

Tamara Luz García Peña

*Métodos numéricos para la resolución
de ecuaciones en derivadas parciales
usadas en análisis financieros.*

Numerical methods for solving partial differential
equations used in financial analysis.

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, julio de 2023

DIRIGIDO POR
Severiano González Pinto

Severiano González Pinto
Análisis matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi tutor Severiano González, gran matemático que me ha ayudado a descubrir nuevos mundos dentro de las matemáticas.

A mi familia, en especial a mi tío Darwich que es el que me ha guiado en todo momento cuando se me han presentado dificultades en el camino.

A mis compañeros, ya que juntos hemos vivido los mejores aprobados y peores suspensos y con algún viaje de por medio para celebrarlo.

A mis perros por ladrar un poco menos para que yo me concentrase en hacer el TFG.

Gracias a todos de corazón.

Tamara Luz García Peña
La Laguna, 10 de julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

En este Trabajo de Grado, el objetivo es explorar el análisis numérico del modelo de Black-Scholes y sus aplicaciones en la valoración de opciones financieras. El proyecto describe los métodos numéricos comúnmente utilizados, analiza Las Griegas y estudia extensiones del modelo para incorporar características más realistas que reflejen el comportamiento de los precios de los activos financieros. En particular, se consideran las opciones europeas de compra y venta, así como las opciones de efectivo o nada.

Palabras clave: *Black-Scholes – Diferencias Finitas – Discretizaciones Temporales – Estimación – Opciones – Método de Líneas – Ecuaciones en Derivadas Parciales – Estabilidad – Convergencia – Las Griegas ...*

Abstract

In this Degree Project, the objective is to explore the numerical analysis of the Black-Scholes model and its applications in pricing financial options. The project describes the commonly employed numerical methods, analyzes The Greeks and study extensions of the model to incorporate more realistic features reflecting the behaviour of financial asset prices. In particular, we consider the call and put European options and the Cash or Nothing options.

Keywords: *Black-Scholes – Finite differences – Temporal Discretization – Strike – Options – Method of Lines – Partial Differential Equations – Stability – Convergence – The Greeks ...*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Modelo de Black - Scholes	1
1.1. Opciones financieras	1
1.2. El Movimiento browniano y su importancia en la fórmula de Black-Scholes	3
1.3. Fórmula de Black - Scholes	3
1.4. Ejemplo de la Ecuación de Black - Scholes	6
2. Discretización espacial	7
2.1. Método de líneas	7
2.2. Fórmulas de diferencias finitas	8
2.3. Estabilidad	10
2.4. Condiciones de contorno	14
2.5. Mallas espaciales no uniformes	16
2.6. Datos iniciales no suaves	20
2.7. Discretización mixta central/ <i>upwind</i> (a favor del viento)	21
2.8. Promedio de celdas	22
2.8.1. Ejemplos sin promedio de celdas	23
2.8.2. Ejemplo con promedio de celdas	24
3. Las Griegas. Discretización temporal.	27
3.1. Las Griegas	27
3.2. Estudio numérico	29
3.3. Los θ -métodos	30
3.4. Estabilidad y Convergencia	31
3.5. Norma del máximo y positividad	35

3.6. Método explícito	37
3.7. Método implícito	38
3.8. Opciones de efectivo o nada	39
A. Apéndice	43
A.1. Definiciones	43
A.2. Códigos	44
A.2.1. Mallas uniformes	44
A.2.2. Mallas no uniformes	46
Bibliografía	49
Poster	51

Introducción

Actualmente, la rapidez y la variabilidad en el campo de las finanzas, obligan a buscar nuevos mecanismos que permitan predecir resultados y facilitar la toma de decisiones. En el ámbito financiero, el modelo de Black-Scholes es conocido como uno de los modelos matemáticos básicos en la toma de decisiones financieras a nivel mundial.

El presente trabajo se centra en el estudio numérico del modelo de Black-Scholes y su aplicación en la tasación de opciones financieras [1]. En ese sentido, en el Capítulo 1, abordamos la descripción del modelo de Black-Scholes, su solución analítica, la cual está disponible para algunas opciones simples. Sin embargo, para modelos con más parámetros (modelo de Heston, por ejemplo), se necesita utilizar métodos numéricos para aproximar sus soluciones. Entre los métodos numéricos más utilizados se encuentran el método de líneas combinando diferencias finitas para la discretización espacial con integradores temporales para las discretizaciones en el tiempo.

Es por ello, que en los capítulos 2 y 3 veremos la discretización espacial mediante diferentes métodos numéricos y además, analizaremos la estabilidad y las condiciones de contorno adecuadas para la solución numérica del modelo.

Además, en el capítulo 3 se discutirán Las Griegas "*The Greeks*" que son medidas importantes de sensibilidad de los precios de las opciones financieras ante los cambios en las variables del modelo y se analizarán cómo se pueden calcular mediante los métodos numéricos utilizados. Por último, se estudiarán algunas aplicaciones del modelo de Black-Scholes a las opciones denominadas *Cash-or-Nothing Options*.

Modelo de Black - Scholes

En este primer capítulo, veremos una breve introducción a las opciones financieras y posteriormente, nos centraremos en el modelo de Black - Scholes [1]. Mencionaremos el movimiento browniano. Indicaremos la ecuación en derivadas parciales que surge del modelo estocástico browniano [2] y mostraremos su solución. Por último, concluiremos el capítulo ilustrándolo con un ejemplo de un caso real.

1.1. Opciones financieras

La **opción de compra**, conocida como *call option*, es un contrato en el que el comprador adquiere el derecho de comprar determinados activos (generalmente acciones), denominados **subyacentes** a un precio específico llamado **precio de ejecución** (*strike price*), dentro de un plazo establecido, conocido como **vencimiento**.

La **opción de venta**, también conocida como *put option*, es un contrato en el que el comprador adquiere el derecho de vender, dentro de un plazo establecido, ciertos activos denominados **subyacentes**. Este contrato establece un precio específico (*strike price*), el cual el comprador puede ejercer su derecho de venta.

Las opciones de compra y venta brindan al comprador el derecho, pero no la obligación, de adquirir o vender los activos en una fecha futura a un precio predefinido. También es importante considerar que la contraparte del contrato tiene la responsabilidad de vender o comprar los activos al precio acordado en la fecha de vencimiento, y se le debe compensar por asumir este compromiso.

El valor de una opción de compra depende de varios factores, como el **tiempo de vencimiento** y la **volatilidad** del precio del activo considerado.

Un plazo de vencimiento más largo puede incrementar el valor de la opción, ya que proporciona más oportunidades para que el precio de los activos aumente. Asimismo, la volatilidad del precio del activo también afecta al valor de la opción. Cuanto mayor sea la volatilidad, mayor será el riesgo para el vendedor y, por lo tanto, se elevará el precio de la opción. Además, al valorar las opciones, debemos tener en cuenta el concepto de valor presente del dinero en el momento del vencimiento o **valor descontado**. Es decir, debemos calcular cuánto tendríamos que pagar ahora para recibir una cantidad asegurada K en un momento futuro T .

Para realizar este cálculo de descuento, en este contexto, se utiliza comúnmente el concepto de **interés compuesto continuo**. Se considera el efecto del tiempo y la **tasa de interés** para determinar el valor actual de la opción y el activo considerado en el futuro.

Ahora vamos a ver los dos grandes tipos de opciones en función del periodo de ejercicio pues, aunque existen muchísimas más, estas son las más recurrentes.

Una **opción de estilo europeo** es un contrato financiero en el que el titular tiene el derecho de comprar o vender un activo considerado a un precio preestablecido (*strike price*) en una fecha específica (vencimiento). Sin embargo, este derecho solo puede ejercerse en la fecha de vencimiento y no antes.

Una **opción de estilo americano** es similar a la **opción de estilo europeo**, pero con la diferencia de que el titular tiene el derecho de comprar o vender el activo considerado en cualquier momento antes de la fecha de vencimiento. Esto le otorga al titular la flexibilidad de ejercer la opción en el momento que considere más favorable.

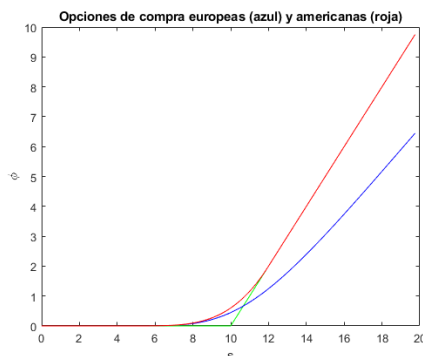


Figura 1.1: Comparación de las opciones de compra europeas (azul) y americanas (roja). Valor de la opción (vertical) frente al valor del activo (horizontal).

En este trabajo, siempre asumiremos que las opciones son de estilo europeo.

1.2. El Movimiento browniano y su importancia en la fórmula de Black-Scholes

El movimiento browniano es un **proceso estocástico** que se utiliza para describir el movimiento de partículas en suspensión en un fluido. En finanzas, el movimiento browniano se utiliza para modelar el movimiento de los precios de las acciones y otros activos financieros.

Una forma sencilla de plasmar un movimiento browniano es con la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS = \mu dt + \sigma dW \quad (1.1)$$

donde S es el precio de un activo, μ es la tasa de crecimiento esperada del precio del activo, σ es la volatilidad del precio del activo y dW es un **proceso de Wiener**.

El movimiento browniano es importante en la fórmula de Black-Scholes porque se utiliza para modelar el movimiento del precio de las acciones subyacentes a las opciones. La suposición de que el movimiento del precio de las acciones sigue un proceso de movimiento browniano es una de las principales hipótesis del modelo de Black-Scholes.

1.3. Fórmula de Black - Scholes

Para esta sección, en el Apéndice A.1 recordaremos algunos conceptos clave para la comprensión completa de la fórmula de Black-Scholes.

La **función de pago** (*payoff*) en el modelo de Black-Scholes, denotada por $\phi(s)$, viene definida por:

$$\phi(s) = \begin{cases} \text{máx}(s - K, 0) & \text{para } s \geq 0 \text{ compra,} \\ \text{máx}(K - s, 0) & \text{para } s \geq 0 \text{ venta.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Esta función toma el precio actual del activo considerado s , y el precio del *strike* K , y calcula el beneficio resultante en función del tipo de opción.

La **fórmula de Black-Scholes** se utiliza para determinar el valor justo de una opción financiera en un momento dado. Para calcular este valor, **Black y Scholes** asumieron que el precio del activo considerado sigue un **proceso**

estocástico, donde el precio en el futuro es una variable aleatoria.

En particular, consideraron la fórmula:

$$S_\tau = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau + \sigma W_\tau} \quad (0 \leq \tau \leq T) \quad (1.3)$$

donde S_τ es el precio del activo en el tiempo τ , S_0 es el precio inicial, μ es la tasa de crecimiento esperada, σ es la volatilidad, y W_τ es un proceso de Wiener.

El proceso estocástico (1.3) se denomina movimiento browniano geométrico. Si S_0 es distinto de cero, entonces $\frac{S_\tau}{S_0}$ verifica la ecuación diferencial estocástica del tipo (1.1) siguiente:

$$d(\ln(\frac{S_\tau}{S_0})) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})d\tau + \sigma dW_\tau.$$

Por lo tanto, $\ln(S_\tau/S_0)$ se distribuye normalmente con media $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau$ y varianza $\sigma^2\tau$. En vista de esto, se dice que la variable aleatoria S_τ tiene una distribución log-normal. Como ya vimos en (1.1) la volatilidad σ juega un papel fundamental al medir la incertidumbre en los precios futuros de los activos financieros.

Destacamos la existencia de una **tasa de interés libre de riesgo** r , la cual representa el máximo rendimiento teórico (interés) que se puede obtener sin correr ningún riesgo de pérdida financiera. Se asume que esta tasa es conocida y se mantiene constante a lo largo del tiempo. Por consiguiente, una inversión en efectivo D_0 en el presente crecerá de manera predecible en el tiempo, siguiendo la siguiente fórmula:

$$D(\tau) = D_0 e^{r\tau}.$$

El modelo de Black-Scholes conduce a la ecuación en derivadas parciales (EDP) siguiente, cuya deducción puede verse en [3],

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, t) + r s \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) - r u(s, t), \quad s > 0 \quad : \quad 0 < t \leq T. \quad (1.4)$$

Además, se imponen dos condiciones adicionales para la (EDP) (1.4), una condición inicial y una condición de frontera.

Esta ecuación describe el precio justo $u(s, t)$ que debe pagarse por una opción (*call option*). La condición inicial es una consecuencia directa del hecho de que el valor justo de la opción se conoce al vencimiento, es decir, si $t = 0$. Está dado por la función de pago (1.2) y esto nos proporciona la condición inicial:

$$u(s, 0) = \phi(s) \quad \text{para } s > 0 \quad (1.5)$$

La segunda surge de considerar el comportamiento límite del precio del activo considerado y aplicar la hipótesis fundamental de **no arbitraje** para determinar el **precio justo** de la opción en el caso extremo en el que el precio del activo es cero dando como resultado la condición de frontera:

$$u(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ (compra)}, \\ e^{-rt}K & \text{para } 0 \leq t \leq T \text{ (venta)}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Las ecuaciones (1.4), (1.5) y (1.6) constituyen un sistema que debe ser resuelto como un problema de valor de frontera y valor inicial. Utilizando la solución exacta del problema que se obtiene tras hacer ciertos cambios apropiados de variable que conducen a un problema de Cauchy para la ecuación del calor unidimensional, se deduce que:

$$u(s, t) = sN(d_1) - e^{-rt}KN(d_2) \quad (\text{compra}) \quad (1.7)$$

$$u(s, t) = -sN(-d_1) + e^{-rt}KN(-d_2) \quad (\text{venta}) \quad (1.8)$$

para $s > 0, 0 < t \leq T$ con:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{s}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}; \quad (1.9)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}; \quad (1.10)$$

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (y \in \mathbb{R}) \quad (1.11)$$

siendo (1.11) la función de distribución normal estándar.

