Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Oliver Navío Velázquez

El Teorema de Radon-Nikodym y sus aplicaciones

Radon-Nikodym's Theorem and applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Mes de Año

Dirigido por
Antonio Lorenzo Bonilla Ramírez

Antonio Lorenzo Bonilla Ramírez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mis padres quienes me han apoyado incondicionalmente siempre y aguantado en mis momentos mas bajos.

A mis hermanos que, aunque a veces no podemos ni vernos, son personas fundamentales en mi vida y a quienes he necesitado de una forma u otra durante estos años.

Pero sobretodo, quiero agradecer y dedicar este trabajo a mi abuela, aunque desgraciadamente nunca llegue a leer esto, siempre me ha apoyado y ayudado en todo cuando lo he necesitado. Sin ella, es posible que nunca hubiese llegado hasta aquí.

Oliver Navío Velázquez
La Laguna, 5 de marzo de 2024

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de este trabajo es el estudio, por un lado del Teorema de Radon-Nikodym junto a algunas de sus aplicaciones y por el otro del Teorema de Diferenciación de Lebesgue.

Palabras clave: *Medida, Teorema de Radon-Nikodym, Función maximal de Hardy-Littlewood, Teorema de diferenciación de Lebesgue, Dualidad, Esperanza Condicional*

Abstract

The objective of this work is the study, on the one hand, of the Radon-Nikodym Theorem together with some of its applications and on the other hand of the Lebesgue Differentiation Theorem.

Keywords: *Measure, Radon-Nikodym Theorem, Hardy-Littlewood maximal function, Lebesgue differentiation Theorem, Duality, Conditional expectation*

Contenido

Introducción

Dada cualquier función medible no negativa podemos definir una medida ν de la siguiente manera:

$$\nu(E) = \int_E f \ d\mu.$$

Además, esta medida obtenida es absolutamente continua respecto de la medida μ; es decir, dado un conjunto medible E con $\mu(E) = 0$, necesariamente se cumplirá que $\nu(E) = 0$.
Existe un poderoso resultado conocido como el Teorema de Radon-Nikodym, que nos permite darle la vuelta a lo dicho anteriormente: Dada una medida σ-finita ν absolutamente continua respecto de una segunda medida positiva σ-finita μ, entonces existe una única función f medible de manera que

$$\nu(E) = \int_E f \ d\mu.$$

La importancia de este resultado se ve reflejado en la variedad de aplicaciones que tiene. En este documento mostraremos algunas de ellas como pueden ser la dualidad de los espacios L^p, la existencia (y unicidad) de la esperanza condicional y la unicidad de la medida de Lebesgue.

Por otro lado, una consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo es que, dada una función continua f,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(t) \ dt = f(x)$$

El Teorema de diferenciación de Lebesgue es considerado como una generalización n-dimensional de este resultado para funciones localmente integrables afirmando que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(t) \ d\mu_n(t) = f(x) \text{ en casi todo punto.}$$

La elaboración de esta memoria la hemos realizado basándonos en el capítulo XII de Brito [2] y el capítulo 3 de Folland [1]. La segunda prueba del Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym debida a Von Neumann la hemos consultado en Li Tao [3].
Este estudio conecta principalmente con la asignatura “Medida e Integración”, una asignatura obligatoria de tercer curso del Grado de Matemáticas, donde se introduce y desarrolla la teoría de la medida y la integral de Lebesgue y en menor medida con la asignatura optativa de Análisis Funcional donde se introducen los espacios de Hilbert.

1

Medidas con signo

1.1. Introducción

Sea X un conjunto arbitrario no vacío y $\mathcal{M}$ una σ-álgebra sobre X, es decir, una familia de subconjuntos de X de manera que:
(a) $X \in \mathcal{M}$
(b) $X \setminus E \in \mathcal{M}$, para cualquier E en $\mathcal{M}$
(c) $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{M}$ para cualquier colección numerable $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $E_n \in \mathcal{M}$.
Observamos que como consecuencia de (b) y (c), la intersección numerable de elementos de $\mathcal{M}$ también pertenece a $\mathcal{M}$.
A los elementos de $\mathcal{M}$ se les llama conjuntos medibles y al par $(X, \mathcal{M})$ espacio medible.

Definición 1.1. *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una medida positiva es una función no-negativa $\mu\colon \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty]$, que cumple que:*
(1) $\mu(\varnothing) = 0$
(2) es numerablemente aditiva, es decir,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

para toda sucesión disjunta $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{M}$.

A partir de dos medidas μ_1 y μ_2 podemos formar una nueva medida μ_3 definida como

$$\mu_3(E) = a\mu_1(E) + b\mu_2(E), \forall E \in M$$

con $a, b \geq 0$.

Pero, ¿qué ocurre si, por ejemplo, $a = 1$ y $b = -1$? μ_3 podría tomar valores negativos si $\mu_1(E) < \mu_2(E)$ para algún E $\in$ M. Esta idea de permitir que una medida pueda tomar valores negativos da lugar a la siguiente sección.

1.2. Medidas con signo

Definición 1.2. *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una función*

$$\nu\colon \mathcal{M} \longrightarrow [-\infty, +\infty],$$

es una medida con signo si cumple que:
(a) ν puede tomar el valor $-\infty$ o el $+\infty$ pero no ambos.
(b) $\nu(\varnothing) = 0$.
(c) ν es numerablemente aditiva.

Cabe destacar que, la propiedad (a) permite evitar indeterminaciones y, por tanto, garantizar que la medida de la unión de cualquier par de conjuntos medibles y disjuntos esté bien definida. En efecto, si no tuviéramos en cuenta la propiedad (a) podrían existir dos conjuntos A y B, tales que $\nu(A) = +\infty$ y $\nu(B) = -\infty$. Esto haría que $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B) = +\infty - \infty$, operación que no está definida.
Nosotros, salvo que se diga lo contrario, asumiremos que cualquier medida con signo ν satisface que $-\infty < \nu(E) \leq +\infty$, $\forall E \in \mathcal{M}$.

La condición (c) de la definición nos dice que para cualquier sucesión disjunta $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathcal{M}$ se cumple que $\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \in (-\infty, +\infty]$, lo cual implica que:

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \in \mathbb{R} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.3. *Sea ν una medida con signo sobre $(X, \mathcal{M})$. Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta de conjuntos medibles, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \in \mathbb{R} \iff \sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| < +\infty$$

Demostración.
Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión disjunta de conjuntos medibles.

($\Rightarrow$) Supongamos que $\Sigma_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \in \mathbb{R}$. Sea $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $F_n = E_{\pi(n)}$ para todo $n \geq 1$, donde π es una permutación de $\mathbb{N}$. Por tanto, $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta en M y $\cup_{n=1}^{\infty} F = \cup_{n=1}^{\infty} En$. Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

Por consiguiente, la serie $\Sigma_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ es incondicionalmente convergente. Aplicando el Lema A.1 obtenemos que $\Sigma_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| < +\infty$.

($\Leftarrow$) Sabemos, por el Lema A.2, que toda serie absolutamente convergente es convergente. Por tanto, como $\Sigma_{n=1}^{\infty}|\nu(E_n)| < +\infty$ por hipótesis, entonces $\Sigma_{n=1}^{\infty}\nu(E_n) = \nu(\cup_{n=1}^{\infty}E_n) \in \mathbb{R}$

$\square$

Las medidas positivas cumplen una propiedad bastante útil e intuitiva: la monotonía. Es decir, sean μ una medida positiva sobre un espacio de medida $(X,\mathcal{M})$ y A_1,A_2 conjuntos medibles tal que $A_1 \subseteq A_2$. Entonces, $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. Sin embargo, las medidas con signo no cumplen, en general, dicha propiedad. Por ejemplo, sea $f(x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$ y consideremos la medida con signo

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu,$$

donde μ es la medida de Lebesgue restringida a los subconjuntos medibles de $[-1, 1]$. Tomando $E_1 = [-1, 1]$ y $E_2 = [0, 1]$, observamos que $E_2 \subseteq E_1$ pero,

$$\nu(E_2) = \int_{E_2} x \, d\mu = 1 > 0 = \int_{E_1} x \, d\mu = \nu(E_1).$$

Afortunadamente, aún con la ausencia de la monotonía, las medidas con signo cumplen algunas relaciones muy útiles para trabajar con ellas y entender su comportamiento.

Lema 1.4. *Sea ν una medida con signo sobre $(X, \mathcal{M})$. Sean $E, F \in \mathcal{M}$ tal que $E \subseteq F$. Entonces:*
(a) Si $\nu(F) \in \mathbb{R} \implies \nu(E) \in \mathbb{R}$
(b) Si $\nu(E) = +\infty \implies \nu(F) = +\infty$

Demostración.

(a) Sabemos que, por la aditividad de ν, podemos escribir que $\nu(F) = \nu(E) + \nu(F \setminus E)$, luego, si $\nu(F)$ es finito, en particular, $\nu(E)$ también lo es.

(b) Si $\nu(E) = +\infty$, entonces $\nu(F) \notin \mathbb{R}$ pues, por (a), tendríamos que $\nu(E) \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\nu(F) \in \{-\infty, +\infty\}$ pero, como dijimos previamente, estamos asumiendo que ν no puede tomar el valor $-\infty$, luego, $\nu(F) = +\infty$

$\square$

Algo que mantienen las medidas con signo es la continuidad, como vamos a ver en el siguiente resultado.

Teorema 1.5. *Sea ν una medida con signo sobre un espacio de medida $(X,\mathcal{M})$.*
(a) Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente en $\mathcal{M}$, entonces

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$$

(b) Si $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente en $\mathcal{M}$ con $\nu(E_1) < +\infty$, entonces

$$\nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$$

Demostración.
(a) Sea $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos medibles, por lo que $\lim_{n\to\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Si $\nu(E_{n_0}) = +\infty$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces, como $E_{n_0} \subseteq E_m \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ para todo $m \geq n_0$, se sigue del Lema 1.4 que $\nu(E_m) = +\infty = \nu(\cup_{n=1}^{\infty}(E_n))$. Luego, $\nu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = +\infty$.

Si $\nu(E_n) \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 1$, entonces al ser la sucesión creciente, podemos escribir que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup ... \cup (E_{n+1} \setminus E_n) \cup ...$$

lo cual es una unión numerable y disjunta de conjuntos medibles. Como ν es numerablemente aditiva, entonces

$$\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \nu(E_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_{n+1} \setminus E_n) = \nu(E_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\nu(E_{k+1}) - \nu(E_k)) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_{n+1})$$

(b) Tenemos por hipótesis que, $\nu(E_1) < +\infty$ por consiguiente,el Lema 1.4 nos asegura, como $E_n \subseteq E_1, \forall n \geq 1$, que $\nu(E_n) < +\infty$ para todo $n \geq 1$. Sea $F = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$ y pongamos $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$ para $n = 1, 2, ...$ Observamos que los conjuntos F_n son medibles y disjuntos dos a dos. Además, $E_1 \setminus F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ por lo que se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\nu(E_1) - \nu(F) &= \nu(E_1 \setminus F) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\nu(E_k) - \nu(E_{k+1})) \\
&= \nu(E_1) - \lim_{n\to\infty} \nu(E_{m+1})
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\nu(E_1) < +\infty$ obtenemos que $\nu(\cap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} \nu(E_n)$

□

A continuación, vamos a introducir un tipo muy particular de conjunto.

Definición 1.6. *Sea ν una medida con signo definida sobre un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Un conjunto medible $A \subseteq X$ se dice que es positivo (respectivamente, negativo) si $\nu(E) \geq 0$ (respectivamente, $\nu(E) \leq 0$) para todo subconjunto medible $E \subseteq A$.*

Denotemos por $\mathcal{P}\mathrm{o}(X)$ a la familia de todos los subconjuntos positivos de X. Veamos ahora algunas propiedades de los conjuntos positivos.

