

Aurora Figueroa García

*An application of the DEA
(Data Envelopment Analysis)
non-parametrical model to a real
case:*

Efficiency and productivity in the fishing economic
sector in Galicia

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Marzo de 2017

DIRIGIDO POR

David Alcaide López de Pablo

David Alcaide López de Pablo
Departamento de Matemáticas, Es-
tadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi tutor por su acogida.

A mi familia por su paciencia.

Y a mis amigos del banquito por hacerme más amenos estos años.

Resumen · Abstract

Resumen

Usualmente las empresas utilizan ratios de inputs versus outputs para evaluar su eficiencia, pero si el proceso es complejo surge la necesidad de utilizar índices ponderados. Este trabajo identifica el nivel de eficiencia comparativa para 9 zonas del sector pesquero, localizadas en la costa gallega, obtenido con aplicación del Análisis Envolvente de Datos (DEA), un método basado en la programación lineal. Este documento muestra que la eficiencia global de las zonas pesqueras de Galicia es buena en general, aunque se podrían aplicar pequeños cambios en los inputs utilizados para mejorarla.

Palabras clave: *Análisis de eficiencia – DEA – Análisis envolvente de datos.*

Abstract

Firms usually use a ratio of inputs versus outputs to evaluate their efficiency, but if the process is complex then weighted indices are required. This paper identifies the comparative efficiency level for 9 zones in the fishing sector, located on Galician coast, obtained by applying the Data Envelopment Analysis (DEA), a linear programming based method. This document shows that the overall efficiency of the fishing areas of Galicia is good, although small changes could be applied to the inputs used in order improve it.

Keywords: *Efficiency analysis – DEA – Data Envelopment Analysis.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
0.1. Antecedentes	IX
0.2. Motivación y objetivos	IX
1. Conceptos básicos sobre la eficiencia y la productividad	1
1.1. Eficiencia, productividad y conceptos asociados	1
1.2. Eficiencia y frontera de producción	3
1.2.1. Métodos para carectizar la frontera del conjunto de puntos de posibles producción	4
1.2.2. Tipos de eficiencia	6
1.2.3. Orientación de la eficiencia	8
1.3. Retornos de escala	8
2. Modelo matemático DEA	13
2.1. Ventajas y desventajas del modelo DEA	13
2.2. Axiomas y notación necesarios para enunciar los distintos modelos DEA.	14
2.3. El DEA con Rendimientos Constantes de Escala	16
2.3.1. Conjunto de puntos posibles de producción (Production possibility set)	16
2.3.2. EL modelo CRS orientado al input y el problema DUAL	17
2.3.3. EL modelo CRS orientado al output y el problema DUAL	18
2.4. El DEA con Rendimientos Variables de Escala	19
2.4.1. Conjunto de puntos posibles de producción (Production possibility set)	19

2.4.2.	EL modelo VRS orientado al input y el problema DUAL	20
2.4.3.	EL modelo VRS orientado al output y el problema DUAL	21
3.	Aplicación al sector pesquero gallego	23
3.1.	Descripción del experimento	23
3.1.1.	Datos del experimento en el que las DMUs son las lonjas	24
3.1.2.	Datos del experimento en el que las DMUs son las zonas	25
3.2.	Resultado del experimento	26
3.2.1.	Lonjas: 1 input(especies) y 2 output	26
3.2.2.	Lonjas: 2 input y 1 output (Kg anuales)	26
3.2.3.	Zonas : 2 input y 2 output	27
4.	Conclusiones y Trabajos Futuros	29
A.	Apéndice	31
A.1.	Salidas: Lonjas, 1 inputs (Especies) y 2 outpus	31
A.2.	Salidas: Lonjas, 2 inputs y 1 outpus (Beneficio)	38
A.3.	Salidas: Zonas, 2 inputs y 2 outpus	45
	Bibliografía	49

Introducción

0.1. Antecedentes

El origen de los modelos DEA, de las siglas en inglés de "Data Envelopment Analysis" (Análisis envolvente de datos), se remonta a los años 50, al trabajo de Farrell (1957). El método en sí, nace en los años 80, cuando A. Charnes, W.W. Cooper y E. Rhodes desarrollaron la técnica extendiendo el trabajo de Farrell.

Desde su comienzo, la investigación en DEA ha dado buenos resultados, tanto en el ámbito teórico, estudios en departamentos docentes, como el en aplicado, en el que cuenta con más de 2000 trabajos en diversas áreas, tales como: logística, comparación sucursales de bancos, regulación de sector público, comparación de granjas ganaderas, estudios de eficiencia agrícola, entre otras. Esto ha hecho de DEA una de las áreas de la investigación operativa más aceptada, relevante y difundida.

0.2. Motivación y objetivos

A la hora de elegir la línea del trabajo tuvimos en cuenta, entre otras cosas, la originalidad del tema, pues el análisis de envolvente de datos (DEA) es una herramienta de gestión cuya popularidad se encuentra en claro momento de expansión. Al estudiar estadísticamente un mercado, comparamos unas empresas con otras valiéndonos de datos promedios, en cambio el modelo DEA compara cada una de estas empresas con la "mejor" de ellas y para cada una de ellas se indica como puede mejorar.

Otro de los motivos que nos dirigió a esta elección fue la oportunidad de poder utilizar los conocimientos de programación lineal adquiridos en el grado y aplicarlos a un caso práctico con datos reales.

Nuestro objetivo es introducirnos en la teoría del análisis de la eficiencia y la productividad utilizando este método y dar una opinión firme sobre la capacidad para lograr un fin empleando los mejores medios posibles en el sector pesquero gallego, que nos pareció un buen objeto de estudio por los argumentos siguientes:

Galicia es una región pesquera, en la que el complejo mar-industrial es básico en numerosas localidades y conlleva que dichas poblaciones sean dependientes de esta actividad.

Ateniéndonos a las transformaciones estructurales de la economía gallega apreciamos un cambio que pone de manifiesto una desagrarización progresiva y un crecimiento de las actividades de servicios e industriales.

El sector pesquero gallego ha perdido en la última década el 21,1% de sus trabajadores y esto continúa año tras año. Es debido a una serie de factores como los recortes en la asignación de cuotas, el furtivismo, el abandono de un oficio duro y los niveles de deterioro de los stocks.

Dicho deterioro lleva a una concentración espacial del sector en torno a ciertas zonas, provocando una reducida oferta de estas actividades en el resto de regiones. En este sentido hay evidencias que apuntan que aquellas regiones con menor oferta de especies se enfrentan además a un menor beneficio, lo que hace sospechar de la existencia de importantes diferencias de eficiencia en este sector entre regiones.

Conceptos básicos sobre la eficiencia y la productividad

1.1. Eficiencia, productividad y conceptos asociados

El estudio de la eficiencia se ha convertido, en los últimos años, en una de las áreas de la economía aplicada y de la investigación operativa que más desarrollo ha experimentado. Este aumento de su estudio es debido a que el entorno económico es hostil, y las empresas tienen que competir entre ellas para sobrevivir. Por este motivo es interesante comparar el rendimiento de varias empresas de un mismo sector. Los conceptos de eficiencia y productividad nos ayudan a comparar el rendimiento de las empresas.

