

Víctor Joel Maciá Medina

*Análisis Complejo: la ecuación
 $\bar{\partial}$ y funciones armónicas en el
plano*

Complex Analysis: the $\bar{\partial}$ equation and harmonic
functions in the plane

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Marzo de 2017

DIRIGIDO POR

Juan Carlos Fariña Gil
Manuel T. Flores Mederos

Juan Carlos Fariña Gil
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Manuel T. Flores Mederos
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a Juan Carlos y a Manolo el tiempo que han dedicado a este trabajo. Las horas que hemos pasado discutiendo han sido más alentadoras e interesantes que la mayoría de los créditos que he hecho durante todos estos años pero, no sólo han sido eso también han sido divertidas e inspiradoras. Gracias por animarme a seguir aprendiendo.

También quiero dar las gracias a mi madre, a mi hermano y a Mérari por entender el tiempo y la dedicación que conlleva todo este tipo de actividades y por estar ahí incluso cuando yo no estaba.

La Laguna, 3 de marzo de 2017
Víctor Joel Maciá Medina

Resumen · Abstract

Resumen

La presente memoria versa sobre el Análisis Complejo clásico: funciones holomorfas y armónicas en el plano complejo. En el primer capítulo, nuestro objetivo ha sido reformular algunos resultados de la teoría clásica de funciones holomorfas desde el punto de vista de las ecuaciones diferenciales basado en las ecuaciones de Cauchy-Riemann no homogéneas. En el segundo tratamos la teoría de funciones armónicas en el plano tanto con técnicas de variable real como usando su relación con las funciones holomorfas.

Palabras clave: *Funciones holomorfas – Funciones armónicas – El Teorema de Runge – El problema $\bar{\partial}$ en el plano – Los Teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass – El problema de Dirichlet – Desigualdades de Harnack – Lema de Weyl.*

Abstract

In this memoir we are concerned with classical Complex Analysis: holomorphic and harmonic functions in the complex plane. Our aim in the first chapter has been to restate some well known results from the classical theory of holomorphic functions from a differential equations viewpoint based in the inhomogeneous Cauchy-Riemann equations. In the second we deal with the theory of harmonic functions in the plane both, by using real variable techniques and via its relation with holomorphic functions.

Keywords: *Holomorphic functions – Harmonic functions – Runge's Theorem – The $\bar{\partial}$ problem in the plane – The Mittag-Leffler and Weierstrass Theorems – Dirichlet's problem – Harnack's inequalities – Weyl's lemma.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Funciones analíticas de una variable compleja	1
1.1. Preliminares	1
1.2. Fórmula integral de Cauchy y aplicaciones	3
1.3. El Teorema de Runge	8
1.4. El problema $\bar{\partial}$	10
1.4.1. Los teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass	12
1.4.2. $\bar{\partial}$ con soporte compacto	15
1.4.3. El problema de Dirichlet para el operador $\bar{\partial}$	19
2. Funciones armónicas en el plano	27
2.1. Relación con las funciones holomorfas	27
2.2. La propiedad del valor medio y el principio del máximo	30
2.3. El problema de Dirichlet	35
2.4. Algunas propiedades de las funciones armónicas	39
2.4.1. La desigualdad y el Principio de Harnack	42
2.5. Soluciones débiles. El lema de Weyl	44
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

La memoria se ha dividido en dos capítulos donde, en el primero tratamos la teoría elemental de funciones holomorfas en el plano complejo haciendo uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann no homogéneas. Para ellas estudiamos problemas de valores de frontera en dominios acotados así como, para el caso no acotado, aquellos en los que se requiere encontrar soluciones con cierto comportamiento en el infinito. Con ayuda del Teorema de Runge abordaremos pruebas alternativas de los teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass via el conocido problema de Cousin aditivo.

En el capítulo 2 nos centramos en el estudio de las llamadas funciones armónicas que, como sabemos, al menos en el plano están relacionadas con la holomorfía: la parte real de toda función holomorfa es armónica y, al menos localmente, el recíproco también es válido.

El *operador de Laplace* o *Laplaciano* es quizás el operador diferencial más importante de todos los operadores en derivadas parciales no sólo por sus aplicaciones sino por el papel que juega en fenómenos más generales. Está definido por

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

La electrostática permite un marco físico en la que presentar el operador de Laplace ya que, de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, un campo electrostático \vec{E} en el espacio (que representa la fuerza sobre una unidad de carga positiva) está relacionado con la densidad de carga f por la ecuación $\nabla \cdot \vec{E} = f$ y también satisface $\nabla \times \vec{E} = 0$ (en n dimensiones $\nabla \times \vec{E}$ representa la matriz $(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j})_{i,j}$). La última condición significa que, al menos localmente, $\vec{E} = -\nabla u$ para alguna función u llamada *potencial electrostático*. Así $-\Delta u = \nabla \cdot \vec{E} = f$ y, por tanto, el Laplaciano relaciona el potencial con la densidad de carga.

Para terminar, unas palabras sobre la notación usada en lo que se refiere a los finales de los entornos destacados. En los finales de demostración usaremos el símbolo \square , los de final de observación \square y el correspondiente a los ejemplos será \boxtimes .

Funciones analíticas de una variable compleja

En las dos primeras secciones recordaremos las propiedades mas simples de las funciones analíticas que siguen de la fórmula integral de Cauchy. Incluimos una discusión sobre el Teorema de aproximación de Runge, el de Mittag-Leffler y el de Weierstrass que hacen referencia a la existencia de funciones meromorfas. Estos últimos representan el caso uno dimensional de los problemas de Cousin (en su versión aditiva y multiplicativa respectivamente) alrededor del que la Teoría de Funciones Analíticas se ha desarrollado. Las referencias básicas que hemos seguido son Bruna-Cufí [3] y Hörmander [7].

1.1. Preliminares

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función de clase C^1 en Ω , esto es $u = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en Ω . Si identificamos $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ via $z = x + iy \in \mathbb{C} \leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

por lo que la diferencial de u puede escribirse en términos de $dz = dx + idy$ y $d\bar{z} = dx - idy$ como

$$\begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{dz + d\bar{z}}{2} \right) - i \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{dz - d\bar{z}}{2} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde

$$\frac{\partial u}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Definición 1.1. Una función $u \in C^1(\Omega)$ se dice analítica (holomorfa) en Ω si

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (\text{Ecuaciones de Cauchy-Riemann})$$

en Ω . Equivalentemente, si du es proporcional a dz . Si u es analítica se denota $u' = \frac{\partial u}{\partial z}$. Además

$$\mathcal{O}(\Omega) := \{u: \Omega \rightarrow \mathbb{C} / u \text{ es analítica en } \Omega\}$$

denotará el espacio de todas las funciones holomorfas en Ω .

Si $\alpha, \beta: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ denotan las partes real e imaginaria de u , es decir $u = \alpha + i\beta$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right). \end{aligned}$$

Así, puesto que α y β son reales, las ecuaciones de Cauchy-Riemann equivalen al sistema lineal real

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{\partial \beta}{\partial y} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\frac{\partial \beta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Proposición 1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $u \in C^1(\Omega)$. Son equivalentes

- (a) $u \in \mathcal{O}(\Omega)$
- (b) Para todo $a \in \Omega$, $du(a): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es \mathbb{C} -lineal.

Demostración. Si $\Lambda = \lambda dx + \nu dy: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ($\lambda, \nu \in \mathbb{C}$) es una aplicación \mathbb{R} -lineal entonces, con $z = x + iy$ tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda(iz) &= \Lambda(-y + ix) = -\lambda y + \nu x \\ i\Lambda(z) &= i(\lambda x + \nu y) = (i\lambda)x + (i\nu)y \end{aligned} \quad (1.3)$$

y por tanto, comparando coeficientes en (1.3), $\Lambda(iz) = i\Lambda(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ equivale a $\nu = i\lambda$. Así $\Lambda = \lambda(dx + idy) = \lambda dz$. \square

Observación 1.3. Esto también puede verse directamente de la descomposición (1.1) que muestra que $\partial u := \frac{\partial u}{\partial z} dz$ y $\bar{\partial} u := \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ son las partes \mathbb{C} y anti \mathbb{C} - lineales de du respectivamente (Λ es anti \mathbb{C} - lineal si su conjugada $\bar{\Lambda}$ es \mathbb{C} lineal). \square

1.2. Fórmula integral de Cauchy y aplicaciones

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto acotado tal que $\partial\Omega$ consista en la unión de un número finito de curvas C^1 . Por la fórmula de Green, si $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

$$\oint_{\partial\Omega} u dz = \iint_{\Omega} d(u dz) = \iint_{\Omega} du \wedge dz$$

donde $\partial\Omega$ se considera positivamente orientada (de tal forma que Ω queda a la izquierda cuando se recorre $\partial\Omega$). Además, de (1.1)

$$du \wedge dz = \left(\frac{\partial u}{\partial z} dz + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \wedge dz = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz$$

y por tanto

$$\oint_{\partial\Omega} u dz = \iint_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz. \tag{1.4}$$

Una consecuencia inmediata de (1.4) es que

$$\oint_{\gamma} u(\zeta) d\zeta = 0$$

para toda curva cerrada simple γ contenida en Ω si la componente acotada $\hat{\gamma}$ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ está contenida en Ω y $u \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Teorema 1.4. Si $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(w)}{w - z} dw \wedge d\bar{w} \tag{1.5}$$

para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Si $z \in \Omega$ y $0 < \varepsilon < \text{dist}(z, \partial\Omega)$, aplicado (1.4) a la función

$$v(w) := \frac{u(w)}{w - z}$$

en $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \overline{D(z, \varepsilon)} = \{w \in \Omega \mid |w - z| > \varepsilon\}$ (obsérvese que la función $w \rightarrow \frac{1}{w - z}$ es analítica en Ω_ε , ver figura 1.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(w)}{w - z} d\bar{w} \wedge dw &= \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \left(\frac{u(w)}{w - z} \right) d\bar{w} \wedge dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, la primera integral tiende a

$$\frac{1}{2\pi i} \iint_{\Omega} \frac{\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(w)}{\zeta - z} d\bar{w} \wedge dw$$

ya que la función $w \rightarrow \frac{1}{w-z}$ es localmente integrable en Ω . Parametrizando la circunferencia $\partial D(z, \varepsilon)$ haciendo $\zeta = z + \varepsilon e^{i\theta}$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$), la última integral es igual a

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(z, \varepsilon)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(z),$$

y (1.5) sigue inmediatamente sin más que recordar que $dw \wedge d\bar{w} = -d\bar{w} \wedge dw$ por la antisimetría del producto exterior. \square

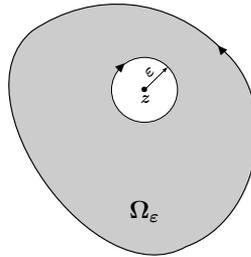


Figura 1.1. $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{D(z, \varepsilon)}$

Corolario 1.5. (a) Si $a \in \Omega$, $0 < r < \text{dist}(a, \partial\Omega)$ y u es analítica en Ω entonces

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - a| = r} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (1.6)$$

para todo $z \in D(a, r)$. En particular, parametrizando como antes la circunferencia $|\zeta - a| = r$ mediante $\zeta = a + r e^{i\theta}$ se deduce que las funciones analíticas poseen la propiedad del valor medio

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r e^{i\theta}) d\theta$$

(b) Si $\phi \in C_c^1(\mathbb{C})$ entonces

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(w)}{z - w} dA(w). \quad (1.7)$$

Aquí, y lo que sigue, dA denota el elemento diferencial de área ($dA(z) = dx dy$ si $z = x + iy$).

Demostración. (a) sigue inmediatamente de (1.5) en el disco $D(a, r)$ puesto que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ en $D(a, r) \Subset \Omega$. Tomando $z = a$ en (1.6) se obtiene

$$\begin{aligned} u(a) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-a|=r} \frac{u(\zeta)}{\zeta-a} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{u(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a+re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Para ver (b) basta observar que el término de frontera en (1.5) se anula puesto que ϕ tiene soporte compacto y si $w = x + iy$ entonces

$$dw \wedge d\bar{w} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2i dx \wedge dy = -2i dA(w). \quad \square$$

Observación 1.6. Como consecuencia de (1.6), $\mathcal{O}(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$ y derivando en $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0$ deducimos que $u' \in \mathcal{O}(\Omega)$ si $u \in \mathcal{O}(\Omega)$. Además, si u es holomorfa en el disco $D(0, r)$, también de (1.6), para $|z| < \rho < r$

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{u(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right) u(\zeta) d\zeta \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \end{aligned} \tag{1.8}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{u^{(k)}(0)}{k!}.$$

Esto significa que la serie de Taylor de u converge uniformemente en compactos del disco $D(0, r)$ y, por tanto, es analítica. Esto justifica el término “analítica” en la definición 1.1. \square

La identidad (1.7) sugiere una forma de resolver la ecuación no homogénea de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f \tag{1.9}$$

al menos cuando f tiene soporte compacto. En general, si $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, integrando por partes

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \phi \right\rangle &:= \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(w) \phi(w) dA(w) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(w) + i \frac{\partial u}{\partial y}(w) \right) \phi(w) dA(w) \\ &= \frac{1}{2} \left(\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial x}(w) \phi(w) dA(w) + i \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial u}{\partial y}(w) \phi(w) dA(w) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\iint_{\mathbb{C}} u(w) \frac{\partial \phi}{\partial x}(w) dA(w) + i \iint_{\mathbb{C}} u(w) \frac{\partial \phi}{\partial y}(w) dA(w) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{\mathbb{C}} u(w) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(w) + i \frac{\partial \phi}{\partial y}(w) \right) dA(w) \\ &= -\iint_{\mathbb{C}} u(w) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(w) dA(w) = -\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\rangle, \end{aligned}$$

lo que sugiere la siguiente

Definición 1.7. Si μ es una medida compleja con soporte compacto, diremos que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{C})$ (u localmente integrable, es decir, $\int_K u$ es finita para todo compacto $K \subset \mathbb{C}$) es solución débil de la ecuación $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \mu$ si

$$\left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\rangle = - \int_{\mathbb{C}} \phi(w) d\mu(w)$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$.

Con esta definición, ahora tenemos

Teorema 1.8. Si μ es una medida compleja de soporte compacto en el plano, la integral

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(w)}{z-w} \tag{1.10}$$

define una función localmente integrable y analítica en $\mathbb{C} \setminus \text{sop } \mu$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \mu$$

en sentido débil. En cualquier abierto Ω donde $d\mu(w) = \varphi(w) dA(w)$ con $\varphi \in C_c^k(\Omega)$ ($k \geq 1$) se tiene que $u \in C^k(\Omega)$ y

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi$$

en Ω .

Demostración. Que u es localmente integrable sigue del teorema de Fubini: si $K \Subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces

$$\iint_K |u(z)| dA(z) \leq \frac{1}{\pi} \iint_K \int_{\mathbb{C}} \frac{d|\mu|(w)}{|z-w|} dA(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \iint_K \frac{dA(z)}{|z-w|} d|\mu|(w),$$

pero, integrando en polares

$$\iint_K \frac{dA(z)}{|z-w|} \leq \int_0^{R+|w|} \int_0^{2\pi} d\theta d\rho = 2\pi(R+|w|)$$

si $R = \max\{|z| / z \in K\}$. Puesto que μ tienen soporte compacto, esto prueba que $u \in L^1_{loc}$.

