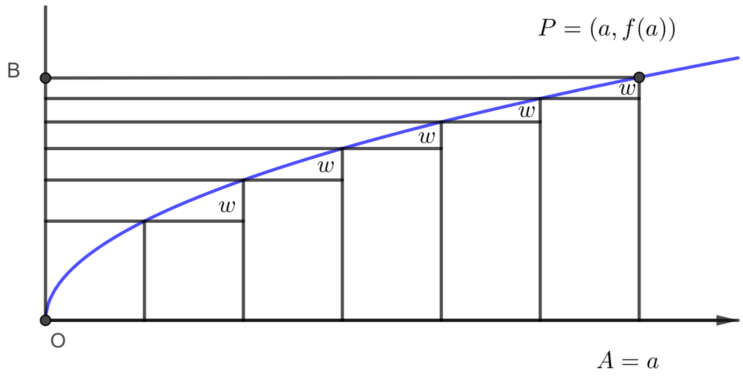


Figura 4.7. Áreas complementarias [https://www.geogebra.org/m/zsd7gdyg#material/ns8hbqxq.]

Podemos interpretar gráficamente la igualdad (4.7) sin más que observar la fig. 4.7. El número $af(a)$ es el área del rectángulo $OAPB$, mientras que la integral $\int_0^a f(x)dx$ es el área de la parte OAP de dicho rectángulo que queda bajo la curva $y = f(x)$. Deducimos de (4.7) que la integral $\int_0^a xf'(x)dx$ es el área de la parte OBP de dicho rectángulo que queda por encima de la curva $y = f(x)$. Esta área es suma de las áreas de rectángulos horizontales como los representados en la fig. 4.7, cuya base es el valor de la abscisa correspondiente, x, y cuya altura la diferencia infinitamente pequeña entre dos ordenadas sucesivas, que Leibniz representa por w. Esta diferencia es lo que posteriormente se llamará diferencial de y. Podemos, pues, interpretar que $w = dy = f'(x)dx$. Por su parte, el área de la región OAP es considerada por Leibniz como la suma de las ordenadas y. Finalmente, cabe eliminar y porque el valor de una variable se obtiene sumando sus diferencias consecutivas, de modo que y puede ser contemplada como la suma de las w. Esto equivale, en nuestra notación, a sustituir $f(x)$ por $\int_0^x f'(t)dt$ (o, al estilo de Leibniz, y por $\int dy$), lo que también hemos hecho en la igualdad (4.7). La forma exacta en que Leibniz escribió (4.7) es:

$$\text{omn. } \overline{xw} \sqcap \text{ult. } x, \ \overline{\text{omn. } w}, \ -\overline{\text{omn. omn. } w}. \tag{4.8}$$

Aquí, $\sqcap$ es el símbolo para la igualdad, «ult. x» significa *ultimus* x, el último de los x, es decir, $\overline{OA} = a$. El símbolo «omn.» es la abreviatura de *omnes lineae*, «todas las líneas», símbolo que ya había sido usado por Cavalieri y que Leibniz adopta con el significado de «una suma». Se usan también líneas por encima de los términos y comas donde ahora pondríamos paréntesis.

En un manuscrito pocos días posterior a este, Leibniz reescribe la igualdad (4.8) en la forma:

$$\text{omn. } x\ell \sqcap x \text{ omn. } \ell - \overline{\text{omn. omn. } \ell}, \tag{4.9}$$

y observa que «omn.» antepuesto a una magnitud lineal como ℓ da un área, antepuesto a un área como $x\ell$ da un volumen, y así sucesivamente. Extraemos de [3] una larga cita que da cumplida idea de cómo llegó Leibniz a la invención del Cálculo.