Las empresas para producir necesitan consumir recursos (materias primas, mano de obra, herramientas, maquinaria de producción, etc). Los recursos que se consumen suelen denominarse con el término inglés “inputs”, mientras que los bienes producidos (productos, servicios, etc) se denominan con el término anglosajón “outputs”.

Cabe entonces considerar como “mejores” de alguna manera a aquellas empresas que consumiendo los mismos inputs son capaces de generar más outputs, o también podríamos entender como las “mejores” a aquellas que para producir una misma cantidad de outputs requieren menos inputs. Esta idea intuitiva es la que precisamente recoge el concepto de eficiencia. Las empresas más eficientes orientadas al output serán aquellas que producen más consumiendo lo mismo, mientras que las más eficientes orientadas al input producen lo mismo consumiendo menos.

Dado un conjunto de n empresas u organizaciones (departamentos, escuelas, hospitales, bares, etc.) de un determinado sector estamos interesados en comparar su rendimiento. Cada una de estas empresas u organizaciones la consi-

deramos como una unidad productiva de toma de decisiones (“Decision making unit” o “DMU” en terminología inglesa).

Un total de m inputs se usan en el proceso de producción de cada DMU para producir s outputs. Como las empresas comparten los mismos conjuntos de inputs y de outputs son comparables.

Dada una lista de m inputs y una lista de s outputs es una práctica habitual en los estudios de eficiencia y productividad describir las actividades $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s}$ que caracterizan las diferentes DMUs con el conjunto de producción :

$$\Psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} | x \text{ produce } y\} \quad (1.1)$$

También es interesante considerar el denominado conjunto de inputs: $x \in \mathbb{R}_+^m$ con los que se puede producir un determinado vector de outputs $y \in \mathbb{R}_+^s$, es decir:

$$X(y) = \{x \in \mathbb{R}_+^m | (x, y) \in \Psi\} \quad (1.2)$$

Así, en nuestro conjunto de n DMUs, cada $DMU_j, j = 1, \dots, n$ viene caracterizado por un punto $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}_+^{m+s}$ y, a partir de estos n puntos, podemos definir el conjunto de puntos posibles de producción (“ Production Possibility Set”, PPS en la literatura) como:

$$P = PPS = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} | x \text{ puede producir } y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} | y = f(x)\} \quad (1.3)$$

donde $f : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^s, x \rightarrow y = f(x)$ es la “ Función de producción”.

Una de las primeras propiedades del PPS es que los n puntos observados que caracterizan las DMUs que queremos estudiar estan incluidos en este conjunto $\Psi \subseteq PPS$.

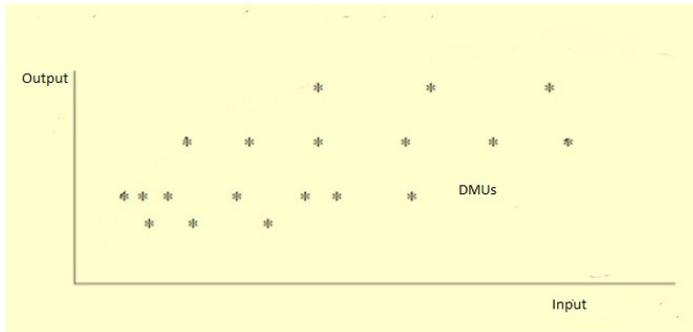


Figura 1.1. Ejemplo de PPS con un input y un output

Por otra parte, el concepto de productividad de una determinada DMU se define, según Farrell (1957), como la relación entre inputs y outputs:

Para el caso de un input y un outputs, la expresión quedaría como:

$$\frac{\text{Output}}{\text{Input}}$$

Para el caso de varias inputs y varios outputs, la expresión quedaría como:

$$\frac{\text{Suma ponderada outputs}}{\text{Suma ponderada inputs}}$$

Asumamos la siguiente notación:

x_{ij} = Cantidad de entrada o recurso i utilizado por la DMU_j , $i = 1...m$, $j = 1...n$.

y_{kj} = Cantidad de salida o producto k que produce la DMU_j , $k = 1...s$, $j = 1...n$.

Llamamos v_{ij} y u_{kj} con $j = 1...n$, $i = 1...m$, $k = 1...s$ a los pesos correspondientes a cada entrada i y a cada salida k , respectivamente.

Y sean m el número total de inputs, s el número total de outputs y n el número total de DMUs.

Con esta notación podemos calcular la productividad de la DMU_j , $j = 1...n$, con la expresión:

$$P_j = \frac{\sum_{k=1}^s u_{kj} y_{kj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij}} = \frac{\text{virtual output}}{\text{virtual input}} = \frac{u_{1j} y_{1j} + \dots + u_{sj} y_{sj}}{v_{1j} x_{1j} + \dots + v_{mj} x_{mj}}$$

De esta manera, con dicha expresión podríamos calcular y determinar la productividad de una unidad j . Esta es una unidad relativa a las DMUs consideradas, por lo que, permite compararlas entre si.

1.2. Eficiencia y frontera de producción

La eficiencia es definida por Farrell (1957) como la capacidad que tiene una unidad para obtener el máximo de output a partir de un conjunto dado de inputs. Y la frontera de producción hace referencia al máximo output teórico alcanzable por un conjunto de DMUs dada una combinación de inputs. Por tanto, evaluar la eficiencia o ineficiencia de un conjunto de DMUs pasa por determinar la frontera de producción.

Ejemplo frontera de producción:

En la Figura 1.2 se observa una curva superior que representa la frontera de producción, construida a partir de las unidades con la mejor relación input-output, mientras que el resto de los puntos dispersos debajo de esa frontera son las unidades de producción que manifiestan ineficiencia, en sentido de que

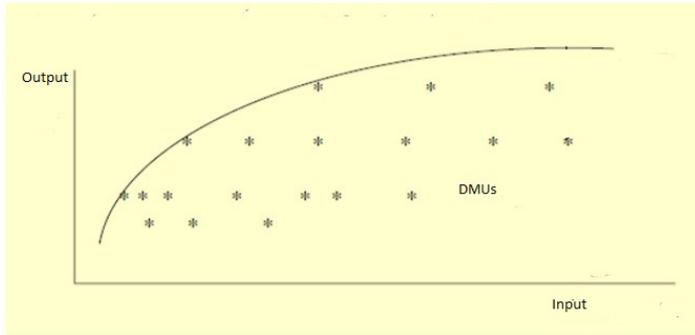


Figura 1.2. Frontera de producción.

podrían mejorar su eficiencia aplicando estrategias que le permitan acercarse a la frontera. Por lo tanto, un aspecto importante es el modo que se adopta para caracterizar la frontera de los puntos de producción, lo cual veremos en el próximo epígrafe.

1.2.1. Métodos para caracterizar la frontera del conjunto de puntos de posibles producción

Existen diferentes métodos de estimación de las fronteras de producción, los dividiremos en dos grandes grupos: Métodos paramétricos y métodos no paramétricos.