La derivación bajo el signo integral es lícita si $z \notin \text{sop } \mu$ y por lo tanto $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \text{sop } \mu)$. Veamos ahora que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \mu$ en sentido débil: si $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ es una función test, entonces

$$\begin{aligned} \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}} \right\rangle &= \iint_{\mathbb{C}} u(z) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z) dA(z) = \iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu(w)}{z-w} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z) dA(z) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} - \int_{\mathbb{C}} \left(\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}}(z)}{w-z} dA(z) \right) d\mu(w) \stackrel{\text{por (1.7)}}{=} - \int_{\mathbb{C}} \phi(w) d\mu(w). \end{aligned}$$

Para probar la segunda afirmación, supongamos primero que φ tenga soporte compacto en \mathbb{C} . Cambiando variables podemos escribir

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z-w)}{w} dA(w).$$

Puesto que $1/w$ es localmente integrable, se puede derivar bajo el signo integral a los sumo k veces y las integrales así obtenidas son continuas. Por tanto $u \in C^k$ y de nuevo, por (1.7)

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(z-w)}{w} dA(w) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(w)}{z-w} dA(w) = \varphi(z).$$

Para terminar, si Ω es arbitrario podemos, para cada $a \in \Omega$, elegir una función $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ que sea $\equiv 1$ en un entorno V de a . Si $\mu_1 = \psi\mu$ y $\mu_2 = (1-\psi)\mu$, tenemos $u = u_1 + u_2$ donde

$$u_j(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{d\mu_j(w)}{z-w}.$$

Puesto que $\mu_1 = \psi(w)\varphi(w)dA(w)$ y $\psi\varphi \in C_c^k(\mathbb{C})$ deducimos que $u_1 \in C^k$ y $\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} = \psi\varphi$. Como $u_2 = 0$ en V , se sigue que $u_1 \in C^k$ y que $\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} = \varphi$ en V . □

Ejemplo 1.9. Computemos la integral de Cauchy (1.10) cuando $d\mu = \varphi(|\cdot|)dA$ cuando φ es integrable en $[0, +\infty)$. Integrando en coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\rho) \left(\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{z - \rho e^{i\theta}} \right) d\rho \\ &= 2 \int_0^\infty \varphi(\rho) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=\rho} \frac{d\zeta}{\zeta(z-\zeta)} \right) d\rho \\ &= \frac{2}{z} \int_0^{|z|} \varphi(\rho) d\rho, \end{aligned}$$

ya que la integral interior es igual a $1/z$ si $\rho < |z|$ y 0 si $\rho > |z|$. Así, si $\phi(r) = \int_0^r \varphi(\rho) d\rho$, como $\partial|z|/\partial\bar{z} = \frac{z}{2|z|}$ resulta que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{z}{z} \phi'(|z|) \frac{z}{2|z|} = |z| \varphi(|z|) \frac{1}{|z|} = \varphi(|z|). \quad \square$$

Teorema 1.10. Si $u \in \mathcal{O}(\Omega)$, para todo subconjunto compacto $K \subset \Omega$ y todo entorno abierto U de K en Ω existen constantes $C_m > 0$, $m = 1, 2, \dots$ (que sólo depende de K, Ω y m pero no de u) tales que

$$\max_K |u^{(m)}| \leq C_m \|u\|_{L^1(U)}. \quad (1.11)$$

Demostración. Sea $\psi \in C_c^\infty(U)$ tal que $\psi \equiv 1$ en un entorno $V \Subset U$ ($\bar{V} \subset U$) de K . Si $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\psi u) = u \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}$$

en Ω y por tanto

$$\psi(z)u(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} u(w) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(w) \frac{dA(w)}{z-w},$$

que implica

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \iint_U u(w) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(w) \frac{dA(w)}{z-w}$$

para $z \in V$. Puesto que $K \cap \text{sop} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} = \emptyset$, si $\delta := \text{dist}(K, \text{sop} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}) > 0$, derivando en la expresión anterior encontramos que para todo $z \in K$

$$u^{(m)}(z) = \frac{(-1)^m}{\pi} \iint_U u(w) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(w) \frac{dA(w)}{(z-w)^{m+1}}.$$

Así

$$\max_{z \in K} |u^{(m)}(z)| \leq \frac{\|\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}\|_U}{\pi \delta^{m+1}} \iint_U |u(w)| dA(w)$$

donde $\left\| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \right\|_U := \max_{w \in U} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}(w) \right|$. Esto es (1.11) con $C_m := \|\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}}\|_U / \pi \delta^{m+1}$. □

1.3. El Teorema de Runge

Si u es holomorfa en el disco $D(0, r)$, por la observación 1.6, u es límite uniforme de polinomios en compactos de $D(0, r)$, a saber, las sumas parciales

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

de la serie (1.8). Esto no sucede si para $0 < r_0 < 1 < r_1$ consideramos el anillo $\mathcal{A}(r_0, r_1) = \{z \in \mathbb{C} / r_0 < |z| < r_1\}$ puesto que la función $u(z) = 1/z$ no puede ser uniformemente aproximada por polinomios en la circunferencia unidad \mathbb{T} : si existiera una sucesión $\{p_n\}$ de polinomios tal que $p_n \rightarrow u$ cuando $n \rightarrow \infty$ uniformemente en \mathbb{T} , entonces $z p_n \rightarrow z u = 1$ (también uniformemente en \mathbb{T}) y por el principio de máximo esto también ocurriría en el disco unidad cerrado $\bar{\mathbb{D}}$ lo que es una contradicción en $z = 0$. Sin embargo, este es esencialmente el único contraejemplo en $\mathcal{A}(r_0, r_1)$ ya que de (1.5) razonando como en (1.8), si u es continua en $\mathcal{A}(r_0, r_1)$, para todo $z \in \mathcal{A}(r_0, r_1)$

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r_1} \frac{u(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r_0} \frac{u(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^{k+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k z^k}_{\text{polinomio en } z} + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{z^{k+1}}}_{\text{polinomio en } 1/z} \end{aligned} \tag{1.12}$$

donde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r_1} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta, \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r_0} \zeta^k u(\zeta) d\zeta$$

para $k = 0, 1, \dots$. Esto prueba que cualquier función holomorfa en un entorno de la circunferencia unidad se puede aproximar uniformemente por funciones racionales.

Como ya se puede intuir, la obstrucción para la aproximación polinómica está en el “agujero” $D(0, r_0)$ que tiene $\mathcal{A}(r_0, r_1)$ (los coeficientes b_k anteriores se anulan si u admite una extensión holomorfa a $D(0, r_0)$). El teorema de Runge 1.11 [7, 10] generaliza estas observaciones –nótese que los polinomios en z y en $1/z$ son, respectivamente, funciones racionales con polo en infinito y en 0–.

Teorema 1.11 (Runge). *Sea Ω un subconjunto abierto del plano complejo \mathbb{C} , $A \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ un subconjunto de la esfera de Riemann con un punto en cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ y $u \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces existe una sucesión $\{R_n\}$ de funciones racionales con polos sólo en A tal que $R_n \rightarrow u$ uniformemente en compactos de Ω .*

En particular, si $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, se puede tomar $A = \{\infty\}$ para obtener una sucesión de polinomios $\{P_n\}$ tal que $P_n \rightarrow u$ uniformemente en compactos de Ω .

Observación 1.12. Si nos permitimos la libertad de no prescribir el conjunto A en el teorema 1.11, los polos para las funciones racionales aproximantes se pueden elegir “simples”. Por ejemplo, para la función $1/z^n$

$$\frac{1}{z^n} \sim \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{z - a_k}$$

eligiendo $\varepsilon_k > 0$ adecuadamente donde a_1, a_2, \dots, a_n son puntos distintos próximos a 0. □

Como corolario inmediato tenemos

Corolario 1.13. *Sea $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto de un abierto Ω . Si cada componente relativamente compacta de $\mathbb{C} \setminus K$ contiene una componente acotada de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ entonces, toda función holomorfa en un entorno de K puede ser aproximada uniformemente en K por funciones holomorfas en Ω .*

Demostración. En estas hipótesis, podemos elegir los polos en un conjunto A disjunto de Ω y por tanto, las funciones racionales que proporciona el teorema 1.11 son holomorfas en Ω . □

Definición 1.14. *Si $K \subset \Omega$ es un subconjunto compacto de Ω y \widehat{K}_Ω denota la unión de K con las componentes de $\Omega \setminus K$ que son relativamente compactas en Ω , la hipótesis en el corolario 1.13 equivale a decir que $\widehat{K}_\Omega = K$. En este caso diremos que K es $\mathcal{O}(\Omega)$ -convexo.*

Observación 1.15. Si $r_0 < r < r_1$, el desarrollo (1.12) se puede reescribir como

$$u(z) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} u_\ell z^\ell \tag{1.13}$$

donde

$$u_\ell = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{\ell+1}} d\zeta$$

para todo $\ell \in \mathbb{Z}$. Nótese que por (1.6)

$$u_\ell = \begin{cases} a_\ell, & \text{si } \ell \geq 0 \\ b_{-\ell-1}, & \text{si } \ell < 0. \end{cases}$$

El desarrollo (1.13) (que converge uniformemente en compactos del anillo $\mathcal{A}(r_0, r_1)$) recibe el nombre de *desarrollo de Laurent* de u en $\mathcal{A}(r_0, r_1)$. \square

1.4. El problema $\bar{\partial}$

El teorema 1.8 proporciona una solución a la ecuación $\bar{\partial}$ no homogénea (1.9) si f tiene soporte compacto. Usando el teorema de Runge, a continuación veremos que esta condición sobre el soporte se puede relajar.

Teorema 1.16. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f \in C^\infty(\Omega)$, la ecuación $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ tiene solución $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\{K_j\}_{j \geq 1}$ un recubrimiento normal de Ω por compactos $\mathcal{O}(\Omega)$ -convexos, es decir,

- $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ ($j \geq 1$)
- $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$
- $\mathbb{C} \setminus K_j$ no posee componentes relativamente compactas en Ω

y $\psi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\psi_j \equiv 1$ en un entorno de K_j . Si $\varphi_1 := \psi_1$ y $\varphi_j := \psi_j - \psi_{j-1}$ para $j = 2, 3, \dots$, por construcción, $\varphi_j \equiv 0$ en un entorno de K_{j-1} y $\sum_j \varphi_j = 1$ en Ω . Atendiendo ahora al teorema 1.8, podemos encontrar una función $u_j \in C^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} = \varphi_j f$. En particular u_j es analítica en un entorno de K_{j-1} y por el teorema de Runge podemos elegir $v_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $\|u_j - v_j\|_{K_{j-1}} < 2^{-j}$. La suma

$$u := \sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j)$$

converge uniformemente en compactos de Ω y para cada $n = 1, 2, \dots$ podemos observar que $u = h + g$ donde

$$h = \sum_{j=1}^n (u_j - v_j) \quad \text{y} \quad g = \sum_{j=n+1}^{\infty} (u_j - v_j).$$

Obviamente $h \in C^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{O}(K_n)$ ya que $u_j - v_j \in \mathcal{O}(K_n)$ para $j > n$ ($\sum_{j>n} (u_j - v_j)$ converge uniformemente en K_n). Así $u \in C^\infty(\Omega)$ y puesto que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ puede ser calculado derivando término a término,

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \sum_j \varphi_j f = \left(\sum_j \varphi_j \right) f = f. \quad \square$$

- Observación 1.17.* 1. La condición de regularidad sobre f se puede relajar aún mas: si suponemos que $f \in C^k(\Omega)$ para algún $k \geq 1$, la demostración de este teorema proporciona una solución $u \in C^k(\Omega)$ (si $k = 0$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ será una solución débil de (1.9)). Esto es consecuencia de la propia demostración del teorema anterior usando la segunda parte del teorema 1.8.
2. Una diferencia importante con la solución encontrada en el teorema 1.8 es que no podemos asegurar que la solución construida en este teorema dependa linealmente del dato f^* .
3. Tal y como se definen los grupos de cohomología de De Rham para la derivada exterior, podemos considerar los grupos de cohomología $H^q_{\bar{\partial}}(\Omega)$ para $\bar{\partial}$. Por ejemplo, en el plano para grado 1 ($q = 1$), se dice que dos funciones $f, g \in C^\infty(\Omega)$ son equivalentes $f \sim g$ si existe $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $f - g = \partial u / \partial \bar{z}$. El primer grupo de cohomología $H^1_{\bar{\partial}}(\Omega)$ es el espacio cociente $C^\infty(\Omega) / \sim$ y, por tanto, el teorema 1.16 equivale a decir que $H^1_{\bar{\partial}}(\Omega) = 0$. \square

Una versión equivalente del teorema 1.16 es

Teorema 1.18 (Problema de Cousin aditivo). Sea $\Omega = \cup_j \Omega_j$ un recubrimiento abierto de Ω . Si $g_{jk} \in \mathcal{O}(\Omega_j \cap \Omega_k)$ satisfacen las condiciones

- (i) $g_{jk} = -g_{kj}$ en $\Omega_j \cap \Omega_k \neq \emptyset$
(ii) $g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0$ en $\Omega_j \cap \Omega_k \cap \Omega_l \neq \emptyset$,

entonces existen $g_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ tales que

$$g_{jk} = g_k - g_j$$

en $\Omega_j \cap \Omega_k$.

Puesto en términos de geometría algebraica este teorema significa que el primer grupo de cohomología de Čech $\check{H}^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ con coeficientes en el haz \mathcal{O}_Ω se anula. En otras palabras, cualquier co-ciclo (g_{jk}) (satisface las condiciones (i) y (ii)) es una co-frontera. De hecho, un resultado de Dolbeault establece que $\check{H}^1(\Omega, \mathcal{O}_\Omega)$ es isomorfo a $H^1_{\bar{\partial}}(\Omega)$ [11, teorema 3.17] que, por el teorema 1.16, es trivial.

Demostración. Sea φ_ν una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $\{\Omega_j\}$, ésto es, para cada ν existe i_ν tal que

- (a) $\varphi_\nu \in C_c^\infty(\Omega_{i_\nu})$.
(b) Todas salvo un número finito de las funciones φ_ν se anulan sobre cualquier compacto de Ω .
(c) $\sum_\nu \varphi_\nu = 1$ en Ω .

Puesto que $\varphi_\nu g_{i_\nu k} \in C^\infty(\Omega_k)$, $h_k := \sum_\nu \varphi_\nu g_{i_\nu k} \in C^\infty(\Omega_k)$ y además

$$h_k - h_j = \sum_\nu \varphi_\nu (g_{i_\nu k} - g_{i_\nu j}) \underset{\text{por (i) y (ii)}}{=} \sum_\nu \varphi_\nu g_{jk} = \left(\sum_\nu \varphi_\nu \right) g_{jk} \underset{\text{por (c)}}{=} g_{jk}.$$

Esto implica que $\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}}$ en $\Omega_k \cap \Omega_j$ y por tanto, $h = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}}$ en Ω_k define globalmente una función $h \in C^\infty(\Omega)$. Por el teorema 1.16 existe $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = h$. Tomando $g_j := h_j - u \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ tenemos $g_k - g_j = h_k - h_j = g_{jk}$. \square

* A este respecto hemos de señalar que no sabemos si existe un operador lineal solución para (1.9) en C^∞ , esto es, un operador $\bar{\partial}^{-1}: C^\infty(\mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\bar{\partial}(\bar{\partial}^{-1} f) = f$ para toda $f \in C^\infty(\mathbb{C})$.