> Estas consideraciones de homogeneidad dimensional parecen haber sido las que sugirieron a Leibniz el usar una única letra en vez del símbolo «omn.», porque escribe a continuación: «Sería conveniente escribir "$\int$" en lugar de "omn.", de tal manera que $\int \ell$ represente omn. ℓ, es decir, la suma de todas las ℓ». Así fue como se introdujo el signo «$\int$». [...] E inmediatamente a continuación escribe Leibniz la fórmula (4.9) utilizando el nuevo formalismo:
>
> $$\int x\ell = x \int \ell - \iint \ell \tag{4.10}$$
>
> haciendo notar que
>
> $$\int x = \frac{x^2}{2} \quad \text{y} \quad \int x^2 = \frac{x^3}{3}$$
>
> y subrayando que estas reglas se aplican a «las series en las que la razón de las diferencias de los términos a los términos mismos es menor que cualquier cantidad dada», es decir, a las series cuyas diferencias son infinitamente pequeñas.
>
> Unas líneas más adelante nos encontramos también con la introducción del símbolo «d» para la diferenciación. Aparece en el contexto de un brillante razonamiento que puede resumirse de la forma siguiente: el problema de las cuadraturas es un problema de suma de sucesiones, para lo cual hemos introducido el símbolo «$\int$» y para el que queremos elaborar un «cálculo», es decir, un conjunto de algoritmos eficaces. Ahora bien, sumar sucesiones, es decir, hallar una expresión general para $\int y$ dada la y, no es posible normalmente, pero siempre lo es encontrar una expresión para las diferencias de una sucesión dada. Así pues, el cálculo de diferencias es la operación recíproca del cálculo de sumas, y por lo tanto podemos esperar dominar el cálculo de sumas desarrollando su recíproco, el cálculo de diferencias. Para citar las mismas palabras de Leibniz:
>
> > *Dada ℓ y su relación con x, hallar $\int \ell$. Esto se puede obtener mediante el cálculo inverso, es decir, supongamos que $\int \ell = ya$ y sea $\ell = ya/d$; entonces, de la misma manera que la $\int$ aumenta las dimensiones, d las disminuirá. Pero la $\int$ representa una suma y d una diferencia, y de la y dada podemos encontrar siempre y/d ó ℓ, es decir, la diferencia de las y.*
>
> Así se introduce el símbolo «d» (o más bien el símbolo «$1/d$»). [...] De hecho, pronto se da cuenta de que esta es una desventaja notacional que no viene compensada por la ventaja de la interpretación dimensional de la $\int$ y de d, y pasa a escribir «$d(ya)$» en vez de «ya/d», y de ahí en adelante son interpretadas la d y la $\int$ como símbolos adimensionales [...].
>
> En el resto del manuscrito Leibniz se dedica a explorar este nuevo simbolismo, al que traduce viejos resultados, y a investigar las reglas operacionales que rigen la $\int$ y la d.

Pese a que los conceptos que Leibniz maneja son oscuros e imprecisos, fue capaz de desarrollar algoritmos de cálculo eficaces y de gran poder heurístico. Vemos que Leibniz no siguió los caminos del razonamiento lógico-deductivo sino los de la intuición, la conjetura, el estudio de casos particulares y su generalización.... En definitiva, los mismos caminos que hoy siguen los matemáticos activos en sus trabajos de investigación.

4.3. Desarrollo posterior del Cálculo Diferencial

Pese a que las publicaciones de Leibniz eran breves y de difícil comprensión, su cálculo, dotado de una notación excelente, era más sencillo de entender y manejar que el de Newton. La notación de Leibniz triunfó en el continente europeo, al contrario que en Inglaterra, donde por mucho tiempo se mantuvieron fieles a la teoría de fluxiones y a la notación newtoniana.