- Métodos paramétricos: Partimos de una forma funcional para la frontera, cuyos parámetros se estiman a partir de los datos. Los parámetros son los que caracterizan la frontera. Es decir, se supone que la frontera adopta una forma funcional cuyos parámetros hay que estimar.

Por ejemplo, si frontera estuviera dada por la ecuación del plano en \mathbb{R}^3 $ax + by + cz = k$, tendríamos que estimar a , b y c , siendo k un valor o dependiendo de los datos.

Estos métodos para estimar los parámetros que caracterizan la frontera pueden ser estadísticos o de programación matemática.

 - Estadísticos: También llamados métodos econométricos, en este grupo se encuentran, por ejemplo, los métodos de análisis de regresión (procesos para estimar las relaciones entre variables). Estos métodos paramétricos estadísticos pueden ser:
 - Deterministas: Cuando los datos son constantes dadas (conocemos k en el ejemplo del plano y k toma un valor constante)

- Estocásticos: Cuando los datos son variables aleatorias (k en el ejemplo del plano sigue una distribución aleatoria)
- Programación matemática: La estimación de los parámetros se hace resolviendo un problema con técnicas de Programación Lineal como el siguiente por el método del Simplex.

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 6X_2$$

S.A.

$$X_1 + X_2 > 2$$

$$4X_1 + X_2 > 4$$

$$X_1, X_2 > 0$$

Entre los métodos paramétricos de estimación de la frontera de producción basados en la Programación Matemática podemos encontrar:

- Deterministas
- Estocásticos

La diferencia entre ellos reside en el modo en que se reconozcan los datos. Así, mientras que en los deterministas los datos son constantes conocidas, en los estocásticos son variables aleatorias. Por ejemplo, si la estimación nos llevase a resolver un problema de programación lineal de la forma :

$$\text{Min } c^t x$$

S.A.

$$Ax \geq b$$

$$x \geq 0$$

siendo c el vector de costos, b el vector de recursos, A la matriz de coeficientes y x el vector de variables de decisión, tendríamos que: El planteamiento sería determinista si todos los coeficientes de los vectores c , b y la matriz A fueran constantes conocidas. Si alguno de dichos coeficientes fuese una variable aleatoria el planteamiento sería estocástico.

- Métodos no paramétricos: Se supone que el conjunto de puntos posibles de producción, PPS, cumple determinadas propiedades y axiomas y, a partir de ellos, se calcula la frontera de producción. Entre los axiomas o propiedades que se suelen suponer para el PPS podemos citar a modo de ejemplo los siguientes:
 - De la nada no podemos producir nada, es decir, con 0 input ($x = 0$) no podemos producir, esto es, $x = 0$ implica $y = 0$.
 - Si un punto (x, y) está en el PPS y, por lo tanto, con cierta cantidad de input de x podemos producir cierta cantidad de output de y , también será posible producir la misma cantidad output consumiendo más input. Esta propiedad también se conoce como FDH (Free Disposal Hull). Para el caso de un input ($m = 1, x \in \mathbb{R}$) y un output ($s = 1, y \in \mathbb{R}$) esta propiedad puede expresarse de la manera siguiente: Si $(x_1, y) \in PPS$ y $x_2 \geq x_1 \rightarrow (x_2, y) \in PPS$.
- Programación matemática:

Los métodos no paramétricos están basados fundamentalmente en la Programación Matemática. Pueden ser deterministas o estocásticos dependiendo de si los datos son constantes conocidas o puedan ser variables aleatorias, respectivamente.

Entre los métodos no paramétricos basados en Programación Matemática que son deterministas más importantes nos encontramos los modelos DEA (análisis envolvente de datos). Hay una gran cantidad de modelos DEA, como por ejemplo, los métodos CRS de retornos constantes de escala, los métodos VRS de retornos variables de escala, los métodos DEA orientados al input, los métodos DEA orientados al output, etc.

1.2.2. Tipos de eficiencia

Si tenemos un conjunto más o menos extenso de unidades productivas (DMUs) comparables entre sí por la particularidad de que emplean el mismo conjunto de inputs y el mismo conjunto de outputs, entonces, es posible definir tres medidas de eficiencia:

- Eficiencia técnica: refleja la habilidad de cada DMU para obtener el máximo nivel de producción dados ciertos niveles en el uso de los inputs.
- Eficiencias asignativa: refleja la habilidad de cada DMU para usar los inputs en proporciones óptimas (dados sus precios).
- Eficiencias de escala: se manifiestan según la naturaleza de los retornos de escala con que operan las DMUs.

La figura 1.3 es una gráfica de un modelo con 2 input (x_1 y x_2) y 1 output (y). En el eje de abscisas representamos el ratio x_1/y y en el de coordenadas el ratio x_2/y . La curva (SS') representa la función de producción, sólo las empresas que operen sobre la curva (SS'), son eficientes técnicamente.

La eficiencia técnica surge de la interpretación de la función de producción como el conjunto de los puntos frontera construida por las mejores empresas observadas, quedando así clasificadas las DMUs en: eficientes; ubicadas justo sobre la función de producción; las ineficientes; las situadas debajo de la misma; y las imposibles; las localizadas más allá.

De acuerdo con este planteamiento, la eficiencia de la DMU P se mide a lo largo de un vector que sale del origen \overrightarrow{OP} , de manera que compara empresas que utilizan los factores en la misma proporción. Estas medidas radiales no varían con respecto a la unidad de medida.

Si una empresa utiliza una cantidad de inputs definidos por el punto P , su ineficiencia técnica puede ser presentada por el módulo del vector \overrightarrow{QP} , ya que sería posible reducir la cantidad de inputs sin reducir la de outputs. Entonces la eficiencia técnica (ET) es medida por:

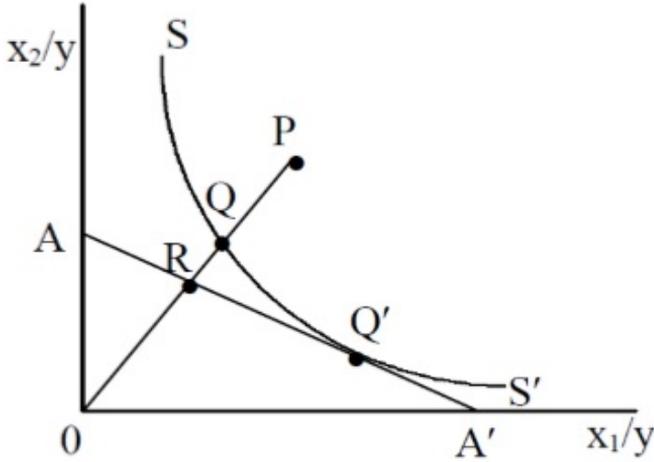


Figura 1.3. Medida de eficiencia de Farrell con dos input x_1 y x_2 un output y .

$$ET = \frac{|\vec{OQ}|}{|\vec{OP}|}$$

Dicho ratio toma un valor entre 0 y 1 y proporciona un indicador de eficiencia técnica de la empresa.