Lema 1.7. *Sea ν una medida con signo sobre un espacio medible $(X, \mathcal{M})$.*
(a) Todo subconjunto medible de un conjunto positivo es un conjunto positivo.
(b) La unión numerable de conjuntos positivos es un conjunto positivo.

Demostración.
(a) Sea A un conjunto medible positivo arbitrario y sea E un subconjunto medible de A. Veamos que E es un conjunto positivo.
Sea $F \subseteq E$ medible. En particular, como $E \subseteq A$, entonces $F \subseteq A$. Y como A es positivo, entonces $\nu(F) \geq 0$.

(b) Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos medibles positivos. Probemos que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto positivo.
En primer lugar, sabemos que la unión numerable de conjuntos medibles es un conjunto medible, luego $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto medible. Sea ahora E un subconjunto medible de $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$. Sea $E_1 = E \cap A_1$ y para $n \geq 2$ definamos

$$E_n = E \cap (A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)$$

Observamos que E_n es un subconjunto medible de A_n para todo $n \geq 1$, luego $\nu(E_n) \geq 0$ pues A_n es un conjunto positivo por hipótesis. Además, la colección que hemos contruido $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión disjunta tal que $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Por tanto, por la numerabilidad aditiva de nuestra medida, se tiene que

$$\nu(E) = \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) \geq 0$$

Luego, todo subconjunto medible de $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ tiene medida positiva.

□

1.3. Teorema de Descomposición de Hahn

A continuación, los dos resultados siguientes nos serán muy útiles para poder probar el Teorema de Descomposición de Hahn.

Lema 1.8. *Sea ν una medida con signo sobre un espacio medible $(X, \mathcal{M})$, entonces existe un $B \in \mathcal{P}o(X)$ tal que $\nu(B) = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{P}o(X)\}$*

Demostración.
Sea $\mathcal{S} = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{P}o(X)\}$. Por definición de supremo, podemos obtener una sucesión de conjuntos medibles positivos $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \mathcal{S}.$$

Observamos que podemos elegir nuestra sucesión creciente pues, de no serlo, podríamos definir una sucesión $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ donde, para cada $n \geq 1$, $B_n = A_1 \cup ... \cup A_n$ y cumple que es creciente y que $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.
Del Lema 1.7 (b) sabemos que $B = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto medible positivo. Por tanto, de la continuidad de nuestra medida ν, véase Teorema 1.6(a), se tiene que

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \mathcal{S}$$

□

Lema 1.9. *Sea ν una medida con signo sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{M})$. Si E es un conjunto medible tal que $0 < \nu(E) < +\infty$, entonces existe un conjunto medible positivo $A \subseteq E$ con $\nu(A) > 0$.*

Demostración.
Si E es un conjunto medible positivo ya hemos terminado. Supongamos que E no es un conjunto positivo, es decir, existe al menos un conjunto $A \subseteq E$ tal que $\nu(A) < 0$. Sabiendo que la sucesión $(-1/n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, podemos definir

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} : \exists A \subseteq E,\ \nu(A) < -1/n\}.$$

Por tanto, elegimos $E_1 \subseteq E$ tal que

$$\nu(E_1) < -\frac{1}{n_1}$$

Gracias a la aditividad de ν, sabemos que

$$\nu(E \setminus E_1) = \nu(E) - \nu(E_1) > \nu(E) > 0.$$

Si $E \setminus E_1$ es positivo, hemos acabado. En otro caso, $E \setminus E_1$ contiene algún conjunto medible B con $\nu(B) < 0$. Al igual que antes, definimos ahora

$$n_2 = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : \exists B \subseteq E \setminus E_1, \nu(B) < -1/n\}.$$

Entonces, elegimos ahora un $E_2 \subset E \setminus E_1$ *tal que*

$$\nu(E_2) < \frac{-1}{n_2}$$

Si $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ *es un conjunto positivo, hemos terminado. Si no, repetimos este procedimiento hasta que obtengamos un conjunto positivo. Si esto último no ocurre, obtendríamos una sucesión de conjuntos medibles* $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *tal que para cada* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$E_k \subseteq E \setminus \bigcup_{n=1}^{k-1} E_n, \qquad \nu(E_k) < \frac{-1}{n_k}.$$

Definimos

$$\Lambda = E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

Veamos que Λ *es un conjunto positivo. Para ello, nótese que* $E = \Lambda \cup (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$ *es un unión disjunta y, por tanto, por la aditividad de* ν*, podemos escribir*

$$\nu(E) = \nu(\Lambda) + \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n))$$

Además, como $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq E$*,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\nu(E_n)| = |\nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)| \leq |\nu(E)| < +\infty.$$

Luego, $\Sigma_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$ *converge absolutamente, en particular, converge, por tanto,*

$$\nu(E) = \nu(\Lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$$

Algo importante que destacar es que, como $|\nu(E_k)| = -\nu(E_k) \geq -1/n_k$*, entonces* $\Sigma_{k=1}^{\infty} 1/n_k \leq \Sigma_{k=1}^{\infty} |\nu(E_k)|$ *converge. Lo que significa que* $1/n_k \to 0$ *cuando* $k \to \infty$ *y, por consiguiente,*

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty \tag{1.1}$$

Finalmente, supongamos, por reducción al absurdo, que Λ *contiene algún subconjunto* B *tal que* $\nu(B) < 0$*. Utilizando (1.1), escogemos un* n_k *de manera que*

$$B \subseteq \Lambda \subseteq E \setminus \bigcup_{n=1}^{k-1} E_n \quad y \quad \nu(B) < -\frac{1}{n_k - 1}$$

Sin embargo, esto no tiene sentido pues, por construcción, n_k es el menor número natural tal que exista algún subconjunto medible $C \subseteq E \setminus \cup_{n=1}^{k-1} E_n$ de manera que $\nu(C) < -1/n_k$. Esto nos dice entonces, que $\Lambda \subseteq E$ es un conjunto medible positivo.

□

Teorema 1.10 (Descomposición de Hahn). *Sea ν una medida de signo sobre un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Entonces existe un conjunto positivo A y un conjunto negativo B tales que*

$$X = A \cup B \quad y \quad A \cap B = \varnothing$$

Demostración.
Para esta demostración supondremos que nuestra medida ν no puede tomar el valor $+\infty$. Si fuera así, simplemente tomaríamos la medida $-\nu$. Sea

$$\mathcal{S} = \sup\{\nu(E) : E \in \mathcal{P}o(X)\}.$$

Sabemos por el Lema 1.8 que existe un un conjunto positivo A que alcanza este supremo, es decir, $\nu(A) = \mathcal{S}$. Al estar asumiendo que el rango de nuestra medida ν es $[-\infty, +\infty)$, se tiene que $\mathcal{S} < +\infty$. Definimos el conjunto $B = X \setminus A$. Observamos que, trivialmente, $X = A \cup B$ y que $A \cap B = \varnothing$. Solo nos queda probar que B es un conjunto medible negativo. Supongamos que no lo es, es decir, existe un conjunto medible $E \subseteq B$ tal que $\nu(E) > 0$. Como $\nu(E) < +\infty$, invocando el Lema 1.9, sabemos de la existencia de un conjunto medible positivo $C \subset E$ con $\nu(C) > 0$. Sin embargo, al ser C y A conjuntos disjuntos entre sí y, $A \cup C$ es positivo, entonces

$$\mathcal{S} \geq \nu(A \cup C) = \nu(A) + \nu(C) = \mathcal{S} + \nu(C) > \mathcal{S}$$

Lo cual es un absurdo. Por tanto, B es un conjunto negativo. □

Algo destacable es que la descomposición probada en el teorema anterior no es única. Por ejemplo, si tuviésemos que $X = A \cup B$ entonces, tomando cualquier conjunto de medida nula N, tendríamos que $X = (A \cup N) \cup (B \setminus N)$, lo que sería otra descomposición distinta.
Al par de conjuntos (A, B) que cumplen que $X = A \cup B$ y $A \cap B = \varnothing$, siendo A un conjunto medible positivo y B un conjunto medible negativo, lo llamaremos una descomposición de Hahn sobre X asociada a la medida con la que estemos trabajando.

1.4. Teorema de Descomposición de Jordan

Definición 1.11. *Sea ν una medida con signo sobre un espacio medible $(X, \mathcal{M})$ y sea (A, B) una descomposición de Hahn sobre X asociada a ν. Definimos las siguientes funciones sobre $\mathcal{M}$:*

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap B), \quad |\nu|(E) = \nu^+(E) + \nu^-(E), \ \forall E \in \mathcal{M}.$$

Las funciones definidas son llamadas, respectivamente, la variación positiva, la variación negativa y la variación absoluta de ν.

Para el siguiente resultado debemos introducir un nuevo concepto.

Definición 1.12. *Sean ν, μ dos medidas con signo sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{M})$. Diremos que estas dos medidas son mutuamente singulares si existen conjuntos medibles y disjuntos E y F de manera que*

$$X = E \cup F \qquad \nu(E) = \mu(F) = 0$$

Esto lo denotaremos como $\nu \perp \mu$.

Teorema 1.13 (Descomposición de Jordan). *Si ν es una medida con signo definida sobre un espacio de medida $(X, \mathcal{M})$, entonces existen medidas positivas ν^+ y ν^- únicas tales que*

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \qquad y \qquad \nu^+ \perp \nu^-$$

Demostración.
Sea (A, B) una descomposición de Hahn sobre X asociada a ν. Definimos

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) \qquad \nu^-(E) = -\nu(E \cap B).$$

Claramente son dos medidas positivas que cumplen que $\nu = \nu^+ - \nu^-$ y que $\nu^+ \perp \nu^-$.
Sea $\nu = \mu^+ - \mu^-$ otra descomposición de ν con $\mu^+ \perp \mu^-$. Sean $F, G \in \mathcal{M}$ tal que $F \cup G = X$, $F \cap G = \varnothing$ y que $\mu^+(F) = \mu^-(G) = 0$. Veamos que (G, F) es una descomposición de Hahn sobre X asociada a ν. Sea $E \subseteq G$ un subconjunto medible, entonces $\mu^-(E) \leq \mu^-(G) = 0$, por tanto

$$\nu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E) = \mu^+(E) \geq 0.$$

Por lo que G es un conjunto medible positivo. De manera análoga se prueba que F es un conjunto medible negativo.

Es necesario que probemos ahora que, si tenemos dos descomposiciones de Hahn (A, B), (C, D) asociadas a una medida ν entonces $\nu(E \cap A) = \nu(E \cap C)$ y $\nu(E \cap B) = \nu(E \cap D)$ para cualquier $E \in \mathcal{M}$. En efecto, como $A \setminus C$ es un subconjunto medible tanto de A como de D, se tiene que $E \cap (A \setminus C)$ también lo es y, en consecuencia, al ser un conjunto positivo y negativo a la vez, $\nu(E \cap (A \setminus C)) = 0$. De la misma manera se tiene que $\nu(E \cap (C \setminus A)) = 0$. Por consiguiente, se tiene que

$$\nu(E \cap (A \cup C)) = \nu((E \cap A) \cup (E \cap (C \setminus A))) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap (C \setminus A)) = \nu(E \cap A)$$

De manera análoga, $\nu(E \cap (A \cup C)) = \nu(E \cap C)$. Con un argumento enteramente similar, obtenemos que $\nu(E \cap B) = \nu(E \cap D)$.

Por tanto sabiendo que (A, B) y (G, F) son dos descomposiciones de Hahn sobre X asociadas a ν se tiene que, para cada $E \in \mathcal{M}$

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \nu(E \cap G) = \mu^+(E \cap G) - \mu^-(E \cap G) = \mu^+(E \cap A) = \mu^+(E).$$

De la misma manera, podemos obtener que $\nu^-(E) = \mu^-(E)$.
Por tanto, $\nu^+ = \mu^+$ y $\nu^- = \mu^-$.