Recíprocamente, el teorema 1.18 implica el teorema 1.16. Si $f \in C^\infty(\Omega)$ y escribimos $\Omega = \cup_j D_j$ como unión, por ejemplo, de discos, por el teorema 1.8 existen funciones $u_j \in C^\infty(D_j)$ tales que $\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} = f$ en D_j , y por tanto, las funciones $g_{jk} = u_k - u_j$ satisfacen las hipótesis del teorema 1.18. Así, en $D_j \cap D_k$, $g_{jk} = g_k - g_j$ con $g_j \in \mathcal{O}(D_j)$ y $u_j = u_j - g_j$ en D_j define globalmente una función $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$.

Observación 1.19. El siguiente ejemplo, tomado de [8], muestra que el teorema 1.18 no es cierto cuando consideramos funciones en varias variables complejas. Sea $\Omega = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ donde

$$\Omega_1 = \{(z, w) / z \neq 0\} = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$$

y

$$\Omega_2 = \mathbb{C} \times \{(z, w) / w \neq 0\} = \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Cualquier función g_1 holomorfa en Ω_1 tendrá un desarrollo de Laurent en la variable $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es decir,

$$g_1(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{kn} z^k \right) w^n.$$

De igual forma, si g_2 es holomorfa en Ω_2

$$g_2(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{kn} w^k \right) z^n.$$

En particular, la función $g_{12}(z, w) = -g_{21}(z, w) = 1/zw$ no podrá expresarse como diferencia $g_2 - g_1$ de funciones holomorfas en Ω_1 y Ω_2 puesto que estas diferencias carecen del término monomial $1/zw$.

Puesto que el teorema 1.18 sigue siendo equivalente al teorema 1.16, éste tampoco es cierto en el caso multidimensional [9, ejemplo 16.6.4]. Sin embargo, se debe a H. Cartan que, aunque $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ no es de holomorfia (por el teorema 1.32 cualquier función holomorfa en $\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ es la restricción de una función entera), el problema aditivo de Cousin siempre tiene solución (para este caso el problema $\bar{\partial}$ es soluble)*. ¡Esta clase de ejemplos no existen en \mathbb{C}^1 ni en \mathbb{C}^2 ! \square

1.4.1. Los teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass

El teorema de Mittag-Leffler establece que se pueden prescribir las partes singulares de funciones meromorfas, es decir, en cualquier abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si $\{z_j\}_{j \geq 1} \subset \Omega$ es una sucesión discreta de puntos distintos y f_j son funciones meromorfas en un entorno de z_j (localmente singular sólo en z_j), entonces existe una función f meromorfa en Ω , analítica excepto en los puntos z_j y tal que $f - f_j$ es holomorfa en un entorno de z_j . Este resultado se puede enunciar (de hecho esta es su formulación en varias variables complejas) como sigue

* En \mathbb{C}^3 , un dominio es de holomorfia si, y sólo si, el problema $\bar{\partial}$ es soluble para todos los posibles grados $q = 1, 2, 3$ [8, teorema 2.4 (Capítulo VI)] pero, aunque $H_{\bar{\partial}}^1(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) = 0$, en este caso resulta que $\dim_{\mathbb{C}} H_{\bar{\partial}}^2(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) = \infty$ [8, E.4.7 (Capítulo VI)].

Teorema 1.20. Sea $\Omega = \cup_j \Omega_j$ donde $\Omega_j \subset \mathbb{C}$ son abiertos. Si $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j)$ y para todo j, k $f_k - f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j \cap \Omega_k)$, entonces existe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que $f - f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ para todo j .

Demostración. Las diferencias $g_{jk} := f_k - f_j$ están en las hipótesis del teorema 1.18 y por tanto existen funciones $g_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ tales que $f_k - f_j = g_{jk} = g_k - g_j$. Esto quiere decir que $f := f_j - g_j$ en Ω_j define una función meromorfa en Ω y además $f - f_j = -g_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$. \square

Observación 1.21. Que este teorema implica el teorema de Mittag-Leffler sigue de la siguiente forma: sea $\{z_j\}_{j \geq 1}$ una sucesión discreta en Ω y

$$f_j(z) = \sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}(z - z_j)^{-k}, \quad j \geq 1$$

las “partes principales” dadas. Entonces, con $\Omega_j = \Omega \setminus \{z_k / k \neq j\}$, $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j)$ y el teorema 1.20 implica que existe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ holomorfa en $\Omega \setminus \{z_j / j \geq 1\}$ y que tiene a f_j como parte principal cerca de z_j , es decir, $f - f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$. \square

De igual forma, y siguiendo [2], podemos aplicar el teorema 1.16 para dar una demostración del teorema clásico de Weierstrass. Para ello necesitaremos la siguiente proposición que a su vez es un corolario inmediato de los lemas 1.23 y 1.24

Proposición 1.22. Si $S = \{z_k\}_{k \geq 1}$ es una sucesión discreta en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\{m_k\}$ una sucesión de enteros positivos no nulos, entonces existen entornos $V_k \Subset \Omega$ mutuamente disjuntos de z_k y una función $g \in C^\infty(\Omega)$ tales que

- (a) $g(z) \neq 0$ si $z \in \Omega \setminus S$, y
- (b) $g(z) = (z - z_k)^{m_k}$ si $z \in V_k$.

Lema 1.23. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $A \subset \Omega$ un subconjunto cerrado. Entonces existe una función no negativa $\psi \in C^\infty(\Omega)$ que se anula precisamente en A , es decir, $A = \psi^{-1}(0)$.

Demostración. Podemos poner $\Omega \setminus A$ como unión numerable de discos abiertos $\{D_k\}_{k \geq 1}$. Sean $\psi_k: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ tales que:

- (a) $\psi_k(z) > 0$ si y sólo si, $z \in D_k$, y
- (b) $\max_{|\gamma| \leq k} \|\nabla^\gamma \psi_k\|_\infty \leq 2^{-k}$.

Si $n \in \mathbb{N}$, por (b) para $|\gamma| \leq n$

$$\left| \sum_{k \geq n} \nabla^\gamma \psi_k \right| \leq \sum_{k \geq n} |\nabla^\gamma \psi_k| \leq \sum_{k \geq n} 2^{-k}$$

por lo que $\psi = \sum_k \psi_k$ es $C^\infty(\Omega)$. Además, (a) implica que $\psi(z) > 0$ si, y sólo si, $z \in D_k$ para algún k , así $\psi(z) > 0$ si, y sólo si, $z \notin A$. \square

Lema 1.24. Si $\{z_k\}$ es una sucesión como en la proposición 1.22, existe una sucesión de radios $0 < r_k < \min\{1, \text{dist}(z_k, \partial\Omega)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) tales que los discos $\overline{D}_k = \overline{D}(z_k, r_k)$ son mutuamente disjuntos y $A = \cup_k \overline{D}_k$ es cerrado en Ω .

Demostración. Puesto que la sucesión $\{z_k\}$ es discreta en Ω , para cada $k = 1, 2, \dots$ $\delta_k = \inf\{|z_k - z_j| \mid j \neq k\} > 0$. Por tanto, con $r_k = \min\{1, \delta_k/2, \text{dist}(z_k, \partial\Omega)\}$, la clausura de los discos $D_k = D(z_k, r_k)$ son mutuamente disjuntos. Veamos ahora que $A = \cup_k \overline{D}_k$ es cerrado en Ω : si $\{w_j\}$ es una sucesión en A que converge a un punto $a \in \Omega$ y z_{k_j} es tal que $|w_j - z_{k_j}| \leq r_{k_j}$ entonces, para todo $\varepsilon > 0$,

$$|z_{k_j} - a| \leq |z_{k_j} - w_j| + |w_j - a| < r_{k_j} + \varepsilon \quad (1.14)$$

si j es suficientemente grande. Así, la sucesión $\{z_{k_j}\}$ está acotada y, si fuese infinita, tendría algún punto de acumulación $b \in \partial\Omega$ (¡en cuyo caso debe ser no vacía!). En este caso podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $z_{k_j} \rightarrow b$ cuando $j \rightarrow \infty$ y puesto que

$$r_{k_j} \leq \text{dist}(z_{k_j}, \partial\Omega) \underset{b \in \partial\Omega}{\leq} |z_{k_j} - b| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

(1.14) implica que $|b - a| \leq \varepsilon$. Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $b = a$ que es una contradicción ya que $a \in \Omega$ pero $b \in \partial\Omega$. Así, la sucesión $\{z_{k_j}\} = \{z_{k_{j_1}}, z_{k_{j_2}}, \dots, z_{k_{j_n}}\}$ debe ser finita y por tanto, $a \in \overline{D}_{k_{j_\ell}}$ para algún $\ell = 1, 2, \dots, n$ (recuérdese que a es un punto límite de A). Esto prueba que A contiene a sus puntos de acumulación en Ω y, por tanto, es cerrado en Ω . \square

Observación 1.25. La demostración del lema 1.24 muestra que aunque los discos D_k no sean mutuamente disjuntos, la unión de sus clausuras sigue siendo cerrada en Ω siempre que sus radios estén uniformemente acotados. Sin embargo, para ver que la condición de acotación sobre los radios es necesaria (al menos cuando los discos no son disjuntos), basta considerar en $\Omega = \mathbb{C}$ la sucesión $z_k = k$ y los radios $r_k = k - 1/k$ para los que $A = \{\text{Re } z > 0\}$ no es cerrado. \square

Demostración (de la proposición 1.22). Sean $V_k = D(z_k, r_k/2)$ donde r_k son los radios de los discos D_k que proporciona el lema 1.24, $A = \cup_k \overline{D}_k$ y $\varphi \in C_c^\infty$ con soporte $\overline{D}(0, 1)$ tal que $\varphi \equiv 1$ en $\overline{D}(0, 1/2)$ y $\varphi > 0$ en $D(0, 1)$. Entonces, si ψ es la función que proporciona el lema 1.23 para A (que es cerrado en Ω por el lema 1.24), la función

$$g = \psi + \sum_k (z - z_k)^{m_k} \varphi \left(\frac{|z - z_k|}{r_k} \right)$$

está bien definida y es C^∞ en Ω (obsérvese que, puesto que los V_k son mutuamente disjuntos, todos salvo a lo sumo uno de los términos en la serie que define g es no nulo). Por construcción,

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_k)^{m_k} \varphi\left(\frac{|z - z_k|}{r_k}\right), & \text{si } z \in D_k, k = 1, 2, \dots \\ \psi(z), & \text{si } z \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

de donde (a) y (b) son aparentes. □

Teorema 1.26 (Weierstrass). Sea $\{z_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión discreta de puntos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $\{m_k\}_{k \geq 1}$ una sucesión de enteros no nulos. Entonces existe una función meromorfa f en Ω sin ceros en $\Omega \setminus \{z_k / k \geq 1\}$ tal que para cada k

$$f(z) = (z - z_k)^{m_k} f_k(z)$$

en algún entorno V_k de z_k donde $f_k \in \mathcal{O}^*(V_k)$ (f_k holomorfa sin ceros en V_k).

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m_k \geq 1$. El caso general sigue considerando el cociente de dos de estas funciones holomorfas.

Obsérvese que la función g construida en la proposición 1.22 satisface las condiciones requeridas en el teorema salvo que no es holomorfa en Ω . Ahora, usando el teorema 1.16, modificaremos g para construir f : la idea es encontrar $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $f = ge^u$. Como f debe ser holomorfa en Ω , esto es, $\partial f / \partial \bar{z} = 0$, la condición sobre u será

$$e^u \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + g \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) = 0$$

por lo que u debe satisfacer la ecuación $\bar{\partial}$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$$

en Ω . Puesto que $g \in \mathcal{O}(V_k)$, el segundo miembro de esta ecuación define una función en $C^\infty(\Omega)$ que, por el teorema 1.16, tiene una solución $u \in C^\infty(\Omega)$. Por último, la función $f = ge^u$ se anula exactamente donde lo hace g , esto es, en los puntos $\{z_k / k \geq 1\}$ y puesto que

$$f(z) = (z - z_k)^{m_k} e^{u(z)}$$

en cualquier V_k , podemos tomar $f_k(z) = e^{u|_{D_k(z)}}$ que es holomorfa y no tiene ceros en V_k . □

Siguiendo [3], en los apartados que siguen consideraremos la ecuación $\bar{\partial}$ en el espacio de funciones con soporte compacto así como un problema tipo Dirichlet que, aunque paralelo al clásico para funciones armónicas y que estudiaremos en el siguiente capítulo, para el caso que nos ocupa es un problema sobre-determinado pues en general sólo tendrá soluciones bajo ciertas condiciones de compatibilidad.

1.4.2. $\bar{\partial}$ con soporte compacto

Si el dato $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ tiene soporte compacto, en general la ecuación (1.9) no admite soluciones u con soporte compacto. En efecto, por (1.4), si $u \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ entonces

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{C}} f(z) dA(z) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{|z| \leq r} f(z) dA(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{|z| \leq r} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} dA(z) \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{|\zeta|=r} u(\zeta) d\zeta = 0 \end{aligned}$$

ya que la última integral es cero si $r > 0$ es suficientemente grande supuesto que u tenga soporte compacto. De la misma forma, los momentos

$$\mu_k[f] = \iint_{\mathbb{C}} z^k f(z) dA(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

deben necesariamente anularse.

Por otro lado, hay unicidad de soluciones para este problema ya que, por el principio de identidad, la diferencia de dos soluciones sería entera con soporte compacto y por tanto igual a cero.

El siguiente teorema prueba que el recíproco también es cierto.

Teorema 1.27. Si $f \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ tiene momentos $\mu_k[f] = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, entonces existe una única función $u \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ tal que $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ en \mathbb{C} .

Demostración. Por el teorema 1.8 sólo hemos de ver que la función

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(w)}{z-w} dA(w)$$

tiene soporte compacto. Como f tiene soporte compacto, u es holomorfa fuera del soporte de f , es decir, en un entorno del infinito. El desarrollo de u en el infinito se obtiene haciendo $\tau = 1/z$ para $|\tau|$ pequeño. Pero

$$\begin{aligned} u(1/\tau) &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\tau f(w)}{1-w\tau} dA(w) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\iint_{\mathbb{C}} w^k f(w) dA(w) \right) \tau^{k+1} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k[f] \tau^{k+1} = 0 \end{aligned}$$

y $u(z) \equiv 0$ si $|z|$ es suficientemente grande (nótese que el desarrollo anterior es válido si $|\tau| < 1/d$ donde $d \geq |z|$ para todo $z \in \text{sop } f$). Por tanto, como se quería demostrar, u tiene soporte compacto. \square

Observación 1.28. Si f es meramente $C_c^k(\mathbb{C})$ para algún $k \geq 1$, la función u obtenida en este teorema es, de acuerdo al teorema 1.8, $C_c^k(\mathbb{C})$. Además, u se anula en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \text{sop } f$, es decir, $\text{sop } u \subset \text{sop } f$. \square

Ejemplo 1.29. Si $\varphi \in C_c^\infty((0, +\infty))$ y $f(z) = \varphi(|z|^2)$ entonces,

$$\begin{aligned} \mu_k[f] &= \iint_{\mathbb{C}} z^k f(z) dA(z) = \iint_{\mathbb{C}} z^k \varphi(|z|^2) dA(z) \\ &= \int_0^\infty \varrho^{k+1} \varphi(\varrho^2) d\varrho \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta \\ &= \begin{cases} 2\pi \int_0^\infty \varrho \varphi(\varrho^2) d\varrho, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Así, por el teorema 1.27, la ecuación $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$ tendrá solución con soporte compacto si, y sólo si,

$$\int_0^\infty \varphi(t) dt = 2 \int_0^\infty \varrho \varphi(\varrho^2) d\varrho = 0. \quad (1.16)$$

Bajo esta condición, la función

$$\phi(t) := \int_0^1 \varphi(ts) ds$$

es $C_c^\infty((0, +\infty))$ ya que, por (1.16)

$$\phi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(v) dv = \frac{1}{t} \int_0^\infty \varphi(v) dv = 0$$

para $t > 0$ suficientemente grande. Esto implica que

$$\varphi(t) = \frac{d}{dt} (t\phi(t)) = \phi(t) + t \frac{d\phi}{dt}(t) \quad (1.17)$$

si $t > 0$ por lo que, si $u(z) := \bar{z}\phi(|z|^2)$, $u \in C_c^\infty(\mathbb{C})$ y además, por (1.17)

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \phi(|z|^2) + |z|^2 \phi'(|z|^2) = \varphi(|z|^2) = f(z). \quad \square$$

El problema $\bar{\partial}$ en varias variables: el teorema de Hartogs

El problema $\bar{\partial}$ en \mathbb{C}^n con coordenadas (z_1, z_2, \dots, z_n) consiste en, dadas $f_j: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ($j = 1, 2, \dots, n$), resolver el sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = f_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} = f_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_n} = f_n. \end{cases} \quad (1.18)$$

Si $f = \sum f_j d\bar{z}_j$, obviamente una condición necesaria para que (1.18) tenga solución es que $\bar{\partial} f = 0$, es decir

$$\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}$$

para todo $1 \leq j < k \leq n$. Al contrario de lo que ocurre en una dimensión, (1.18) *siempre tiene solución con soporte compacto* si $\text{sop } f_j$ es compacto para $j = 1, 2, \dots, n$ [9].