La línea AA' representa la asignación de los precios. En base a esto calculamos la eficiencia asignativa como:

$$EA = \frac{|\vec{OR}|}{|\vec{OQ}|}$$

De modo que la empresa P podría operar en el punto Q' con un coste igual al del punto R , que es menor que el del punto Q

Calculados ambos índices de eficiencia, se puede definir el indicador de eficiencia económica que, combina ambos tipos de eficiencia en un solo índice:

$$EE = ET \times EA = \frac{|\vec{OR}|}{|\vec{OP}|}$$

En los párrafos anteriores hemos hablado de los indicadores de eficiencia de escala. Su cálculo se realiza a través de la comparación de los indicadores de eficiencia técnica, cuando se suponen retornos de escala constantes o variables. Luego se profundizará más sobre la cuestión de los retornos de escala.

1.2.3. Orientación de la eficiencia

- Orientación de entrada (Input Orientation) :
La orientación de entrada se refiere al hecho de que una unidad alcance la productividad de la unidad de referencia a costa de reducir la cantidad de recursos que consume.
- Orientación de salida (Output Orientation):
La orientación de salida, en cambio, hace referencia al hecho de que una unidad consiga (DMU) la productividad de la unidad con la que se compara mediante el aumento de la cantidad de salidas que produce.

La figura 1.4 muestra una función de producción que relaciona diferentes niveles de inputs (X) con sus respectivos outputs (Y). En una primera aproximación al índice de eficiencia técnica relativa, orientada al input, relaciona como empresa eficiente a la situada en el punto B , la cual es eficiente por estar en la frontera, por lo que el índice de eficiencia calculado como: $ET_i = \frac{X_B}{X_A}$ representa la proporción de insumos que utiliza la empresa “ B ” con respecto a la empresa evaluada “ A ” para un mismo nivel de producto (output).

En una segunda aproximación al índice de eficiencia, ahora orientada al output, se selecciona como empresa eficiente a la situada en el punto C , que es eficiente por encontrarse en la frontera, por lo que el índice de eficiencia se calcula como: $ET_o = \frac{Y_A}{Y_C}$ representa la proporción de productos (output) que origina la empresa evaluada “ A ” con respecto a la empresa eficiente “ C ” para un mismo nivel de insumos (input). Entonces, esto implica que la eficiencia relativa puede ser calculada de dos maneras. Si se compara la producción observada con la óptima para un nivel de input, se está orientando al output. En cambio, si fijamos un nivel de output y comparamos la cantidad de input que gastamos, estamos midiendo la eficiencia con orientación input.

Dicho con otras palabras, con orientación input A tendría que tomar como referencia a B para mejorar, y con orientación output tomaría como referente a C .

1.3. Retornos de escala

Los retornos de escala pueden ser constantes en inglés “Constant Returns to Scale” (CRS), o variables “Variable Returns to Scale” (VRS) .

Para entender la idea de los retornos de escala pongamos el siguiente ejemplo con 1 input y 1 output:

Tenemos n personas que son nuestras DMUs. Como único input (x) tomamos el tiempo que camina cada persona y como único output (y) el espacio recorrido por cada una de ellas. Entonces, si suponemos retorno de escala constante, dada cualquier persona, si esta camina el doble de tiempo recorrerá el

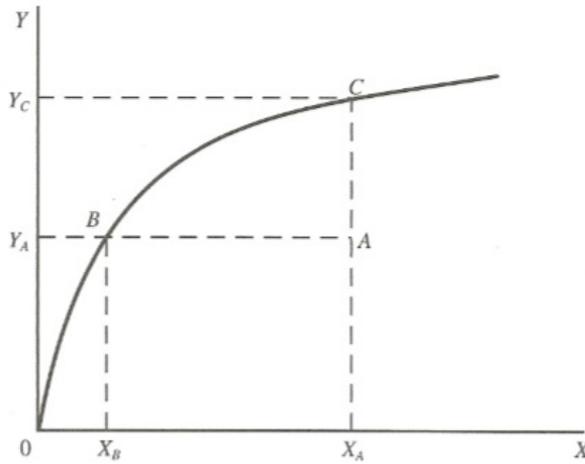


Figura 1.4. Medidas de la eficiencia técnica orientadas al input y al output.

doble de distancia, es decir, su velocidad será constante ($\frac{y}{x}$). En el otro caso, retorno de escala variable, la velocidad de cada persona puede variar en el tiempo y la velocidad instantánea ($\frac{dy}{dx}$) no tendrá que ser igual a la velocidad media acumulada ($\frac{y}{x}$).

Esta idea se generaliza para cualquiera que sea la naturaleza del input x y del output y . También se extiende para cualquier número ($m \geq 1$) de inputs y ($s \geq 1$) de outputs.

Podemos ilustrarla para el caso de un input ($m = 1$) y un output ($s = 1$) con la figura 1.5.

El eje de abscisas representa el input x y el eje de ordenadas representa el output y . Se nos muestra la curva de la "función de producción" $y = f(x)$, definida de manera que el y representado siempre es el máximo output alcanzado para el input x . Observamos que con esta definición la eficiencia técnica siempre se alcanza. Los puntos interesantes para nuestras actuales consideraciones son aquellos tales que $y = f(x)$.

En la gráfica 1.5.b se representa en abscisas el input x y en ordenadas el promedio y/x . Una de las curvas de dicha gráfica representa la productividad media ("average productivity" $a.p. = y/x$), y la otra la productividad marginal o instantánea ("marginal productivity" $m.p. = dy/dx$).

Estas curvas tienen también la siguiente interpretación:

$a.p.$:= pendiente de la recta que une el origen de coordenadas O y el punto Q , siendo Q cualquier punto de la curva $y = f(x)$, es decir, $Q = (x, f(x))$.

$m.p.$:= pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $Q = (x, f(x))$.

En la figura 1.5 observamos que las pendientes de las retas OQ con $Q = (x, f(x))$ (pendientes representadas por la curva a.p.) crecen hasta que x alcanza el valor x_0 donde a.p. encuentra un máximo. A partir de x_0 decrecen. Por otra parte, las pendientes de las rectas tangentes, es decir las derivadas $\frac{dy}{dx}$, representadas por la curva m.p., crecen hasta que x alcanza el punto de inflexión x_1 y luego comienzan a decrecer, siendo por tanto este punto x_1 donde la curva m.p. alcanza su máximo.

En la figura 1.5.b observamos además que m.p. está por encima de a.p. a la izquierda de x_0 . Esto quiere decir que $\frac{dy}{dx} > \frac{y}{x}$ y, por tanto, $\frac{dy}{y} > \frac{dx}{x}$ lo que significa que el output crece proporcionalmente más rápido que el input a la izquierda de x_0 . A la derecha de x_0 ocurre justamente lo contrario.

Esto se puede formalizar de la siguiente manera:

El máximo de a.p. se alcanza en

$$\frac{d(y/x)}{dx} = \frac{xdy/dx - y}{x^2} = 0 \quad (1.4)$$

$$xdy/dx - y = 0 \quad (1.5)$$

$$xdy = ydx \quad (1.6)$$

Así obtenemos la función

$$e(x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{d \ln y}{d \ln x} \quad (1.7)$$

Cuando a.p. alcanza el máximo, $xdy = ydx$ por lo tanto $e(x) = 1$, esto en nuestra figura 1.5 ocurre en $x = x_0$.