Los hermanos Jakob (1655-1705) y Johann (1667-1748) Bernoulli, matemáticos suizos y profesores de la Universidad de Basilea, estudiaron los trabajos de Leibniz, con quien iniciaron una productiva correspondencia. A partir de 1690 publicaron una serie de trabajos propios en el *Acta Eruditorum* y en otras revistas, poniendo de manifiesto que el cálculo leibniziano era una herramienta poderosa con la que había que contar. Para divulgarla se precisaba de un buen libro de texto que explicara detalladamente los pormenores del nuevo cálculo. Dicho libro apareció en 1696, y su autor fue el matemático y marqués Guillaume de L'Hôpital (Francia, 1661-1704); el título del libro era *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*[9]. Hoy sabemos que los resultados originales que en él aparecen no son debidos a L'Hôpital, sino a su profesor Johann Bernoulli. El libro de L'Hôpital daba la siguiente definición de diferencial:

> La parte infinitamente pequeña en que una cantidad variable es aumentada o disminuida de manera continua, se llama la diferencial de esta cantidad.

Para trabajar con infinitésimos se establece la siguiente regla:

> Dos cantidades cuya diferencia es otra cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse una por la otra.

Los escritos de los Bernoulli, Leibniz y L'Hôpital popularizaron el cálculo de Leibniz, y ya en la primera década del siglo XVIII otros matemáticos se interesaron por él. La potencialidad del concepto de derivada se puso de manifiesto en las aplicaciones de la nueva herramienta a la física newtoniana.

Resumimos muy esquemáticamente los puntos clave que contribuyeron al desarrollo del Cálculo Diferencial:

[9] *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas.*

1. El descubrimiento en 1715 por Brook Taylor (Inglaterra, 1685-1731) de las hoy llamadas series de Taylor, que se convirtieron en una herramienta básica para el desarrollo del Cálculo y la resolución de ecuaciones diferenciales.
2. El extraordinario trabajo, tanto por su asombrosa amplitud como por sus notables descubrimientos, de Leonhard Euler (Suiza, 1707-1783), quien, sin duda, es la figura principal de las matemáticas en el siglo XVIII. En sus tres grandes tratados, escritos en latín: *Introductio in analysin infinitorum*[10] (1748), *Institutiones calculi differentiales*[11] (1755) e *Institutiones calculi integralis*[12] (1768), Euler dio al Cálculo la forma que conservó hasta el primer tercio del siglo XIX. El Cálculo, que inicialmente era un cálculo de variables (concretamente, de cantidades geométricas variables) y de ecuaciones, se fue transformando en un cálculo de funciones gracias a la influencia de Euler.
3. La propuesta de Lagrange de fundamentar el Cálculo sobre un álgebra formal de series de potencias. Si bien la idea de Lagrange de evitar el uso de límites no era acertada, su propuesta, concretada en su obra *Théorie des fonctions analytiques*[13] (1797), tuvo el efecto de liberar el concepto de derivada de sus significaciones más tradicionales. De hecho, la terminología «función derivada», así como la notación $f'(x)$ para representar la derivada de una función $f(x)$, fueron introducidas por Lagrange en dicho texto. A partir de ese momento, la derivada deja de ser algo de naturaleza imprecisa (fluxión o cociente diferencial) y empieza a ser considerada, simplemente, como una función.
4. Los problemas derivados de las series de Fourier. Aunque estas series hacen sus primeras apariciones a mitad del siglo XVIII en relación con el problema de la cuerda vibrante, no nacen oficialmente hasta el trabajo de Fourier *Théorie analytique de la chaleur*[14] (1822). Su estudio plantea problemas relacionados con las ideas centrales del Análisis: el concepto de función, el significado de la integral y los procesos de convergencia.
5. La «algebraización del Análisis» que tiene lugar en los dos últimos tercios del siglo XIX, y que culmina con la fundamentación del Análisis sobre el concepto de límite por Bernard Bolzano (Chequia, 1781-1848), Augustin Louis Cauchy (Francia, 1789-1857) y Karl Weierstrass (Alemania, 1815-1897), y la formulación de la teoría de los números reales por Richard Dedekind (Alemania, 1831-1916) y Georg Cantor (Rusia/Alemania, 1845-1918).

[10] *Introducción al análisis del infinito.*
[11] *Fundamentos del cálculo diferencial.*
[12] *Fundamentos del cálculo integral.*
[13] *Teoría de las funciones analíticas.*
[14] *Teoría analítica del calor.*

Bibliografía

[1] J. M. Ayerbe Toledano: Los métodos infinitesimales para el cálculo de tangentes. *Pensamiento Matemático*, **7** (2017), 65–86.