$\square$

Ejemplo

Sea f una función tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f| d\mu < +\infty$. Si definimos $\nu_f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ por

$$\nu_f(E) = \int_E f d\mu, \forall E \in \mathcal{M}$$

entonces

$$\nu_f^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \nu_f^-(E) = \int_E f^- d\mu, \quad |\nu_f|(E) = \int_E |f| d\mu$$

para todo subconjunto medible E.

Es importante destacar que muchas propiedades que cumple una medida con signo ν las hereda $|\nu|$ y viceversa. Veamos alguna de estas propiedades.

Proposición 1.14. *Sea $N \in \mathcal{M}$. Entonces $\nu(N) = 0$ si, y solo si, $|\nu|(N) = 0$*

Demostración.
Sea (A, B) una descomposición de Hahn sobre X asociada a ν. Sabemos que

$$|\nu|(N) = \nu^+(N) + \nu^-(N) = \nu(N \cap A) - \nu(N \cap B).$$

Podemos observar que tanto $N \cap A$ como $N \cap B$ son subconjuntos medibles de N. Por tanto se tiene que si $\nu(N) = 0$ entonces, $\nu(N \cap A) = \nu(N \cap B) = 0$ y, por consiguiente, $|\nu|(N) = 0$.
Por otro lado, de las igualdades antes escritas, se puede observar que $\nu^+(N) \leq |\nu|(N)$ y que $\nu^-(N) \leq |\nu|(N)$. Por lo que, si $|\nu|(N) = 0$ entonces,

$$\nu(N) = \nu^+(N) - \nu^-(N) = 0$$

□

Proposición 1.15. *Sea ν una medida con signo sobre $(X, \mathcal{M})$ y (A, B) una descomposición de Hahn sobre X asociada a ν. Entonces, para todo $E \in \mathcal{M}$,*

$$\nu(E) = \int_E (\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B) d|\nu|$$

donde $\mathcal{X}_I$ es la función característica de I

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\int_E (\mathcal{X}_A - \mathcal{X}_B) d|\nu| = \int_X \mathcal{X}_{E\cap A} d|\nu| - \int_X \mathcal{X}_{E\cap B} d|\nu| \\
&= |\nu|(E \cap A) - |\nu|(E \cap B) \\
&= (\nu^+(E \cap A) + \nu^-(E \cap A)) - (\nu^+(E \cap B) + \nu^-(E \cap B)) \\
&= \nu(E \cap A) - \nu(E \cap A \cap B) - \nu(E \cap B \cap A) + \nu(E \cap B) \\
&= \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B) = \nu(E)
\end{aligned}$$

□

2

El Teorema de Radon-Nikodym

2.1. Introducción

Para comenzar esta sección vamos a definir el concepto de medida absolutamente continua.

Definición 2.1. *Sean una medida λ y una medida positiva ν definidas en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Se dice que λ es absolutamente continua con respecto a ν, y lo denotamos $\lambda \ll \nu$, si para cada conjunto E en $(\mathcal{M})$ tal que $\nu(E) = 0$, se cumple que $\lambda(E) = 0$.*

Lema 2.2. *Son equivalentes:*
(1) $\lambda \ll \nu$
(2) $\lambda^+ \ll \nu$ y $\lambda^- \ll \nu$.
(3) $|\lambda| \ll \nu$

Demostración.
(1) $\implies$ (2)
Sea (A, B) una descomposición de Hahn respecto de la medida λ y sea E un conjunto medible tal que $\nu(E) = 0$.
Se tiene que

$$0 = \nu(E) \geq \nu(A \cap E) \geq 0$$

Luego, concluimos que $\nu(A \cap E) = 0$. De manera análoga, $\nu(B \cap E) = 0$. Además, como sabemos que $\lambda \ll \nu$ por hipótesis, se tiene que $\lambda(A \cap E) = 0$ y que $\lambda(B \cap E) = 0$ Es decir, $\lambda^+(E) = 0$ y $\lambda^-(E) = 0$ que era lo que queríamos ver.

(2) $\implies$ (3)
Sea E un conjunto medible tal que $\nu(E) = 0$. Luego, tenemos que

$$\lambda^+(E) = 0, \qquad \lambda^-(E) = 0.$$

Por consiguiente, $|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E) = 0$.

(3) $\Longrightarrow$ (1)
Sea E un conjunto medible tal que $\nu(E) = 0$. Por tanto, se tiene que $0 = |\lambda|(E) \geq |\lambda(E)| \geq 0$, luego $\lambda(E) = 0$.

$\square$

Lema 2.3. *Sean ν, λ dos medidas positivas finitas definidas sobre $(X, \mathcal{M})$. Entonces, ocurre una, y solo una, de las dos afirmaciones siguientes:*
a) $\lambda \perp \nu$
b) Existe un $\varepsilon > 0$ y un conjunto $E_\varepsilon \in \mathcal{M}$ tal que $\nu(E_\varepsilon) > 0$ y, además, E_ε es un conjunto positivo respecto de la medida $\lambda - \varepsilon \cdot \nu$.

Demostración.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la medida con signo $\mu_n = \lambda - \dfrac{1}{n} \cdot \nu$ y sea (A_n, B_n) una descomposición de Hahn sobre X asociada a μ_n.
Definimos los siguientes dos conjuntos:

$$A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n; \qquad B_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Por definición, $B_0 \subseteq B_n$, para cualquier $n \geq 1$. Además, cada B_n es un conjunto negativo respecto de la medida μ_n, por tanto, se tiene que:

$$\lambda(B_0) - \frac{1}{n} \cdot \nu(B_0) = \mu_n(B_0) \leq 0 \implies 0 \leq \lambda(B_0) \leq \frac{1}{n} \cdot \nu(B_0), \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Concluimos que $\lambda(B_0) = 0$.
Ahora existen dos opciones:
a) Si $\nu(A_0) = 0$, entonces $\lambda \perp \nu$.
b) Si $\nu(A_0) > 0$, por la propia subaditividad de ν, se tiene que

$$0 < \nu(A_0) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$$

y, por tanto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\nu(A_{n_0}) > 0$. Al ser A_0 un conjunto medible positivo respecto de μ_{n_0}, tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{n_0}$ y $E_\varepsilon = A_{n_0}$ terminamos la prueba.

$\square$

2.2. Teorema de Radon-Nikodym

Teorema 2.4 (Radon-Nikodyn). *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y ν una medida positiva σ-finita. Si λ es una medida real σ-finita definida sobre $(X, \mathcal{M})$ tal que $\lambda \ll \nu$, entonces existe una única función f medible tal que para todo conjunto $E \in \mathcal{M}$*

$$\lambda(E) = \int_E f \; d\nu,$$

.

Demostración.

Vamos a dividir esta demostración en tres casos distintos: en primer lugar probaremos el teorema para ν, λ medidas finitas y positivas. Continuaremos con un segundo caso donde asumiremos que ν, λ son medidas positivas y σ-finitas. Por último, demostraremos el caso general enunciado inicialmente.

Primer caso:* ν, λ *medidas finitas y positivas

Definamos el siguiente subconjunto de $L^1(X, \mathcal{M}, \nu)$:

$$\mathcal{F}_\lambda = \left\{ f \in L^1(X, \mathcal{M}, \nu) : f \geq 0 \;\; y \quad \int_E f \; d\nu \leq \lambda(E) \quad \forall E \in \mathcal{M} \right\}$$

Cabe destacar que $\mathcal{F}_\lambda$ es no vacío pues la función 0 pertenece al conjunto.

Además, si $f, g \in \mathcal{F}_\lambda$, entonces la función $h = \max\{f, g\}$ también pertenece. En efecto, tomemos el conjunto $A = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$. Dado un conjunto medible arbitrario E, se tiene que:

$$\int_E h \; d\nu = \int_{E\cap A} h \; d\nu + \int_{E\setminus A} h \; d\nu = \int_{E\cap A} f \; d\nu + \int_{E\setminus A} g \; d\nu \leq \lambda(E \cap A) + \lambda(E \setminus A) = \lambda(E)$$

Por tanto, $h \in \mathcal{F}_\lambda$.

Sea ahora

$$\alpha = \sup\left\{ \int_E f \; d\nu : f \in \mathcal{F}_\lambda \right\}.$$

Obsérvese que $0 \leq \alpha \leq \lambda(X) < +\infty$. Veamos que este supremo se alcanza, es decir, que existe una función f en $\mathcal{F}_\lambda$ tal que $\displaystyle\int_X f \; d\nu = \alpha$. Para esto, utilizando la definición de supremo, obtengamos una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F}_\lambda$ tal que

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \; d\nu$$

para cada $E \in \mathcal{M}$.

Por lo visto anteriormente, puede probarse por un proceso inductivo que la función $h_n = \max\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ *pertenece a* $\mathcal{F}_\lambda$ *para cada* $n \geq 1$. *Obsérvese que la sucesión* $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión creciente que converge puntualmente a una función* f *cuya imagen esta contenida en* $\overline{\mathbb{R}}$. *Veamos que la función* f *pertenece a* $\mathcal{F}_\lambda$.

En efecto, por el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema A.8), tenemos que

$$\int_E f \; d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_E h_n \; d\nu \leq \lambda(E).$$

Por tanto, $f \in \mathcal{F}_\lambda$. *Además, como se cumple*

$$\int_X f_n \; d\nu \leq \int_X h_n \; d\nu \leq \int_X f \; d\nu$$

resulta que

$$\int_X f \; d\nu \leq \alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\nu \leq \int_X f \; d\nu.$$

Y, por tanto, $\displaystyle\int_X f \; d\nu = \alpha$.

Veamos que f *es la función que buscamos. Sea* $\mu : \mathcal{M} \longrightarrow [0, +\infty)$ *la medida definida por*

$$\mu(E) = \lambda(E) - \int_E f \; d\nu, \quad E \in \mathcal{M}$$

Observemos que μ *es una medida positiva y finita pues* $\displaystyle\int_E f \; d\nu \leq \lambda(E) < +\infty$ *para todo conjunto medible* E *por ser* f *un elemento de* $\mathcal{F}_\lambda$.

Supongamos, para llegar a una contradicción, que μ *y* ν *no son mutualmente singulares. Entonces por el Lema A.10, sabemos que existe un* $\varepsilon > 0$ *y un conjunto medible* E_ε *con* $\nu(E_\varepsilon) > 0$. *Además,* E_ε *es un conjunto positivo respecto la medida* $\mu - \varepsilon \cdot \nu$. *Por tnato dado* $E \in \mathcal{M}$, *se tiene que*

$$\lambda(E) - \int_E f \; d\nu = \mu(E) \geq \mu(E \cap E_\varepsilon) \geq \varepsilon \cdot \nu(E \cap E_\varepsilon) = \int_E \varepsilon \cdot \mathcal{X}_{E_\varepsilon} \; d\nu$$

lo que implica que

$$\int_E (f + \varepsilon \cdot \mathcal{X}_{E_\varepsilon}) \; d\nu \leq \lambda(E)$$

y, por tanto, $f + \varepsilon \cdot \mathcal{X}_{E_\varepsilon} \in \mathcal{F}_\lambda$. *Pero esto último no puede ocurrir pues,*

$$\int_X (f + \varepsilon \cdot \mathcal{X}_{E_\varepsilon}) \; d\nu = \alpha + \varepsilon \cdot \nu(E_\varepsilon) > \alpha.$$

Concluyendo que $\mu \perp \nu$. *Sean entonces dos conjuntos medibles disjuntos* P, Q *que cumplen que*

$$X = P \cup Q, \qquad \mu(P) = \nu(Q) = 0.$$

Recordemos que $\lambda \ll \nu$, *por lo que, como* $\nu(Q) = 0$, *entonces* $\lambda(Q) = 0$. *De aquí se tiene que*

$$\mu(Q) = \lambda(Q) - \int_Q f \; d\nu = 0$$

por consiguiente, $\mu(X) = \mu(P) + \mu(Q) = 0$. *Por tanto,* $\lambda(E) = \displaystyle\int_E f \; d\nu$.