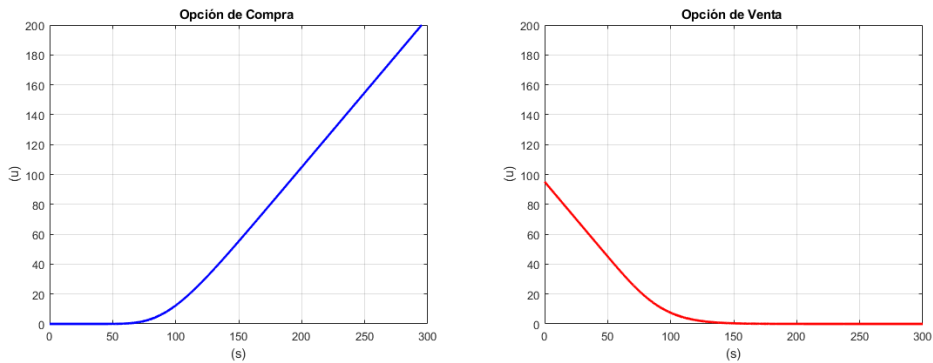


Figura 1.2: Opción de Compra (azul). Opción de Venta (roja). Para los parámetros $K = 100, T = 1, r = 0.05$ y $\sigma = 0.25$.

1.4. Ejemplo de la Ecuación de Black - Scholes

En el ejemplo vamos a calcular el valor teórico de una opción de compra *call option* europea cuya volatilidad se estima en $\sigma = 0.3$ donde el precio de ejercicio será de 1000 euros dentro de 9 meses, sobre un cierto activo subyacente que actualmente cotiza a 800 euros. Para este caso, emplearemos una tasa sin riesgo del 1 % anual. En primer lugar, calcularemos d_1 y d_2 , para posteriormente poder usar la fórmula de Black - Scholes:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{800}{1000} + (0.01 + \frac{1}{2}0.3^2)0.75}{0.3\sqrt{0.75}} = -0.7003;$$

$$d_2 = -0.7003 - 0.3\sqrt{0.75} = -0.9601;$$

Ahora, aplicando la fórmula:

$$u(s, t) = sN(d_1) - e^{-rt}KN(d_2)$$

obtenemos:

$$u(0.75, 800) = 800N(-0.7003) - 1000e^{-0.01 \cdot 0.75}N(-0.9601) = 26.24$$

Por lo tanto, según el modelo de Black-Scholes, el valor teórico de la opción de compra europea en este ejemplo es de 26.24 euros. Este valor puede utilizarse como referencia para evaluar el precio y el valor justo de la opción en el mercado.

El interés de aplicar métodos numéricos tipo MOL (Método de Líneas) estriba en el hecho de que para resolver modelos más complejos en Finanzas, por ejemplo, el modelo de Heston (véase en [3]) se hacen imprescindibles los métodos numéricos, ya que esos modelos no poseen soluciones analíticas cerradas y por tanto, pretendemos ilustrar aquí la aplicación del Método de Líneas al caso simple de Black-Scholes, el cual es un problema unidimensional.

Discretización espacial

En este capítulo, estudiaremos la discretización espacial en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales (EDPs). Exploraremos el Método de Líneas cuya primera etapa consiste en la semidiscretización espacial de la EDP mediante diferencias finitas. Analizaremos la estabilidad numérica, las condiciones de contorno y la aplicación de mallas espaciales no uniformes. Además, discutiremos el tratamiento de datos iniciales no suaves y la discretización mixta central/*upwind* (a favor del viento). También consideraremos el suavizado de la condición inicial a través del promedio de celdas, presentando ejemplos comparativos

Para este capítulo, usaremos mayoritariamente la referencia [1], Capítulos 3,4,5.

2.1. Método de líneas

Para la solución numérica de problemas de valores de frontera iniciales para **ecuaciones de convección-difusión-reacción** del tipo:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = d(s) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, t) + c(s) \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) - r(s)u(s, t), \quad (2.1)$$

el **método de líneas** (MOL, *Method of Lines*) proporciona un enfoque flexible y versátil. Los MOL constan de dos pasos; el **paso (S)** (discretización en la variable espacial s) y el **paso (T)** (discretización en la variable de tiempo t).

El paso (S) se conoce como **discretización espacial** o **semidiscretización**. En este paso, el problema de valor inicial y frontera para la (EDP) es discretizado en una malla finita en el dominio s . Esto conduce a un primer problema de valor inicial para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs), el llamado **sistema semidiscreto**. El paso (T) se denomina **discretización temporal**. Aquí el sistema semidiscreto se discretiza en una malla finita en el dominio t y define las aproximaciones a $u(s, t)$ en el tiempo t y en el punto de malla s .

2.2. Fórmulas de diferencias finitas

A continuación, formularemos varias semidiscretizaciones básicas para las **ecuaciones de convección y difusión** del modelo por separado. Estas se combinan posteriormente para llegar a semidiscretizaciones para la ecuación del modelo (2.1).

Por el análisis real clásico, la **primera derivada** f' de cualquier función suave dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en cualquier punto $s \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$f'(s) = \frac{f(s) - f(s-h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\eta) \quad : \quad \eta \in (s-h, s) \quad (2.2)$$

siempre que $h > 0$ es pequeño. Se denomina **fórmula regresiva de primer orden**.

Consideremos ahora la **ecuación de convección** del modelo puro

$$u_t(s, t) = cu_s(s, t) \quad \text{con condición periódica} \quad u(1, t) = u(0, t).$$

Aplicando (2.2) a la derivada espacial en esta ecuación en el punto de malla $s = s_i$, se obtiene la relación aproximada:

$$u_t(s_i, t) \approx c \frac{u(s_i, t) - u(s_{i-1}, t)}{h}, \quad h = \frac{1}{m} \quad (1 \leq i \leq m, \quad 0 < t \leq T) \quad (2.3)$$

Entonces, podemos definir aproximaciones $U_i(t)$ a $u(s_i, t)$ a través de la relación exacta de manera que:

$$U'_i(t) = c \frac{U_i(t) - U_{i-1}(t)}{h} \quad h = \frac{1}{m} \quad (1 \leq i \leq m, \quad 0 < t \leq T) \quad (2.4)$$

con $U_0(t) = U_m(t)$ por periodicidad. Esto constituye una **primera semidiscretización** de la **ecuación de convección** del modelo con condición periódica. Observamos que (2.4) involucra solo una variable independiente continua t , y además, se considera en forma vectorial. Sea

$$U(t) = (U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t))^T \quad \text{y} \quad U'(t) = (U'_1(t), U'_2(t), \dots, U'_m(t))^T$$

donde T denota la transpuesta. Entonces el sistema semidiscreto (2.4) se puede formular como

$$U'(t) = AU(t) \quad (0 < t \leq T) \quad (2.5)$$

donde A es una matriz de orden $m \times m$ dada por:

$$A = \frac{c}{h} \begin{pmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

En lugar de (2.2), la primera derivada de f se tiene también por:

$$f'(s) = \frac{f(s+h) - f(s)}{h} + \frac{h}{2} f''(\eta) \quad : \quad \eta \in (s, s+h) \quad (2.7)$$

Por otro lado, (2.7) se denomina **fórmula progresiva de primer orden** y da lugar al sistema semidiscreto:

$$U'_i(t) = c \frac{U_{i+1}(t) - U_i(t)}{h} \quad (1 \leq i \leq m, \quad 0 < t \leq T) \quad (2.8)$$

con $U_{m+1}(t) = U_1(t)$, $U_0(t) = U_m(t)$ por periodicidad. Esto se puede escribir en la forma (2.5) con:

$$A = \frac{c}{h} \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \\ 1 & & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Por razones de **estabilidad**, que se explicarán en el apartado siguiente, la **fórmula regresiva de primer orden** solo debe usarse si $c < 0$ y la **fórmula progresiva de primer orden** solo si $c > 0$. Esto se conoce como fórmula *up-wind* (a favor del viento) de primer orden pues se tiene en cuenta la dirección de las curvas características.

Considerando valores de f para argumentos en ambos lados de s , se obtiene por diferencias centrales:

$$f'(s) = \frac{f(s+h) - f(s-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\eta) \quad : \quad \eta \in (s-h, s+h) \quad (2.10)$$

Denominaremos a (2.10) como **fórmula central de segundo orden** (para convección). Eso lleva a el sistema semidiscreto:

$$U'_i(t) = c \frac{U_{i+1}(t) - U_{i-1}(t)}{2h} \quad (1 \leq i \leq m, \quad 0 < t \leq T) \quad (2.11)$$

con $U_0(t) = U_m(t)$ y $U_{m+1}(t) = U_1(t)$, y es de la forma (2.5) con:

$$A = \frac{c}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & -1 \\ -1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

El **error de truncamiento** para las fórmulas de primer orden es $O(h)$ y para la fórmula central de segundo orden es $O(h^2)$. Por tanto, la fórmula deseada en la diferencial central es más aproximada, pero es menos estable como veremos para aproximar la advección.

Para la **segunda derivada** de cualquier función suave dada $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene una aproximación:

$$f''(s) = \frac{f(s-h) - 2f(s) + f(s+h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\eta) \quad (2.13)$$

Denominaremos a (2.13) como **fórmula central de segundo orden** (por difusión). Considerando esta fórmula en el caso de la **ecuación de difusión** del modelo puro $u_t(s, t) = du_{ss}(s, t)$ con condición periódica que conduce al sistema semidiscreto:

$$U'_i(t) = d \frac{U_{i-1}(t) - 2U_i(t) + U_{i+1}(t)}{h^2} \quad (1 \leq i \leq m, \quad 0 < t \leq T) \quad (2.14)$$

donde $U_0(t) = U_m(t)$ y $U_{m+1}(t) = U_1(t)$. Esto es de nuevo de la forma (2.5) con:

$$A = \frac{d}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & 1 \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 1 & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

y **error de truncamiento** de esta fórmula será $O(h^2)$.

Para obtener semidiscretizaciones de la ecuación del modelo completo (2.1), uno puede simplemente combinar semidiscretizaciones de sus términos individuales. Por ejemplo, si A_1 y A_2 son matrices dadas que corresponden a los términos semidiscretizados de convección y difusión, respectivamente, entonces una semidiscretización de (2.1) es dada por $A = A_2 + A_1 - rI$ siendo I la matriz identidad $m \times m$ donde la parte $-rI$ proviene del término de reacción.

2.3. Estabilidad

En esta sección vamos a estudiar la estabilidad de los **sistemas semidiscretos** construidos en la sección anterior.

Lema 2.3.1. Las matrices arriba mencionadas (2.6), (2.9), (2.12) y (2.15) que definen un sistema de la forma $U'(t) = AU(t)$ con $0 < t \leq T$ sujeto a la condición de periodicidad, son normales $AA^T = A^T A$ y son diagonalizables mediante matrices unitarias V . Por tanto, existe $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ tal que $A = VDV^{-1}$ donde los autovalores λ_k de las matrices A se expresan de la siguiente manera:

$$\lambda_k = \frac{c}{h}(1 - \cos(2\pi kh) - i \sin(2\pi kh)), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (2.16)$$

$$\lambda_k = \frac{c}{h}(\cos(2\pi kh) - 1 + i \sin(2\pi kh)), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (2.17)$$

$$\lambda_k = i \frac{c}{h}(\sin(2\pi kh)), \quad 1 \leq k \leq m, \quad (2.18)$$

$$\lambda_k = -\frac{4d}{h^2}(\sin^2(\pi kh)), \quad 1 \leq k \leq m. \quad (2.19)$$

Demostración: Veamos que

$$A\vec{v}_l = \lambda_l \vec{v}_l, \text{ con } \vec{v}_l = (e^{2\pi l x_k i})_{k=1}^m : x_k = kh, h = \frac{1}{m}.$$

nos conduce a que λ_l está dado por para (2.16) con matriz (2.6) el primer caso y así sucesivamente para los demás. ($i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria).

$$\begin{aligned} A\vec{v}_l = \lambda_l \vec{v}_l &\Leftrightarrow \frac{c}{h}(e^{2\pi l x_k i} - e^{2\pi l x_{k-1} i}) = \lambda_l e^{2\pi l x_k i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda_l = \frac{c}{h}(1 - e^{-2\pi l h i}) = \frac{c}{h}(1 - e^{-2\pi x_l i}) \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\lambda_l = \frac{c}{h}(1 - \cos(2\pi x_l) - i \text{sen}(2\pi x_l))$$

Análogamente, para (2.17) con matriz (2.9):

$$\begin{aligned} A\vec{v}_l = \lambda_l \vec{v}_l &\Leftrightarrow \frac{c}{h}(e^{2\pi l x_{k+1} i} - e^{2\pi l x_k i}) = \lambda_l e^{2\pi l x_k i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda_l = \frac{c}{h}(e^{2\pi l h i} - 1) = \frac{c}{h}(e^{2\pi x_l i} - 1) \end{aligned}$$