[2] F. Bombal: *Página web personal - Historia y Divulgación*. Universidad Complutense de Madrid. Disponible en `http://blogs.mat.ucm.es/bombal/historia-y-divulgacion/`.

[3] H. J. M. Bos: *Newton, Leibniz y la tradición leibniziana*. En I. Grattan-Guinness (comp.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: Una introducción histórica*, Alianza, 1984, pp. 64–124.

[4] U. Bottazzini: *The higher calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. Springer, 1986.

[5] C. B. Boyer: *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover, 1959.

[6] C. B. Boyer, U. C. Merzbach: *A history of mathematics* (3^{rd}. ed). Wiley, 2011.

[7] D. M. Burton: *The history of mathematics: An introduction* (7^{th}. ed.). McGraw-Hill, 2011.

[8] F. Cajori: *A history of mathematical notations*. Dover, 1993.

[9] J. M. Child: *The Geometrical Lectures of Isaac Barrow*. Open Court, 1916.

[10] N. Cuesta Dutari: *Historia de la invención del cálculo infinitesimal y de su introducción en España*. Universidad de Salamanca, 1983.

[11] A. J. Durán Guardeño: *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Alianza, 1996.

[12] C. H. Edwards: *The historical development of the calculus*. Springer, 1976.

[13] Euclides: *Elementos* (3 vols.). Traducción y notas de M.L. Puertas Castaños. Gredos, 1991, 1994, 1996.

[14] P. M. González Urbaneja: *Las técnicas del cálculo: Fermat, Wallis y Roberval*. En *De Arquímedes a Leibniz: tras los pasos del infinito matemático, teológico, físico y cosmológico*, Fundación Orotava de Historia de la Ciencia, 1995, pp. 405–438.

[15] I. Grattan-Guinness (comp.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: Una introducción histórica*. Alianza, 1984.
[16] R. M. Hutchins (ed.): *The works of Archimedes including The Method*. En *Great books of the Western world*, vol. **11**, Encyclopaedia Britannica, 1952, pp. 403–602.
[17] V. Katz: *A history of mathematics: An introduction*. Pearson, 2008.
[18] M. Kline: *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (3 vols.). Alianza, 1992.
[19] M. Martín Suárez: *Orígenes del cálculo diferencial e integral*. Universidad de Granada, 2008.
[20] J. Mazur: *Enlightening symbols: A short history of mathematical notation and its hidden powers*. Princeton University Press, 2014.
[21] F. J. Pérez González: *Evolución histórica de los conceptos básicos del análisis matemático*. Universidad de Granada, 2021.
[22] J. C. Ponce Campuzano: Isaac Barrow y su versión geométrica del teorema fundamental del cálculo. *Números*, **83** (2013), 123–130.
[23] J. Rey Pastor, J. Babini: Historia de la matemática (2 vols.). Gedisa, 2013.
[24] J. Stillwell: *Mathematics and its history: A concise edition*. Springer, 2020.
[25] University of Oxford: *The Newton Project*. Disponible en https://www.newtonproject.ox.ac.uk/.
[26] L. Vega Reñón: *Arquímedes: el Método*. En *Historia de la geometría griega*, Fundación Orotava de Historia de la Ciencia, 1992, pp. 395–421.
[27] G. Zubieta: Los indivisibles de Cavalieri, una perspectiva plausible para el aprendizaje del cálculo de volúmenes. *Educación Matemática*, **9** (1997), 62–69.

Origin and historical evolution of some concepts from mathematical analysis

Alexandra Mejías Herrera
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100709032@ull.edu.es

Abstract

This work focuses on the origins and development of the infinitesimal calculus from Greek mathematics (VI BC-V AD), including the method of exhaustion and the discovery method of Archimedes, to the decisive contributions made by Newton and Leibniz at the end of the 17th century, going through the solutions proposed by other mathematicians to the problems of quadratures (integration) and tangents (differentiation) in the 16th and 17th centuries.