Nos queda demostrar la unicidad de esta función f. *Sea* g *otra función medible tal que* $\lambda(E) = \displaystyle\int_E g \; d\nu$ *para cualquier conjunto medible* E. *Entonces,*

$$\int_X (f - g) \; d\nu = 0$$

luego, aplicando el Lema A.10, $f = g$ *en casi todo punto con respecto a* ν.

Segundo caso: ν, λ ***son medidas positivas y*** σ***-finitas***

Ahora trabajaremos asumiendo que λ *y* ν *son medidas positivas y* σ*-finitas, es decir, existen dos sucesiones de conjuntos medibles disjuntos dos a dos* $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ *tales que*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \qquad \nu(E_n), \lambda(F_n) < +\infty, \text{ para todo } \; n \geq 1.$$

Definimos ahora, para cada $n, m \in \mathbb{N}$, *el conjunto* $G_{m,n} = E_m \cap F_n$. *Luego*

$$E_m = E_m \cap X = E_m \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_m \cap F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{m,n}$$

y por tanto

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_{m,n} \right) = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} G_{m,n}.$$

Además, podemos observar que $G_{m,n} \cap G_{i,j} = \varnothing$ *para todo* $m \neq i$ *o* $n \neq j$. *Luego,* $\mathcal{G} = \{G_{m,n} : m, n \in \mathbb{N}\}$ *es una partición de conjuntos medibles de* X. *Sea* $(G_k)_{k=1}^{\infty}$ *una enumeración de* $\mathcal{G}$. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$, *definimos las medidas* $\nu_k, \lambda_k : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ *donde*

$$\nu_k(E) = \nu(E \cap G_k), \qquad \lambda_k(E) = \lambda(E \cap G_k).$$

Obsérvese que $\nu_k(X) = \nu(G_k) < +\infty$, $\lambda_k(X) = \lambda(G_k) < +\infty$, *es decir, para cada* $k \geq 1$, ν_k *y* λ_k *son medidas finitas.*

Veamos que, además, para todo $k \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $\lambda_k \ll \nu_k$. *Sea un* $k \in \mathbb{N}$ *y un conjunto medible* E *tal que* $\nu_k(E) = 0$. *Tenemos entonces que,* $\nu(E \cap G_k) = 0$, *usando que* $\lambda \ll \nu$, *podemos decir que* $\lambda(E \cap G_k) = \lambda_k(E) = 0$. *Luego,* $\lambda_k \ll \nu_k$.

Aplicando lo demostrado en el primer caso de esta demostración, sabemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, *existe una única función medible* f_k *cumpliendo que*

$$\lambda_k(E) = \int_E f_k \, d\nu_k$$

para todo conjunto medible $E \in \mathcal{M}$. *Nótese que, para cada* $k \geq 1$, $\nu_k(X \setminus G_k) = \nu(\varnothing) = 0$. *Por tanto,*

$$\lambda_k(X \setminus G_k) = \int_{X \setminus G_k} f_k \, d\nu_k = 0$$

Se sigue por el Lema A.10 que $f_k(x) = 0$ *para casi todo* $x \in X \setminus G_k$. *Sin pérdida de generalidad, supondremos que* $f_k(x) = 0$ *para todo* $x \in X \setminus G_k$. *Puesto que* $(G_k)_{k=1}^{\infty}$ *es un recubrimiento de* X, *para cualquier* $x \in X$, *existe un único* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $x \in G_k$. *Definimos pues, la siguiente función:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_m(x)$$

Por consiguiente, aplicando el Teorema A.8 de nuevo y la propia definición de las medidas λ_k, *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\int_E f \, d\nu &= \int_{\bigcup_{k=1}^{\infty}(E \cap G_k)} f \, d\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E \cap G_k} f \, d\nu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\nu_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(E \cap G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E \cap G_k) \\
&= \lambda(E)
\end{aligned}$$

La prueba de la unicidad es análoga a la del caso finito.

Caso general:

En esta última parte demostraremos el caso general enunciado en el teorema.

Sea $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ *la descomposición de Jordan de nuestra medida real* λ. *Al ser* $\lambda \ll \nu$ *entonces,* $\lambda^+ \ll \nu$ *y* $\lambda^- \ll \nu$. *Además, tanto* λ^+ *como* λ^- *son medidas* *positivas. Por la segunda parte de esta demostración, sabemos que existen dos funciones no negativas f_1, f_2 únicas tales que*

$$\lambda^+(E) = \int_E f_1 \, d\nu \qquad y \qquad \lambda^-(E) = \int_E f_2 \, d\nu, \qquad \forall E \in \mathcal{M}$$

Definimos ahora la función $f = f_1 - f_2$, y se tiene que

$$\lambda(E) = \lambda^+(E) - \lambda^-(E) = \int_E f_1 \, d\nu - \int_E f_2 \, d\nu = \int_E f \, d\nu.$$

Que además es única por construcción.

□

La función f que se obtiene en el Teorema es lo que se denomina la derivada de Radon-Nikodym de una medida λ con respecto a otra medida ν y se suele denotar como $f = \dfrac{d\lambda}{d\nu}$.

Ejemplo

Veamos un ejemplo de como la condición de ser σ-finita es necesaria.

Consideremos el espacio medible $(\mathbb{R}, \mathcal{M})$, donde $\mathcal{M}$ es la σ-álgebra dada por $\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ o } E^c \text{ es numerable}\}$ y definamos las dos medidas siguientes:

$$\nu(E) = card(E) \qquad \text{y} \qquad \lambda(E) = \begin{cases} 0 & \text{si } E \text{ es numerable} \\ 1 & \text{si } E \text{ no es numerable} \end{cases}$$

Claramente, ν no es σ-finita pues $\mathbb{R}$ no es numerable. Además, si $\nu(E) = 0$ entonces, $\lambda(E) = 0$, es decir, $\lambda \ll \nu$.

Sin embargo, no existe ninguna función no negativa f de manera que cumpla

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\nu, \ \forall \ E \in \mathcal{M}$$

Supongamos la existencia de una función no negativa f tal que cumpla lo anterior. Obsérvese que f no puede ser la función idénticamente 0 pues

$$1 = \lambda(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} 0 \, d\nu = 0.$$

Por tanto, existe al menos un elemento $z \in \mathbb{R}$ tal que $f(z) > 0$. Tomamos el conjunto uni-puntual $\{z\}$. Se tiene pues,

$$0 = \lambda(\{z\}) = \int_{\{z\}} f \, d\nu = f(z) > 0$$

Esta contradicción muestra que la condición de ser σ-finita es necesaria para el teorema de Radon-Nikodym.

Ahora veremos algunas de las propiedades de la derivada de Radon-Nikodym.

Proposición 2.5. *Sean λ_1, λ_2 dos medidas σ-finitas absolutamente continuas respecto a una medida positiva ν σ-finita. Entonces*

$$\frac{d(\lambda_1+\lambda_2)}{d\nu} = \frac{d\lambda_1}{d\nu} + \frac{d\lambda_2}{d\nu}$$

Demostración.
Sean

$$f_1 = \frac{d\lambda_1}{d\nu}, \qquad f_2 = \frac{d\lambda_2}{d\nu}$$

luego dado un conjunto medible E,

$$(\lambda_1+\lambda_2)(E) = \lambda_1(E) + \lambda_2(E) = \int_E f_1 \; d\nu + \int_E f_2 \; d\nu = \int_E (f_1+f_2) \; d\nu$$

Por tanto, concluimos, por unicidad de la derivada de Radon-Nikodym, que

$$\frac{d(\lambda_1+\lambda_2)}{d\nu} = f_1 + f_2 = \frac{d\lambda_1}{d\nu} + \frac{d\lambda_2}{d\nu}$$

$\square$

Proposición 2.6. *Sean λ una medida σ-finita y ν, μ dos medidas positivas σ-finitas en $(X, \mathcal{M})$ tal que $\lambda \ll \nu$ y $\nu \ll \mu$.*

a) Dada $g \in L^1(\lambda)$. Entonces, $g \cdot \dfrac{d\lambda}{d\nu} \in L^1(\nu)$. En particular,
$\displaystyle\int_X g \; d\lambda = \int_X g \cdot \frac{d\lambda}{d\nu} \; d\nu.$
b) Se tiene que $\lambda \ll \mu$ y $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = \dfrac{d\lambda}{d\nu}\dfrac{d\nu}{d\mu}$ para casi todo punto con respecto a la medida μ.

Demostración.
Gracias a la descomposición de Jordan, podemos suponer, y así lo haremos, que λ es, además, una medida positiva.

a) Supongamos en primer lugar que, $g = \mathcal{X}_E$, donde E es un conjunto medible. Entonces,

$$\int_X g \; d\lambda = \int_X \mathcal{X}_E \; d\lambda = \lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\nu} \; d\nu = \int_X \mathcal{X}_E \frac{d\lambda}{d\nu} \; d\nu = \int_X g \cdot \frac{d\lambda}{d\nu} \; d\nu.$$

Por linealidad de le integral, obtenemos que también es cierto para toda función simple.

Sea g una función no negativa. Entonces, sabemos que podemos escribir g como límite de una sucesión monótona creciente de funciones simples (f_n). Se tiene por el Teorema de Convergencia Monótona (Teorema A.8) que

$$\int_X g\ d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\ d\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\cdot\frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu = \int_X g\cdot\frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu$$

Por último, si $g\in L^1(\lambda)$. Entonces, podemos escribir g como $g=g^+-g^-$. Al ser g^+ y g^- dos funciones medibles no negativas, por la linealidad de la integral tenemos que

$$\begin{aligned}\int_X g\ d\lambda &= \int_X g^+\ d\lambda - \int_X g^-\ d\lambda = \int_X g^+\cdot\frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu - \int_X g^-\cdot\frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu\\ &= \int_X (g^+-g^-)\cdot\frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu = \int_X g\cdot\frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu\end{aligned}$$

b) Sea E un conjunto medible tal que $\mu(E)=0$. Entonces, como $\nu\ll\mu$, $\nu(E)=0$ y, por consiguiente, como $\lambda\ll\nu$, $\lambda(E)=0$. Concluyendo que $\lambda\ll\mu$.

Por otro lado, utilizando el apartado a), tomando $g=\mathcal{X}_E\dfrac{d\lambda}{d\mu}$ donde E es un conjunto medible arbitrario,se tiene que

$$\lambda(E) = \int_E \frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu = \int_X \mathcal{X}_E\frac{d\lambda}{d\nu}\ d\nu = \int_X \mathcal{X}_E\frac{d\lambda}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}\ d\mu = \int_X \frac{d\lambda}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}\ d\mu$$

y, por tanto, $\dfrac{d\lambda}{d\mu} = \dfrac{d\lambda}{d\nu}\dfrac{d\nu}{d\mu}$

□

Corolario 2.7. *Si $\nu\ll\mu$ y $\mu\ll\nu$, entonces $\dfrac{d\nu}{d\mu}\dfrac{d\mu}{d\nu}=1$ en casi todo punto con respecto a ambas medidas.*

Demostración.
Esto es consecuencia inmediata del resultado anterior. En efecto, dado un conjunto medible E se tiene que

$$\int_E 1d\nu = \nu(E) = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\ d\mu = \int_E \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\nu}\ d\nu$$

y por tanto $1=\dfrac{d\nu}{d\mu}\dfrac{d\mu}{d\nu}$ para casi todo punto con respecto a ν.

Observar que análogamente lo es también con respecto a μ.