Por lo tanto :

$$\lambda_l = \frac{c}{h}(-1 + \cos(2\pi x_l) + i \text{sen}(2\pi x_l))$$

Lo mismo para (2.18) con matriz (2.12):

$$A\vec{v}_l = \lambda_l \vec{v}_l \Leftrightarrow \frac{c}{2h}(e^{2\pi l x_{k+1} i} - e^{2\pi l x_{k-1} i}) = \lambda_l e^{2\pi l x_k i} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{c}{2h}(e^{2\pi l x_1 i} - e^{2\pi l x_{-1} i}) = \lambda_l \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{c}{2h}(\cos(2\pi x_l) + i\operatorname{sen}(2\pi x_l) - \cos(2\pi x_l) + i\operatorname{sen}(2\pi x_l)) = \lambda_l \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\lambda_l = \frac{c}{h}(i\operatorname{sen}(2\pi x_l))$$

Por último para (2.19) con matriz (2.15):

$$\begin{aligned} A\vec{v}_l = \lambda_l \vec{v}_l &\Leftrightarrow \frac{d}{h^2}(e^{2\pi l x_{k-1} i} - 2e^{2\pi l x_k i} + e^{2\pi l x_{k+1} i}) = \lambda_l e^{2\pi l x_k i} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{d}{h^2}(\cos(-2\pi x_l) + i\operatorname{sen}(-2\pi x_l) - 2 + \cos(2\pi x_l) + i\operatorname{sen}(2\pi x_l)) = \lambda_l \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-2d}{h^2}(1 - \cos(2\pi x_l)) = \lambda_l \end{aligned}$$

Ahora aplicando la fórmula trigonométrica $1 - \cos(t) = 2\operatorname{sen}^2(\frac{t}{2})$ obtenemos:

$$\lambda_l = \frac{-4d}{h^2}(\operatorname{sen}^2(\pi x_l))$$

■

Para las fórmulas de diferencias regresivas y progresivas de primer orden, los autovalores se encuentran dentro de un círculo en el plano complejo, con un radio de $\frac{|c|}{h}$ y centros en $(\frac{c}{h}, 0)$ y $(-\frac{c}{h}, 0)$ respectivamente. En cambio, para la fórmula central de segundo orden, los autovalores se encuentran en el eje imaginario para la convección, y en el eje real negativo para la difusión.

El análisis de estabilidad de los sistemas semidiscretos se refiere a la propagación en el tiempo de las perturbaciones en el valor inicial. Una semidiscretización se considera estable si el error en cualquier momento $t > 0$ puede ser acotado por una constante moderada multiplicada por el error en el tiempo inicial $t = 0$. Esta constante debe ser independiente del ancho de malla espacial h y del error inicial.

Para medir el tamaño de los vectores, utilizamos la norma euclídea en su escala natural:

$$\|x\|_2 = \left\{ h \sum_{i=1}^m |x_i|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{cuando sea } x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in \mathbb{C}^m \quad (2.20)$$

Sean U_0 y \tilde{U}_0 dos vectores iniciales dados arbitrariamente, y sean U y \tilde{U} las funciones que denotan las soluciones correspondientes a (2.5) con $A = VD V^{-1}$ como se mencionó anteriormente. Por linealidad, la diferencia $\tilde{U} - U$ también es

una solución del sistema semidiscreto, con vector inicial $\tilde{U}_0 - U_0$.

Consideramos la transformación:

$$Y(t) = V^{-1}(\tilde{U}(t) - U(t))$$

Entonces $\|Y(t)\| = \|\tilde{U}_0 - U_0\|_2$ ya que V es unitaria, y se cumple:

$$Y'(t) = DY(t) \quad (0 < t \leq T).$$

Este último sistema de EDOs está desacoplado,

$$Y'_k(t) = \lambda_k Y_k(t) \quad (0 < t \leq T) \quad \text{y} \quad (1 \leq k \leq m),$$

con solución

$$Y_k(t) = e^{\lambda_k t} Y_k(0) \quad (0 < t \leq T) \quad \text{y} \quad (1 \leq k \leq m),$$

Fácilmente se sigue que

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\|_2 \leq \max_{1 \leq k \leq m} e^{\operatorname{Re} \lambda_k t} \|\tilde{U}_0 - U_0\|_2 \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.21)$$

donde $\operatorname{Re} \lambda$ denota la parte real de cualquier número complejo λ . Combinando esta cota con los autovalores de las matrices (2.6), (2.9), (2.12), (2.15) especificado anteriormente, se puede ver que la semidiscretización por:

Lema 2.3.2:

- La fórmula inversa de primer orden es estable si $c < 0$.
- La fórmula directa de primer orden es estable si $c > 0$.
- La fórmula central de segundo orden para la convección es estable $\forall c$.
- La fórmula central de segundo orden para la difusión es estable $\forall d > 0$.

Demostración: Por lo visto anteriormente. ■

En los cuatro casos, los autovalores se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo, de modo que:

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\|_2 \leq \|\tilde{U}_0 - U_0\|_2 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (2.22)$$

En este caso, no solo hay estabilidad sino **contractividad**.

2.4. Condiciones de contorno

Sea el dominio espacial dado por un intervalo (S_{min}, S_{max}) . Para este trabajo, siempre asumiremos que la ecuación general de convección-difusión-reacción (2.1) está proporcionada por una **condición de Dirichlet** en el extremo inferior $s = S_{min}$:

$$u(S_{min}, t) = a_0(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (2.23)$$

donde a_0 es una función dada. Para discretizar el dominio espacial, elegimos un entero $m \geq 3$, un ancho de malla espacial h , y definimos los puntos de malla espacial s_i como sigue:

$$h = \frac{S_{max} - S_{min}}{m} \quad y \quad s_i = S_{min} + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

Introducimos las aproximaciones $U_i(t)$ para $u(s_i, t)$ mediante diferencias finitas, lo cual implica la **discretización de la convección y difusión**.

Las semidiscretizaciones (2.4), (2.8), (2.11) y (2.14) para las **ecuaciones de convección y difusión** en el modelo se generalizan directamente a coeficientes variables. Para lograr esto, se reemplazan las constantes de convección y difusión c y d por $c(s_i)$ y $d(s_i)$, respectivamente.

Además, debido a la condición de Dirichlet en el extremo inferior, se tiene inmediatamente $U_0(t) = a_0(t)$. Para completar la semidiscretización, se define $U_m(t)$ en el extremo superior, donde $s = S_{max}$.

Los sistemas semidiscretos obtenidos son de la forma:

$$U'(t) = AU(t) + g(t) \quad (0 < t \leq T), \quad (2.24)$$

donde A es una matriz $v \times v$ dada, $g(t)$ para cada t es un vector dado de dimensión v donde:

$$v \in \{m-1, m\}$$

A continuación, vamos a discutir los **tres tipos de condiciones de contorno**:

(i) **La condición de Dirichlet** se expresa como:

$$u(S_{max}, t) = a_1(t) \quad (0 \leq t \leq T),$$

con la función dada a_1 . En este caso, se tiene directamente $U_m(t) = a_1(t)$. Considerando por ejemplo, las fórmulas centrales de segundo orden para la convección y difusión en los puntos s_i para $i = 1, 2, \dots, v$, con $v = m-1$, se obtiene un sistema semidiscreto (2.24) con matriz tridiagonal A y vector $g(t)$ dado por:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_{v-1} & \alpha_{v-1} & \gamma_{v-1} \\ & & & \beta_v & \alpha_v \end{pmatrix}, \quad g(t) = \begin{pmatrix} \delta_1(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_v(t) \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

donde

$$\alpha_i = -\frac{2d_i}{h^2} - r_i, \quad \beta_i = \frac{d_i}{h^2} - \frac{c_i}{2h}, \quad \gamma_i = \frac{d_i}{h^2} + \frac{c_i}{2h} \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad (2.26)$$

y

$$\delta_1 = \beta_1 a_0(t), \quad \delta_{m-1}(t) = \gamma_{m-1} a_1(t)$$

(ii) **La condición de Neumann** se expresa como:

$$u_s(S_{max}, t) = b_1(t) \quad (0 \leq t \leq T),$$

con la función $b_1(t)$ dada. En este caso el valor de la solución exacta u en $s = S_{max}$ es desconocido y basta con considerar el término de difusión. La fórmula central de segundo orden en $s = s_m$ nos da:

$$u_{ss} \approx \frac{u(s_{m-1}, t) - 2u(s_m, t) + u(s_{m+1}, t)}{h^2}$$

con $s_{m+1} = s_m + h$. El último punto se encuentra fuera del dominio espacial, pero surge la pregunta de cómo abordarlo. Con la condición de Neumann, una idea útil es reemplazar el valor de u en este punto virtual por la aproximación:

$$u(s_{m+1}, t) \approx u(s_{m-1}, t) + 2hb_1(t).$$

Una posible aproximación $U_m(t)$ se puede obtener de la siguiente manera:

$$U'_m(t) = 2d_m \frac{U_{m-1}(t) - U_m(t) + hb_1(t)}{h^2} + c_m b_1(t) - r_m U_m(t) \quad (0 < t \leq T)$$

Con las fórmulas centrales de segundo orden para convección y difusión en los puntos de malla s_1, s_2, \dots, s_{m-1} se llega a un sistema semidiscreto (2.24) con A y $g(t)$ del tipo (2.25) y $v = m$. Las cantidades $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ para $1 \leq i \leq m-1$ están definidas por (2.26) y la última fila de A está especificada por:

$$\alpha_m = -\frac{2d_m}{h^2} - r_m, \quad \beta_m = \frac{2d_m}{h^2}$$

Además, el vector $g(t)$ viene dado por:

$$\delta_1(t) = \beta_1 a_0(t), \quad \delta_m(t) = \left(\frac{2d_m}{h} + c_m\right) b_1(t).$$

(iii) **La condición de contorno lineal** se expresa como:

$$u_{ss}(S_{max}, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

En este caso, el valor de la solución exacta u en el extremo superior es nuevamente desconocido y se necesita definir una aproximación $U_m(t)$ en este punto de la malla.

El término de difusión se anula y queda por considerar el término de convección. Para este término es común seleccionar la fórmula inversa de primer orden en $s = s_m$. Por lo tanto, solo se utilizan puntos dentro del dominio espacial, a diferencia de la fórmula central de segundo orden. Esto lleva a la siguiente definición para $U_m(t)$:

$$U'_m(t) = c_m \frac{U_m(t) - U_{m-1}(t)}{h} - r_m U_m(t) \quad (0 < t \leq T).$$

Se obtiene un sistema semidiscreto (2.24) donde A y $g(t)$ son del tipo (2.25) con $v = m$. La última fila de la matriz A ahora está especificada por:

$$\alpha_m = \frac{c_m}{h} - r_m, \quad \beta_m = -\frac{c_m}{h},$$

y el vector $g(t)$ viene dado por:

$$\delta_1(t) = \beta_1 a_0(t), \quad \delta_m(t) = 0$$

2.5. Mallas espaciales no uniformes

Las **mallas espaciales no uniformes** se utilizan frecuentemente para concentrar puntos de malla cerca de uno o más **puntos de interés** específicos en el dominio espacial, donde usualmente las funciones a aproximar pierden regularidad.

Estas mallas se pueden construir de manera conveniente utilizando una función continua $\varphi : [\xi_{min}, \xi_{max}] \rightarrow [S_{min}, S_{max}]$, donde $\varphi(\xi_{min}) = S_{min}$ y $\varphi(\xi_{max}) = S_{max}$. Esta función debe ser creciente y tener una variación suave cerca de los puntos de interés correspondientes.

Siguiendo a [1] se propone la siguiente malla no uniforme:

$$s_i = \varphi(\xi_i) \quad \text{con} \quad \xi_i = \xi_{min} + i\Delta\xi, \quad \Delta\xi = \frac{\xi_{max} - \xi_{min}}{m} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, m)$$

Aquí, $h_i = s_i - s_{i-1}$ para $1 \leq i \leq m$ denota las **variaciones** en el ancho de la malla espacial. Siempre se asume que la malla espacial es suave, lo que

implica la existencia de números reales $C_0, C_1, C_2 > 0$, independientes de i y m , que satisfacen las siguientes condiciones para los anchos de la malla:

$$C_0 \Delta \xi \leq h_i \leq C_1 \Delta \xi \quad \text{y} \quad |h_{i+1} - h_i| \leq C_2 (\Delta \xi)^2$$

Esto significa que los anchos de la malla h_i tienden a cero a medida que $\Delta \xi$ se aproxima a cero, y varían de manera gradual. Un análisis sencillo muestra que la malla no uniforme es suave en los términos indicados arriba.

Ejemplo: 2.5. Sea K cualquier punto de interés dado en el dominio espacial. Sea φ la aplicación que está definida a través de la función seno hiperbólico dada por:

$$\varphi(\xi) = K + L \sinh \xi \quad (\xi_{min} \leq \xi \leq \xi_{max}),$$

con el parámetro $L > 0$ y

$$\xi_{min} = \sinh^{-1}((S_{min} - K)/L) \quad \text{y} \quad \xi_{max} = \sinh^{-1}((S_{max} - K)/L).$$

Se verifica fácilmente que φ es continua y estrictamente creciente y que la malla espacial generada por esta aplicación es suave. El parámetro L controla la fracción de puntos de malla s_i que se encuentran en un entorno de K donde un valor menor L produce una malla más densa alrededor de K . Aquí vamos a tomar $L = K/3$. La Figura 2.2 muestra el gráfico de φ si $K = 100$, $S_{min} = 0$, $S_{max} = 3K$. Claramente, la aplicación φ tiene una pendiente relativamente suave cerca de $\xi = 0$ donde la preimagen de $s = K$. Una malla uniforme en ξ produce una malla no uniforme en s con relativamente muchos puntos s_i cerca de K .