1. Introduction

By the middle of the 17th century, Europe had assimilated the wealth of Greek mathematics, while the development of Analytical Geometry had contributed to a spectacular increase in the catalog of known curves. On the other hand, Physics provided a kinematic point of view: a curve could be interpreted as the trajectory of a mobile. Various problems related to curves then arose, which in modern terminology can be grouped into integration problems and derivation problems.

2. Greek mathematics

The study of quadrature problems prompted the development of calculus in ancient Greece and, consequently, the development of mathematical analysis. These are geometric problems that consist of the following: given a figure, build another, generally a square, with an area equal to that of the given figure. This construction had to be done with a straight rule and compass, following precise regulations, and must consist of a finite number of steps.

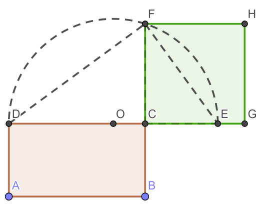


Figure 1: *Quadrature of the rectangle.*

3. Integration problems

Integration problems consist in determining lengths of curves, areas enclosed by curves, centroids... and also in dynamic problems: finding the space covered by a mobile given the expression of its speed, or the space covered by a body subjected to the gravitational attraction of another. The Greeks, especially Archimedes, had solved some particular cases of calculating areas (and volumes) by the exhaustion method: it is assumed that the area enclosed by a curve exists, and a succession of regular polygons inscribed in the curve whose sum of areas is close to that sought is constructed. In the 16th century, this method was improved and applied to a wide variety of problems without fear of passing to the limit, neither to infinity, nor to irrational numbers, giving rise to a very powerful amalgamation of procedures, although devoiding rigor. Within this grouping, two subgroups stand out: quadrature problems (finding the area between a curve arc and the abscissa axis), and rectification problems (calculating the length of a curve).

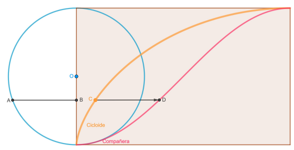


Figure 2: *Area of the cycloid.*

4. Differentiation problems

Within differentiation problems, once again, two subgroups stand out. The problems of maxima and minima have an eminently practical origin: what is the angle of inclination of a cannon maximizing the range of the projectile?, what are the maximum and minimum distances of a planet from the Sun? On the other hand, the problem of tangents consists in finding the equation of the tangent to a curve at a point. Geometrically, this problem comes from classical antiquity, when it was solved for some curves. It was also relevant in Physics, in order to know the instantaneous direction of a curved movement, and in Optics, for lens design.

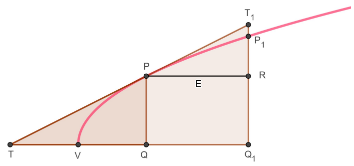


Figure 3: *Tangents and subtangents of Fermat.*

5. Newton and Leibniz

Isaac Newton (1643-1727) and Gottfried Leibniz (1646-1716) are considered as the inventors of the Infinitesimal Calculus, precisely because they unified and summarized in two general concepts, those of integral and derivative, all this variety of problems which, being of a similar nature, were approached with particular techniques. In addition, they developed a symbolism and formal rules independent of any geometric meaning and suitable for both algebraic and transcendental functions, which practically automated the resolution processes. Finally, they were able to recognize the fundamental inverse relationship between derivation and integration.

Before	Now
Quadrature problems	Integral calculus
Tangents problems	Differential calculus
Not related	Inversely related

Table 1: *Calculus development.*

References

[1] I. Grattan-Guinness (comp.): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910: Una introducción histórica*. Alianza, 1984.

[2] M. Martín Suárez: *Orígenes del cálculo diferencial e integral*. Universidad de Granada, 2008.

[3] F. J. Pérez González: *Evolución histórica de los conceptos básicos del análisis matemático*. Universidad de Granada, 2021.