□

2.3. Teorema de Descomposición de Lebesgue

Teorema 2.8 (Descomposición de Lebesgue). *Sean λ y ν dos medidas positivas σ-finitas definidas sobre un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Entonces, existen dos medidas positivas λ_a y λ_s tales que*

$$\lambda_a \ll \nu, \quad \lambda_s \perp \nu, \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_s.$$

Demostración.
En primer lugar, consideremos la medida positiva $\mu = \lambda + \nu$. Es claro que $\mu \geq \lambda$, $\mu \geq \nu$, y que, por tanto, $\lambda \ll \mu$ y $\nu \ll \mu$. Por el teorema de Radon-Nikodym, sabemos que existen dos funciones f y g medibles no-negativas de manera que

$$\lambda(E) = \int_E f \, d\mu, \qquad \nu(E) = \int_E g \, d\mu$$

para todo conjunto medible E. Definamos ahora los siguientes conjuntos:

$$P = \{x \in X : g(x) > 0\}$$

$$Q = \{x \in X : g(x) = 0\}$$

Claramente, observamos que $X = P \cup Q$, $P \cap Q = \varnothing$ y que $\nu(Q) = 0$. Sabiendo esto, definimos las medidas positivas siguientes: sea $E \in \mathcal{M}$,

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap P), \quad \lambda_s(E) = \lambda(E \cap Q)$$

Por como las hemos definido podemos ver, fácilmente que, $\lambda_s(P) = \nu(Q) = 0$, es decir, $\lambda_s \perp \nu$. Además, es claro que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$. Luego, nos basta demostrar que $\lambda_a \ll \nu$.
Para ello, sea E un conjunto medible tal que $\nu(E) = 0$. Veamos que $\lambda_a(E) = 0$. Como $\nu(E) = 0$, entonces

$$\int_E g \, d\mu = 0$$

y, al ser g no-negativa, concluimos que debe ocurrir que $g = 0$ en casi todo punto (con respecto a la medida μ). De hecho, como g es estrictamente positiva sobre el conjunto $E \cap P$, concluimos que

$$\lambda_a(E) = \lambda(E \cap P) = \int_{E \cap P} f \, d\mu = 0$$

$\square$

2.4. Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym

Para acabar este capítulo veamos otra demostración del Teorema de Lebegue-Radon-Nikodym debida a Von Neumann, donde se hace uso de herramientas de espacios de Hilbert.

Teorema 2.9 (Lebesgue-Radon-Nikodym). *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio de medible, ν una medida positiva σ-finita y λ una medida σ-finita. Entonces, existen dos medidas λ_a y λ_s (únicas) tal que $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, con $\lambda_a \ll \nu$ y $\lambda_s \perp \nu$.*

Además, existe una función f medible tal que, dado $E \in \mathcal{M}$,

$$\lambda_a(E) = \int_E f \, d\nu$$

Demostración.

En esta ocasión, probaremos solo el caso donde ambas medidas son positivas y finitas pues, ya teniendo eso, los demás casos serían idénticos a lo ya visto.

En primer lugar, definimos la medida $\mu = \nu + \lambda$ y consideramos el espacio de Hilbert de las funciones de cuadrado integrables respecto de μ, $L^2(X, \mu)$. Definamos ahora el siguiente funcional lineal:

$$\begin{aligned} I : L^2(X, \mu) &\to \mathbb{R} \\ f \quad &\mapsto I(f) = \int_X f \, d\lambda \end{aligned}$$

En efecto, es lineal pues la integral es lineal y, es acotado pues:

$$|I(f)| = |\int_X f \, d\lambda| \leq \int_X |f| \, d\lambda \leq \int_X |f| \, d\mu \leq (\int_X f^2 \, d\mu)^{\frac{1}{2}} \mu(X)^{\frac{1}{2}}$$

donde, para la última desigualdad hemos aplicado la desigualdad de Hölder. Es claro que, al ser ν y λ medidas finitas, μ también lo es. Luego I es acotada y, por tanto, continua.

Por el Teorema de Representación de Riesz, sabemos que existe una función $g \in L^2(X, \mu)$ de tal manera que podemos escribir $I(f)$ como

$$I(f) = \int_X fg \, d\mu \tag{2.1}$$

para cualquier $f \in L^2(X, \mu)$.

Dado $E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) > 0$, escogemos la función $f = \mathcal{X}_E$. Entonces, de la igualdad (2.1) tenemos que

$$\lambda(E) = \int_X \mathcal{X}_E d\lambda = I(f) = \int_E g \, d\mu.$$

Además, como hemos asumido que λ, ν son medidas positivas, se tiene que $0 \leq \lambda(E) \leq \mu(E)$.
De lo anterior podemos concluir que

$$\int_E g \, d\mu \geq 0, \qquad \int_E (1-g) \, d\mu \geq 0.$$

para todo conjunto medible E. Lo que implica que $0 \leq g(x) \leq 1$ en casi todo punto.
Obsérvese que, como $\mu = \nu + \lambda$ podemos escribir

$$\int_X fg \, d\nu = \int_X fg \, d\mu - \int_X fg \, d\lambda = \int_X f \, d\lambda - \int_X fg \, d\lambda = \int_X f(1-g) \, d\lambda. \quad (2.2)$$

Consideremos ahora los siguientes conjuntos:

$$A = \{x \in X : 0 \leq g(x) < 1\} \quad B = \{x \in X : g(x) = 1\}$$

además de las dos medidas

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E), \quad \lambda_s(E) = \lambda(B \cap E)$$

Entonces de la igualdad (2.2), haciendo uso de que $g(x) = 1$ en B y considerando la función $f = \mathcal{X}_B$ obtenemos que:

$$\nu(B) = \int_B g \, d\nu = \int_B (1-g) \, d\lambda = 0$$

Por consiguiente, $\lambda_s \perp \nu$. En efecto, pues $X = A \cup B$ y $\nu(B) = \lambda_s(A) = \lambda(A \cap B) = 0$ ya que, claramente, $A \cap B = \varnothing$.

Ahora escogemos la función $f = \mathcal{X}_E \sum_{i=0}^{n} g^i$. De la misma manera que antes, sustituimos en la igualdad (2.2) y obtenemos lo siguiente:

$$\int_E g \sum_{i=0}^{n} g^i \, d\nu = \int_E (1 - g^{n+1}) \, d\lambda$$

Observamos que si $x \in A$, entonces $(1 - g^{n+1})(x) \to 1$ mientras que si $x \in B$, entonces $(1 - g^{n+1})(x) \to 0$. Si nos centramos pues, cuando $x \in A$, como

$g\sum_{i=0}^{n} g^i \to \dfrac{g}{1-g}$ *tenemos que, por el teorema de la convergencia dominada A.9 que*

$$\lambda_a(E) = \lambda(A \cap E) = \lim_{n\to\infty} \int_E (1-g^{n+1})\ d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_E g \sum_{i=0}^{n} g^i\ d\nu = \int_E \frac{g}{1-g}\ d\nu$$

Luego, tomando $f = \dfrac{g}{1-g}$, *concluimos que*

$$\lambda_a(E) = \int_E f\ d\nu.$$

$\square$

3

Aplicaciones del Teorema de Radon-Nikodym

En este capítulo presentamos algunas de las aplicaciones del Teorema de Radon-Nikodym.

3.1. Teorema de Representación de Riesz. El dual de L^p, $1 \leq p < \infty$.

A lo largo de esta sección trabajaremos con espacios $L^p(X,\nu)$, donde X es el espacio y ν la medida. En múltiples ocasiones, si no hay ningún tipo de confusión, usaremos la notación $L^p(X)$ o L^p.

Nuestro objetivo es probar que si p y q son exponentes conjugados, es decir, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, entonces el dual de L^p es L^q. Para ello, tendremos que probar algunos resultados previos para tener todas las herramientas que hacen falta a nuestra disposición.

Lema 3.1. *Sean $p,q \in (1,\infty)$ exponentes conjugados. Entonces, para cada $f \in L^p(X,\nu)$ se cumple que*

$$\|f\|_p = \sup\left\{\left|\int_X fg\ d\nu\right| : g \in L^q(X,\nu), \|g\|_q \leq 1\right\}$$

Además, dicho supremo se alcanza.

Demostración.
Dado un $f \in L^p$ denotaremos por

$$S_f = \sup\left\{\left|\int_X fg\ d\nu\right| : g \in L^q(X,\nu), \|g\|_q \leq 1\right\}.$$

Sea $f \in L^p$, se tiene, para cada $g \in L^q$, que

$$\left| \int_X fg \, d\nu \right| \leq \int_X |fg| \, d\nu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Donde, en la última desigualdad, hemos usado la desigualdad de Hölder. De aquí concluimos que $S_f \leq \|f\|_p$.
Ahora, supongamos que $\|f\|_p > 0$, *pues en caso contrario tendríamos trivialmente que* $S_f = 0 = \|f\|_p$. *Definamos ahora la siguiente función:*

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|^p}{f(x)} & si \ f(x) \neq 0 \\ 0 & si \ f(x) = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que, h *es medible y cumple que* $|h| = |f|^{p-1}$. *Además, elevando a* q *dicha igualdad, usando que* $pq = p + q$, *se tiene que* $|h|^q = |f|^{pq-q} = |f|^p$, *es decir,* $h \in L^q$. *Por consiguiente,*

$$\|h\|_q = \left(\int_X |h|^q \, d\nu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int |f|^p \, d\nu \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\|f\|_p^p \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p^{\frac{p}{q}}$$

Tomando ahora la función $g = \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} h$, *tenemos claramente que,* $\|g\|_q = 1$. *Por lo que se tiene*

$$S_f \geq \left| \int_X fg \, d\nu \right| = \|f\|_p^{-\frac{p}{q}} \left| \int_X fh \, d\nu \right| = \frac{1}{\|f\|_p^{\frac{p}{q}}} \int_X |f|^p \, d\nu = \|f\|_p$$

□

Teorema 3.2. *Sea* $(X, \mathcal{M}, \nu)$ *un espacio de medida* σ*-finita. Fijamos un entero* $p \in (1, \infty)$, *si* $g \in L^q(X, \nu)$, *siendo* p *y* q *exponentes conjugados, entonces el funcional*

$$\begin{aligned} \varphi_g : L^p(X, \nu) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_X fg \, d\nu \end{aligned}$$

es lineal y continuo. Además, $\|\varphi_g\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$

Demostración.
Al ser la integral un operador lineal, es claro que φ_g *también lo es. Además, por la desigualdad de Hölder, A.12, se tiene que*

$$\varphi_g(f) = \int_X fg \, d\nu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

luego, φ_g *es continuo y, además,* $\|\varphi_g\|_{(L^p)^*} \leq \|g\|_q$ *Ahora, utilizando el Lema 3.1, sabemos que existe una función* $f \in L^p$ *con* $\|f\|_p \leq 1$ *tal que*

$$\|g\|_q = \left| \int_X fg \, d\nu \right| = |\varphi_g(f)| \leq \|\varphi_g\|_{(L^p)^*}$$

Por tanto, concluimos que $\|\varphi_g\|_{(L^p)^*} = \|g\|_q$.

□

Lema 3.3. *Sea ν una medida σ-finita en un espacio medible $(X, \mathcal{M})$. Entonces, existe una función $f \in L^1$ tal que $0 < f(x) < 1, \forall x \in X$*

Demostración.
Al ser ν σ-finita, podemos encontrar una sucesión $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ de tal manera que, $\nu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Teniendo esto, definimos, para cada n la función siguiente:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n(1+\nu(E_n))} & si\ x \in E_n \\ 0 & si\ x \notin E_n \end{cases}$$

Luego, obtemos que la función $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_n(x)$ es lo que queríamos.

□

Ya tenemos las herramientas suficientes para poder probar el el Teorema de Representación de Riesz.

Teorema 3.4 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea $(X, \mathcal{M}, \nu)$ un espacio de medida $\sigma - finita$. Entonces, para cada $p \in [1, \infty)$ se cumple que*

$$(L^p)^* = L^q$$

donde q y p son exponentes conjugados.