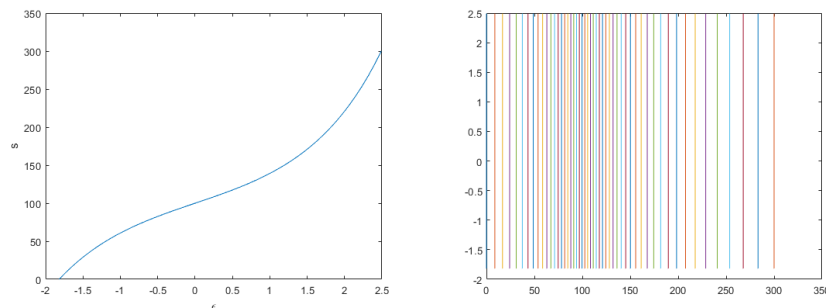


Figura 2.1: Representación de la dispersión de los puntos de la malla no uniforme generada.

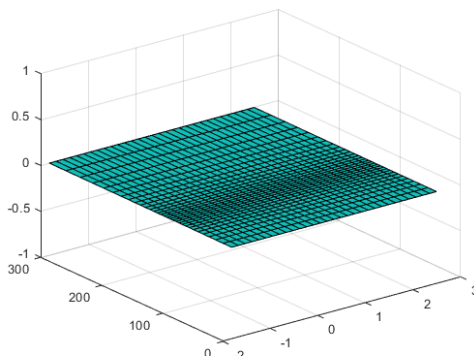


Figura 2.2: Representación tridimensional de la malla no uniforme generada.

Consideramos ahora la **función suave** $f : [S_{min}, S_{max}] \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces para la primera derivada se tiene la siguiente aproximación de diferencias finitas pertinentes a una s-cuadrícula no uniforme.

Fórmula de primer orden hacia atrás:

$$f'(s_i) \approx \frac{f(s_i) - f(s_{i-1})}{h_i} \quad (0 < i \leq m). \quad (2.27)$$

Fórmula de primer orden hacia adelante:

$$f'(s_i) \approx \frac{f(s_{i+1}) - f(s_i)}{h_{i+1}} \quad (0 \leq i < m). \quad (2.28)$$

Fórmula central A de segundo orden:

$$f'(s_i) \approx \frac{f(s_{i+1}) - f(s_{i-1}))}{h_i + h_{i+1}} \quad (0 \leq i < m). \quad (2.29)$$

Demostración (2.29): En primer lugar, tomamos $0 < c_0 h \leq h_i \leq c_1 h$ de donde

$$\frac{f(s_{i+1}) - f(s_{i-1}))}{h_i + h_{i+1}} - f'(s_i) = O(h^3)$$

es el error con $h_i = s_i - s_{i-1}$. Ahora, sabemos usando desarrollos de Taylor que:

$$f(s_{i+1}) = f(s_i) + h_{i+1}f'(s_i) + \frac{h_{i+1}^2}{2}f''(s_i) + O(h_{i+1}^3)$$

$$f(s_{i-1}) = f(s_i) - h_i f'(s_i) + \frac{h_i^2}{2}f''(s_i) + O(h_i^3)$$

Resolviendo obtenemos:

$$f(s_{i+1}) - f(s_{i-1}) = f'(s_i)(h_i + h_{i+1}) + \frac{1}{2}f''(s_i)(h_{i+1}^2 - h_i^2) + O(h^3)$$

De esta forma:

$$\frac{f(s_{i+1}) - f(s_i)}{h_{i+1} + h_i} = f'(s_i) + \frac{(h_{i+1} - h_i)(h_i + h_{i+1})}{h_i + h_{i+1}} \frac{1}{2}f''(s_i) + O(h^3)$$

de donde $|h_{i+1} - h_i| \leq ch^2$. ■

Fórmula central B de segundo orden:

$$f'(s_i) \approx w_{i,-1}f(s_{i-1}) + w_{i,0}f(s_i) + w_{i,1}f(s_{i+1}) \quad (0 < i < m), \quad (2.30)$$

con

$$w_{i,-1} = \frac{-h_{i+1}}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad w_{i,0} = \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i h_{i+1}}, \quad w_{i,1} = \frac{h_i}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}$$

Demostración (2.30): Sabemos que:

$$f'(s_i) = w_{i,-1}f(s_{i-1}) + w_{i,0}f(s_i) + w_{i,1}f(s_{i+1}) + O(h^2)$$

El polinomio $p(s)$ interpola a $f(s)$ en los nodos s_{i-1}, s_i, s_{i+1} tomaremos:

$$p'(s_i) = w_{i,-1}f(s_{i-1}) + w_{i,0}f(s_i) + w_{i,1}f(s_{i+1})$$

Hacemos la interpolación de Lagrange obteniendo de esta manera $p(s)$.

$$p(s) = \frac{(s - s_i)(s - s_{i+1})}{h_i(h_i + h_{i+1})}f(s_{i-1}) + \frac{(s - s_{i-1})(s - s_{i+1})}{-h_i h_{i+1}}f(s_i) + \frac{(s - s_{i-1})(s - s_i)}{(h_i + h_{i+1})h_{i+1}}f(s_{i+1})$$

De esta forma como $h_i = s_i - s_{i-1}$ es fácil ver que $h_{i+1} = s_{i+1} - s_i$ y así obtenemos $w_{i,-1}, w_{i,0}$ y $w_{i,1}$. Para la segunda derivada se tiene la fórmula central de segundo orden:

$$f''(s_i) \approx w_{i,-1}f(s_{i-1}) + w_{i,0}f(s_i) + w_{i,1}f(s_{i+1}) \quad (0 < i < m), \quad (2.31)$$

con

$$w_{i,-1} = \frac{2}{h_i(h_i + h_{i+1})}, \quad w_{i,0} = \frac{-2}{h_i h_{i+1}}, \quad w_{i,1} = \frac{2}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})}. \quad \blacksquare$$

Análogamente al resultado anterior, haciendo $p''(s_i)$ obtendríamos de dónde sale la fórmula (2.31).

2.6. Datos iniciales no suaves

Los datos iniciales no suaves son una característica común de las opciones financieras, donde las **funciones de pago**, generalmente, **no son suaves** (es decir, ellas o sus derivadas pueden ser discontinuas en algún punto). Por ejemplo, las opciones de compra y venta son continuas pero no diferenciables en su estimación.

Para otros tipos de opciones, los pagos pueden ni siquiera ser continuos en uno o más puntos determinados.

Un ejemplo sería una **opción de compra de efectivo o nada**, que tiene la recompensa

$$\phi(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } s < K, \\ D & \text{para } s \geq K. \end{cases} \quad (2.32)$$

En esta opción, se paga una **cantidad fija** en efectivo $D > 0$ si el precio del activo está por encima del precio del *strike*, $S_T \geq K$, y no se paga nada si está por debajo, $S_T < K$.

La **no suavidad** de las funciones de pago **puede afectar a la solución numérica** de los problemas de valor de frontera y valor inicial en la valoración de opciones. Las aproximaciones de diferencias finitas dependen de la suavidad de las funciones relevantes, y los pagos no suaves pueden conducir a un **comportamiento numérico indeseable** en los precios de las opciones.

Para abordar este problema, se puede considerar una estrategia de reemplazo de los valores iniciales mediante un suavizado de la forma siguiente. En lugar de utilizar la representación puntual de una función de pago ϕ , se puede promediar su valor en una vecindad de s_i cercana a cada punto de malla. Esto permite capturar más información cerca de los puntos de no suavidad y mejorar la precisión en la solución numérica. Además se puede expresar como una integral,

$$\phi(s_i) \approx \frac{1}{h_{i+1/2}} \int_{s_{i-1/2}}^{s_{i+1/2}} \phi(s) ds \quad (2.33)$$

donde

$$s_{i-1/2} = \frac{1}{2}(s_{i-1} + s_i), \quad s_{i+1/2} = \frac{1}{2}(s_i + s_{i+1}), \quad h_{i+1/2} = s_{i+1/2} - s_{i-1/2}.$$

El valor (2.33) se denomina **promedio por celda** de ϕ sobre $[s_{i-1/2}, s_{i+1/2}]$ y el enfoque se conoce como **técnica de suavizado**. Para muchos pagos, la integral (2.33) se calcula exactamente. De lo contrario, se puede aplicar un método

de integración numérica, por ejemplo, la regla trapezoidal, para aproximarlos con precisión.

2.7. Discretización mixta central/*upwind* (a favor del viento)

Una variante útil de la **discretización central estándar de segundo orden** de la EDP de Black-Scholes, con condiciones de frontera de Dirichlet o Neumann y $r > 0$, implica cambiar la fórmula convección de segundo orden a una fórmula progresiva de primer orden en puntos de malla seleccionados. Esto se aplica a aquellos puntos s_i con $1 \leq i \leq v$ donde β_i es estrictamente negativo.

En el caso de una **mallá no uniforme**, esto significa que se realiza el cambio si se cumple la siguiente condición:

$$\frac{s_i}{h_i} < \frac{r}{\sigma^2} \quad (\text{para la fórmula central A}) \quad \text{y} \quad \frac{s_i}{h_{i+1}} < \frac{r}{\sigma^2} \quad (\text{para la fórmula central B})$$

Ambas desigualdades se pueden reescribir en términos del llamado *número de Péclét por celda*. (Véase Apéndice A.1).

$$\frac{c(s)h}{d(s)} \quad \text{con} \quad c(s) = rs \quad \text{y} \quad d(s) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2.$$

Estos puntos suelen estar alejados de la **región de interés**, por lo que tienen poco impacto adverso en la **precisión espacial** de dicha región. La discretización mixta central/*upwind* anteriormente definida tiene la característica importante de que $-A$ es una M -matriz (véase Apéndice A.1). Además, se cumple la siguiente condición ligeramente más fuerte:

$$\begin{cases} \beta_i \geq 0 & (2 \leq i \leq v), \\ \gamma_i \geq 0 & (1 \leq i \leq v-1), \\ \lambda_1 + \gamma_1 \leq -r, \\ \lambda_i + \beta_i + \gamma_i = -r & (2 \leq i \leq v-1), \\ \lambda_v + \beta_v \leq -r. \end{cases} \quad (2.34)$$

Esta condición implica varias propiedades favorables para la semidiscretización:

1. Se mantiene la contractividad en la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$; si U_0, \tilde{U}_0 son dos vectores iniciales y U, \tilde{U} son las soluciones correspondientes a (2.24), entonces:

$$\|\tilde{U}(t) - U(t)\|_\infty \leq \|\tilde{U}_0 - U_0\|_\infty \quad (0 \leq t \leq T)$$

2. La semidiscretización **preserva la positividad**:

$$U_0 \geq 0 \quad \text{y} \quad g(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad \Rightarrow \quad U(t) \geq 0 \quad (0 \leq t \leq T),$$

donde las desigualdades para los vectores deben interpretarse por componentes. Esta propiedad de positividad de la discretización espacial es de suma importancia pues evita que se produzca oscilaciones indeseadas en las soluciones de la EDO, las cuales no existen en el problema EDP.

2.8. Promedio de celdas

Consideramos la **EDP de Black-Scholes** (1.4) en el dominio espacial:

$$(S_{min}, S_{max}) = (0, 3K)$$

y elegiremos las **condiciones de Dirichlet** siguientes:

$$u(0, t) = 0 \quad \text{y} \quad u(S_{max}, t) = S_{max} - e^{-rt}K \quad (0 \leq t \leq T)$$

La **condición inicial** viene dada como siempre por la función de pago:

$$u(s, 0) = \phi(s) = \max(s - K, 0) \quad (0 < s < S_{max})$$

y para los **parámetros financieros** tomaremos los valores:

$$K = 100, \quad T = 1, \quad r = 0.05, \quad \sigma = 0.25.$$

Nuestro objetivo, es examinar numéricamente el **error de discretización espacial** en $t = T$ definido por:

$$\xi(m) = (\xi_i(m))_{i=0}^m \quad \text{con} \quad \xi_i(m) = u(s_i, T) - U_i(T) \quad (0 \leq i \leq m), \quad (2.35)$$

donde u es el **valor teórico de la opción de compra** dada por la Fórmula de Black-Scholes y U_i denota el **valor teórico semidiscreto de la opción de compra** correspondiente al punto de malla s_i . Es de gran importancia considerar la relación entre el error de discretización espacial y el número de puntos en la malla espacial, ya que esta relación se refleja en la notación utilizada. Sea

$$e(m) = \max\{|\xi_i(m)| : 0 \leq i \leq m\},$$

es decir, **la norma del máximo** de $\xi(m)$ (máximo de los errores). Para las aplicaciones financieras, la norma del máximo suele ser la norma más relevante, ya que se desea controlar uniformemente **la precisión** de los precios de las opciones aproximadas numéricamente.