Teorema 1.30. *Supongamos que $n > 1$ y sea $f = \sum f_j d\bar{z}_j$ una $(0, 1)$ -forma con coeficientes C^1 y soporte compacto $K = \cup_j \text{sop } f_j$ tal que $\bar{\partial}f = 0$. Sea Ω_0 la componente no acotada de $\mathbb{C}^n \setminus K$. Entonces existe una única $u \in C^1(\mathbb{C}^n)$ que resuelve la ecuación $\bar{\partial}u = f$ y además $u = 0$ en Ω_0 .*

Demostración. Definamos

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f_1(w, z_2, \dots, z_n)}{z_1 - w} dA(w). \quad (1.19)$$

Del teorema 1.8, $u \in C^1(\mathbb{C}^n)$ y $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} = f_1$. Además, para $2 \leq j \leq n$, derivando en (1.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}(z) &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_j}(w, z_2, \dots, z_n)}{z_1 - w} dA(w) \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_1}(w, z_2, \dots, z_n)}{z_1 - w} dA(w) \\ &= f_j(z) \end{aligned}$$

por (1.7) aplicado a f_j con z_2, z_3, \dots, z_n fijos. Así, $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} = f_j$ para $1 \leq j \leq n$ que es precisamente (1.18).

En particular, u es holomorfa en Ω_0 . Puesto que de la expresión (1.19) $u(z) = 0$ cuando $|z_2|$ es suficientemente grande (¡aquí es donde se usa que $n > 1$!), la conexidad de Ω_0 implica que $u = 0$ en todo Ω_0 .

Por último, la unicidad de u sigue como en el caso uno dimensional. \square

Observación 1.31. Si $u \in C^1(\mathbb{C}^n)$ tiene soporte compacto está claro que, como para el caso $n = 1$, la integral de $\partial u / \partial \bar{z}_j$ sobre \mathbb{C}^n es 0. Las hipótesis en el teorema 1.30 implican, por tanto, que cada coeficiente f_j de f tiene integral 0 sobre \mathbb{C}^n . \square

El Teorema 1.30 se puede usar para demostrar el siguiente teorema de Hartogs que informalmente viene a decir que los dominios de holomorfa “no tienen agujeros” cuando $n > 1$.

Teorema 1.32. *Supongamos que $n > 1$, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ abierto y $K \subset \Omega$ compacto tal que $\Omega \setminus K$ es conexo. Entonces toda función g holomorfa en $\Omega \setminus K$ tiene una extensión que es holomorfa en todo Ω .*

Demostración. Sea $\psi \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$ tal que $\psi = 1$ en un entorno U de K y con soporte compacto $K_0 \subset \Omega$. Sea

$$f = \begin{cases} g\bar{\partial}\psi & \text{en } \Omega \setminus K \\ 0 & \text{en el resto de } \mathbb{C}^n. \end{cases}$$

Puesto que $\bar{\partial}\psi = 0$ en U y fuera de K_0 , f es una $(0, 1)$ -forma con coeficientes $C^\infty(\mathbb{C}^n)$ con soporte contenido en K_0 . Sea Ω_0 la componente no acotada de $\mathbb{C}^n \setminus K_0$, u la solución de la ecuación $\bar{\partial}u = f$ que se anula en Ω_0 (teorema 1.30) y consideremos la función

$$G = \begin{cases} u + (1 - \psi)g & \text{en } \Omega \setminus K \\ u & \text{en } U. \end{cases}$$

Puesto que $\psi \equiv 1$ en U , G está bien definida y $G \in C^\infty(\mathbb{C}^n)$. Además

- En U , $\bar{\partial}G = \bar{\partial}u = f = 0$.
- En $\Omega \setminus K$, $\bar{\partial}G = \bar{\partial}u - g\bar{\partial}\psi = f - f = 0$ ($\bar{\partial}g = 0$ en $\Omega \setminus K$)

y, por tanto, G es holomorfa en Ω .

Para terminar, en $\Omega_0 \cap \Omega \setminus K$ tenemos $\psi = u = 0$, así $G = g$. Puesto que $\Omega_0 \cap \Omega \setminus K$ no es vacío y $\Omega \setminus K$ es conexo, las funciones holomorfas G y g deben coincidir en todo $\Omega \setminus K$. \square

Para ilustrar el teorema 1.32, sea $n > 1$ y $0 < r < 1$. Entonces, toda función holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n / r < |z| < 1\}$ extiende a una función holomorfa en $B = \{z \in \mathbb{C}^n / |z| < 1\}$. En particular, para $n > 1$, los ceros de funciones holomorfas no son aislados: si $p \in \Omega$ es un punto en un abierto Ω , g es holomorfa en Ω tal que $g(p) = 0$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega \setminus \{p\}$, entonces $1/g$ es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ pero no admite extensión holomorfa (ni siquiera continua) a p .

1.4.3. El problema de Dirichlet para el operador $\bar{\partial}$

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto, el problema (1.9) tiene solución $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ para cualquier dato $f \in L^1(\Omega) \cap C(\Omega)$. Cualquier otra solución es de la forma $u + h$ con $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ (por el lema de Weyl 2.35, cualquier solución localmente integrable de $\partial u / \partial \bar{z} = 0$ es automáticamente regular). Si como en el teorema 1.27 queremos unicidad, habrá que imponer condiciones adicionales.

Si suponemos que Ω es acotado con frontera regular a trozos orientada positivamente (como haremos en lo que sigue), una posibilidad es prescribir la solución en $\partial\Omega$ y considerar el problema tipo Dirichlet siguiente: dadas $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$ encontrar $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Que este problema tiene una única solución, si es que tiene alguna, se debe a que la diferencia de dos soluciones $u_1 - u_2$ es holomorfa en Ω pero se anula en $\partial\Omega$ y, por tanto, $u_1 = u_2$ en Ω . Por otro lado, como en el estudio del problema $\bar{\partial}$ con soporte compacto, si el problema (1.20) tiene solución entonces, para cualquier función holomorfa h en un entorno de $\bar{\Omega}$ tendremos por (1.4)

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} g(\zeta)h(\zeta)d\zeta &= \oint_{\partial\Omega} u(\zeta)h(\zeta)d\zeta = 2i \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(uh)dA(z) \\ &= 2i \iint_{\Omega} h \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} dA(z) = 2i \iint_{\Omega} h(z)f(z)dA(z). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Con $f = 0$, el problema (1.20) da respuesta a la pregunta sobre qué funciones $g \in C(\partial\Omega)$ son valores de frontera de funciones holomorfas $u \in C(\overline{\Omega})$. En este caso, (1.21) se reduce a

$$\oint_{\partial\Omega} g(\zeta) h(\zeta) d\zeta = 0 \tag{1.22}$$

para cualquier función $h \in C(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega)$. Pero, por la observación 1.12, tales funciones h se pueden aproximar por funciones racionales con polos simples en $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega}$ y, por tanto, (1.22) es equivalente a

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \notin \partial\Omega. \tag{1.23}$$

El siguiente teorema prueba que esta condición también es suficiente

Teorema 1.33. *Si Ω es acotado con frontera de clase C^1 entonces, una función $g \in C(\partial\Omega)$ admite una extensión continua a $\overline{\Omega}$ holomorfa en Ω si, y sólo si, satisface las condiciones equivalentes (1.22) ó (1.23).*

Demostración. La función buscada debe ser la integral de Cauchy dada por

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Usaremos (1.23) para probar que

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \Omega}} u(z) = g(a) \tag{1.24}$$

para todo $a \in \partial\Omega$. Para ello, existe una proyección π bien definida para $z \in \Omega$ suficientemente cercano a $\partial\Omega$ en el sentido que $\pi(z) \in \partial\Omega$ es el punto de $\partial\Omega$ mas cercano a z , esto es, $\text{dist}(z, \partial\Omega) = |z - \pi(z)|$ (aquí es donde se usa la hipótesis de regularidad de $\partial\Omega$). Denotemos por $z^* \notin \Omega$ el punto en la normal exterior a $\partial\Omega$ cuya distancia a $\pi(z)$ sea igual a $\text{dist}(z, \partial\Omega) = |z^* - \pi(z)|$ (figura 1.2).

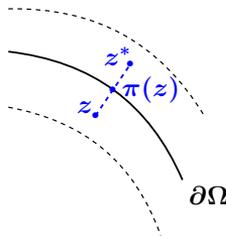


Figura 1.2. Proyección π

Entonces, por (1.23)

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z^*} d\zeta = 0$$

y consecuentemente

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} g(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z^*} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{z - z^*}{(\zeta - z)(\zeta - z^*)} g(\zeta) d\zeta.$$

El núcleo

$$P_{\bar{\partial}}(z, \zeta) := \frac{z - z^*}{(\zeta - z)(\zeta - z^*)}$$

posee las siguientes propiedades

- (a) $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} P_{\bar{\partial}}(z, \zeta) d\zeta = 1$ si $z \in \Omega$,
- (b) $|P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)| \lesssim \frac{\text{dist}(z, \partial\Omega)}{|\zeta - z|^2}$ si $z \in \Omega$ y $\zeta \in \partial\Omega$,
- (c) $\oint_{\partial\Omega} |P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)| |d\zeta| \lesssim 1$ si $z \in \Omega$,
- (d) $\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \Omega}} \int_{|\zeta - a| \geq \delta} |P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)| |d\zeta| = 0$ si $a \in \partial\Omega$ y $\delta > 0$.

Aquí, si α y β son dos funciones reales, la notación $\alpha(z) \lesssim \beta(z)$ significa que existe una constante $C > 0$ tal que $\alpha(z) \leq C\beta(z)$ para aquellos z involucrados en dicha estimación. En caso que exista algún parámetro subyacente (δ por ejemplo) denotaremos por $\alpha(z) \lesssim_{\delta} \beta(z)$ si $C = C_{\delta}$ depende de éste.

(a) es consecuencia de (1.23) y de la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 1$$

si $z \in \Omega$ ya que $z^* \notin \Omega$. Para (b) obsérvese que si $\zeta \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} |\zeta - z| &\leq |z - \pi(z)| + |\pi(z) - \zeta| = \text{dist}(z, \partial\Omega) + |\pi(z) - \zeta| \\ &\leq \text{dist}(z, \partial\Omega) + |\pi(z) - z^*| + |\zeta - z^*| \\ &= 2 \text{dist}(z, \partial\Omega) + |\zeta - z^*| \leq 3|\zeta - z^*| \end{aligned}$$

ya que $\text{dist}(z, \partial\Omega) \leq |\zeta - z^*|$.

(c) sigue de (b) tan pronto veamos que

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} \lesssim \frac{1}{\text{dist}(z, \partial\Omega)}.$$

Para ello, por el teorema de Fubini

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} = 2 \oint_{\partial\Omega} \left(\int_{|\zeta - z|}^{\infty} \frac{dt}{t^3} \right) |d\zeta| = 2 \int_{\text{dist}(z, \partial\Omega)}^{\infty} \left(\int_{|\zeta - z| \leq t} |d\zeta| \right) \frac{dt}{t^3}$$

y puesto que la función

$$t \geq \text{dist}(z, \partial\Omega) \rightarrow \int_{|\zeta - z| \leq t} |d\zeta|$$

es continua y constante para t suficientemente grande,

$$\int_{|\zeta - z| \leq t} |d\zeta| \lesssim t, \quad t \geq \text{dist}(z, \partial\Omega).$$

Así

$$\oint_{\partial\Omega} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} \lesssim \int_{\text{dist}(z, \partial\Omega)}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\text{dist}(z, \partial\Omega)}.$$

De la misma forma, si $\delta > 0$, $a \in \partial\Omega$ y $|z - a| < \delta/2$ ($z \in \Omega$), por (b)

$$\int_{|\zeta - a| \geq \delta} |P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)| |d\zeta| \lesssim \text{dist}(z, \partial\Omega) \int_{|\zeta - a| \geq \delta} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^2} \lesssim \frac{\text{dist}(z, \partial\Omega)}{\delta^2}$$

ya que $|\zeta - z| \geq |\zeta - a| - |z - a| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$ si $|\zeta - a| \geq \delta$. Esto implica (d).

Procedemos ahora con la demostración de (1.24). Por (a)

$$u(z) - g(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\Omega} P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)(g(\zeta) - g(a)) d\zeta.$$

Puesto que g es continua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$ para el que $|g(\zeta) - g(a)| < \varepsilon$ siempre que $|\zeta - a| < \delta_0$ y $\zeta \in \partial\Omega$. La contribución del arco $I_{\delta_0} = \{\zeta \in \partial\Omega / |\zeta - a| < \delta_0\}$ a la integral anterior está mayorada por

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{I_{\delta_0}} P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)(g(\zeta) - g(a)) d\zeta \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{I_{\delta_0}} |P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)| |d\zeta| \underset{\text{por (c)}}{\lesssim} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con este δ_0 fijo, por (d), para algún $\delta > 0$

$$\int_{\partial\Omega \setminus I_{\delta_0}} |P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)| |d\zeta| \lesssim_{\delta_0} \varepsilon$$

si $|z - a| < \delta$, y por tanto

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega \setminus I_{\delta_0}} P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)(g(\zeta) - g(a)) d\zeta \right| \leq \frac{\|g\|_{\infty}}{\pi} \int_{\partial\Omega \setminus I_{\delta_0}} |P_{\bar{\partial}}(z, \zeta)| |d\zeta| \lesssim_{\delta_0} \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consecuentemente $|u(z) - g(a)| < \varepsilon$ para $|z - a| < \delta$ que prueba (1.24). \square

Para el problema general (1.20) tenemos

Teorema 1.34. Si $f \in C(\bar{\Omega})$ y $g \in C(\partial\Omega)$ el problema (1.20) tiene solución si, y sólo si, f y g satisfacen la condición de compatibilidad (1.21).