Demostración.
Fijemos en primer lugar un entero $p \in [1, \infty)$ y denotaremos como q al exponente conjugado de p.
<u>Caso finito:</u>
En primer lugar, supondremos que ν es una medida finita, es decir, $\nu(X) < \infty$.
Consideremos ahora, el siguiente operador;

$$\begin{aligned} T : L^q &\longrightarrow (L^p)^* \\ g &\mapsto \varphi_g(f) = \int_X fg\ d\nu \end{aligned}$$

Obsérvese que T es claramente lineal.

Veamos que T es sobreyectivo. Luego, sea $\varphi \in (L^p)^*$.
Definimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\mapsto \varphi(\mathcal{X}_E) \end{aligned}$$

Como $\mathcal{X}_E \in L^p$, *está bien definida para todo conjunto medible* $E \in \mathcal{M}$. *Obsérvese que*

$$|\lambda(E)| \leq \|\varphi\|_{(L^p)^*}\|\mathcal{X}_E\|_p = \|\varphi\|_{(L^p)^*} \cdot \nu(E)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

Veamos ahora que, efectivamente, λ *es una medida. Para ello tomemos dos conjuntos medibles* E *y* F *disjuntos. Puesto que, como sabemos,* $\mathcal{X}_{E\cup F} = \mathcal{X}_E + \mathcal{X}_F$, *entonces, se tiene por la linealidad de* φ *que,* $\lambda(E \cup F) = \lambda(E) + \lambda(F)$.
Consideremos ahora un sucesión disjunta de conjuntos medibles $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. *Si definimos, para cada número natural* k, *el conjunto* $F_k = \cup_{n=1}^{k} E_n$ *entonces:*

$$\|\mathcal{X}_E - \mathcal{X}_{F_k}\|_p^p = \int_{E\setminus F_k} d\nu = \nu(E \setminus F_k).$$

Por el Teorema de la Convergencia Dominada A.9 tenemos que $\lim_{k\to\infty} \nu(E\setminus F_k) = 0$. *Finalmente, por continuidad de* φ, $\lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \lambda(E)$; *es decir, concluimos que*

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k)$$

Por tanto, como afirmamos previamente, λ *es una medida que, además, por lo escrito en (3.1),* $\lambda \ll \nu$ *luego, podemos aplicar el Teorema de Radon-Nikodym para hallar una (única) función* $g \in L^1$ *tal que*

$$\varphi(\mathcal{X}_E) = \lambda(E) = \int_E g \, d\nu = \int_X g\mathcal{X}_E \, d\nu.$$

Obsérvese que si tenemos una función simple cualquiera f, *por la linealidad de* φ *y la integral, se tiene que*

$$\varphi(f) = \int_X fg \, d\nu$$

Además, como $\nu(X) < \infty$, *tenemos que las funciones simples son densas en* L^p, *A.11, por lo que se verifica fácilmente que* $\varphi(f) = \int_X fg \, d\nu$ *para toda función* $f \in L^p$.

Luego, solo nos quedaría verificar que g *efectivamente es una función de* L^q *y que* $\|\varphi\|_{(L^p)*} = \|g\|_q$. *Si esto fuese así, entonces sería claro que* $T(g) = \varphi$ *y concluiría la prueba. Para ello estudiaremos dos casos:*
Si $p = 1$**:**
Considérese, para cada $n \in \mathbb{N}$, *el conjunto* $E_n = \{x \in X : g(x) > n\}$. *Se tiene que*

$$n \cdot \nu(E_n) \leq \int_X g\mathcal{X}_{E_n} \, d\nu = \varphi(\mathcal{X}_{E_n}) \leq \|\varphi\|_{(L^1)*}\|\mathcal{X}_{E_n}\|_1 = \|\varphi\|_{(L^1)*}\nu(E_n)$$

De aquí se concluye que $\nu(E_n) = 0$ si $n > \|\varphi\|_{(L^1)^*}$ y, por consiguiente, $|g^+(x)| < \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Análogamente, se llega a que $|g^-(x)| < \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Concluimos que $\|g\|_\infty \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$ y, por tanto, $g \in L^\infty$. La desigualdad restante se da por la desigualdad de Hölder, A.12

$1 < p < \infty$**:**

Definimos la siguiente función:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{|g(x)|}{g(x)} & si\ g(x) \neq 0 \\ 0 & si\ g(x) = 0 \end{cases}$$

y, para cada número natural n, el conjunto $E_n = \{x \in X : |g(x)| \leq n\}$, y tomamos

$$f_n = \mathcal{X}_{E_n} |g|^{q-1} h$$

Obsérvese que, como $p(q-1) = q$, se tiene que

$$|f_n|^p = \mathcal{X}_{E_n} |g|^q \leq n^q$$

lo que implica que $f_n \in L^p$ y, por consiguiente,

$$\varphi(f_n) = \int_X (\mathcal{X}_{E_n} |g|^{q-1} h) g \, d\nu = \int_{E_n} |g|^q \, d\nu \leq \|\varphi\|_{(L^p)^*} \|f_n\|_p = \|\varphi\|_{(L^p)^*} \left(\int_{E_n} |g|^q \, d\nu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Luego

$$\|g\|_q = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{E_n} |g|^q \, d\nu \right)^{\frac{1}{q}} = \lim_{n \to \infty} \left(\int_{E_n} |g|^q \, d\nu \right)^{1-\frac{1}{p}} \leq \|\varphi\|_{(L^p)^*}$$

Por lo que concluimos que $g \in L^q$. Además, La desigualdad contraria se obtiene aplicando el Lema 3.1

Solo nos quedaría probar el resultado para el caso σ-finito.

Caso σ-finito:

Al igual que en el caso anterior, nos basta con probar la sobreyectividad de T.

Tenemos ahora que ν es una medida σ-finita. Utilizando el Lema 3.3, sabemos que existe una función $h \in L^1$ definida como en la prueba de dicho lema. Por tanto, podemos definir la medida

$$\mu(E) = \int_E h \, d\nu$$

Obsérvese que μ *es una medida finita por la definición de* h*. Notamos la biyección* $f \mapsto h^{\frac{1}{p}} f$ *donde* $f \in L^p(X,\mu)$ *y* $h^{\frac{1}{p}} f \in L^p(X,\nu)$*. Finalmente, dado un* $\varphi \in (L^p(X,\nu))^*$*, definimos el operador* $\Psi \in (L^p(X,\mu))^*$ *por* $\Psi(f) = \varphi(h^{\frac{1}{p}} f)$ *donde, claramente,* $\|\Psi\|_{(L^p(X,\mu))^*} = \|\varphi\|_{(L^p(X,\nu))^*}$*.*
Por la primera parte, al ser μ *una medida finita, sabemos que existe una función* $\overline{g} \in L^q(X,\mu)$ *tal que* $\Psi(f) = \int_X f\overline{g}\, d\mu$*. Por tanto, tomando* $g = h^{\frac{1}{q}}\overline{g} \in L^q(X,\nu)$*,*

$$\varphi(f) = \Psi(h^{-\frac{1}{p}} f) = \int_X h^{-\frac{1}{p}} f\overline{g}\ d\mu = \int_X h^{\frac{1}{q}} f\overline{g}\ d\nu = \int_X fg\ d\nu$$

Y, además,

$$\|g\|_q^q = \int_X |g|^q\ d\nu = \int_X |\overline{g}|^q\ d\mu = \|\Psi\|^q_{(L^p(X,\mu))^*} = \|\varphi\|^q_{(L^p(X,\nu))^*}$$

Y, por consiguiente, $\|g\|_q = \|\varphi\|_{(L^p(X,\nu))^*}$

□

3.2. Existencia de Esperanza Condicional

Un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \nu)$ se dice que es un espacio de probabilidad si $\nu(X) = 1$.

Definición 3.5. *Sean un espacio de probabilidad* $(X, \mathcal{M}, \nu)$*, una función* $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \nu)$ *y una sub-*σ*-álgebra* $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$*.*
Definimos la esperanza condicional de f *respecto de* $\mathcal{M}_0$ *a cualquier función* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *que cumple que:*

1. g *es* $\mathcal{M}_0$*-medible*
2. *Para todo conjunto* $E \in \mathcal{M}_0$ *se tiene*

$$\int_E g\ d\nu = \int_E f\ d\nu$$

A esta función g *la denotamos como* $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)$

Teorema 3.6. *Sean* $(X, \mathcal{M}, \nu)$ *un espacio de probabilidad,* $\mathcal{M}_0$ *una sub-*σ*-álgebra de* $\mathcal{M}$ *y* $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \nu)$*. Entonces,* $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)$ *existe y, además, es única.*

Demostración.
Supongamos en un primer momento que la función f *es no-negativa; es decir,* $f \geq 0$*. Ahora definamos la medida* $\lambda : \mathcal{M}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$\lambda(E) = \int_E f \ d\nu$$

Es claro que, λ es una medida finita y positiva y, además, $\lambda \ll \nu$. El Teorema de Radon-Nikodym nos garantiza la existencia de una función no-negativa y $\mathcal{M}_0$-medible, $f_0 \in L^1(X, \mathcal{M}_0, \nu)$ tal que

$$\int_E f_0 \ d\nu = \lambda(E) = \int_E f \ d\nu$$

y, por tanto, ya habríamos acabado.
Para el caso general donde f es una función arbitraria, escribimos f como $f = f^+ - f^-$, donde f^+ y f^- son funciones positivas y, por lo anterior, existen funciones f_1 y f_2 tal que

$$\int_E f_1 \ d\nu = \int_E f^+ \ d\nu \qquad \int_E f_2 \ d\nu = \int_E f^- \ d\nu$$

Luego, definiendo la función $g = f_1 - f_2$, es fácil ver tanto que g es $\mathcal{M}_0$-medible como que

$$\int_E g \ d\nu = \int_E f \ d\nu, \qquad \forall E \in \mathcal{M}_0$$

□

Para finalizar esta sección veamos algunas propieadades básicas de la esperanza condicional. A partir de ahora utilizaremos la siguiente notación:

$$\int_X f \ d\nu = \mathbb{E}(f)$$

Proposición 3.7. *Sean $(X, \mathcal{M}, \nu)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{M}_0$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{M}$ y $f, g \in L^1(X, \mathcal{M}, \nu)$. Entonces:*

1. $\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)) = \mathbb{E}(f)$,

2. $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(af + bg) = a \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f) + b \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(g)$ *casi-siempre respecto de ν con $a, b \in \mathbb{R}$,*

3. *Si $f \in L^1(X, \mathcal{M}_0, \nu)$, entonces $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f) = f$,*

4. *Si $f \geq 0$, entonces $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f) \geq 0$.*

Demostración.
(1) - Supongamos que $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f) = h$. Nótese que por definición de σ-álgebra, $X \in \mathcal{M}_0$, luego

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)) = \mathbb{E}(h) = \int_X h \; d\nu = \int_X f \; d\nu = \mathbb{E}(f)$$

(2) - Sean números reales arbitrarios $a, b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $F = \mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)$ y $G = \mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(g)$. Definamos ahora $h = a \cdot F + b \cdot G$ salvo en un conjunto de medida nula y, sea ahora $E \in \mathcal{M}_0$. Se tiene que

$$\begin{aligned} \int_E h \; d\nu = \int_E a \cdot F + b \cdot G \; d\nu &= a \int_E F \; d\nu + b \int_E G \; d\nu \\ &= a \int_E f \; d\nu + b \int_E g \; d\nu \\ &= \int_E a \cdot f + b \cdot g \; d\nu \end{aligned}$$

y, por unicidad de la esperanza condicional, concluimos que $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(af + bg) = h$.

(3) - Este resultado es claro por la unicidad de la esperanza condicional.

(4) - Supongamos que $f \geq 0$. Para probar dicho apartado, supongamos que $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f) < 0$. Entonces, aplicando las propiedades (1) y (3) se tiene que

$$\begin{gathered} \mathbb{E}(\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)) < \mathbb{E}(0) \\ \mathbb{E}(f) < 0 \end{gathered}$$

lo cual no tiene sentido pues $f \geq 0$.