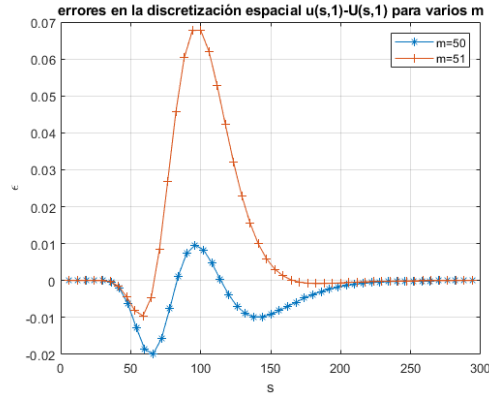


Figura 2.3: Muestra los componentes del error espacial $\xi_i(50)$ versus s_i (función azul) y $\xi_i(51)$ versus s_i (función roja).

2.8.1. Ejemplos sin promedio de celdas

Consideramos una **mallla espacial uniforme** con $m = 50$ y una semi-discretización por las **fórmulas centrales de segundo orden** (2.10) y (2.13) para convección y difusión.

El **error espacial** en la Figura 2.3 es razonablemente **pequeño** cuando $m = 50$ en todo el dominio espacial, y los errores más grandes ocurren en una región alrededor de la estimación. Sin embargo, cuando $m = 51$ se podría esperar una precisión similar y vemos que **ocurre lo contrario**. Ahora, el **error espacial** es sustancialmente **mayor**. En particular, el error aumenta en aproximadamente un factor 7 alrededor de la estimación.

Ahora, en la Figura 2.4, se observa que $e(m)$ oscila fuertemente en función de m . Cuando m aumenta en 1, hay un posible **aumento en el error espacial** con un factor de aproximadamente 3.5. La razón de este **comportamiento indeseable** radica en la **falta de suavidad** de la función inicial en la estimación.

Además, K pertenece a la mallla espacial (si m es un múltiplo entero de tres) o tiene una distancia de $h/3$ al punto de mallla espacial más cercano. La Figura 2.4 muestra que $e(m)$ es siempre relativamente grande en el primer caso, y siempre relativamente pequeña en este último caso.

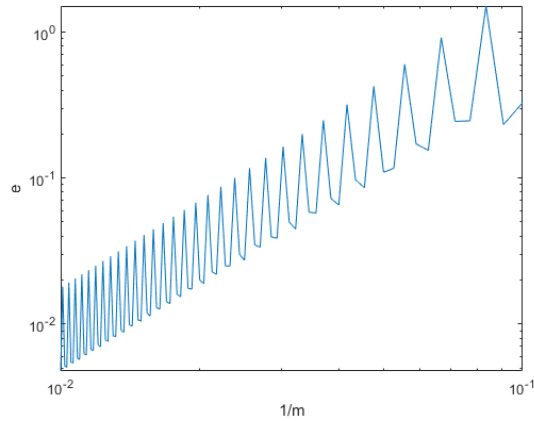


Figura 2.4: Muestra en doble escala logarítmica la norma del error espacial $e(m)$ frente a $1/m$ para todo $10 \leq m \leq 100$.

2.8.2. Ejemplo con promedio de celdas

Consideramos la aplicación de la **técnica de promedio de celdas**. Por lo tanto, el valor puntual $\phi(s_i)$ en el punto de malla s_i más cercano a K se reemplaza en el vector inicial $U(0)$ por el valor medio de ϕ sobre la celda $[s_{i-1/2}, s_{i+1/2}]$, ver en (2.6) .

El resultado se muestra en la Figura 2.5. Se observa que han desaparecido las fuertes oscilaciones en $e(m)$ en función de m . Además, en comparación con la Figura 2.4, los **errores** obtenidos son **favorables**.

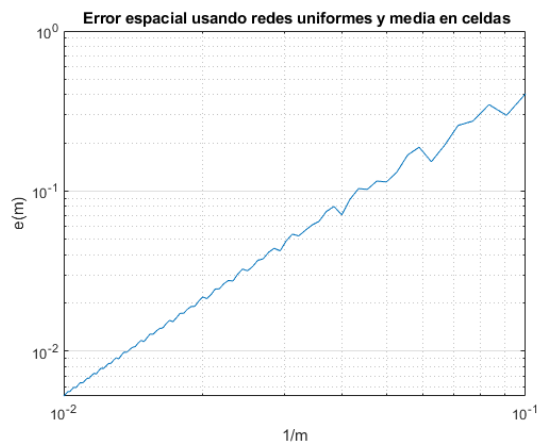


Figura 2.5: Error espacial $e(m)$ en función de $1/m$ para $10 \leq m \leq 100$. Semi-discretización en malla uniforme mediante fórmulas centrales de segundo orden.

Con el promedio de celdas, se ve que $e(m)$ es aproximadamente igual a Cm^{-2} con cierta constante $C > 0$. De hecho, tomando logaritmos esta afirmación es equivalente a:

$$\log e(m) \approx 2\log(1/m) + \log C,$$

y la Figura 2.5 revela tal relación aproximadamente lineal entre $\log e(m)$ y $\log(1/m)$. Por lo tanto, se logra un **comportamiento de convergencia de segundo orden** de la discretización espacial, que es el deseado.

Las Griegas. Discretización temporal.

En este capítulo, analizaremos Las Griegas (*The Greeks*) y la discretización temporal en el contexto del modelo de Black-Scholes. Estudiaremos diferentes métodos de discretización temporal donde analizaremos sus ventajas, desventajas y aplicaciones en la valoración de opciones. Finalmente, abordaremos las opciones de efectivo o nada (*Cash-or-Nothing Options*).

Para este capítulo, usaremos el libro [1], Capítulos 6,7,8 y 9.

3.1. Las Griegas

Las Griegas, también conocidas como las "sensibilidades", son medidas que se utilizan en el modelo Black-Scholes para medir la **sensibilidad** del precio de una opción a diferentes variables del mercado. Estas medidas son de vital importancia para los **operadores** y **gestores de carteras**, ya que les permiten evaluar el riesgo y ajustar sus estrategias de inversión.

Las cuatro Griegas principales son:

$$\text{Delta: } \frac{\partial u}{\partial s} = N(d_1) \quad (3.1)$$

$$\text{Gamma: } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{N'(d_1)}{s\sigma\sqrt{t}} \quad (3.2)$$

$$\text{Vega: } \frac{\partial u}{\partial \sigma} = s\sqrt{t}N'(d_1) \quad (3.3)$$

$$\text{Rho: } \frac{\partial u}{\partial r} = te^{-rt}KN(d_2) \quad (3.4)$$

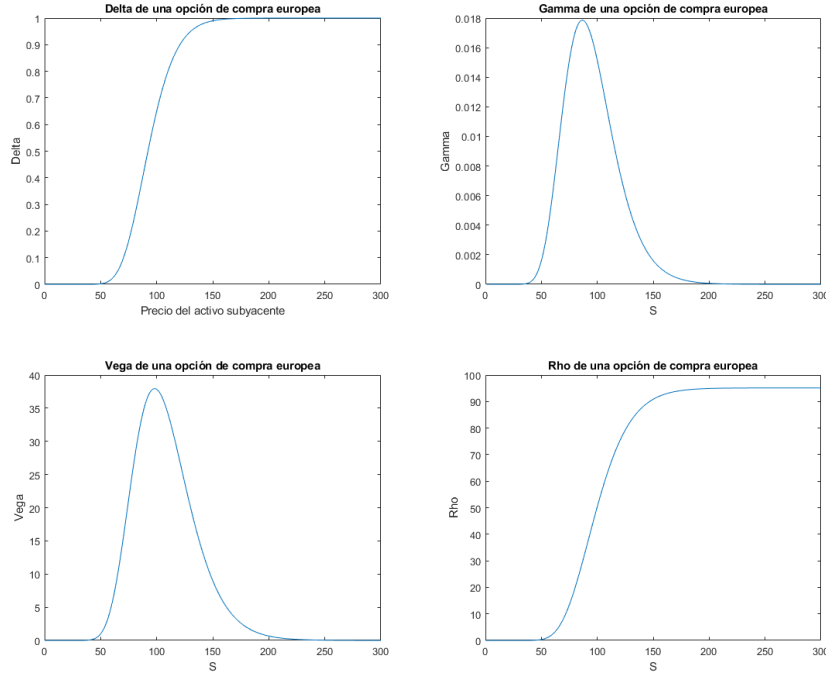


Figura 3.1: Griegas para una opción de compra $t = T$ con parámetros $K = 100$, $T = 1$, $r = 0.05$ y $\sigma = 0.25$.

Resumidamente, tenemos en el marco de Black-Scholes:

$$\text{Delta} : \frac{\partial u}{\partial s}, \quad \text{Gamma} : \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad \text{Vega} : \frac{\partial u}{\partial \sigma}, \quad \text{Rho} : \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Sin embargo, para una opción de compra se pueden derivar de (1.7) las siguientes fórmulas (siempre que $s > 0$, $0 < t \leq T$) y nos queda:

$$\text{Delta: } \frac{\partial u}{\partial s} = N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{d_1^2}{2}} - \frac{K}{s} e^{-\frac{-d_1 + 2\sigma\sqrt{t} - \sigma^2 t}{2}} \right)$$

$$\text{Gamma: } \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \frac{2}{s\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} - \frac{d_1}{s\sigma^2 t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} + \frac{e^{-rt}K}{(s\sigma\sqrt{t})^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1 - \sigma\sqrt{t})^2}{2}} (d_1 - \sigma\sqrt{t})$$

$$\text{Vega: } \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{s}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left(-\frac{\ln(\frac{s}{k})}{\sqrt{t}\sigma^2} - \frac{r\sqrt{t}}{\sigma^2} + \frac{\sqrt{t}}{2} \right) - \frac{e^{-rt}K}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(d_1 - \sigma\sqrt{t})^2}{2}} \left(-\frac{\ln(\frac{s}{k})}{\sqrt{t}\sigma^2} - \frac{r\sqrt{t}}{\sigma^2} - \frac{\sqrt{t}}{2} \right)$$

$$\text{Rho: } \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{st}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{d_1^2}{2}} - e^{-rt} \frac{Kt}{\sigma\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(d_1 - \sigma\sqrt{t})^2}{2}} + te^{-rt} KN(d_1 - \sigma\sqrt{t})$$

Las diferencias entre las derivadas que obtenemos al derivar la fórmula (1.7) y los valores observados de las Griegas no son relevantes en la práctica y los valores indicados en el libro [1] son los que se toman como referencia por su sencillez de cálculo.

3.2. Estudio numérico

El enfoque básico para **aproximar numéricamente** Las Griegas en la valoración de opciones es a través del uso de **diferencias finitas**. Dependiendo de si una Griega aparece directamente en la Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) de valoración de opciones o no, se pueden emplear diferencias finitas intrínsecas o es necesario resolver simultáneamente la EDP correspondiente a la Griega junto con la EDP para el valor de la opción.

La Figura 3.2 muestra los **errores espaciales** en la resolución numérica de opciones financieras, brindando información sobre la **convergencia** y **precisión** de los cálculos realizados mediante métodos numéricos. Esta visualización permite evaluar la calidad de la aproximación numérica y la confiabilidad de los resultados obtenidos en la valoración de opciones.

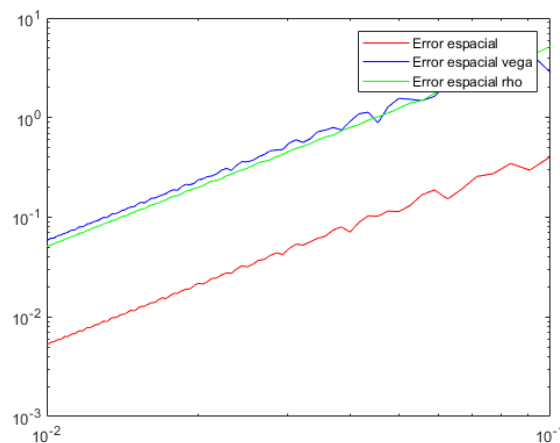


Figura 3.2: Errores espaciales en la resolución numérica de opciones financieras, para diferentes valores de $h = 1/m$ (línea horizontal).

3.3. Los θ -métodos

El θ -**método** es un método numérico usado en la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales parciales (EDP). Se basa en dividir el intervalo de tiempo en subintervalos más pequeños y aproximar la solución en cada uno de ellos. Un parámetro clave en este método es θ ($0 \leq \theta \leq 1$), que permite controlar la **estabilidad** y **precisión** de la solución.

Consideremos un problema de valor inicial para un sistema general de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):

$$U'(t) = F(t, U(t)), \quad (0 < t \leq T), \quad U(0) = U_0, \quad (3.5)$$

donde $F : [0, T] \times \mathbb{R}^v \rightarrow \mathbb{R}^v$ es una función dada y $U_0 \in \mathbb{R}^v$ es un vector dado.

Sea $N \geq 1$ un entero dado, y definamos el tamaño de paso como $\Delta t = N/T$ y los puntos de malla temporales como $t_n = n\Delta t$. El θ -método genera sucesivamente en cada paso, aproximaciones U_n de $U(t_n)$ para $n = 1, 2, \dots, N$ mediante la siguiente fórmula:

$$U_n = U_{n-1} + (1 - \theta)\Delta t F(t_{n-1}, U_{n-1}) + \theta\Delta t F(t_n, U_n), \quad (3.6)$$

donde U_n es la aproximación en el paso n , U_{n-1} es la aproximación en el paso anterior, y $F(t_n, U_n)$ es la evaluación de la función F en el punto (t_n, U_n) .

Usando esta **fórmula recursiva**, podemos obtener aproximaciones de la solución en cada punto de malla temporal y así obtener una aproximación de la solución en todo el intervalo de tiempo.