Donde $e(x)$ es definido como el logaritmo de la derivada y refleja los cambios proporcionales que están siendo considerados.

Si $e(x) < 1$ decimos que el retorno de escala es decreciente, pues $\frac{dy}{dx} < \frac{y}{x}$ con lo que $\frac{dy}{y} < \frac{dx}{x}$ y los outputs crecen proporcionalmente más despacio que los inputs. Esto curre en la gráfica a la derecha de x_0 .

Si $e(x) > 1$ decimos que el retorno de escala es creciente, pues $\frac{dy}{dx} > \frac{y}{x}$ con lo que $\frac{dy}{y} > \frac{dx}{x}$ y los outputs crecen proporcionalmente más deprisa que los inputs. Esto curre en la gráfica a la izquierda de x_0 .

Si $e(x) = 1$ decimos que el retorno de escala es constante, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Esto curre en la gráfica justamente cuando $x = x_0$.

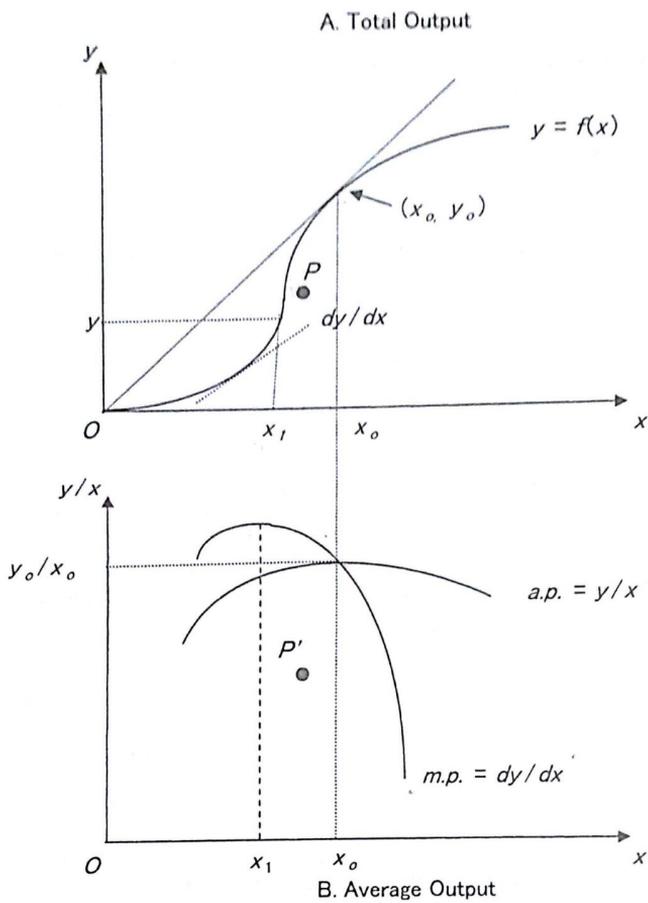


Figure 5.1. Returns to Scale

Figura 1.5. Retornos de escala

Modelo matemático DEA

Una alternativa no paramétrica para calcular la productividad total de las unidades de producción (DMUs), y que se basa en el uso de la programación lineal, es lo que ofrece el método de análisis de envolvente de datos, DEA (data envelopment analysis), basado en el trabajo seminal de Farrell (1957) e introducido formalmente por Charnes, Cooper y Rhodes (1981).

El procedimiento de estimación del DEA consiste en resolver, para cada una de las unidades productivas, un problema de optimización mediante programación lineal. La frontera se representa mediante las combinaciones convexas de las empresas óptimas o eficientes. El resto de empresas ineficientes quedan envueltas por esta frontera considerando que las únicas desviaciones posibles de la frontera se deben a una falta de eficiencia técnica.

De este modo, primero se construye la frontera de producción empírica y después se evalúa la eficiencia de cada unidad observada que no pertenezca a la frontera de eficiencia. Así, además de no ser un método paramétrico (por no presuponer una forma funcional de la frontera del conjunto de puntos posibles de producción) tampoco es estadístico puesto que los datos con los que se trabaja se suponen constantes y no variables aleatorias.

2.1. Ventajas y desventajas del modelo DEA .

Algunas de ventajas de los modelos DEA que se comentan en la literatura son las siguientes:

- DEA admite modelos con múltiples inputs y outputs.
- DEA no requiere una hipótesis de relación funcional entre dichos inputs y outputs.
- Las unidades se comparan directamente con otras unidades o una combinación de ellas.

- Los inputs y outputs pueden representar diferentes unidades, por ejemplo una magnitud puede venir medida en unidades físicas (toneladas), mientras que otra unidad tiene su medida en unidades monetarias (miles de pesos), sin que se requiera una relación a priori entre ellas.

Algunas de las limitaciones son:

- Si bien la metodología no paramétrica presenta la ventaja de la gran flexibilidad y ausencia de errores de especificación, al no ser preciso optar por ninguna forma funcional, presenta el inconveniente de ser una técnica determinista, por lo que la presencia de observaciones atípicas puede sesgar las medidas de eficiencia obtenidas gravemente.
- Los tests de hipótesis estadísticas son difíciles de aplicar, por ser un método no paramétrico.
- Este tipo de análisis funciona relativamente mal cuando el número de DMUs es bajo.

2.2. Axiomas y notación necesarios para enunciar los distintos modelos DEA.

Los axiomas que habitualmente se suponen en el DEA son los siguientes:

- (A1) El conjunto de puntos posibles de producción siempre es convexo.
- (A2) Ninguna empresa puede producir si no dispone de inputs o factores de producción, es decir, tendremos un vector de inputs x y uno de outputs y de componentes $(x, y) = (x_i, y_k)$ ($i = 1 \dots m, k = 1 \dots s$) a las cuales le exigimos que sean semipositivas, es más, alguna de ellas tendrá que ser positiva.
- (A3) La elección de las DMUs debe ser interesante para el estudio y tener sentido.
- (A4) Se debe presuponer un tipo de rendimientos de escala en el sector que se pretende analizar.

Cuando trabajamos en rendimientos de escala constantes (CRS del inglés constant returns to scale), podemos comparar la eficiencia de una tienda de barrio y una multinacional sin tener en cuenta el tamaño de la empresa, considerando que cualquier unidad puede alcanzar la productividad de las eficientes, independientemente de su envergadura. Por ello, la eficiencia que se calcula en el estudio es la global, ya que todas las DMUs tienen como unidades de referencia a las de mayor productividad.

El otro caso, es decir, cuando optamos por rendimientos de escala variable (VRS anglosajón variable returns to scale), consideramos que algunas unidades de tamaño diferente al de las eficientes pueden no ser capaces de conseguir la productividad de estas. En consecuencia, el estudio se realizará mediante la

eficiencia técnica (refiriendo cada DMU a la de productividad mayor de entre las de su tamaño).