□

3.3. Unicidad de la medida de Lebesgue

Teorema 3.8. *Sea una medida $\sigma - finita$ $\lambda : \mathcal{B}o(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ invariante por traslación tal que $\lambda(K) < +\infty$ para todo conjunto compacto K. Entonces, existe un $c \geq 0$ tal que*

$$\lambda(E) = c \cdot \mu_n(E)$$

para todo $E \in \mathcal{B}o(\mathbb{R}^n)$. Donde μ_n es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Demostración.
Como primer objetivo, queremos ver que $\lambda \ll \mu_n$. Para esto, sea $E \in \mathcal{B}o(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mu_n(E) = 0$.
Dado que la función $f(x, y) = x + y$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ es continua, en particular, es medible según Borel y, por tanto, el conjunto

$$F = f^{-1}(E) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x + y \in E\}$$

es medible. Obsérvese que, además, tenemos que

$$F_x = \{y \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in F\} = E - x, \qquad F^y = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,y) \in F\} = E - y$$

Al ser medidas σ-finitas, podemos aplicar el Teorema de Fubini a $(\mu_n \times \lambda)(F)$. Como $\mu_n(E) = 0$ por hipótesis, entonces $(\mu_n \times \lambda)(F) = 0$. De esto podemos concluir que $\lambda(F_x) = \lambda(E - x) = 0$ en μ_n-casi todo punto x.

Por ser λ invariante por traslación, $\lambda(E) = 0$.

Ahora aplicando el Teorema de Radon-Nikodym existe una función f tal que

$$\lambda(E) = \int_E f \; d\mu_n$$

para cualquier conjunto $E \in \mathcal{B}o(\mathbb{R}^n)$. En particular, podemos utilizar la invarianza por traslación de la integral de Lebesgue para observar que se tiene

$$\lambda(E) = \lambda(E+t) = \int_{E+t} f(x) \; d\mu_n(x) = \int_E f(x-t) \; d\mu_n(x)$$

para todo t y todo $E \in \mathcal{B}o(\mathbb{R}^n)$. Gracias a la igualdad de ambas integrales, concluimos que

$$f(x) = f(x-t)$$

en μ_n-casi todo punto x y todo t. Por consiguiente, gracias a (A.16) se tiene que existe una constante c tal que $f(x) = c$ en μ_n-casi todo punto x. Luego, para todo conjunto E medible Borel,

$$\lambda(E) = \int_E f \; d\mu_n = \int_E c \; d\mu_n = c \int_E \; d\mu_n = c \cdot \mu_n(E)$$

$\square$

4

El Teorema de Diferenciación de Lebesgue

4.1. Introducción

El Teorema Fundamental del Cálculo dice que dada una función continua f en un intervalo $[a, b]$, si definimos una función F como

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt, \qquad x \in [a, b]$$

entonces, F es diferenciable y, además, $F' = f$.
Por tanto, obtenemos lo siguiente:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(x)$$

luego,

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t)\ dt = f(x)$$

que podemos escribir como

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\mu_1([x-h, x+h])} \int_{[x-h,x+h]} f(t)\ dt = f(x),$$

donde μ_1 es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

En este capítulo daremos una versión n-dimensional para funciones localmente integrables de lo recién escrito conocido como el Teorema de Diferenciación de Lebesgue que asegura que

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x, r))} \int_{B(x,r)} f(t)\ dt = f(x)$$

en casi todo punto, siendo μ_n es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $B(x, r)$ es, como es usual, la bola centrada en x de radio r.

4.2. Función maximal de Hardy-Littlewood

Definición 4.1. *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función localmente integrable, definimos la función, que denominaremos como la función maximal de Hardy-Littlewood de f y denotaremos por Mf, a*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu_n(y).$$

Ahora veremos algunos resultados necesarios para poder cumplir nuestro objetivo de probar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue. En primer lugar probaremos que la función de Hardy-Littlewood es semicontinua inferiormente y, por tanto, medible.

Lema 4.2. *Mf es semicontinua inferiormente*

Demostración.

Obsérvese que $Mf \geq 0$ por definición. Definimos el conjunto,

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf > k\}.$$

Si logramos probar que E_k es un abierto para todo $k \in (0, +\infty)$ habremos terminado. Para ello, fijemos un $k > 0$ y tomemos un x en E_k. Por como hemos definido el conjunto, E_k, existe un $r > 0$ de manera que

$$\frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu_n(y) > k$$

Obsérvese que lo escrito es una desigualdad estricta. Es por esto que podemos tomar un $r' > r$ de tal manera que

$$\frac{1}{\mu_n(B(x,r'))} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu_n(y) > k$$

Si escogemos un elemento x' tal que $|x' - x| < r' - r$, podemos observar que se tiene que $B(x,r) \subseteq B(x',r')$ y, por consiguiente:

$$k < \frac{1}{\mu_n(B(x,r`))} \int_{B(x,r)} |f(y)| \, d\mu_n(y) \leq \frac{1}{\mu_n(B(x',r'))} \int_{B(x',r')} |f(y)| \, d\mu_n(y) \leq Mf(x')$$

por lo que $x' \in E_k$ y termina la prueba.

□

Lema 4.3. *Sea $\mathcal{C} = \{B_1, \ldots, B_k\}$ una colección finita de bolas (abiertas) en $\mathbb{R}^n$. Entonces, podemos encontrar una subcolección disjunta $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}\}$ en $\mathcal{C}$ tal que*

$$\mu_n\left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^{m} \mu_n(B_{i_j})$$

Demostración.
Para cada n, supongamos que $B_n = B(x_n, r_n)$ para $n = 1, \ldots, k$. Definamos ahora, para cada $n = 1, \ldots, k$, $B_n^* = 3B_n = B_n(x_n, 3r_n)$. Obsérvese que se cumple que $\mu_n(B_n^*) = 3^n \mu_n(B_n)$.
Tomemos $B_{i_1} \in \mathcal{C}$ tal que su radio sea mayor o igual al de todas las demás bolas de $\mathcal{C}$. Denotamos ahora el conjunto de las bolas de $\mathcal{C}$ con intersección no vacía con B_{i_1} por:

$$E_1 = \{B_n \in \mathcal{C} : B_n \cap B_{i_1} \neq \varnothing\}$$

Obsérvese que como el radio de cada una de las bolas de E_1 es menor o igual al de B_{i_1}, se tiene que $\bigcup_{B_n \in E_1} B_n \subset B_{i_1}^*$ y, por consiguiente,

$$\mu_n\left(\bigcup_{B_n \in E_1} B_n\right) \leq \mu_n(B_{i_1}^*)$$

Denotamos como $\mathcal{C}_1$ a todas las bolas de $\mathcal{C}$ que no están en E_1. Escojamos de aquí, la bola con mayor radio, B_{i_2}. De igual manera, definimos el conjunto E_2 como

$$E_2 = \{B_n \in \mathcal{C}_1 : B_n \cap B_{i_2} \neq \varnothing\}$$

Es importante destacar que $B_{i_1} \cap B_{i_2} = \varnothing$. Además, se tiene que, como antes,

$$\mu_n\left(\bigcup_{B_n \in E_2} B_n\right) \leq \mu_n(B_{i_2}^*)$$

Seguimos dicho procedimiento hasta, al ser $\mathcal{C}$ una colección finita, que se acabe en un paso $m \leq k$. Por construcción, hemos obtenido una colección disjunta $\{B_{i_1}, \ldots, B_{i_m}\}$ que cumple que

$$\bigcup_{n=1}^{k} B_n \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_{i_j}^*$$

Finalmente, de esto concluimos que

$$\mu_n\left(\bigcup_{n=1}^{k} B_n\right) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu_n(B_{i_j}^*) = 3^n \sum_{j=1}^{m} \mu_n(B_{i_j})$$

□

Teorema 4.4. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces Mf es integrable en el sentido débil (A.14). Más aún, para todo $t > 0$ se tiene que*

$$\mu_n(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}) \leq \frac{3^n}{t}\|f\|_1$$

Demostración.
Fijemos un $t > 0$ y definamos $E_t = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}$. Al ser E_t medible, podemos escribir, por la regularidad de μ_n,

$$\mu_n(E_t) = \sup\{\mu_n(K) : K \subseteq E_t, K \text{ compacto}\}$$

luego, nos es suficiente probar que, para cada compacto K se cumple la desigualdad

$$\mu_n(K) \leq \frac{3^n}{t}\|f\|_1$$

Fijemos pues, un compacto $K \subseteq E_t$, y tomemos un $x \in K$. En particular, $x \in E_t$, luego existe un $r_x > 0$ tal que

$$\frac{1}{\mu_n(B(x, r_x))}\int_{B(x,r_x)} |f(y)|\, d\mu_n(y) > t$$

Resulta que, si tomamos, para cada $x \in K$, la bola $B_x = B(x, r_x)$, la colección resultante $\{B_x : x \in K\}$ es un recubrimiento abierto de K. Al ser K compacto, podemos tomar un subrecubrimiento finito, digamos $\{B_1, \dots, B_l\}$. Por el Lema 4.3, existe una subfamilia disjunta de dicho subrecubrimiento $\{B_{i_1}, \dots, B_{i_m}\}$ tal que

$$\begin{aligned}\mu_n(K) &\leq \sum_{i=1}^{l}\mu_n(B_i) \leq 3^n\sum_{j=1}^{m}\mu_n(B_{i_j}) \leq \frac{3^n}{t}\sum_{j=1}^{m}\int_{B_{i_j}} |f|\, d\mu_n \\ &\leq \frac{3^n}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f|\, d\mu_n = \frac{3^n}{t}\|f\|_1\end{aligned}$$

□

4.3. Teorema de Diferenciación de Lebesgue

Teorema 4.5 (Teorema de Diferenciación de Lebesgue). *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces, existe un conjunto medible N con $\mu_n(N) = 0$ tal que*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \; d\mu_n(y) = 0$$

para todo $x \notin N$.
Nótese que, en particular, tenemos

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \; d\mu_n(y) = f(x)$$

para todo $x \notin N$.

Demostración.
Claramente, se tiene que

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y) \; d\mu_n(y) - f(x) \right| &= \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \left| \int_{B(x,r)} (f(y) - f(x)) \; d\mu_n(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \; d\mu_n(y)\end{aligned}$$

por tanto nos basta probar solo la primera igualdad. Para ello definamos la siguiente función:

$$f^*(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \; d\mu_n(y), \;\; x \in \mathbb{R}^n$$

Veamos que $f^* = 0$ en casi todo punto. Es decir, queremos probar que se tiene la igualdad $\mu_n(\{x : f^* > 0\}) = 0$.

Obsérvese que, si lográsemos probar que el resultado se cumple para $f \cdot \mathcal{X}_{B(0,k)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, excepto sobre un conjunto medible N_k de medida nula, entonces el resultado se cumpliría para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ salvo en $\cup_{k=1}^{\infty} N_k$ que, al ser unión numerable de conjuntos de medida nula, a su vez, tiene medida cero. Por tanto, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema de Aproximación en L^1 (A.15), existe una función continua con soporte compacto g tal que $\|f - g\| < \varepsilon$.