Tres ejemplos notables del θ -método son los siguientes:

1. $\theta = 0$, se utiliza el **método de Euler**, que es explícito y permite una solución rápida pero menos precisa.
2. $\theta = 1$ se utiliza el **método de Euler regresivo**, que es implícito y ofrece una solución más precisa pero más costosa computacionalmente.
3. $\theta = \frac{1}{2}$ se utiliza el **método de Crank-Nicolson**, que es una combinación de los dos métodos anteriores y ofrece una solución precisa y estable, aunque es de coste similar al Método de Euler Regresivo.

El sistema de EDO en (3.5) siempre representa un sistema semidiscreto de la forma (2.24). Entonces (3.6) se convierte en:

$$U_n = U_{n-1} + (1 - \theta)\Delta t[AU_{n-1} + g(t_{n-1})] + \theta\Delta t[AU_n + g(t_n)] \quad (3.7)$$

El vector U_n representa la aproximación totalmente discreta a la solución exacta u de la EDP pertinente en la malla en el nivel de tiempo t_n . Ligeramente reescrita, la relación de recurrencia (3.7) dice:

$$(I - \theta \Delta t A)U_n = (I + (1 - \theta)\Delta t A)U_{n-1} + (1 - \theta)\Delta t g(t_{n-1}) + \theta \Delta t g(t_n), \quad (3.8)$$

donde I denota la matriz identidad $\nu \times \nu$. Por lo tanto, si θ es distinto de cero, se debe resolver un sistema lineal de ecuaciones para U_n , que involucre a la matriz:

$$I - \theta \Delta t A.$$

Esta matriz es independiente del número de paso n . Por lo tanto, es conveniente determinar una **factorización LU** (véase Apéndice A.1) una vez y emplear esto en todos los pasos de tiempo para calcular los vectores U_n . Cabe destacar, que en muchas aplicaciones, la matriz A es tridiagonal y entonces este enfoque es altamente eficiente.

3.4. Estabilidad y Convergencia

Sea $\|\cdot\|$ cualquier norma dada sobre \mathbb{R}^ν y sea la norma de la matriz inducida sobre $\mathbb{R}^{\nu \times \nu}$. La **teoría de la convergencia estándar** para los métodos de discretización temporal aplicados a un sistema dado (3.5) implica que si F es lo suficientemente suave, entonces existe una constante tal que \hat{C} :

$$\|U(t_n) - U_n\| \leq \hat{C}(\Delta t)^q \quad \text{cuando sea} \quad 1 \leq n \leq N, \quad \Delta t \downarrow 0, \quad (3.9)$$

donde $q = 1$ (si $\theta \neq \frac{1}{2}$) y $q = 2$ (si $\theta = \frac{1}{2}$). Por lo tanto, los métodos de Euler y Euler regresivo son convergentes de primer orden en el tiempo y el método de Crank-Nicolson es convergente de segundo orden en el tiempo .

Consideramos ahora, el problema de prueba escalar simple:

$$U'(t) = \lambda U(t) \quad (t > 0), \quad U(0) = U_0, \quad (3.10)$$

donde λ denota cualquier constante compleja dada. La aplicación del θ -método en el caso del problema de prueba (3.10) produce:

$$U_n = R(\Delta t \lambda)U_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3.11)$$

con función racional $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$R(z) = \frac{1 + (1 - \theta)z}{1 - \theta z} \quad (z \in \mathbb{C})$$

Conocida como la **función de estabilidad** del θ -método. La relación de recurrencia (3.11) es estable frente a perturbaciones en el valor inicial U_0 si y

sólo si el módulo $|R(\Delta t\lambda)| \leq 1$. En consecuencia, la región de estabilidad del θ -método está definida por:

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$$

Por análisis complejo elemental se muestra fácilmente que:

$$S = \begin{cases} \{z : |z + \rho| \leq \rho\} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}, \\ \{z : \operatorname{Re} \lambda \leq 0\} & \text{si } \theta = \frac{1}{2}, \\ \{z : |z + \rho| \geq -\rho\} & \text{si } \frac{1}{2} < \theta \leq 1, \end{cases}$$

donde $\rho = (1 - 2\theta)^{-1}$. Es fácil comprobar que el problema de prueba (3.10) es estable en sí mismo con respecto a las perturbaciones en U_0 si y solo si $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Por lo tanto, un requisito natural de estabilidad para un método numérico de paso a paso es que sea estable al aplicar (3.10) siempre que $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ y $\Delta t > 0$ (sin restricciones en el tamaño del paso). Esta propiedad se conoce como **A-estabilidad**.

Esto significa que la mitad izquierda del plano complejo está contenida en la región de estabilidad. Para el θ -método, se cumple:

$$\operatorname{Re} z \leq 0 \subset S \iff \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$$

Por lo tanto, los métodos de Crank-Nicolson y de Euler regresivo son A-estables, mientras que el método de Euler hacia adelante no lo es. Si además de la A-estabilidad también se cumple que $R(z) \rightarrow 0$ para $z \in \mathbb{C}$ con $z \rightarrow \infty$, entonces se dice que el método es **L-estable**.

A continuación, analizaremos la estabilidad del θ -método aplicado a las semidiscretizaciones de las ecuaciones de convección y difusión del modelo con condición periódica. Estas semidiscretizaciones son todas de la forma (2.5) con cierta matriz A de $m \times m$. La aplicación del θ -método produce:

$$U_n = R(\Delta t A) U_{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

donde $R(\Delta t A)$ es la matriz definida por:

$$R(\Delta t A) = (I - \theta \Delta t A)^{-1} (I + (1 - \theta) \Delta t A),$$

siempre que $I - \theta \Delta t A$ sea invertible. Se dice que la discretización temporal es incondicionalmente estable en la norma $\|\cdot\|$ si existe una constante real tal que:

$$\|R(\Delta t A)^n\| \leq M \quad n \geq 1, \quad n \Delta t \leq T, \quad \Delta t > 0, \quad h > 0. \quad (3.12)$$

Si esta cota sobre las potencias de $R(\Delta t A)$ se cumple bajo una restricción $\Delta t \leq \psi(h)$ con cierta función positiva ψ entonces se dice que la discretización temporal es **condicionalmente estable**.

Asumimos $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Para cada semidiscretización, la matriz A pertinente es normal y $A = VDV^{-1}$ con matriz unitaria V y matriz diagonal $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Usando esto, uno tiene $R(\Delta t A)^n = VR(\Delta t D)^nV^{-1}$ y:

$$\|R(\Delta t A)^n\|_2 = \|R(\Delta t D)^n\|_2 = \max_{1 \leq k \leq m} |R(\Delta t \lambda_k)|^n$$

Entonces se obtiene directamente la siguiente equivalencia:

$$\|R(\Delta t A)^n\|_2 \leq 1 \quad (n \geq 1) \quad (3.13)$$

\Updownarrow

$$\Delta t \lambda_k \in S \quad (1 \leq k \leq m). \quad (3.14)$$

La restricción (3.14) se llama **condición de autovalor**.

Consideraremos primero la ecuación de convección del modelo puro con $c < 0$ (y condición periódica) que está semidiscretizada por la fórmula inversa de primer orden. Si $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$, entonces (3.14) se cumple siempre que Δt , $h > 0$ y se sigue el resultado positivo de que la discretización temporal es incondicionalmente estable. Si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$, entonces se muestra fácilmente que hay estabilidad condicional, con la restricción del tamaño del paso:

$$\Delta t < \frac{|c|}{h} \leq \rho \quad \text{ó} \quad \Delta t \leq \frac{\rho}{|c|} h$$

Consideraremos a continuación la fórmula central de segundo orden para la convección. Usando la equivalencia de (3.13) y (3.14), se obtiene de nuevo la estabilidad incondicional siempre que $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. En este caso, todos los autovalores de la matriz A se encuentran en el eje real negativo y vienen dados por:

$$\lambda_k = -\frac{4d}{h^2} \text{sen}^2(\pi kh) \quad (1 \leq k \leq m)$$

Nuevamente, el resultado favorable sostiene que la discretización temporal por el θ -método es incondicionalmente estable siempre que $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, entonces hay estabilidad condicional, con la restricción de tamaño de paso:

$$\Delta t \frac{4d}{h^2} \leq 2\rho \quad \text{ó} \quad \Delta t \leq \frac{\rho}{2d} h^2.$$

Las Figuras 3.3, 3.4 y 3.5 muestran las respectivas regiones de estabilidad para los valores $\theta = 0, \frac{1}{2}, 1$:

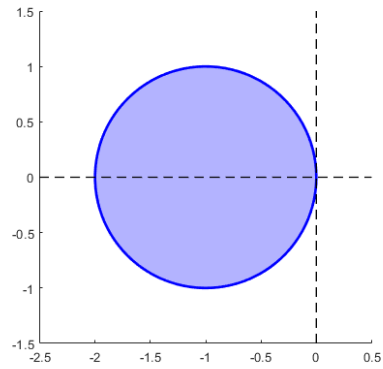


Figura 3.3: Región de estabilidad θ -método con $\theta = 0$ (sombreado).

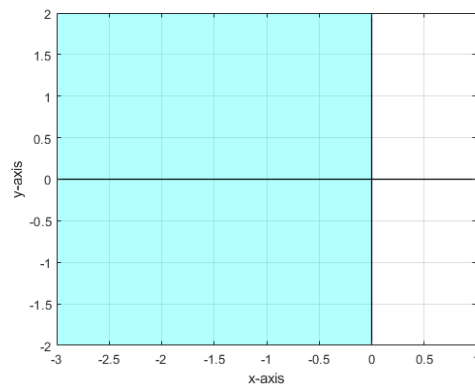


Figura 3.4: Región de estabilidad θ -método con $\theta = \frac{1}{2}$ (sombreado)

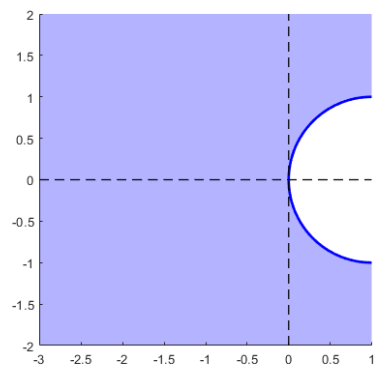


Figura 3.5: Región de estabilidad θ -método con $\theta = 1$ (sombreado)

3.5. Norma del máximo y positividad

Obtener resultados de estabilidad favorables para discretizaciones en la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$, a menudo es más complicado que en la norma euclidiana. Para el método de Euler regresivo, una cota útil en $\|R(\Delta t A)\|_\infty = \|(I - \Delta t A)^{-1}\|_\infty$ puede derivarse si la condición (2.34) en la matriz A de la forma (2.25) se cumple con $r \geq 0$.

Antes de enunciar los siguientes teoremas recordemos que:

$$\|(I - \Delta t A)^{-1}\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|(I - \Delta t A)^{-1}x\|_\infty$$

Teorema 3.5.1 Para matrices A tridiagonales que verifican (3.15) \implies

$$\|(I - \Delta t A)^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 + r\Delta t} < 1 \quad \forall \Delta t > 0$$

Además, la positividad preserva la no negatividad, es decir:

$$w'(t) = Aw(t) \quad : \quad A = \text{tridiag}(\beta_i; \alpha_i; \gamma_i) \quad \beta_i \geq 0, \quad \gamma_i \geq 0, \quad \alpha_i \leq 0$$

con Euler regresivo

$$w_{n+1} = (I - \Delta t A)^{-1}w_n \quad : \quad n = 0, 1, \dots$$

Se dice que el método es positivo si:

$$w_n \geq 0 \implies w_{n+1} \geq 0$$

Demostración: Consideramos x cualquier vector de tamaño ν y

$$y = (I - \Delta t A)^{-1}x \iff (I - \Delta t A)y = x$$

con $\|y\|_\infty = |y_i|$ para algún $i = 1, 2, \dots, \nu$.

$$\text{De } (I - \Delta t A)y_i = x_i \text{ se sigue que: } x_i = (1 - \Delta t \alpha_i)y_i - \Delta t \beta_i y_{i-1} - \Delta t \gamma_i y_{i+1}.$$

Observe que se considera $\beta_1 = 0$, $\gamma_\nu = 0$ y $y_0 = y_{\nu+1} = 0$, luego

$$\begin{aligned} |x_i| &= |(1 - \Delta t \alpha_i)y_i - \Delta t \beta_i y_{i-1} - \Delta t \gamma_i y_{i+1}| \\ &\geq |(1 - \Delta t \alpha_i)||y_i| - \Delta t |\beta_i| |y_{i-1}| - \Delta t |\gamma_i| |y_{i+1}| \end{aligned}$$

Además, consideramos que $\alpha_i \leq 0$, $\beta_i \geq 0$ y $\gamma_i \geq 0$ por lo tanto:

$$|x_i| \geq |1 + \Delta t \alpha_i| |y_i| + \Delta t \beta_i |y_{i-1}| + \Delta t \gamma_i |y_{i+1}|$$

$$\begin{aligned} &\geq (1 + \Delta t|\alpha_i| + \Delta t|\beta_i| + \Delta t\gamma_i)|y_i| = \\ &= (1 + \Delta t \cdot r)|y_i| = (1 + \Delta t \cdot r)\|y\|_\infty \end{aligned}$$

$$\text{con } r = |\alpha_i| + \beta_i + \gamma_i, \|y\|_\infty \leq \frac{1}{1+\Delta t \cdot r}|x_i| \leq \frac{1}{1+\Delta t \cdot r}\|x\|_\infty = \frac{1}{1+\Delta t \cdot r}$$

Concluimos entonces que:

$$\begin{aligned} r &= \min_{1 \leq j \leq \nu} \{|\alpha_j| + \beta_j + \gamma_j\} > 0 \\ \text{con } \alpha_j &\leq 0, \quad \beta_j \geq 0 \quad \text{y} \quad \gamma_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, \nu) \end{aligned} \quad (3.15)$$

■

Teorema 3.5.2 *A* verifica (3.15) \implies Euler regresivo es positivo (en sentido estricto también).