Antes de enunciar los distintos modelos DEA, describiremos la notación:

- Recordamos el conjunto de puntos posibles de producción:

$$P = PPS = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} | x \text{ puede producir } y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} | y = f(x)\} \quad (2.1)$$

- $X = (x_{i,j}) \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ e $Y = (y_{k,j}) \in \mathbb{R}_+^{s \times n}$: Son respectivamente las matrices de las entradas y las salidas observadas en las n DMUs del problema, ($j=1\dots n$, $i=1\dots m$, $k=1\dots s$). La columna j -ésima de la matriz X representa los inputs para la DMU_j , mientras que, la columna j -ésima de la matriz Y representa los outputs de la DMU_j .

$$X = (x_{i,j}) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{m,1} & \cdots & x_{m,j} & \cdots & x_{m,n} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$Y = (y_{k,j}) = \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,j} & \cdots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & \cdots & y_{2,j} & \cdots & y_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{s,1} & \cdots & y_{s,j} & \cdots & y_{s,n} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

- $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^t$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1\dots n$. Un vector de \mathbb{R}^n donde n es el número de DMUs.
- $v = (v_{i,j}) \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ e $u = (u_{k,j}) \in \mathbb{R}_+^{s \times n}$: Son respectivamente las matrices de los pesos de los input y los output de cada DMU. ($j=1\dots n$, $i=1\dots m$, $k=1\dots s$), es decir, la columna j -ésima de la matriz v representa los pesos de los inputs para la DMU_j , mientras que, la columna j -ésima de la matriz u representa los pesos de los outputs para la DMU_j .

$$v = (v_{i,j}) = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,j} & \cdots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & \cdots & v_{2,j} & \cdots & v_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{m,1} & \cdots & v_{m,j} & \cdots & v_{m,n} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$u = (u_{j,k}) = \begin{pmatrix} u_{1,1} & \cdots & u_{1,j} & \cdots & u_{1,n} \\ u_{2,1} & \cdots & u_{2,j} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{s,1} & \cdots & u_{s,j} & \cdots & u_{s,n} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

- $e = (1, 1, \dots, 1)^t$, $e \in \mathbb{R}^n$. Vector columna de unos de \mathbb{R}^n .

2.3. El DEA con Rendimientos Constantes de Escala .

2.3.1. Conjunto de puntos posibles de producción (Production possibility set)

Cuando consideremos rendimientos constantes de escala denotaremos al PPS como P_{CRS} . El conjunto de las DMUs pertenecientes a P_{CRS} debe cumplir:

- (B1) Los factores observados (x_j, y_j) , $(j = 1, \dots, n)$, de cada DMU están en P_{CRS} .
- (B2) Si un factor (x, y) está en P_{CRS} , (tx, ty) también pertenece a P_{CRS} siendo t un escalar positivo. A esta propiedad se le llama "Hipótesis de retorno de escala constante".
- (B3) Si (x, y) es un punto perteneciente a P_{CRS} , entonces cualquier actividad semipositiva (\bar{x}, \bar{y}) con $\bar{x} \geq x$ y $\bar{y} \leq y$ también pertenece a P_{CRS} . Esta propiedad se conoce como FDH (Free Disposal Hull).
- (B4) Toda combinación lineal de puntos de P_{CRS} pertenece a P_{CRS} .

Esto reduce las DMUs posibles al conjunto P_{CRS} :

Sean $X = (x_{i,j})$ e $Y = (y_{k,j})$ respectivamente las matrices de las entradas y las salidas observadas en las DMUs del problema, X e Y cumplen las condiciones $B_k (k = 1, 2, 3, 4)$.

$$P_{CRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} : x \geq X\lambda; y \leq Y\lambda; \lambda \geq 0\}$$

donde λ tiene tantas componentes como DMUs tenga el problema. Por otra parte X e Y (matrices de entrada y salida) tienen tantas columnas como DMUs, para X existen tantas filas como inputs tenga el problema, de la misma forma, para la matriz Y existen tantas filas como outputs.

Una representación del conjunto de puntos posibles de producción podría ser el que muestra la figura 2.1:

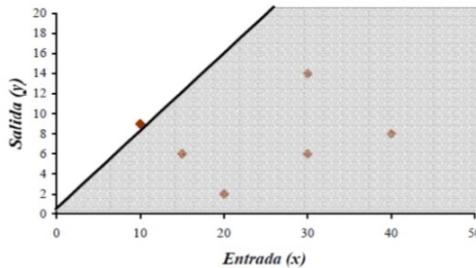


Figura 2.1. Ejemplo de PPS para retornos de escala constantes. P_{CRS}

Los puntos representan las unidades reales observadas en el problema y el conjunto P_{CRS} de puntos posibles de producción corresponde a la zona sombreada. Las líneas discontinuas indican que el conjunto se extiende hasta el infinito.

2.3.2. EL modelo CRS orientado al input y el problema DUAL

En el capítulo 2 calculábamos la productividad de la DMU_j , $j = 1...n$, con la expresión:

$$P_j = \frac{\sum_{k=1}^s u_{kj}y_{kj}}{\sum_{i=1}^m v_{ij}x_{ij}} = \frac{\text{virtual output}}{\text{virtual input}} = \frac{u_{1j}y_{1j} + \dots + u_{sj}y_{sj}}{v_{1j}x_{1j} + \dots + v_{mj}x_{mj}}$$

donde v_{ij} y u_{kj} con $j = 1...n$, $i = 1...m$, $k = 1...s$ son los pesos correspondientes a cada entrada i y a cada salida k , respectivamente.

Fijamos $j = o$ donde o puede ser $1,2,3,...,n$, entonces trabajamos con la DMU_o y sea $\theta = \frac{\sum_{k=1}^s u_{ko}y_{ko}}{\sum_{i=1}^m v_{io}x_{io}} = \frac{\text{virtual output}}{\text{virtual input}} = \frac{u_{1o}y_{1o} + \dots + u_{so}y_{so}}{v_{1o}x_{1o} + \dots + v_{mo}x_{mo}}$.

Sobre la matriz (X, Y) , el modelo CRS es formulado como un problema de programación lineal con un vector fila $v = (v_{io}) = (v_{1,o}, v_{2,o}, \dots, v_{m,o})$ para los pesos de los input y un vector fila $u = (u_{ko}) = (u_{1,o}, u_{2,o}, \dots, u_{s,o})$ para los pesos de los outputs. Estos pesos o multiplicadores son tratados como variables en el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} (CLP_o) \quad & \underset{u,v}{\text{máx}} \quad uy_o \\ & \text{subjeto a } vx_o = 1 \\ & -vX + uY \leq 0 \\ & v \geq 0, u \geq 0 \end{aligned}$$

En el problema dual las variables son el escalar real θ y el vector no negativo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$, formulamos el problema dual de este problema de máximo ayudándonos de este cuadro

Restricción primal	Variable dual	Restricción dual	Variable primal
$vx_o = 1$	θ	$\theta x_o - X\lambda \geq 0$	$v \geq 0$
$-vX + uY \leq 0$	$\lambda \geq 0$	$Y\lambda \geq y_o$	$u \geq 0$