Demostración. La función

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(w)}{z - w} dA(w)$$

es continua en $\bar{\Omega}$. Si h es holomorfa en $\bar{\Omega}$ tenemos

$$\oint_{\partial\Omega} (g(\zeta) - v(\zeta))h(\zeta) d\zeta = 2i \iint_{\Omega} f(z)h(z) dA(z) - \oint_{\partial\Omega} v(\zeta)h(\zeta) d\zeta,$$

pero

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} v(\zeta)h(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{\pi} \oint_{\partial\Omega} \left(\iint_{\Omega} \frac{f(w)}{z - w} dA(w) \right) h(\zeta) d\zeta \\ &= \iint_{\Omega} f(w) \left(\frac{1}{\pi} \oint_{\partial\Omega} \frac{h(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \right) dA(w) \end{aligned}$$

$$= 2i \iint_{\Omega} h(w) f(w) dA(w).$$

Consecuentemente, $g - v$ satisface la condición (1.22) y por el teorema 1.33 es la restricción a $\partial\Omega$ de una función $\tilde{v} \in C(\bar{\Omega})$ holomorfa en Ω . La función $u := v + \tilde{v}$ satisface $u = g$ en $\partial\Omega$, $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = f$ en Ω y por tanto es la solución del problema (1.20) buscada. \square

Observación 1.35. Si Ω es simplemente conexo ($\mathbb{C}_{\infty} \setminus \Omega$ conexo), toda función holomorfa en un entorno de Ω es límite uniforme en $\bar{\Omega}$ de polinomios. La condición (1.22) se transforma en

$$\oint_{\partial\Omega} \zeta^k g(\zeta) d\zeta = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Por ejemplo, en el caso particular del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$, esto se puede reescribir

$$\hat{g}(-n) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} g(e^{i\theta}) d\theta = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Por tanto, una función continua $g: \mathbb{T} = \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ admite una extensión holomorfa a \mathbb{D} si, y sólo si, sus coeficientes de Fourier negativos se anulan. De igual forma, la condición (1.21) se puede, también en el caso simplemente conexo, sustituir por

$$\oint_{\partial\Omega} \zeta^k g(\zeta) d\zeta = 2i \iint_{\Omega} z^k f(z) dA(z), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.25)$$

Por último, cabe también señalar que el teorema 1.27 es consecuencia del teorema 1.34 pues si $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{C})$, la condición (1.15) sobre los momentos de f se reduce a la condición (1.25) (con $g = 0$) sobre cualquier disco que contenga al soporte de f . \square

La fórmula de salto de Sokhotskii/Plemelj

Las fórmulas (1.27) y (1.28) que expresan los valores de frontera de integrales tipo Cauchy fueron descubiertas por Yu V. Sokhotskii en 1873. Con demostraciones más completas pero bastante más tarde, en 1908, éstas fueron redescubiertas por J. Plemelj.

El problema de determinar una función u en términos de sus valores sobre una curva γ es equivalente a resolver un problema de Cauchy para la ecuación de Laplace y, por tanto, no está bien propuesto: la solución puede no existir, no ser única o no depender continuamente de los valores de frontera. Por ejemplo, si $\delta, \varepsilon > 0$, la función

$$u(z) = \frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta^2 + z^2}$$

satisface

$$|u(x)| = \frac{\delta^2 \varepsilon}{\delta^2 + x^2} \leq \varepsilon$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, pero $|u(z)| \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow \pm i\delta$. Puesto que δ y ε pueden ser tomados arbitrariamente pequeños, vemos que no importa cuán pequeña sea u en $y = 0$, que u puede ser muy grande a una distancia arbitrariamente pequeña de $y = 0$. Esto

muestra que intentar especificar u sobre la curva dada es un problema mal planteado. Sin embargo, se pueden considerar problemas bien propuestos en los que, por ejemplo, se especifican $\operatorname{Re} u$ ó $\operatorname{Im} u$ en γ o su salto de a través de γ .

Si u es holomorfa en un entorno de la componente acotada $\hat{\gamma}$ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ de una curva cerrada simple γ de clase C^1 , como consecuencia de la fórmula integral de Cauchy ((1.5) con $\Omega = \hat{\gamma}$),

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega.$$

De forma mas general, si g es una función continua sobre γ , la integral de Cauchy

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (1.26)$$

define una función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ (como antes, sus derivadas pueden ser calculadas derivando bajo el signo integral). La cuestión ahora es ¿cuál es el límite de $u(z)$ cuando $z \rightarrow a \in \gamma$? Resulta que, como sugiere la demostración del teorema 1.33, la respuesta depende de en qué lado de γ z se aproxima a a .

A modo de ilustración, supongamos que g es holomorfa en un entorno de $a \in \gamma$ y denotemos por $\hat{\gamma}^+ / \hat{\gamma}^-$ el lado izquierdo/derecho de γ (de acuerdo a la orientación usada en la integral (1.26), figura 1.3). Ahora deformamos γ sustituyendo $\gamma_\varepsilon = \gamma \cap D(a, \varepsilon) \subset \gamma$ por una porción de circunferencia C_ε como también se muestra en la figura 1.3 ($\varepsilon > 0$ es lo suficientemente pequeño para que g sea holomorfa en $D(a, 2\varepsilon)$).



Figura 1.3. Contorno original/modificado

Puesto que estos contornos son homótopos dentro del disco $D(a, \varepsilon)$,

$$u_+(a) = \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \hat{\gamma}^+}} u(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \hat{\gamma}^+}} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon} \right) \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma \setminus \gamma_\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon} \right) \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta.$$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ la contribución de la integral en C_ε es $f(a)/2$ (el factor $1/2$ aparece porque estamos integrando sólo sobre “media” circunferencia). Por tanto

$$u_+(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \frac{g(a)}{2} \quad (1.27)$$

donde

$$\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma \setminus \gamma_{\varepsilon}} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta$$

denota el *Valor Principal* de la integral considerada. Tal y como sucede para integrales singulares, este límite siempre existe por la cancelación que presenta el núcleo de Cauchy.

Si nos aproximamos a a desde el lado derecho $\hat{\gamma}^-$ reemplazando γ_{ε} por la “semicircunferencia” $C'_{\varepsilon} = \partial D(a, \varepsilon) \setminus C_{\varepsilon}$, del mismo razonamiento anterior

$$u_-(a) = \lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in \hat{\gamma}^-}} u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \frac{g(a)}{2} \tag{1.28}$$

ya que, en este caso, la integración en C'_{ε} ocurre en la dirección opuesta a la de C_{ε} . Las relaciones (1.27) y (1.28) se conocen como la **fórmulas de Sokhotskii/Plemelj** y son equivalentes a

$$\begin{cases} u_+(a) + u_-(a) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta \\ u_+(a) - u_-(a) = g(a). \end{cases} \tag{1.29}$$

En el caso en que γ sea C^1 a trozos, (1.27) y (1.28) toman la forma

$$\begin{cases} u_+(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta + \left(1 - \frac{\beta}{2\pi}\right) g(a) \\ u_-(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta - a} d\zeta - \frac{\beta}{2\pi} g(a) \end{cases} \tag{1.30}$$

donde β es el ángulo interior en un punto de “esquina” $a \in \gamma$ de acuerdo con la orientación de γ (figura 1.4).

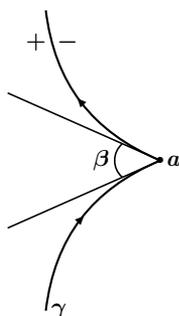


Figura 1.4. Ángulo interior en $a \in \gamma$

En general [1], las fórmulas (1.30) son válidas si para algún $0 < \alpha \leq 1$ $g \in Lip_{\alpha}$, es decir, si g satisface la condición de Hölder

$$|g(\zeta_1) - g(\zeta_2)| \leq C |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha, \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \gamma$$

para alguna constante $C > 0$.

Nótese que cuando γ es C^1 en a , $\beta = \pi$ y las fórmulas (1.30) se reducen a (1.27) y (1.28).

Por último, obsérvese que la demostración del teorema 1.33, permite ver que la segunda ecuación en (1.29) es válida si g es meramente continua sobre γ ya que, bajo sus hipótesis $u_- = 0$.

Funciones armónicas en el plano

En este capítulo, siguiendo [3, 4, 5] y [10], abordaremos el estudio de las funciones armónicas, es decir, aquellas funciones $u \in C^2$ definidas en un abierto plano Ω para las que

$$\Delta u = (\nabla \cdot \nabla) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

En la primera sección consideraremos su relación con las funciones holomorfas estudiadas en el capítulo anterior mientras que, en la segunda, se estudiará la propiedad de la media y el principio del máximo desde un punto de vista real con técnicas que permiten generalizarlos a dimensiones superiores. Consideraremos además el problema de Dirichlet en el disco unidad donde se presenta el núcleo de Poisson y la correspondiente representación integral para su solución.

En la penúltima sección recogeremos algunas de sus propiedades: singularidades evitables, teorema de Liouville y el principio de Harnack.

Para finalizar el capítulo introduciremos, al igual que se hizo en el capítulo precedente, la noción de solución débil y probaremos un caso particular del conocido Lema de Weyl.

2.1. Relación con las funciones holomorfas

En el capítulo anterior probamos que si $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es C^1 , $du = \partial u + \bar{\partial} u$ donde $\partial u = \frac{\partial u}{\partial z} dz$ y $\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$, es decir, $d = \partial + \bar{\partial}$. Ahora, si $d^c := -i(\partial - \bar{\partial})$ entonces

$$\left. \begin{aligned} 2\partial u &= du + i d^c u \\ 2\bar{\partial} u &= du - i d^c u \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

Nótese que d^c es un operador real ya que

$$\overline{d^c u} = i(\bar{\partial} \bar{u} - \partial \bar{u}) = -i(\partial \bar{u} - \bar{\partial} \bar{u}) = d^c \bar{u}.$$

En particular $d^c u$ es real si u lo es y si $u \in C^2(\Omega)$

$$-i d d^c u = -(\partial + \bar{\partial})(\partial u - \bar{\partial} u) = \partial \bar{\partial} u - \bar{\partial} \partial u = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} dz \wedge d\bar{z}.$$

En coordenadas reales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{4} \Delta u. \quad (2.2)$$

El operador que aparece en la última línea se llama *Laplaciano* y las funciones $u \in C^2(\Omega)$ tales que $\Delta u = 0$ en Ω se denominan *armónicas*.

Proposición 2.1. Si $u = \alpha + i\beta: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es de clase C^1 en Ω entonces u es holomorfa en Ω si, y sólo si, $d\beta = d^c \alpha$ en Ω .

Demostración. Si $u \in \mathcal{O}(\Omega)$, de (2.1)

$$du = i d^c u \Rightarrow d\alpha + i d\beta = i(d^c \alpha + i d^c \beta) = -d^c \beta + i d^c \alpha,$$

que implica $d\beta = d^c \alpha$ ya que los operadores d y d^c son reales. Recíprocamente, puesto que $d\beta = \partial\beta + \bar{\partial}\beta$ y $d^c \alpha = -i(\partial\alpha - \bar{\partial}\alpha)$, si $d\beta = d^c \alpha$ se sigue que

$$\bar{\partial}\alpha + i\bar{\partial}\beta = \partial\alpha - i\partial\beta = 0^*.$$

Así $\bar{\partial}(\alpha + i\beta) = 0$ y $u = \alpha + i\beta$ es holomorfa. □

Observación 2.2. En coordenadas reales

$$\begin{aligned} d^c \alpha &= -i(\partial\alpha - \bar{\partial}\alpha) = -i \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} dz - \frac{\partial\alpha}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right) \\ &= -\frac{i}{2} \left(\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} - i \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right) (dx + i dy) - \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + i \frac{\partial\alpha}{\partial y} \right) (dx - i dy) \right) \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial x} dy - \frac{\partial\alpha}{\partial y} dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

con lo que la ecuación $d\beta = d^c \alpha$ equivale, como establece la proposición, a las ecuaciones de Cauchy-Riemann (1.2).

Por otro lado, si identificamos la 1-forma $d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y} dy$ con el campo gradiente $\nabla\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \vec{j}$ vemos que

$$J\nabla\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial x} \end{pmatrix}$$

que a su vez se identifica con $d^c \alpha$. Así, $d^c \alpha$ no es mas que la rotación anti horaria de 90° de $d\alpha$. Nótese que $J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no es mas que el endomorfismo real inducido por la multiplicación por $i = \sqrt{-1}$. □

* El miembro de la derecha en la primera igualdad es proporcional a dz mientras el segundo lo es a $d\bar{z}$. Puesto que dz y $d\bar{z}$ son \mathbb{C} -linealmente independientes se sigue que ambos son nulos.

Como consecuencia, la parte real de una holomorfa en Ω debe ser armónica pues

$$\Delta \alpha \, dz \wedge d\bar{z} = -2i \, dd^c \alpha = -2i \, d^2 \beta = 0$$

en Ω puesto que, como consecuencia del teorema de Schwarz [4, teorema 1.22], $d^2 = 0$.

Como prueba la siguiente proposición, al menos localmente el recíproco también es cierto

Proposición 2.3. *Si $\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en el disco unidad, entonces existe $\beta: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u := \alpha + i\beta$ es holomorfa en \mathbb{D} .*

Demostración. Este resultado es consecuencia del Lema de Poincaré ya que por hipótesis la 1-forma $d^c \alpha$ es cerrada y por tanto exacta en \mathbb{D} (ver apéndice D en [4] por ejemplo). Para ser más explícitos, la expresión (2.3) y la proposición 2.1 sugiere tomar

$$\beta(z) := \int_0^1 \left(y \frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) - x \frac{\partial \alpha}{\partial y}(tz) \right) dt$$

para la que en efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial x}(z) &= \int_0^1 \left(ty \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(tz) - tx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}(tz) - \frac{\partial \alpha}{\partial y}(tz) \right) dt \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \int_0^1 \left(ty \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}(tz) + tx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}(tz) + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(tz) \right) dt \\ &\quad \Delta \alpha = 0 \\ &= - \int_0^1 \left(t \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial y}(tz) \right] + \frac{\partial \alpha}{\partial y}(tz) \right) dt \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left[t \frac{\partial \alpha}{\partial y}(tz) \right] dt = -t \frac{\partial \alpha}{\partial y}(tz) \Big|_{t=0}^{t=1} = - \frac{\partial \alpha}{\partial y}(z). \end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta}{\partial y}(z) &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) + ty \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}(tz) - tx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2}(tz) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) + ty \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y}(tz) + tx \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}(tz) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) + t \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) \right] \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \left[t \frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) \right] dt = t \frac{\partial \alpha}{\partial x}(tz) \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(z) \end{aligned}$$

que son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Esto prueba que $u = \alpha + i\beta \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$. \square

La función obtenida en esta proposición se llama *armónica conjugada* de α y es única salvo constantes. En efecto, si β_1 y β_2 son dos conjugadas de α , entonces $\alpha + i\beta_1$ y $\alpha + i\beta_2$ serían holomorfas en \mathbb{D} lo que implica que $\beta_2 - \beta_1$ sería real holomorfa y por tanto constante en \mathbb{D} atendiendo, por ejemplo, al teorema de la aplicación abierta [10, Capítulo 10].