Demostración: Sea $x > 0$ arbitrario $x \in \mathbb{R}$ veamos que:

$$y = (I - \Delta t A)^{-1} x \geq 0 \quad \forall \Delta t > 0$$

$$(I - \Delta t A)y = x \quad : \quad y = y(\Delta t) \quad \text{fijado } x,$$

$$y(0) = x > 0 \implies \exists \delta \quad \text{tal que} \quad 0 < \Delta t < \delta \quad \text{implica} \quad y(\Delta t) > 0$$

Supongamos que $\exists \Delta t^* = \tau > 0$ tal que $y(\tau) \geq 0$ pero no $y(\tau) > 0 \implies y_i(\tau) = 0$ para algún i , pero $y_j \geq 0$ y por lo tanto:

$$y_j(\Delta t) > 0 \quad \text{con} \quad j = 1, 2, \dots, \nu \quad \text{si} \quad \Delta t \in [0, \tau) \quad (\text{Por continuidad en } \Delta t = \tau) \implies$$

$$\implies 0 < x_i = (1 - \tau\alpha_i)y_i - \tau\beta_i y_{i-1} - \tau\gamma_i y_{i+1} \geq 0 \implies$$

$$\implies 0 < x_i \leq 0 \quad \#$$

Luego, por continuidad se tiene también que si $x \geq 0 \implies y = (I - \Delta t A)^{-1} x \geq 0$.

■

Teorema 3.5.4 Para los θ -métodos con $0 \geq \theta < 1$ se tiene que el método es positivo sobre problemas (3.15) si:

$$\alpha \Delta t \leq \frac{1}{1 - \theta} \quad \text{donde} \quad \alpha = \max_{1 \leq j \leq \nu} |\alpha_j|$$

3.6. Método explícito

En primer lugar, consideraremos la aplicación del método de Euler. Tomaremos $m = 50$ para la malla espacial y elegiremos $N = 75$ y $N = 80$ pasos de tiempo.

La Figura 3.6 muestra las dos **aproximaciones discretas** obtenidas en $t = T$. El gráfico superior muestra el resultado para $N = 75$ donde vemos que claramente, esta solución numérica es muy pobre e inestable, con valores positivos y negativos excesivamente grandes. Por otro lado, el gráfico inferior muestra el resultado para $N = 80$.

Si seleccionáramos números de pasos de tiempo más pequeños que $N = 75$ nos conduciría a resultados incorrectos similares a los de la parte superior de la Figura 3.6, mientras que si seleccionamos números más grandes que $N = 80$ produce resultados aceptables. Por lo tanto, parece que se requiere un número mínimo y crítico de pasos, igual a aproximadamente $N = 80$.

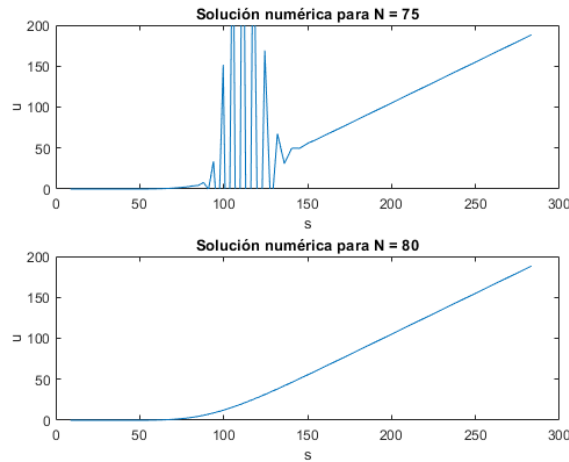


Figura 3.6: Aproximación completamente discreta para una opción de compra para $t = T$ obtenida con el método de Euler con $N = 75$ (arriba) y $N = 80$ (abajo).

Ahora, si considerásemos $m = 100, 200, 400$, los experimentos numéricos revelan un **número crítico** de pasos de tiempo aproximadamente igual a $N = 330, 1330, 5350$, respectivamente. Estos números crecen rápidamente y son directamente proporcionales a m^2 .

Para comprender mejor la observación anterior, echamos un vistazo a la condición de autovalor (3.14), con m reemplazada por ν . Calculando en Matlab los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\nu$ de la matriz A pertinente de tamaño $\nu \times \nu$ obtenemos que, para cada valor m considerado, todos se encuentran en el eje real negativo y, con el valor correspondiente N encontrado arriba y $\Delta t = T/N$, se tiene que:

$$\min_{1 \leq k \leq \nu} \Delta t \lambda_k \in [-2.02, -1.99]$$

Nótese que el intervalo de estabilidad del método de Euler es $z \in [-2, 0]$.

3.7. Método implícito

En esta sección, vamos a ver un experimento numérico con la integración θ -método. Lo veremos para los casos $\theta = 1/2$ y $\theta = 1$, es decir, con dos **métodos implícitos**, Crank-Nicolson y Euler regresivo, respectivamente.

Para estudiar el comportamiento de convergencia de los dos métodos implícitos, consideramos el **error de discretización temporal** en:

$$t = T = N \Delta t,$$

definido por:

$$\varepsilon(\Delta t; m) = (\varepsilon_i(\Delta t; m))_{i=0}^m \quad \text{con} \quad \varepsilon_i(\Delta t; m) = U_i(T) - U_{N,i} \quad (0 \leq i \leq m),$$

y norma del máximo:

$$e(\Delta t; m) = \max\{|\varepsilon_i(\Delta t; m)| : 0 \leq i \leq m\}.$$

Posteriormente, estudiamos el **error de discretización total**, que es de primordial importancia en la práctica. Es igual a la suma de los errores de discretización espacial y temporal, es decir $\varepsilon(m) + \varepsilon(\Delta t; m)$:

$$E(\Delta t; m) = \max\{|u(s_i, T) - U_{N,i}| : 0 \leq i \leq m\} \quad (3.16)$$

Entonces, el número de pasos de tiempo N se puede elegir directamente proporcional a m para que los errores de discretización espacial y temporal disminuyan a la misma velocidad.

En la Figura 3.7 se muestran los resultados de las integraciones para $h = 1/m$ y $N = [m/5]$ con los θ -métodos, para los casos $\theta = \frac{1}{2}$ (Regla Trapezoidal) y $\theta = 1$ (Euler regresivo). Se observa que la Regla Trapezoidal converge con orden 2 sus los errores globales tienen pendiente -2 . Sin embargo, el método de Euler regresivo converge con orden 1 (pendiente -1).

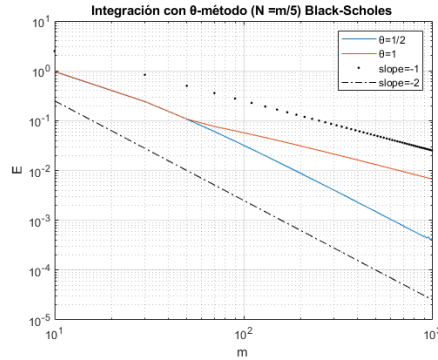


Figura 3.7: Integración con θ -método con $N = m/5$ donde m es el número de puntos de malla espacial con promedio de celdas $L = K/3$, $S_{max} = 3K$ y E los errores globales (norma del máximo), en doble escala logarítmica.

3.8. Opciones de efectivo o nada

Las **opciones financieras de efectivo o nada**, también conocidas como *Cash-or-Nothing options*, son un tipo de derivado financiero en el que el titular de la opción recibe una cantidad predeterminada de dinero en efectivo si se cumple una condición específica al vencimiento de la opción. Si la condición no se cumple, el titular no recibe ningún pago y la opción expira sin valor.

El valor razonable $u(s, t)$ de una opción de compra de efectivo o nada en el marco de Black-Scholes viene dado por:

$$u(s, t) = e^{-rt} DN(d_2) \quad (\text{para } s > 0, \quad 0 < t \leq T), \quad (3.17)$$

con d_2 dado en la fórmula de Black-Scholes (1.7). Como ejemplo numérico tomamos:

$$K = 100, \quad D = 100, \quad T = 0.5, \quad r = 0.03, \quad \sigma = 0.40. \quad (3.18)$$

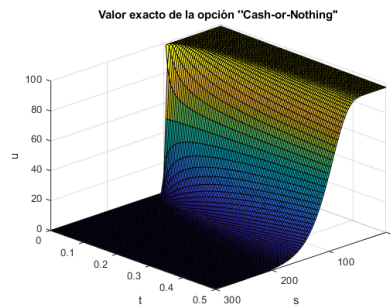


Figura 3.8: Valor exacto de la opción de efectivo o nada.

La Figura 3.8 muestra un ejemplo de cálculo y representación gráfica correspondiente de u del valor de una opción financiera de efectivo o nada (*cash-or-nothing*) en función del precio del *strike* (s) y el tiempo (t).

Por otro lado, la Figura 3.9 ilustra la integración para $\theta = 1/2$ (método de Crank-Nicolson). Para esta opción de compra de efectivo o nada tomaremos el conjunto de parámetros (3.18).

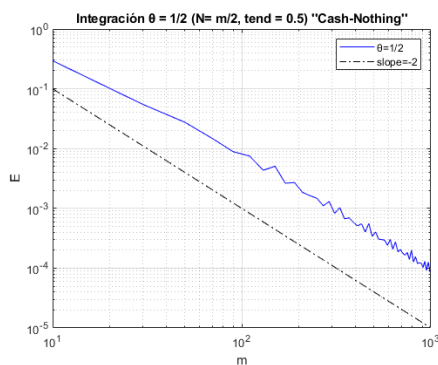


Figura 3.9: Integración para $\theta = 1/2$ (con $N = m/2$ y $tend = 0.5$). E son los errores máximos en la región de interés $K/2 < s < 3K/2$ y m es el número de puntos de malla espacial con promedio de celda $L = K/3$, $S_{max} = 3K$.

En la Figura 3.9, puede apreciarse que la Regla Trapezoidal converge con orden cercano a 2 (pero no con orden 2) esto se debe a que el dato inicial es discontinuo, y no es razonable en este caso exigir convergencia de segundo orden.

Conclusiones

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado ha sido obtener una comprensión más profunda de la aplicación del modelo de Black-Scholes.

He adquirido conocimientos sobre las técnicas matemáticas y herramientas informáticas necesarias [4] que se utilizan para resolver problemas en este campo.

El modelo de Black-Scholes es una contribución importante en el campo de las finanzas y ha proporcionado un marco teórico sólido para la valoración de opciones financieras. Admiro la elegancia y la simplicidad de su formulación matemática, ya que facilita el cálculo del precio de las opciones y su comprensión.

Por otro lado, la dependencia del modelo de Black-Scholes de los parámetros r (tasa de interés) y σ (volatilidad) que se asumen constantes, sugiere que se tomen con cierta precaución los resultados arrojados por el modelo en su aplicación práctica. Es interesante también la sensibilidad del modelo a la variación en los parámetros del mismo (Las Griegas) pues esto nos indica como afectan pequeñas variaciones en estos parámetros a los resultados en las opciones financieras.

La aproximación MOL proporciona aproximaciones adecuadas si se eligen redes no uniformes más densas cerca de los puntos más conflictivos (*strike*) y se usa la Regla Trapezoidal (Método de Crank - Nicolson) en la integración temporal.

A

Apéndice

A.1. Definiciones

Definición A.1.1 Un **proceso estocástico** es un modelo matemático que describe el comportamiento de un fenómeno que presenta variabilidad y aleatoriedad en su evolución temporal.

Definición A.1.2 La **distribución log-normal** es una distribución de probabilidad continua que se utiliza para describir variables aleatorias cuyos logaritmos tienen una distribución normal.

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde μ es la media del logaritmo de X , σ es la desviación estándar del logaritmo de X , y $x > 0$.

Definición A.1.3 La **función de distribución normal estándar** nos ayuda a calcular la probabilidad de que una variable aleatoria con distribución normal estándar sea menor o igual a un valor específico. Viene dada por:

$$N(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad (y \in \mathbb{R})$$

Definición A.1.4 El **número de Peclet por celda** (Pe) se define como la relación entre la velocidad característica del flujo (V) y el coeficiente de difusión (D) en una celda discreta, representada por la fórmula:

$$Pe = \frac{V}{D} \cdot h \quad \text{donde } h = \text{ancho (longitud) de la celda.}$$

Definición A.1.5 Una **M-matriz** se define como una matriz cuadrada no singular de tamaño $m \times m$ con elementos no negativos en su diagonal principal y con todas sus demás entradas negativas o no positivas.

Definición A.1.6 La *factorización LU* es un método para descomponer una matriz A en el producto de dos matrices: una matriz triangular inferior (L) y una matriz triangular superior (U). Esta descomposición $A = LU$ es útil en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y en la inversión de matrices.

A.2. Códigos

Estos códigos muestran las funciones en diferencias finitas usadas en los ejemplos proporcionados en el trabajo.