Tabla 2.1. Correspondencias entre los problemas primal y dual en el modelo CRS

Así, el problema dual del problema CLP_o será:

$$\begin{aligned} (DCLP_o) \quad & \underset{\theta, \lambda}{\text{mín}} \quad \theta \\ & \text{subjeto a } \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ & Y\lambda \geq y_o \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Una solución factible para $(DCLP_o)$ se obtiene cuando $\theta = 1$, $\lambda_o = 1$, $\lambda_j = 0$ ($j \neq o$). Por lo tanto, si θ^* denota el valor óptimo de la función objetivo para el problema $(DCLP_o)$, que es un problema de mínimo, tenemos que $\theta^* \leq 1$. Además, debido a la suposición de datos no nulos (es decir, las matrices X e Y que caracterizan los inputs y los outputs de las DMUs no son idénticamente nulas, por lo tanto, tienen valores positivos), la restricción $Y\lambda \geq y_o$ fuerza a que el vector λ no sea el vector nulo, puesto que $y_o \leq 0$ y $y_o \neq 0$. Luego, como $\theta x_o - X\lambda \geq 0$ y el vector x_o es idénticamente nulo, concluimos que $\theta \geq 0$. En consecuencia $0 < \theta^* \leq 1$.

Observando las relaciones entre el conjunto de puntos posibles de producción P_{CRS} y el problema dual $(DCLP_o)$ se concluye que las restricciones del problema $(DCLP_o)$ requieren que la actividad $(\theta x_o, y_o)$ pertenezca a P_{CRS} y que el objetivo es encontrar el menor valor de θ que reduzca el vector de inputs (x_o) radialmente a θx_o sin salir del conjunto P_{CRS} . Es decir, en el problema $(DCLP_o)$ se busca una actividad en P_{CRS} que garantice al menos el nivel de outputs y_o de la DMU_o en todas las componentes (i.e., en todos los outputs) y que reduzca el vector de inputs x_o proporcionalmente (radialmente) a los valores más pequeños posibles.

2.3.3. EL modelo CRS orientado al output y el problema DUAL

Ahora desarrollaremos el problema de programación lineal cuyo objetivo es maximizar outputs sin usar más inputs que los observados en cada DMU. Para ello sólo necesitaremos realizar ciertos cambios en las formulaciones de los problemas orientados al input. Al contrario que en la anterior sección, procederemos planteando el problema de maximización y luego lo convertiremos en uno de minimización (el dual), mantendremos la notación. El modelo con orientación output puede formularse como el siguiente problema de programación lineal.

$$\begin{aligned} (DCLP_o) \quad & \underset{\eta, \mu}{\text{máx}} \quad \eta \\ & \text{sujeto a } x_o - X\mu \geq 0 \\ & \eta y_o - Y\mu \leq 0 \\ & \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Donde μ es un vector de n variables, siendo n el número de DMUs y η es una variable que además es la función objetivo del problema. Una solución óptima d este problema $(DCLP_o)$ con orientación output puede obtenerse directamente a partir de una solución óptima del problema con orientación input $(DCLP_o)$ comentado en la sección anterior simplemente con el cambio de variable $\lambda = \frac{\mu}{\eta}$ y $\theta = \frac{1}{\eta}$. Nótese que λ y μ son vectores de n variables, mientras que θ y η son variables reales. Luego si λ^* y θ^* son los valores óptimos de las $n+1$ variables de decisión del problema con orientación output $(DCLP_o)$ será $\mu^* = \frac{\lambda^*}{\theta^*}$ y $\eta^* = \frac{1}{\theta^*}$.

Como $\theta^* \leq 1$, η^* satisface que $\eta^* \geq 1$. Cuanto mayor sea el valor de η^* , menos eficiente será la DMU, θ expresa el ratio de reducción de input, mientras que η describe el ratio de ampliación de output.

De las relaciones anteriores deducimos que el modelo con orientación input ($DCLP_o$) será eficiente para cualquier DMU sí, y solo sí, lo es también el modelo con orientación output ($DCLPO_o$).

El problema dual a ($DCLPO_o$) ,es expresado en el siguiente modelo , cuyas variables son los vectores p y q siendo p un vector fila de \mathbb{R}_+^m y q un vector fila de \mathbb{R}_+^s .

$$\begin{aligned}
 (CLPO_o) \quad & \min_{p,q} px_o \\
 & \text{suje}to \text{ a } qy_o = 1 \\
 & -pX + qY \leq 0 \\
 & p \geq 0, q \geq 0
 \end{aligned}$$

Los valores óptimos p^* y q^* de las variables de decisión de este último problema ($CLPO_o$) las podemos obtener directamente a partir de los valores óptimos de u^* , v^* de las variables de decisión del problema (CLP_o) simplemente con los cambios de variable $p = \frac{v}{\theta}$, $q = \frac{u}{\theta}$. Es decir, si v^* , u^* son los $m + s$ valores de las variables de decisión en un óptimo del problema (CLP_o) entonces $p^* = \frac{v^*}{\theta^*}$, $q^* = \frac{u^*}{\theta^*}$ serán los $m+s$ valores de las variables de decisión en un óptimo del problema ($CLPO_o$).

2.4. El DEA con Rendimientos Variables de Escala

2.4.1. Conjunto de puntos posibles de producción (Production possibility set)

En esta sección el conjunto de puntos posibles de producción, PPS, será denotado por P_{VRS} . La única diferencia entre el PPS para retornos constantes de escala, P_{CRS} , y el PPS para retornos variables de escala. P_{VRS} , es que, en el P_{VRS} se cumple además la condición de convexidad $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0$ para todo j . Esta restricción puede expresarse también como $e^t \lambda = 1, \lambda \geq 0$ donde $e^t = (1, 1, \dots, 1)$ es un vector fila de n unos y $\lambda \in \mathbb{R}^m$ es un vector columna en \mathbb{R}^m .

Esta condición de convexidad reduce el conjunto de puntos posibles de producción para el modelo de retornos variables de escala a:

$$P_{VRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} : x \geq X\lambda; y \leq Y\lambda; e^t \lambda = 1; \lambda \geq 0\}$$

Donde $X = (x_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $Y = (y_{k,j}) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ ($j=1\dots n, i=1\dots m, k=1\dots s$), son respectivamente las matrices de las entradas y las salidas observadas en las n DMUs del problema y λ un vector columna con n componentes semipositivas.

Un ejemplo de representación del conjunto P_{VRS} para una sola entrada ($m=1$) y una sola salida ($s=1$), podría ser el que muestra la figura 2.2.

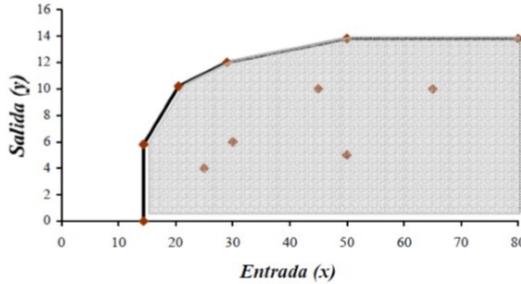


Figura 2.2. Ejemplo de PPS para para retornos de escala variables. P_{VRS}

Los puntos rojos representan la muestra de DMUs observadas en el problema y el conjunto P_{VRS} se corresponde con la zona sombreada.