2.2. La propiedad del valor medio y el principio del máximo

El análogo a la identidad (1.5) para el operador de Laplace [4] es

Teorema 2.4. Si $u: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ es C^2 en \mathbb{D} y continua en el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, entonces

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos\theta, \text{sen}\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \Delta u(x, y) dx dy.$$

Demostración. Si

$$\Theta(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) d\theta, \quad 0 < r \leq 1$$

entonces

$$\begin{aligned} \Theta'(r) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} u(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial u}{\partial x}(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) \cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) \text{sen}\theta \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) d(r \text{sen}\theta) - \frac{\partial u}{\partial y}(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) d(r \cos\theta) \\ &= \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial D(0,r)} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Green

$$\Theta'(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D(0,r)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D(0,r)} \Delta u dx dy \quad (2.4)$$

e integrando en r , por el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \Theta(1) &= \Theta(0) + \int_0^1 \Theta'(r) dr = u(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\iint_{D(0,r)} \Delta u(x, y) dx dy \right) \frac{dr}{r} \\ &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{dr}{r} \right) \Delta u(x, y) dx dy \\ &= u(0) + \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}} \ln r \Big|_{r=\sqrt{x^2+y^2}}^{r=1} \Delta u(x, y) dx dy \\ &= u(0) - \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \Delta u(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Así

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\cos\theta, \text{sen}\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{D}} \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \Delta u \, dx \, dy$$

según queríamos probar. □

Corolario 2.5. Si u es armónica en el disco unidad \mathbb{D} , entonces u posee la propiedad del valor medio, es decir

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) d\theta$$

para todo $0 \leq r < 1$.

Demostración. Esto sigue como consecuencia del teorema anterior sin mas que considerar la función $u_r(z) = u(rz)$ que es armónica en un entorno de $\bar{\mathbb{D}}$ ya que $\Delta u_r = r^2 \Delta u$. □

De acuerdo con la siguiente proposición, el recíproco también es cierto.

Proposición 2.6. Si $u \in C^2(\mathbb{D})$ y $a \in \mathbb{D}$, entonces

$$\Delta u(a) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{4}{r^2} \int_0^{2\pi} (u(a + r e^{i\theta}) - u(a)) \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{2.5}$$

Demostración. (2.4) implica que

$$|\Theta'(r)| \leq \frac{1}{2\pi r} \left| \iint_{D(0,r)} \Delta u \, dx \, dy \right| \leq \frac{M \text{Área}(D(0,r))}{2\pi r} = \frac{M \pi r^2}{2\pi r} = \frac{Mr}{2} \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0,$$

y por tanto $\Theta'(0) = 0$ ($M > 0$ es, por ejemplo, una cota para Δu en $D(0, 1/2)$). Consecuentemente, por el teorema del valor medio para integrales

$$\Theta''(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Theta'(r)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi r^2} \iint_{D(0,r)} \Delta u \, dx \, dy = \frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0^+} \Delta u(z_r) = \frac{\Delta u(0)}{2}$$

donde $z_r \in D(0, r)$. Por consiguiente

$$\frac{\Delta u(0)}{2} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Theta(r) - \Theta(0) - \Theta'(0)r}{r^2/2} = 2 \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\Theta(r) - \Theta(0)}{r^2},$$

esto es,

$$\Delta u(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{4}{r^2} \int_0^{2\pi} (u(r \cos\theta, r \text{sen}\theta) - u(0)) \frac{d\theta}{2\pi}. \tag{2.6}$$

Por último, si $a \in \mathbb{D}$, la función $v(z) = u(a + z)$ es C^2 en el disco de radio $D(0, 1 - |a|)$ y (2.6) implica la proposición. □

Observación 2.7. 1. La proposición 2.6 también es un corolario inmediato del teorema 2.4 pues aplicado a las dilatadas u_r se sigue que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - u(0))d\theta &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Delta} \ln|z| \Delta u_r(z) dA(z) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \Delta u_r(z_r) \iint_{\Delta} \ln|z| dA(z) = \frac{r^2}{4} \Delta u(rz_r) \end{aligned}$$

donde $|z_r| < 1$ ya que $\iint_{\Delta} \ln|z| dA(z) = -\pi/2$. Haciendo $r \rightarrow 0^+$ tras las manipulaciones algebraicas obvias esto implica (2.5) para $a = 0$.

2. El corolario 2.5 también sigue de la existencia local de funciones armónicas conjugadas y del apartado (a) del corolario 1.5. En efecto, toda función armónica α en \mathbb{D} es la parte real de una función holomorfa u allí ($\alpha = \text{Re } u$) y por tanto, del corolario 1.5(a)

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta \Rightarrow \text{Re } u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re } u(re^{i\theta})d\theta.$$

3. Como ya hemos visto, puesto que las traslaciones/dilataciones conservan armonicidad, para toda función armónica en un dominio Ω se tiene que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta \tag{2.7}$$

si $a \in \Omega$ y $0 \leq r < \text{dist}(a, \partial\Omega)$.

4. Multiplicando por $\rho d\rho$ e integrando en r en (2.7) obtenemos

$$u(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} u(a + \rho e^{i\theta})d\theta \right) \rho d\rho = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|w| \leq r} u(a + w) dA(w). \tag{2.8}$$

Esto quiere decir que u también posee la *propiedad del valor medio en área*. \square

La propiedad de valor medio de área implica el siguiente análogo al teorema 1.10.

Corolario 2.8. *Sea u es armónica en una abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Para todo compacto $K \Subset \Omega$ y todo entorno abierto $U \subset \Omega$ de K existe $C > 0$ (que depende de K y Ω pero no de u) tal que*

$$\max_K |u| \leq C \|u\|_{L^1(U)}.$$

Demostración. Sea $\delta < \text{dist}(K, \partial U)/2$. Si $z_0 \in K$ y $|z - z_0| \leq \delta$, por (2.8) tenemos que

$$|u(z)| \leq \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|w| \leq \delta} |u(z+w)| dA(w) \leq \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_U |u(w)| dA(w) = \frac{1}{\pi\delta^2} \|u\|_{L^1(U)}. \quad \square$$

Observación 2.9. Para ser más precisos, el corolario 2.8 es más débil que lo que afirma el teorema 1.10 por cuanto allí se presentan estimaciones para las derivadas de u en términos de la norma L^1 . Sin embargo, si $r > 0$ y u es armónica en un entorno del disco cerrado $\overline{D(0, r)}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|w| \leq r} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy \underset{\text{Green}}{=} \frac{1}{\pi r^2} \oint_{|\zeta|=r} u dy \tag{2.9}$$

ya que $\partial u / \partial x$ también es armónica si u lo es. Así,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(0) \right| \leq \frac{1}{\pi r^2} \oint_{|\zeta|=r} |u| dy \leq \frac{2}{r} \max_{\overline{D(0, r)}} |u|$$

y por tanto,

$$\max_{|z| \leq r} \|\nabla u(z)\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{r} \max_{|z| \leq 2r} |u(z)|.$$

Obsérvese que si además suponemos $u \geq 0$, (2.9) implica que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(0) \right| \leq \frac{2}{r} u(0)$$

y por consiguiente

$$\|\nabla u(0)\| \leq \frac{2\sqrt{2}}{r} u(0). \tag{2.10}$$

□

Consecuencia de la propiedad del valor medio es el siguiente *principio del máximo*

Teorema 2.10 (principio de máximo). Si $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica en un dominio Ω y para algún $a \in \Omega$, $\alpha(z) \leq \alpha(a)$ para todo $z \in \Omega$ entonces α es constante.

Demostración. Sea $A = \{z \in \Omega / \alpha(z) = \alpha(a)\}$. Puesto que $A \neq \emptyset$, para probar que α es constante en Ω veremos que es A simultáneamente abierto y cerrado (Ω se supone conexo). A es cerrado puesto que α es continua. Si $z_0 \in A \cap \Omega$ y $0 < r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, por la propiedad del valor medio

$$\int_0^{2\pi} (\alpha(z_0 + \rho e^{i\theta}) - \alpha(z_0)) d\theta = 0$$

para todo $0 \leq \rho \leq r$. Puesto que $\alpha(z_0) = \alpha(a) = \max\{\alpha(z) / z \in \Omega\}$, el integrando en la igualdad anterior es ≤ 0 y por tanto $\alpha(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \alpha(z_0)$ cualquiera que sea $\theta \in [0, 2\pi]$ y $0 \leq \rho \leq r$. Esto implica que el disco centrado en z_0 y radio r está contenido en A y por tanto, A es abierto. □

El hecho que $\partial\alpha/\partial z$ es holomorfa cuando α es armónica permite enunciar la siguiente versión del teorema anterior

Teorema 2.11 (versión local del principio del máximo). Sean Ω y α como en el teorema anterior. Si α tiene un máximo local en algún $a \in \Omega$ entonces α es constante.

Demostración. La demostración del teorema anterior muestra que α debe ser constante en un entorno de cualquier máximo local pero entonces, la función $u := \partial\alpha/\partial z$ (que es holomorfa puesto que α es armónica (2.2)) debe, por el principio de identidad, anularse idénticamente. Como consecuencia α también debe ser constante en todo el dominio Ω . \square

Corolario 2.12. Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es acotado y α es armónica real continua en $\overline{\Omega}$, entonces

$$\max_{z \in \Omega} \alpha(z) = \max_{\zeta \in \partial\Omega} \alpha(\zeta).$$

Demostración. Por continuidad, el máximo se alcanza en algún punto de $\overline{\Omega}$. Si esto sucede en un punto interior, α es constante en la componente conexa que lo contiene (teorema 2.10) y por tanto, el máximo también se alcanza en $\partial\Omega$. \square

Corolario 2.13 (Teorema de unicidad). Sea Ω acotado y u, v armónicas complejas en Ω continuas en $\overline{\Omega}$. Si $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces $u = v$ en Ω .

Demostración. Las partes reales e imaginarias de $u - v$ y $v - u$ son armónicas reales en Ω y se anulan en $\partial\Omega$. Por el corolario 2.12, $u = v$ en Ω . \square

El siguiente teorema muestra que la hipótesis de regularidad para el recíproco del teorema del valor medio puede relajarse sustancialmente.

Teorema 2.14. Si u es continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y satisface (2.7), entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y armónica en Ω .

Demostración. De acuerdo con la proposición 2.6 basta probar que $u \in C^\infty(\Omega)$. Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{D})$ radial ($\phi(z) = \psi(|z|)$, $z \in \mathbb{D}$). Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, sean $\phi_\varepsilon(z) := \phi(z/\varepsilon)/\varepsilon^2$ y $\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega \mid \text{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Entonces, si $z \in \Omega_\varepsilon$, la función $w \rightarrow \phi_\varepsilon(z - w)$ tiene soporte en Ω y

$$\begin{aligned} u * \phi_\varepsilon(z) &= \iint_{\Omega} u(w) \phi_\varepsilon(z - w) dA(w) = \iint_{\Omega} u(z - w) \phi_\varepsilon(w) dA(w) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{|w| \leq \varepsilon} u(z - w) \phi(w/\varepsilon) dA(w) = \iint_{|w| \leq 1} u(z - \varepsilon w) \phi(w) dA(w) \\ &= \int_0^1 \varrho \psi(\varrho) \left(\int_0^{2\pi} u(z - \varepsilon \varrho e^{i\theta}) d\theta \right) d\varrho = 2\pi u(z) \int_0^1 \varrho \psi(\varrho) d\varrho \\ &= u(z) \iint_{\mathbb{D}} \phi(w) dA(w) = u(z). \end{aligned}$$

Puesto que $\phi \in C^\infty$, $u = u * \phi_\varepsilon$ también lo es en Ω_ε (las derivadas sobre u las absorbe ϕ que es C^∞). Como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño concluimos que $u \in C^\infty(\Omega)$. □

Corolario 2.15. *Si u es armónica en Ω entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Basta aplicar sucesivamente el corolario 2.5 y el teorema 2.14. □

Corolario 2.16. *Si $\{u_k\}$ es una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente en compactos de Ω a una función u , entonces u es armónica en Ω .*

Demostración. Puesto que cada u_k satisface las hipótesis del teorema 2.14, u también. □

2.3. El problema de Dirichlet

Al igual que el problema estudiado en el apartado 1.4.3, para el operador de Laplace podemos considerar el siguiente problema de Dirichlet: dada una función continua $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ en un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{C}$, encontrar $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ continua en $\bar{\Omega}$ y armónica en Ω tal que $u|_{\partial\Omega} = g$. Ahora, a diferencia con el caso de \bar{D} , no hay obstrucciones y, como consecuencia del principio del máximo, la solución a este problema (si existe) es única. A continuación pasamos a estudiarlo en el caso particular del disco unidad.

Para $a \in \mathbb{D}$ consideremos el automorfismo φ_a del disco unidad dado por $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. φ_a es de hecho holomorfo en un entorno de \bar{D} puesto que su única singularidad es $z = 1/\bar{a} \notin \bar{D}$ y proporciona un difeomorfismo de \mathbb{T} . Si u es armónica en \mathbb{D} y continua en \bar{D} , la función $u \circ \varphi_a$ también lo es (esto es consecuencia de que la composición de funciones holomorfas es holomorfa). Por la propiedad del valor medio encontramos que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi_a(e^{i\theta})) d\theta$$

y haciendo el cambio de variables $e^{i\tau} = \varphi_a(e^{i\theta})$ tenemos

$$e^{i\theta} d\theta = \varphi'_a(e^{i\tau}) e^{i\tau} d\tau \Rightarrow d\theta = |\varphi'_a(e^{i\tau})| d\tau.$$

Un sencillo cálculo nos permite ver que $\varphi'_a(z) = \frac{|a|^2-1}{(1-\bar{a}z)^2}$ y por tanto

$$|\varphi'_a(e^{i\tau})| = \frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}e^{i\tau}|^2} = \frac{1-|a|^2}{|e^{i\tau}-a|^2}.$$

Así

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2} u(e^{i\theta}) d\theta. \tag{2.11}$$

Al núcleo $P(z, e^{i\theta}) := \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ se le llama *núcleo de Poisson*, es armónico en z ya que, como se puede comprobar fácilmente,

$$P(z, e^{i\theta}) = \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right]. \tag{2.12}$$

P tiene las siguientes propiedades

- (P_1) $P(z, e^{i\theta}) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y todo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- (P_2) $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta = 1$ para todo $|z| < 1$.
- (P_3) $\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} \int_{|\theta - \theta_0| \geq \delta} P(z, e^{i\theta}) d\theta = 0$ si $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ y $0 < \delta < \pi/2$.

(P_1) es inmediata de la propia expresión del núcleo y (P_2) sigue de (2.11) para la función constante $u = 1$. Para ver (P_3), si $|z - e^{i\theta_0}| \leq \delta/\pi$ y $|\theta - \theta_0| \geq \delta$ entonces

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} - z| &\geq |e^{i\theta} - e^{i\theta_0}| - |e^{i\theta_0} - z| \geq |1 - e^{i(\theta - \theta_0)}| - \frac{\delta}{\pi} \\ &\geq \sin \delta - \frac{\delta}{\pi} \geq \frac{2\delta}{\pi} - \frac{\delta}{\pi} = \frac{\delta}{\pi} \end{aligned}$$

si $0 < \delta < \pi/2$ (nótese que $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ cuando $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, figura 2.1). Así

$$\int_{|\theta - \theta_0| \geq \delta} P(z, e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{\pi^2}{\delta^2} (1 - |z|^2)$$

para $|z - e^{i\theta_0}| \leq \delta/\pi$. (P_3) sigue inmediatamente ya que $|z| \rightarrow 1$ si $z \rightarrow e^{i\theta_0}$.