A.2.1. Mallas uniformes

ff5 es la función de diferencias centrales en una malla uniforme para el problema de Black-Scholes (la aplicamos en la Figura 2.3):

```
function f=ff5(t,u)
%DATOS
K=100;
r=0.05;
sigma=0.25;
Smax=3*K;

m=length(u)+1;
u=u';
h=Smax/m;
u0=0;
umax=Smax-exp(-r*t)*K;
s=h:h:Smax-h;
d=0.5*sigma^2*s.^2;
c=r*s;

f(1)=d(1)*(u(2)-2*u(1)+u0)/h^2+...
    c(1)*(u(2)-u0)/(2*h)-r*u(1);
f(2:m-2)=d(2:m-2).*(u(3:m-1)-2*u(2:m-2)+u(1:m-3))/h^2+...
    c(2:m-2).*(u(3:m-1)-u(1:m-3))/(2*h)-r*u(2:m-2);
f(m-1)=d(m-1)*(umax-2*u(m-1)+u(m-2))/h^2+...
    c(m-1)*(umax-u(m-2))/(2*h)-r*u(m-1);
f=f';
end
```

ff6 es la función de diferencias centrales en una malla uniforme para el problema de Black-Scholes (la aplicamos en la Figura 3.2):

```

function F=ff6(t,U)
    U=U';m=length(U)/3+1;
    u(1:m-1)=U(1:m-1);v(1:m-1)=U(m:2*m-2);p(1:m-1)=U(2*m-1:3*m-3);
    %DATOS
    K=100;
    r=0.05;
    sigma=0.25;
    Smax=3*K;

    h=Smax/m;
    u0=0;
    umax=Smax-exp(-r*t)*K;
    s=h:h:Smax-h;d=0.5*sigma^2*s.^2;
    c=r*s;

    % U=vector columna de dimensión 3m-3, U^T=(u^t,v^T,p^T)
    % t=punto t
    % F=vector columna de dimensión 3m-3, F^T=(f^T,g^T,q^T)

    f(1)=d(1)*(u(2)-2*u(1)+u0)/h^2+...
        c(1)*(u(2)-u0)/(2*h)-r*u(1);
    f(2:m-2)=d(2:m-2).*(u(3:m-1)-2*u(2:m-2)+u(1:m-3))/h^2+...
        c(2:m-2).*(u(3:m-1)-u(1:m-3))/(2*h)-r*u(2:m-2);
    f(m-1)=d(m-1)*(umax-2*u(m-1)+u(m-2))/h^2+...
        c(m-1)*(umax-u(m-2))/(2*h)-r*u(m-1);
    % g
    vd=sigma*s.^2;vmax=0;v0=0;
    g(1)=d(1)*(v(2)-2*v(1)+v0)/h^2+...
        c(1)*(v(2)-v0)/(2*h)-r*v(1)+vd(1)*(u(2)-2*u(1)+u0)/h^2;
    g(2:m-2)=d(2:m-2).*(v(3:m-1)-2*v(2:m-2)+v(1:m-3))/h^2+...
        c(2:m-2).*(v(3:m-1)-v(1:m-3))/(2*h)-r*v(2:m-2)+...
        vd(2:m-2).*(u(3:m-1)-2*u(2:m-2)+u(1:m-3))/h^2;
    g(m-1)=d(m-1)*(vmax-2*v(m-1)+v(m-2))/h^2+...
        c(m-1)*(vmax-v(m-2))/(2*h)-r*v(m-1)+...
        vd(m-1)*(umax-2*u(m-1)+u(m-2))/h^2;
    % q
    p0=0;pmax=K*t*exp(-r*t);
    q(1)=d(1)*(p(2)-2*p(1)+p0)/h^2+...
        c(1)*(p(2)-p0)/(2*h)-r*p(1)+ s(1)*(u(2)-u0)/(2*h)-u(1);

    q(2:m-2)=d(2:m-2).*(p(3:m-1)-2*p(2:m-2)+p(1:m-3))/h^2+...
        c(2:m-2).*(p(3:m-1)-p(1:m-3))/(2*h)-r*p(2:m-2)+...

```

```

    + s(2:m-2).*(u(3:m-1)-u(1:m-3))/(2*h)-u(2:m-2);
q(m-1)=d(m-1)*(pmax-2*p(m-1)+p(m-2))/h^2+...
    c(m-1)*(pmax-p(m-2))/(2*h)-r*p(m-1)+...
    s(m-1)*(umax-u(m-2))/(2*h)-u(m-1);
U=U';
F=[f,g,q]';
end

```

A.2.2. Mallas no uniformes

ff8 es la función de diferencias centrales en una malla no uniforme para el problema de Black-Scholes (la aplicamos en la Figura 3.6):

```

function f=ff8(t,u)
%DATOS
K=100;
r=0.05;
sigma=0.25;
Smax=3*K;
Smin=0;
L=K/3;

m=length(u)+1;
u=u';
ximin=asinh((Smin-K)/L);
ximax=asinh((Smax-K)/L);
dxi=(ximax-ximin)/m;
xi=(ximin+dxi):dxi:(ximax-dxi);
s=K+L*sinh(xi);

u0=0;
umax=Smax-exp(-r*t)*K;
saux=[0,s,Smax];
h=diff(saux);
ee=ones(1,m-1);

cm1=ee./(h(1:m-1).*(h(1:m-1)+h(2:m)));
c0=ee./(h(1:m-1).*h(2:m));
c1=(h(2:m).*(h(1:m-1)+h(2:m)));
bm1=2*cm1; am1=-h(2:m).*cm1;
b0=-2*c0; a0=(h(2:m)-h(1:m-1)).*c0;
b1=2*c1; a1=h(1:m-1).*c1;

```



```

d=0.5*sigma^2*s.^2;c=r*s;

f(1)=d(1)*(b1(1)*u(2)+b0(1)*u(1)+bm1(1)*u0)+...
      c(1)*(a1(1)*u(2)+a0(1)*u(1)+am1(1)*u0)-r*u(1);
f(2:m-2)=d(2:m-2).*(b1(2:m-2).*u(3:m-1) + b0(2:m-2).*u(2:m-2)+...
      bm1(2:m-2).*u(1:m-3))+...
      c(2:m-2).*(a1(2:m-2).*u(3:m-1) + a0(2:m-2).*u(2:m-2)+...
      am1(2:m-2).*u(1:m-3))-r*u(2:m-2);
f(m-1)=d(m-1)*(b1(m-1)*umax+ b0(m-1)*u(m-1)+bm1(m-1)*u(m-2))+...
      c(m-1)*(a1(m-1)*umax+ a0(m-1)*u(m-1)+am1(m-1)*u(m-2))-r*u(m-1);
f=f';
end

```

ff9 es la función de diferencias centrales en una malla no uniforme para el problema de Black-Scholes (la aplicamos en la Figura 2.2):

```

function f = ff9(t, u)
%DATOS
K = 100;
r = 0.05;
sigma = 0.25;
Smax = 3 * K;
Smin = 0;
L = K / 3;

m = length(u) + 1;
u = u';

ximin = asinh((Smin - K) / L);
ximax = asinh((Smax - K) / L);
dxi = (ximax - ximin) / m;
xi = (ximin + dxi):dxi:(ximax - dxi);
s = K + L * sinh(xi);

u0 = 0;
umax = Smax - exp(-r * t) * K;
saux = [0, s, Smax];
h = diff(saux);

ee = ones(1, m - 1);
cm1 = ee ./ (h(1:m - 1) .* (h(1:m - 1) + h(2:m)));
c0 = ee ./ (h(1:m - 1) .* h(2:m));

```

```

c1 = h(2:m) .* (h(1:m - 1) + h(2:m));
bm1 = 2 * cm1;
am1 = -h(2:m) .* cm1;
b0 = -2 * c0;
a0 = (h(2:m) - h(1:m - 1)) .* c0;
b1 = 2 * c1;
a1 = h(1:m - 1) .* c1;
d = 0.5 * sigma^2 * s.^2;
c = r * s;

f = zeros(m, 1);

f(1) = d(1) * (b1(1) * u(2) + b0(1) * u(1) + bm1(1) * u0) + ...
       c(1) * (a1(1) * u(2) + a0(1) * u(1) + am1(1) * u0) - r * u(1);

f(2:m - 2) = d(2:m - 2) .* (b1(2:m - 2) .* u(3:m - 1) +
    b0(2:m - 2) .* u(2:m - 2) + bm1(2:m - 2) .* u(1:m - 3)) + ...
    c(2:m - 2) .* (a1(2:m - 2) .* u(3:m - 1) + ...
    a0(2:m - 2) .* u(2:m - 2) + ...
    am1(2:m - 2) .* u(1:m - 3)) - r * u(2:m - 2);

f(m - 1) = d(m - 1) * (b1(m - 1) * umax +
    b0(m - 1) * u(m - 1) + bm1(m - 1) * u(m - 2)) + ...
    c(m - 1) * (a1(m - 1) * umax + a0(m - 1) * u(m - 1) +
    am1(m - 1) * u(m - 2)) - r * u(m - 1);

f = f';
end

```

Bibliografía

- [1] In't Hout, K. *Numerical Partial Differential Equations in Finance Explained: An Introduction To Computational Finance*. Springer 2017.
- [2] Velasquez Gaviria, D. *Introducción al Movimiento Browniano para Finanzas*. Instituto Tecnológico Metropolitano ITM, 2019.
- [3] Hull, J. C. *Options, futures, and Other Derivatives*. Pearson. 9th edition, 2018.
- [4] *MATLAB* <https://es.mathworks.com/>

Numerical methods for solving partial differential equations used in financial analysis.

Tamara Luz García Peña

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101241203@ull.edu.es

Abstract

In this Degree Project, the objective is to explore the numerical analysis of the Black-Scholes model and its applications in pricing financial options. The project describes the commonly employed numerical methods, analyzes The Greeks and study extensions of the model to incorporate more realistic features reflecting the behaviour of financial asset prices. In particular, we consider the call and put European options and the Cash or Nothing options.

1. Black-Scholes model

A **CALL OPTION** is a financial contract that grants the holder the right, but not the obligation, to buy (call option) or sell (put option) an underlying asset at a specified price (strike price) on or before a specific expiration date.

The Black-Scholes model is based in a PDE equation used to calculate the price of financial derivatives. The derivation of the PDE can be seen [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s, t) = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s, t) + rs \frac{\partial u}{\partial s}(s, t) - ru(s, t), \quad s > 0 : t \in [0, T] \quad (1)$$

Moreover, two additional conditions are imposed for the PDE (1):

1. $u(s, 0) = \phi(s)$ for $s > 0$.
2. $u(0, t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \leq t \leq T \text{ (call),} \\ e^{-rt}K & \text{for } 0 \leq t \leq T \text{ (put).} \end{cases}$

The PDE (1) and these two conditions constitute a system that is solved as a boundary value and initial value problem. By using the exact solution of the problem obtained through certain appropriate variable changes, leading to a Cauchy problem for the one-dimensional heat equation, it can be deduced that:

$$u(s, t) = sN(d_1) - e^{-rt}KN(d_2) \quad (\text{call}) \quad (2)$$

$$u(s, t) = -sN(-d_1) + e^{-rt}KN(-d_2) \quad (\text{put}) \quad (3)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sigma\sqrt{t}}; \quad (4)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}; \quad (5)$$

where N is the standard normal cumulative distribution function.

2. Spatial discretization

SPATIAL DISCRETIZATION refers to the process of dividing the price (spatial variable s) of underlying assets into small intervals (cells). This discretization allows to transform the PDE problem into an initial value problem of m Ordinary Differential Equations (ODEs). Then, Numerical Methods for ODEs can be applied to complete the full discretization of the PDE problem.

Some common examples of spatial discretization techniques used in the Black-Scholes model are: Finite Difference Method, Uniform grids, Non-uniform grids and Mixed Central/Upwind Discretization.

In this work, several codes have been constructed in Matlab. Among them, the representation of the dispersion of the points of the generated non-uniform grid on the space variable s .

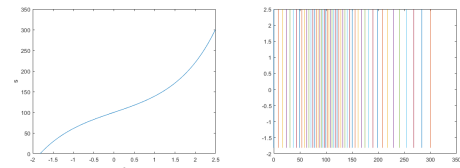


Figure 1: Representation of the dispersion of the points in the non-uniform grid generated.

3. The Greeks. Temporal discretization.

THE GREEKS are measures used to evaluate and manage the risk associated with financial options. The main Greeks are: Delta, Gamma, Vega and Rho. Also, The Greeks are of great interest for the sensitivity of the model to the parameters r (interest rate) and σ^2 (variance).

On the other hand, temporal discretization is a method used to approximate the behavior of the time variable by dividing the time interval into finite steps. This allows for numerical calculations and solving the associated partial differential equations to obtain an approximation of the option price at each time step.

In the work, we have seen different examples of temporal discretization, including the implicit method and the explicit method. One of the graphs generated in Matlab is as follows:

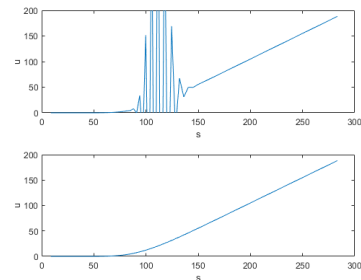


Figure 2: Fully discrete approximation of call option value function for $t = T$ obtained with the Euler method if $N = 75$ (above) and $N = 80$ (below)

References

- [1] In't Hout, K. *Numerical Partial Differential Equations in Finance Explained: An Introduction To Computational Finance*. Springer. 2017.
- [2] Hull, J. C. *Options, futures, and Other Derivatives*. Pearson. 9th edition. 2018.