Es importante destacar que, como g es continua, $g^* = 0$. En efecto, para cada x, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ de modo tal que $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ siempre $\|y - x\| < \delta$ y por consiguiente

$$g^*(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| \; d\mu_n(y), \;\; x \in \mathbb{R}^n = 0$$

Además utilizando que $\limsup(x+y) \leq \limsup(x) + \limsup(y)$, *entonces:*

$$(f-g)^* \leq f^* + g^* = f^*$$
$$f^* = (f-g+g)^* \leq (f-g)^* + g^* = (f-g)^*$$

por lo que $(f-g)^* = f^*$.
Es interesante destacar ahora que

$$\begin{aligned} f^*(x) &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \; d\mu_n(y) \\ &\leq \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| \; d\mu_n(y) + |f(x)| \\ &\leq Mf(x) + |f(x)| \end{aligned}$$

de donde podemos concluir rápidamente que, si $t > 0$,

$$\{x : f^*(x) > t\} \subseteq \{x : Mf(x) + |f(x)| > t\} \subseteq \left\{x : Mf(x) > \frac{t}{2}\right\} \cup \left\{x : |f(x)| > \frac{t}{2}\right\}$$

Ahora bien, gracias a (4.4) y (A.13) se tiene que

$$\mu_n\left(\left\{x : Mf(x) > \frac{t}{2}\right\}\right) \leq \frac{2 \cdot 3^n}{t} \|f\|_1$$
$$\mu_n\left(\left\{x : |f(x)| > \frac{t}{2}\right\}\right) \leq \frac{2}{t} \|f\|_1$$

y, por tanto, utilizando los hechos probados hasta ahora, podemos escribir que

$$\mu_n(\{x : f^*(x) > t\}) = \mu_n(\{x : (f-g)^* > t\} \leq \frac{C}{t} \|f-g\|_1 < \frac{C}{t} \varepsilon$$

con $C = 2(1 + 3^n)$.
Como $\varepsilon > 0$ *fue elegido de manera arbitraria se tiene que* $\mu_n(\{x : f^*(x) > t\} = 0$.
Finalmente, como

$$\{x : f^*(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x : f^*(x) > \frac{1}{n}\right\}$$

entonces,

$$\mu_n(\{x : f^*(x) > 0\}) = 0$$

que era lo que queríamos concluir.

□

Por otro lado, el teorema anterior proporciona información sobre la naturaleza de los conjuntos medibles. Introducimos primero el concepto de punto de densidad. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto de densidad de E cuando

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu_n(E \cap B(x,r))}{\mu_n(B(x,r))} = 1$$

Como consecuencia del Teorema de Diferenciación de Lebesgue se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.6. *Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible. Se cumple:*

(a) Casi todo punto de E es un punto de densidad de E.

(b) Casi todo punto de $\mathbb{R}^n \setminus E$ no es de densidad de E.

Demostración.

Basta aplicar el Teorema de Diferenciación de Lebesgue porque

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu_n(E \cap B(x,r))}{\mu_n(B(x,r))} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \chi_E(y)\, d\mu_n(y) = \chi_E(x) \quad \textit{en c. t. p.}$$

□

A

Apéndice

A.1. Resultados

Lema A.1. *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de números reales. Entones* $\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n$ *es absolutamente convergente si y solo si* $\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n$ *es incondicionalmente convergente.*

Lema A.2. *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$*. Si* $\Sigma_{n=1}^{\infty}|x_n|$ *converge, entonces* $\Sigma_{n=1}^{\infty} x_n$ *también.*

Definición A.3. *En un espacio de medida* $(X, \mathcal{M}, \nu)$*, una propiedad* P*, relativa a los elementos de un conjunto medible* E*, se dice que la propiedad* P *se cumple para casi todo punto o casi-siempre si*

$$\nu(\{x \in E : P \quad \textit{es falso en } x \quad \}) = 0$$

Definición A.4. *Sea* $(X, \mathcal{M}, \nu)$ *un espacio de medida. Si existe un sucesión* $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ *en* $\mathcal{M}$ *de manera que*

$$\nu(E_n) < +\infty, \qquad X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

diremos que la medida ν *es* σ*-finita.*

Definición A.5. *Sea función* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$*. Decimos que* f *es localmente integrable si es medible y, para cada* $x \in \mathbb{R}^n$*, existe un entorno* V_x *de* x *tal que cumple*

$$\int_{V_x} |f| \; d\mu_n < +\infty$$

Al conjunto de todas las funciones localmente integrables las denotaremos como $L_{loc}(\mathbb{R}^n)$*.*

Definición A.6. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función. Diremos que* f *es semicontinua inferiormente si, para todo* $k \in \mathbb{R}$*, el conjunto* $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > k\}$ *es abierto.*

Proposición A.7. *Toda función semicontinua inferiormente es medible*

Teorema A.8 (Convergencia Monótona). *Si* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones no negativas medibles de* X *a* $[0, \infty]$ *tal que:*
a) $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *es monótona creciente*
b) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ *en casi todo punto.*
Entonces, f *es una función medible y*

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

Teorema A.9 (Convergencia Dominada). *Sea una función medible* $f :\longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *y* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones medibles tal que:*
a) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ *para casi todo punto* $x \in X$
b) Existe una función medible e integrable g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
Entonces, f_n *es integrable para* $n \geq 1$ *y*

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\nu = \int_X f \, d\nu$$

Lema A.10. *Sea* $(X, \mathcal{M}, \nu)$ *un espacio de medida y* $f : X \longrightarrow [0, +\infty]$ *una función medible. Entonces:*

$$\text{Si} \quad \int_X f \, d\nu = 0, \quad \text{entonces} \quad f = 0 \quad \text{en casi todo punto.}$$

Teorema A.11. *Sea* $(X, \mathcal{M}, \nu)$ *un espacio medible con* ν *una medida finita; es decir,* $\nu(X) < \infty$*. Entonces, el conjunto de todas las funciones simples,* $\mathcal{S}_\nu$*, es denso en* $L^p(X, \nu)$*, para todo* $p \in [1, \infty)$

Teorema A.12 (Desigualdad de Hölder). *Sean* $p, q > 1$ *exponentes conjugados,* $f \in L^p(X, \nu)$ *y* $g \in L^q(X, \nu)$*. Entones,* $fg \in L^1(X, \nu)$ *y, se cumple la desigualdad*

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| \, d\nu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Proposición A.13 (Desigualdad de Chebyshev). *Sean* $f \in L^1(X, \mu)$*. Entonces*

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq k\}) \leq \frac{1}{k} \int_X |f| \, d\mu$$

Definición A.14. *Una función medible es integrable en el sentido débil, y lo denotamos como* $L_1^{\omega}(\mathbb{R}^n)$*, si existe una constante* $C > 0$ *(que depende solamente de n), tal que para todo* $t \in (0, +\infty)$ *se cumple*

$$\mu_n(\{x \in \mathbb{R}^n . |f(x)| > t\}) \leq \frac{C}{t}$$

Teorema A.15. *Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe una función continua con soporte compacto g tal que*

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

Proposición A.16. *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua de manera que para cualquier t, se cumple que*

$$f(x) = f(x - t)$$

salvo en un conjunto de medida de Lebesgue cero, entonces f es constante en casi todo punto.

Bibliografía

[1] Gerald B. Folland. *Real Analysis Modern Tecniques and Their Applications.* 2nd edition. John Wiley & Sons, INC, 1999.

[2] Wilman Brito. *Las Integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil.* http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/wilman_brito/integral2222cambio.pdf.

[3] Li Tao. *Radon-Nikodym Theorem and Its Applications.* http://home.ustc.edu.cn/~ltbyron/Radon-Nikodym%20Theorem%20And%20Its%20Applications.pdf.

Radon-Nikodym's Theorem and applications

Oliver Navío Velázquez
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101360546@ull.edu.es

Abstract

The objective of this work is the study, on the one hand, of the Radon-Nikodym Theorem together with some of its applications and on the other hand of the Lebesgue Differentiation Theorem.

1. Signed Measures

Let $(X, \mathcal{M})$ be a measurable space. We say that a function

$$\nu\colon \mathcal{M} \longrightarrow [-\infty, +\infty],$$

is a signed measure if it satisfies that:
(a) ν can take either the -∞ value or the +∞ value but not both.
(b) $\nu(\emptyset) = 0$.
(c) ν is countably additive.
Given two positive measures μ_1 y μ_2 that do not take the value ∞ at the same time, we can form a new signed measure μ_3 defined as

$$\mu_3(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E), \quad \forall E \in M$$

The Hahn decomposition theorem and the Jordan decomposition theorem, it say that all signed measure can be write this form.

Hahn decomposition theorem

Let ν be a signed measure over a measurable space $(X, \mathcal{M})$. Then, there exist a positive set A and a negative set B such that:

$$X = A \cup B \quad y \quad A \cap B = \emptyset$$

Let ν, μ be two signed measures over $(X, \mathcal{M})$. It say that they are mutually singular, and denoted as $\nu \perp \mu$, if there exist measurable and disjoint sets E and F such that

$$X = E \cup F \qquad \nu(E) = \mu(F) = 0$$

Jordan decomposition theorem

Let ν be a signed measure defined over a measurable space $(X, \mathcal{M})$, then there exist two unique positives measures ν^+ and ν^- such that

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \qquad y \qquad \nu^+ \perp \nu^-.$$

2. The Radon-Nikodym Theorem

Let λ be a measure and ν a positive measure over a measurable space $(X, \mathcal{M})$. We say that λ is absolutely continuous with respect to ν, and denoted as $\lambda \ll \nu$, if for every set $E \in (\mathcal{M})$ such that $\nu(E) = 0$, then $\lambda(E) = 0$
Given a integrable $f \in L^1(\mu)$ we can define a measure ν as follows:

$$\nu(E) = \int_E f\, d\mu.$$

Furthermore, this measure obtained is absolutely continuous with respect to the measure μ.
There is a powerful result known as the Radon-Nikodym Theorem, which allows us to reverse what was said above.

Lebesgue-Radon-Nikodym theorem

Let $(X, \mathcal{M})$ be a measurable space, ν a positive σ-finite measure and λ a σ-finite measure. Then, there exist two uniques measures λ_a and λ_s such that

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s$$

with $\lambda_a \ll \nu$ and $\lambda_s \perp \nu$.
Furthermore, there exist a function f ν-integrable such that, for every $E \in \mathcal{M}$,

$$\lambda_a(E) = \int_E f\, d\nu.$$

3. Applications of Radon-Nikodym Theorem

The dual space of L^p

Theorem Let $(X, \mathcal{M}, \nu)$ be a σ-finite measure space. Then, for every $p \in [1, \infty)$

$$(L^p)^* = L^q$$

where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Existence of conditional expectation

Let $(X, \mathcal{M}, \nu)$ be a probability space, a function $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \nu)$ and a sub-σ-algebra $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$. It define the conditional expectation of f with respecto of $\mathcal{M}_0$ to any function $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ that satisfies g is $\mathcal{M}_0$-measurable and for every set $E \in \mathcal{M}_0$ we have that

$$\int_E g\, d\nu = \int_E f\, d\nu.$$

We denote this function g as $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)$.

Theorem Let $(X, \mathcal{M}, \nu)$ be a probability space, $\mathcal{M}_0$ a sub-σ-algebra of $\mathcal{M}$ and $f \in L^1(X, \mathcal{M}, \nu)$. Then, $\mathbb{E}^{\mathcal{M}_0}(f)$ exist and is unique.

Uniqueness of Lebesgue measure

Theorem Let be a σ-finite translation invariant measure $\lambda : \mathcal{B}o(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, +\infty]$ such that $\lambda(K) < +\infty$ for every compact set K. Then, there exist $c \geq 0$ such that

$$\lambda(E) = c \cdot \mu_n(E)$$

for every $E \in \mathcal{B}o(\mathbb{R}^n)$. Where μ_n is the Lebesgue measure over $\mathbb{R}^n$.

4. Lebesgue Differentiation Theorem

Lebesgue's Differentiation Theorem is considered as an n-dimensional generalization of the Fundamental Theorem of Calculus.

The Lebesgue differentiation theorem

Let be $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Then, there exist a measurable set N with $\mu_n(N) = 0$ such that

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu_n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, d\mu_n(y) = f(x)$$

for every $x \notin N$.

References

[1] Gerald B. Folland. *Real Analysis Modern Tecniques and Their Applications*. 2nd edition. John Wiley & Sons, INC, 1999.

[2] Wilman Brito. *Las Integrales de Riemann, Lebesgue y Henstock-Kurzweil*.

[3] Li Tao. *Radon-Nikodym Theorem and Its Applications*.