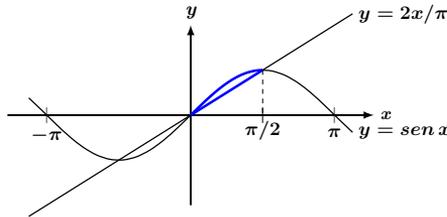


Figura 2.1. $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Las propiedades (P_1), (P_2) y (P_3) pueden observarse gráficamente en la figura 2.2 donde se muestra el comportamiento de

$$P_r(\theta) := P(r, e^{i\theta}) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}, \quad (0 \leq \theta < 1, \theta \text{ real})$$

para $r \uparrow 1$. Nótese que $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$, que $P_r(\theta) < P_r(\delta)$ si $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$ y que

$$\lim_{r \rightarrow 1} P_r(\delta) = 0$$

para todo $0 < \delta \leq \pi$.

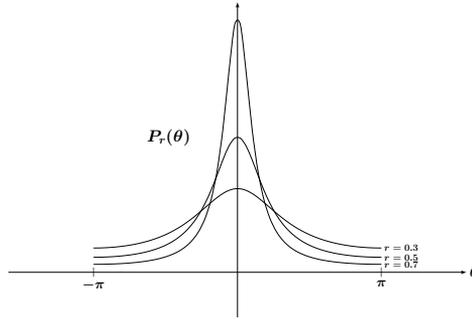


Figura 2.2. El núcleo de Poisson

Observación 2.17. Si u es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $0 < r < \text{dist}(a, \partial\Omega)$, la función $z \rightarrow u(a + rz)$ es armónica en \mathbb{D} y de (2.11) se sigue que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z - a|^2}{|a + re^{i\theta} - z|^2} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

para todo $|z - a| < r$. □

El siguiente resultado da respuesta a la existencia de soluciones para el problema de Dirichlet.

Teorema 2.18. Si $g \in C(\partial\mathbb{D})$, entonces $P[g]$ definida por

$$P[g](z) = \begin{cases} g(z), & \text{si } |z| = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} g(e^{i\theta}) d\theta, & \text{si } |z| < 1 \end{cases}$$

es continua en $\bar{\mathbb{D}}$ y armónica en \mathbb{D} .

Demostración. Las propiedades anteriores son muy parecidas a las usadas en la demostración del teorema 1.33 y, de hecho, la prueba del teorema sigue las mismas líneas que en aquel.

Por lo dicho anteriormente sólo hemos de probar que $P[g]$ es continua en $\bar{\mathbb{D}}$. Fijemos θ_0 y veamos que $P[g]$ es continua en $e^{i\theta_0}$. Si $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ para el que $|g(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta_0})| < \varepsilon$ si $|\theta - \theta_0| < \delta$. Para este δ fijo, por las propiedades (P₁) y (P₂) tenemos

$$\begin{aligned} |P[g](z) - g(e^{i\theta})| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})(g(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta_0})) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta - \theta_0| \leq \delta} P(z, e^{i\theta}) |g(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta_0})| d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta-\theta_0| \geq \delta} P(z, e^{i\theta}) \left| g(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta_0}) \right| d\theta \\
 & \leq \varepsilon + 2 \|g\|_\infty \int_{|\theta-\theta_0| \geq \delta} P(z, e^{i\theta}) d\theta,
 \end{aligned}$$

y este último término se puede hacer arbitrariamente pequeño si z está suficientemente próximo a $e^{i\theta_0}$ por (P_3) . Esto prueba que $P[g]$ es continua en $e^{i\theta_0}$. \square

Observación 2.19. Si $z = re^{i\theta}$ ($0 \leq r < 1$), puesto que

$$P(z, e^{it}) = P(re^{i\theta}, e^{it}) = \frac{1-r^2}{|e^{it} - re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{|1 - re^{i(\theta-t)}|^2} = P_r(\theta - t),$$

la integral de Poisson $P[g]$ puede escribirse como el operador de convolución:

$$P[g](re^{i\theta}) = P_r[g](\theta) = (P_r * g)(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) g(e^{it}) dt. \quad \square$$

La expresión (2.12) muestra que la serie de Taylor del núcleo de Poisson converge en el disco unidad. Teniendo en cuenta la observación 2.17 esto implica que las funciones armónicas son ‘reales analíticas’. Para estas se tiene el siguiente *principio de continuación*

Teorema 2.20. *Supongamos que Ω es conexo, u real analítica en Ω y $u = 0$ en un subconjunto abierto de Ω . Entonces $u = 0$ en Ω .*

Demostración. Sea $Z = \{a \in \Omega / \frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j}(a) = 0 \text{ para todo } k, j \geq 0\}$. Como en la prueba del teorema 2.10, Z es cerrado en Ω (Z es intersección de cerrados). Puesto que la serie de Taylor de u converge en algún entorno de cualquier punto dado de Z , concluimos que $u = 0$ en ese entorno, esto es, Z es abierto en Ω . Por hipótesis $Z \neq \emptyset$ y por tanto $Z = \Omega$ supuesto Ω conexo. \square

Observación 2.21. La versión local del principio del máximo expuesta en el teorema 2.11 es un corolario inmediato del teorema 2.20. \square

Terminamos esta sección con un corolario del teorema 1.16 para la *ecuación de Poisson* $\Delta u = f$.

Teorema 2.22. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es abierto y $f \in C^\infty(\Omega)$, la ecuación $\Delta u = f$ tiene solución $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Este resultado se obtiene por aplicación reiterada del teorema 1.16. Dada f , de aquel existe $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = \bar{f}$ y, por la misma razón, para esta función también existe $u \in C^\infty(\Omega)$ para la que $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \bar{v}$. Así,

$$\Delta u = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \overline{\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \bar{z}}} = f$$

según queríamos probar. \square

Observación 2.23. Los teoremas 1.16 y 2.22 son de hecho equivalentes: si $\Delta u = f$ entonces $v = \frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ resuelve $\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = f$ y $v \in C^\infty(\Omega)$ si $u \in C^\infty(\Omega)$. \square

Cabe señalar que este resultado sigue siendo cierto en dimensiones superiores. Su demostración es completamente análoga a la del teorema 1.16 ya que [6, teorema 1.10] proporciona una versión armónica del teorema de Runge.

En cuanto al análogo del teorema 1.27, para datos $f \in C^\infty(\mathbb{C})$ con soporte compacto, la ecuación de Poisson admite una (única) solución con soporte compacto si, y sólo si, $\iint_{\mathbb{C}} h(z) f(z) dA(z) = 0$ para todo polinomio armónico h . Que esta condición es necesaria sigue, como en el apartado 1.4.2, de (1.4) ya que si $\Delta u = f$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{C}} h(z) f(z) dA(z) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{|z| \leq r} h(z) f(z) dA(z) = \lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{|z| \leq r} h(z) \Delta u(z) dA(z) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_{|\zeta|=r} h(\zeta) \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}(\zeta) |d\zeta| = 0. \end{aligned}$$

Aquí $\partial u / \partial \bar{v}$ denota la derivada normal exterior de u en la circunferencia $|\zeta| = r$. Puesto que toda función armónica entera es suma de una función holomorfa y otra antiholomorfa enteras ($h = u + \bar{v}$ con $u, v \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$), el recíproco sigue por aplicación reiterada del teorema 1.27 usando (2.2).

Observación 2.24. De hecho, una prueba alternativa (y que con las modificaciones oportunas es válida en dimensiones superiores) es la siguiente. De (2.4), la función

$$u(z) = \iint_{\mathbb{C}} \ln|z-w| f(w) \frac{dA(w)}{2\pi}$$

es solución de la ecuación de Poisson $\Delta u = f$. Pero como para $|w| < |z|$

$$\ln|z-w| = \ln|z| + \ln\left|1 - \frac{w}{z}\right| = \ln|z| + \operatorname{Re}\left[\ln\left(1 - \frac{w}{z}\right)\right] = \ln|z| - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right)^k,$$

para $|z|$ suficientemente grande

$$\begin{aligned} u(z) &= \left(\iint_{\mathbb{C}} f(w) \frac{dA(w)}{\pi} \right) \ln|z| - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint_{\mathbb{C}} w^k f(w) \frac{dA(w)}{2\pi} \right) \frac{z^k}{k} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\iint_{\mathbb{C}} \bar{w}^k f(w) \frac{dA(w)}{2\pi} \right) \frac{\bar{z}^k}{k} = 0 \end{aligned}$$

ya que los polinomios $h_k(z) = z^k, \bar{z}^k, k = 0, 1, \dots$ son armónicos. \square

2.4. Algunas propiedades de las funciones armónicas

Ahora que sabemos resolver el problema de Dirichlet en el disco, podemos probar algunos hechos interesantes para las funciones armónicas.

Teorema 2.25 (Principio de reflexión). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y simétrico respecto al eje OX ($y = 0$), es decir, $z \in \Omega$ si $\bar{z} \in \Omega$. Sea $\Omega_+ := \{z \in \Omega / y > 0\}$ y $\Pi_0 := \{z \in \Omega / y = 0\}$. Si u es continua en $\Omega_+ \cup \Pi_0$, armónica en Ω_+ y $u = 0$ en Π_0 , entonces u puede ser extendida armónicamente a Ω haciéndola impar en y , es decir, $u(\bar{z}) = -u(z)$.

Demostración. Si seguimos denotando por u la extensión impar de u a Ω , está claro que entonces u es armónica en $\Omega \setminus \Pi_0$. Dado $z_0 = x_0 \in \Pi_0$ veremos que u es armónica cerca de z_0 . Sea D un disco centrado en z_0 cuya clausura esté contenida en Ω . Trasladando y dilatando (operaciones que conservan armonicidad) podemos suponer que $z_0 = 0$ y que D es el disco unidad. Puesto que u es continua en \bar{D} podemos, por el teorema 2.18, resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } D \\ v = u & \text{en } \partial D \end{cases}$$

con $v \in C(\bar{D})$. La expresión de v dada allí muestra que v es impar en y ya que u lo es y, en particular, $v(x) = 0$ para $|x| \leq 1$. Esto a su vez permite ver que v coincide con u en las fronteras de los semidiscos superior e inferior. Por el corolario 2.13 $v = u$ en cada semidisco y por tanto $v = u$ en D . En particular u es armónica en D . \square

Corolario 2.26 (Liouville). Si u es armónica acotada en \mathbb{C} , entonces u es constante.

Demostración. Si $z \in \mathbb{C}$ y $r > |z|$, por (2.8) tenemos

$$\begin{aligned} |u(z) - u(0)| &= \frac{1}{\pi r^2} \left| \iint_{|w| \leq r} u(z+w) dA(w) - \iint_{|w| \leq r} u(w) dA(w) \right| \\ &\leq \frac{1}{\pi r^2} \|u\|_\infty \iint_{D_r} dA(w) = \|u\|_\infty \frac{\text{área}(D_r)}{\pi r^2} \end{aligned}$$

donde D_r denota la diferencia simétrica de los discos $D(z, r)$ y $D(0, r)$. Pero como $D_r \subset \mathcal{A}_r := \{w / r - |z| < |w| < r + |z|\}$ (figura 2.3),

$$\text{área}(D_r) \leq \text{área}(\mathcal{A}_r) = \pi((r + |z|)^2 - (r - |z|)^2)$$

por lo que

$$\begin{aligned} |u(z) - u(0)| &\leq \left(\frac{(r + |z|)^2 - (r - |z|)^2}{r^2} \right) \|u\|_\infty \\ &= \left(\left(1 + \frac{|z|}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{|z|}{r}\right)^2 \right) \|u\|_\infty \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por tanto $u(z) = u(0)$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y u es constante. \square

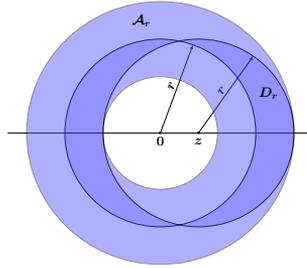


Figura 2.3. Diferencia simétrica $D_r \subset A_r$

Observación 2.27. El corolario 2.26 puede deducirse del teorema de Liouville para funciones enteras ya que, por la proposición 2.3 (que con la misma demostración sigue siendo válida para el plano \mathbb{C} en lugar del disco \mathbb{D}), $u = \text{Re } g$ para alguna función entera $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ y por tanto, la función $f := e^g$ además de entera también es acotada pues $|f| = e^{\text{Re } g} = e^u$. Luego f , y por tanto u , debe ser constante.

Alternativamente, si $u \geq 0$, haciendo $r \rightarrow \infty$ en (2.10) se tiene que $\nabla u(0) = 0$. Puesto que para cada $a \in \mathbb{C}$ la función $u_a(z) := u(a + z) \geq 0$ también es armónica se concluye que $\nabla u \equiv 0$ y u debe ser constante. \square

Definición 2.28. Una función armónica u definida en un entorno de $a \in \mathbb{C}$ salvo quizás en a , se dice que tiene una singularidad evitable en a si u se puede extender a a como armónica en tal entorno.

El siguiente teorema establece un criterio, en términos de la tasa de explosión cerca de una singularidad, para que ésta sea evitable.

Teorema 2.29. Supongamos que u es armónica en $\Omega \setminus \{a\}$. Si

$$|u(z)| = o(\ln |z - a|^{-1})$$

cuando $z \rightarrow a$, entonces u tiene una singularidad evitable en a .

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = 0$ y que u es armónica en el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}$ salvo en 0 . Como antes sea $v \in C(\overline{\mathbb{D}})$ la extensión armónica de $u|_{\mathbb{T}}$ a \mathbb{D} . Seguidamente veremos que $v = u$ en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ con lo que podemos evitar la singularidad haciendo $u(0) := v(0)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta < 1$. Con $w := u - v$ la función

$$z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus D(0, \delta) \rightarrow w(z) + \varepsilon \ln |z|$$

es armónica en $\mathbb{D} \setminus \overline{D(0, \delta)}$, continua en su clausura, cero en \mathbb{T} y, por hipótesis, negativa en $\partial D(0, \delta)$ si δ es suficientemente pequeño. Por el principio de máximo, es negativa en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ y, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ concluimos que $u \leq v$ en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. Por último, el mismo argumento muestra que $u \geq v$ (basta aplicar este razonamiento a la función opuesta $-u$ que sigue en las hipótesis del teorema), por lo que $u = v$ en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$. \square

2.4.1. La desigualdad y el Principio de Harnack

Las funciones armónicas positivas no pueden oscilar demasiado sobre subconjuntos compactos $K \subset \Omega$ si Ω es conexo. Para el caso del disco el resultado se recoge en el siguiente teorema

Teorema 2.30 (Desigualdad de Harnack en el disco). Si u es una función armónica no negativa en \mathbb{D} , entonces

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} u(0)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$.

Demostración. El núcleo de Poisson verifica

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq P(z, e^{i\theta}) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \quad (2.13)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Si u es no negativa y armónica en $\overline{\mathbb{D}}$, multiplicando (2.13) por $u(e^{i\theta})$ e integrando tenemos

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi},$$

y por la propiedad del valor medio

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} u(0) \leq u(z) \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} u(0). \quad \square$$

Sean $c_*(t) = (1-t)/(1+t)$ y $c^*(t) = (1+t)/(1-t)$. Tras trasladar y dilatar, el teorema 2.30 asegura que si u es armónica no negativa en $D(0, r)$ y $|z-a| \leq \rho < r$, entonces

$$c_*(\rho/r) u(a) \leq u(z) \leq c^*(\rho/r) u(a). \quad (2.14)$$

Teorema 2.31 (Desigualdad de Harnack). Si Ω es un dominio en \mathbb{C} y $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto en Ω , entonces existe una constante $C \geq 1$ que sólo depende de K y Ω tal que para toda función armónica positiva u en Ω

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(z)}{u(w)} \leq C$$

para todo $z, w \in K$.

Demostración. Es suficiente probar que existe $C \geq 1$ tal que $u(z)/u(w) \leq C$ para todo $z, w \in K$ ya que la otra desigualdad sigue intercambiando los papeles de z y w . Para $(z, w) \in \Omega \times \Omega$ definamos

$$s(z, w) = \sup \{u(z)/u(w) \mid u \text{ es positiva y armónica en } \Omega\}.$$

Primero veremos que $s < +\infty$ en $\Omega \times \Omega$. Para ello fijemos $w \in \Omega$ y consideremos el conjunto

$$E_w := \{z \in \Omega \mid s(z, w) < +\infty\}.$$

Sea u cualquier función positiva y armónica en Ω . Si $z \in E_w$ y $r > 0$ es suficientemente pequeño para que $D(z, 2r) \subset \Omega$, por (2.14), $u \leq c^*(1/2)u(z)$ en $D(z, r)$. Esto implica que $D(z, r) \subset E_w$ y prueba que E_w es abierto. Si $p \in \Omega$ es un punto límite de E_w , existe $r > 0$ y $z \in E_w$ tales que $p \in D(z, r) \subset D(z, 2r) \subset \Omega$ y, de nuevo por (2.14), $u(p) \leq c^*(1/2)u(z)$. Así $p \in E_w$ y E_w es relativamente cerrado en Ω . Puesto que $w \in E_w$, la conexidad de Ω implica que $E_w = \Omega$.

Ahora veremos que $s: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ es de hecho semicontinua superiormente, esto es, para todo $a, b \in \Omega$

$$\limsup_{(z,w) \rightarrow (a,b)} s(z, w) \leq s(a, b).$$

En efecto, si $z \in D(a, \rho) \subset D(a, r) \subset \Omega$ y $w \in D(b, \rho) \subset D(b, r) \subset \Omega$, (2.14) implica que

$$s(z, w) \leq \frac{u(z)}{u(w)} \leq \frac{c^*(\rho/r)}{c_*(\rho/r)} s(a, b).$$

Así

$$\limsup_{(z,w) \rightarrow (a,b)} s(z, w) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{z \in D(a, \rho) \\ w \in D(b, \rho)}} s(z, w) \leq \left[\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{c^*(\rho/r)}{c_*(\rho/r)} \right] s(a, b) = s(a, b)$$

ya que $\lim_{t \rightarrow 0^+} c_*(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} c^*(t) = 1$.

Para terminar basta recordar que toda función semicontinua superiormente alcanza su máximo en compactos, y por tanto, s lo hará en $K \times K$. □

Observación 2.32. 1. Para funciones u positivas meramente continuas, la existencia de una constante $C = C_u \geq 1$ dependiendo de u tal que $1/C \leq u(z)/u(w) \leq C$ para todo $z, w \in K$ es consecuencia del teorema de Weierstrass ya que la función $(z, w) \rightarrow u(z)/u(w)$ es continua en $\Omega \times \Omega$ si $u > 0$. Lo importante en este teorema es que, para la clase de funciones armónicas positivas, C se puede elegir independiente de u , esto es

$$C = \sup_{\substack{u > 0, \\ \text{armónica}}} \left[\sup_{z, w \in K} \frac{u(z)}{u(w)} \right] < +\infty.$$

2. Las hipótesis sobre las funciones consideradas en el teorema 2.31 pueden relajarse. Puesto que la constante C sólo depende de K y Ω , si u es armónica no negativa en Ω y $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(z) + \varepsilon}{u(w) + \varepsilon} \leq C.$$

Haciendo $\varepsilon \searrow 0$ concluimos que

$$\frac{1}{C} u(w) \leq u(z) \leq C u(w)$$

para todo $z, w \in K \subset \Omega$. En particular

$$\max_{z \in K} u(z) \leq C \min_{w \in K} u(w). \tag{2.15}$$

□

Teorema 2.33 (Principio de Harnack). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio y $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ una sucesión no decreciente de funciones armónicas en Ω . Entonces*

- (i) $u_k(z) \rightarrow +\infty$ para todo $z \in \Omega$ cuando $k \rightarrow \infty$, o
- (i) $\{u_k\}$ converge uniformemente en compactos de Ω a una función u que, por el corolario 2.16, también debe ser armónica en Ω .

Demostración. Supongamos que para algún $z_0 \in \Omega$

$$u(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(z_0) < +\infty.$$

Sea $K \subset \Omega$ compacto. Añadiendo z_0 a K siempre podemos suponer que $z_0 \in K$ y (2.15) implica que

$$\max_{z \in K} (u_m(z) - u_k(z)) \leq C (u_m(z_0) - u_k(z_0))$$

para $m \geq k$. Esto a su vez implica que la sucesión $\{u_k\}$ es uniformemente de Cauchy en K . Así, $u_k \rightarrow u$ uniformemente en compactos a cierta función u . □

2.5. Soluciones débiles. El lema de Weyl

Si u es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, integrando por partes

$$\langle u, \Delta \varphi \rangle = \iint_{\Omega} u(z) \Delta \varphi(z) dA(z) = \iint_{\Omega} \Delta u(z) \varphi(z) dA(z) = 0.$$

Esta condición tiene sentido incluso para funciones que no sean continuas en Ω , por ejemplo si u es localmente integrable. Esto, como en la definición 1.7, sugiere la siguiente definición

Definición 2.34. Una función localmente integrable u en un abierto Ω de \mathbb{C} se dice armónica en sentido débil o que satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en sentido débil si

$$\langle u, \Delta \varphi \rangle = \iint_{\Omega} u(z) \Delta \varphi(z) dA(z) = 0 \tag{2.16}$$

para toda función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Obsérvese que no sigue de la definición 2.34 que si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es armónica en sentido débil lo es en sentido usual (para ello u debe ser al menos C^2). Este hecho se recoge, y es parte de un resultado más general, en el siguiente teorema

Teorema 2.35 (Lema de Weyl). Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en sentido débil, entonces u es armónica, ésto es, $u \in C^\infty(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en Ω .

Para ser más precisos, en la conclusión se debe entender que u es armónica posible-mente tras una modificación en un conjunto de medida nula.

Demostración. Sean Ω_ε y ϕ como en la demostración del teorema 2.14. Si $\varphi \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ tenemos que $u_\varepsilon := u * \phi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ y por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \Delta u_\varepsilon(z) \varphi(z) dA(z) &= \iint_{\Omega} u_\varepsilon(z) \Delta \varphi(z) dA(z) \\ &= \iint_{\Omega} \left(\iint_{\Omega} u(w) \phi_\varepsilon(z-w) dA(w) \right) \Delta \varphi(z) dA(z) \\ &= \iint_{\Omega} \left(\iint_{\Omega} \phi_\varepsilon(z-w) \Delta \varphi(z) dA(z) \right) u(w) dA(w) \\ &= \iint_{\Omega} \left(\iint_{\Omega} \phi_\varepsilon(z) \Delta \varphi(z+w) dA(z) \right) u(w) dA(w) \\ &= \iint_{\Omega} u(w) \left(\Delta_w \iint_{\Omega} \phi_\varepsilon(z) \varphi(z+w) dA(z) \right) dA(w) \\ &= \iint_{\Omega} u(w) \Delta \chi(w) dA(w) = 0 \end{aligned}$$

ya que la función

$$\chi(w) := \iint_{\Omega} \phi_\varepsilon(z) \varphi(z+w) dA(z) = \varphi * \check{\phi}_\varepsilon(w) \quad (\check{\phi}_\varepsilon(w) = \phi(-w))$$

es $C_c^\infty(\Omega)$ y u es armónica en sentido débil en Ω . Por tanto u_ε es armónica en sentido clásico en Ω .

Por último observemos que de nuevo, como en la demostración de teorema 2.14

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= u_\varepsilon * \phi_\delta = (u * \phi_\varepsilon) * \phi_\delta = u * (\phi_\varepsilon * \phi_\delta) \\ &= u * (\phi_\delta * \phi_\varepsilon) = (u * \phi_\delta) * \phi_\varepsilon = u_\delta * \phi_\varepsilon = u_\delta \end{aligned}$$

en $\Omega_{\min\{\varepsilon, \delta\}}$. Puesto que $u_\varepsilon \rightarrow u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, del corolario 2.8, u_ε converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función u_* que, por el corolario 2.16 es armónica en Ω , y coincide con u en casi todo punto. \square

Corolario 2.36. Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es holomorfa en sentido débil entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y holomorfa en Ω .

Demostración. Puesto que $\Delta u = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}$, u es armónica en sentido débil. Por el lema de Weyl u es armónica en Ω , por tanto $C^\infty(\Omega)$ y holomorfa en Ω . \square

Observación 2.37. En la demostración del teorema 2.35 no hay nada particular al plano, es decir, respecto a que la dimensión sea dos. Así, la definición 2.34 tiene perfecto sentido en dimensiones superiores y puesto que la demostración del teorema 2.35 se puede traducir mutatis mutandis a este caso, el teorema 2.35 sigue siendo válido en \mathbb{R}^n para $n \geq 3$. De hecho, este tipo de resultados es típico de los llamados operadores elípticos. \square

Bibliografía

- [1] ABLOWITZ, M. J., FOKAS, A. S. *Complex Variables: Introduction and Applications*. 2nd ed., Cambridge University Press (2003).
- [2] BERENSTEIN, R. G., GAY, R. *Complex Variables*. Graduate Texts in Mathematics, 125. Springer Verlag (1991).
- [3] BRUNA, J., CUFÍ, J. *Complex Analysis*. European Mathematical Society (2013).
- [4] FLORES, M., SADARANGANI, K. *Cálculo Diferencial e Integral*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna (2013).
- [5] FOLLAND, G. B. *Introduction to partial differential equations*. 2nd ed., Princeton University Press (1995).
- [6] GARDINER, S. J. *Harmonic approximation*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 221. Cambridge University Press (1995).
- [7] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. 3rd ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1990).
- [8] RANGE, R. M. *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*. Graduate Texts in Mathematics, 108. Springer Verlag (1986).
- [9] RUDIN, W. *Function Theory in the Unit Ball of \mathbb{C}^n* . Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 241. Springer Verlag (1980).
- [10] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3ª Edición. McGraw-Hill (1987).
- [11] WELLS, R. O., JR. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 65. 3ª Edición. Springer Verlag (2008).

Complex Analysis: the $\bar{\partial}$ equation and harmonic functions in the plane

Resumen

IN THIS MEMOIR we are concerned with classical Complex Analysis: holomorphic and harmonic functions in the complex plane. Our aim in the first chapter has been to restate some well known results from the classical theory of holomorphic functions from a differential equations viewpoint based in the inhomogeneous Cauchy-Riemann equations. In the second we deal with the theory of harmonic functions in the plane both, by using real variable techniques and via its relation with holomorphic functions.

1. Introduction

THE MEMOIR is divided in two chapters. Inspired by the applications of the $\bar{\partial}$ equation techniques in Function Theory of Several Complex Variables, in the first, we derive classical results from Complex Analysis in one complex variable from the solution of the non homogeneous Cauchy-Riemann equations. Thus we will show that, together with Runge's theorem, it implies Weierstrass and Mittag-Leffler theorems where the latter turns out to be equivalent to the solvability of the so called additive Cousin problem. We also study the solvability of the $\bar{\partial}$ equation on compactly supported functions and its relation with a Dirichlet type problem for the $\bar{\partial}$ operator –at this point one must say that the obstructions to solve it do not appear in higher dimensional Complex Analysis which, as a consequence, it implies that (unlike for the one dimensional case) holomorphic functions of several complex variables do not have isolated zero set–.

In the second chapter we center our attention in the so called harmonic functions that, as we know, in the complex plane are just locally real part of holomorphic functions: the real/imaginary part of any holomorphic function is harmonic and, at least locally, the converse also holds. Here we will study its main classical properties, sometimes by direct use of real variable techniques (just to keep in mind its possible generalizations to higher dimensional Euclidean space) or by making use of its relation to holomorphic functions. These includes: the mean value property, the maximum principle, Harnack's inequalities

and Harnack's Principle, the Dirichlet problem for the Laplace operator and Weyl's lemma on regularity of weak harmonic functions.

2. Outline of the first Chapter

FOR a C^1 function u on a domain $\Omega \subset \mathbb{C}$, the $\bar{\partial}$ operator is defined as

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

where $z = x + iy \in \mathbb{C}$ with $x = \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ and $y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$ are the real and imaginary part of $z \in \mathbb{C}$. It is easy to see that u is holomorphic in Ω is equivalent to the Cauchy-Riemann equations $\partial u / \partial \bar{z} = 0$ on Ω . The main result of Chapter 1 is that the inhomogeneous equation $\partial u / \partial \bar{z} = f$ always has solutions for any given Ω and any $f \in C^\infty(\Omega)$. Together with the well known fact of existence of partitions of unity one can use this result (as done in Several Complex Variables) to patch together local holomorphic data to construct global holomorphic solutions to many problems. In particular, as said in the Introduction, one can recover several classical results from the theory of One Complex Variable. When f is compactly supported in the complex plane \mathbb{C} , in general, the $\bar{\partial}$ equation does not have a compactly supported solution for f must satisfy the moment conditions

$$\iint_{\mathbb{C}} z^k f(z) dA(z) = 0 \text{ for } k = 0, 1, \dots$$

We relate this problem with the "Dirichlet" type problem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f \\ u = g, \end{cases}$$

which, as we know, is not well posed from a PDE point of view.

The main references we have followed for this chapter are [2, 3] and [6].

3. Outline of the second chapter

IN this chapter, following [3, 4, 5] and [9], we tackle the study of harmonic functions, i.e. those C^2 functions u defined on a planar open set Ω such that

$$\Delta u = (\nabla \cdot \nabla) u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ in } \Omega.$$

We are concern with their relation with holomorphic functions, studied in Chapter 1 and with the main properties that characterize them: the maximum principle and the mean value theorem. Our approach will use a real variable viewpoint so that the techniques used here suits the need for further generalizations to higher dimensions. We also consider the Dirichlet problem, for which its classical representation via the Poisson kernel will be given for the unit disc. To end the chapter we present some other properties: a Liouville type result, Harnack inequality/principle and Weyl regularity result to the extent that weak harmonic functions are in fact smooth.

Referencias

- [1] ABLOWITZ, M. J., FOKAS, A. S. *Complex Variables: Introduction and Applications*. 2nd ed., Cambridge University Press (2003).
- [2] BERENSTEIN, R. G., GAY, R. *Complex Variables*. Graduate Texts in Mathematics, 125. Springer Verlag (1991).
- [3] BRUNA, J., CUFÍ, J. *Complex Analysis*. European Mathematical Society (2013).
- [4] FLORES, M., SADARANGANI, K. *Cálculo Diferencial e Integral*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna (2013).
- [5] FOLLAND, G. B. *Introduction to partial differential equations*. 2nd ed., Princeton University Press (1995).
- [6] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. 3rd ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1990).
- [7] RANGE, R. M. *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*. Graduate Texts in Mathematics, 108. Springer Verlag (1986).
- [8] RUDIN, W. *Function Theory in the Unit Ball of \mathbb{C}^n* . Springer-Verlag, New York (1980).
- [9] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3ª Edición. McGraw-Hill (1987).
- [10] WELLS, R. O., JR. *Differential Analysis on Complex Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, 65. 3ª Edición. Springer Verlag (2008).