2.4.2. EL modelo VRS orientado al input y el problema DUAL

Con las matrices de datos $X \in \mathbb{R}^m \times n$ e $Y \in \mathbb{R}^s \times n$, el modelo con retornos variables de escala, VRS, orientado al input evalúa la eficiencia de la DMU_o ($o=1, \dots, n$) y puede ser formulado con el siguiente problema de programación lineal. Esta formulación también se conoce como “forma envolvente”:

$$\begin{aligned}
 (BLP_o) \quad & \min_{\theta_B, \lambda} \theta_B \\
 \text{sujeto a} \quad & \theta_B x_o - X\lambda \geq 0 \\
 & Y\lambda \geq y_o \\
 & e\lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

donde θ_B es un escalar.

Cuyo problema dual formulamos ayudándonos de este cuadro

El problema dual es, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 (DBLP_o) \quad & \max_{u, v, u_o} z = uy_o - u_o \\
 \text{sujeto a} \quad & vx_o = 1 \\
 & -vX + uY - u_o e \leq 0 \\
 & v \geq 0, u \geq 0, u_o \text{ sin restringir el signo}
 \end{aligned}$$

Restricción primal	Variable dual	Restricción dual	Variable primal
$\theta_B x_o - X\lambda \geq 0$	$v \geq 0$	$vx_o = 1$	θ
$Y\lambda \geq 0$	$u \geq 0$	$-vX + uY - u_0 e \leq 0$	$\lambda \geq 0$
$e\lambda = 1$	u_o		

Tabla 2.2. Correspondencias entre los problemas primal y dual en el modelo VRS

donde u y v son vectores de los pesos y, z y u_o escalares.

La diferencia entre los modelos CRS y VRS es la aparición de u_o que es la variable dual asociada a la restricción $e\lambda = 1$.

El problema primal se resuelve de manera similar al caso CRS y obtenemos el óptimo $\theta_B = \theta_B^*$. Los modelos CRS y VRS también están relacionados entre sí. Dado que θ_B^* no es más que el óptimo θ^* obtenido en el modelo CRS añadiéndole la condición $e\lambda = 1$. Esto es la región factible del modelo VRS, que es un subconjunto de la región factible del modelo CRS.

2.4.3. EL modelo VRS orientado al output y el problema DUAL

Escribimos el modelo correspondiente:

$$\begin{aligned}
 (BLPO_o) \quad & \underset{\eta_B, \lambda}{\text{mín}} \quad \eta_B \\
 & \text{sujeto a } X\lambda \leq x_o \\
 & \eta_B y_o - Y\lambda \leq 0 \\
 & e\lambda = 1 \\
 & \lambda \geq 0
 \end{aligned}$$

El problema dual a $(DBLPO_o)$, es expresado en el siguiente modelo, cuyas variables son los vectores $v \in \mathbb{R}^m$ y $u \in \mathbb{R}^s$, y el escalar $u_o \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 (DBLPO_o) \quad & \underset{u, v, u_o}{\text{máx}} \quad z = vx_o - v_o \\
 & \text{sujeto a } uy_o = 1 \\
 & vX - uY - u_0 e \geq 0 \\
 & v \geq 0, u \geq 0, v_o \text{ sin restringir el signo}
 \end{aligned}$$

donde u y v son vectores de los pesos y z y u_o escalares, siendo v_o la variable dual asociada a la restricción $e\lambda = 1$.

En este capítulo hemos desarrollado los modelos. En el próximo capítulo los aplicaremos a un caso práctico.

Aplicación al sector pesquero gallego

3.1. Descripción del experimento

El sector pesquero gallego abarca todo aquello referido a la recolección de productos marinos, desde pesca de rape, para los que se necesitan grandes barcos, hasta recogida de berberechos, que se cogen en la ribera del mar a mano.

Para contabilizar todas estas actividades la Xunta divide la costa gallega en 9 zonas, cada una de estas dispone de cierta cantidad de lonjas, en las que se venden las especies respectivas de cada zona.

Los datos que utilizaremos en el estudio son facilitados a través de la plataforma pescadegalicia.gal cuyo objetivo es facilitar herramientas para el estudio analítico del sector.

Y la herramienta para medir la eficiencia que vamos a utilizar será la interfaz DEA.Shyni on line, facilitada por la Universidad Miguel Hernandez para el uso público.

Estudiaremos varias salidas de la interfaz, primero tomando como DMUs las 62 lonjas, y por último, en un estudio más general, tomaremos como DMU las 9 zonas, en las que se agrupan dichas lonjas, y éstas pasarán a ser inputs de cada zona.

Los salidas más interesantes de la interfaz son aplicando el modelo VRS orientado al input, esto es debido a dos cosas:

Por un lado, a que debemos elegir un modelo acorde con nuestras DMUs y hemos visto que al ser muy dispar el tamaño de las DMUs lo ideal es utilizar un modelo con escala variable. Y por el otro lado observamos que aplicando modelos orientados al output no se aprecian diferencias significativas en cuanto a la eficiencia entre las DMUs.

3.1.1. Datos del experimento en el que las DMUs son las lonjas

Las figuras 3.1 y 3.2 muestra los datos del experimento tomando como DMUs las 62 lonjas de la costa gallega. La tabla que se muestra en dichas figuras representa los datos de la siguiente manera:

DMUs: La primera columna son las $n=62$ lonjas, es decir, las DMUs.

Inputs: Las dos siguientes columnas, columnas 2 y 3, representan los $m=2$ inputs que son, respectivamente, el número de especies autóctonas y la cantidad media de camiones usados semanalmente.

Outputs: Las dos últimas columnas, columnas 4 y 5, representan los $s=2$ outputs que son, respectivamente, los kg anuales de producto y el lucro anual en euros. De manera esquemática podemos decir:

- DMUs: ($n= 62$) Lonjas repartidas a lo largo de la costa gallega .

Inputs: ($m=2$)

- Especies autóctonas.
- Cantidad media de camiones usados semanalmente.

Outputs:($s=2$)

- Kg de producto anuales.
- Lucro en euros anuales.

Corcubión	124	5,44	246503,59	1341642,54
Fisterra	124	4,82	641771,36	3092203,74
Baldoia	126	10,89	2814,12	30643,69
Caión	126	5,96	691	4120
Camariñas	126	1,12	3242406	3634394,7
Camelle	126	7,91	4479,41	35437,26
Corme	126	4,15	12474,15	51753,8
Laxe	126	2,48	427074,55	1058020,01
Malpica	126	1,5	1966969,35	2949275,24
Muxía	126	7,27	17594,95	127852,39
Río Anllóns	126	6,25	62542,66	390722,05
A Coruña (Confraría)	195	4,89	84895,59	415209,35
A Coruña (Lonja Coruña, S.A.)	195	1,91	40073762,43	76496097,28
Barallobre	195	8,08	232086,34	1874127,91
Ferrol	195	8,3	270595,65	2244658,75
Miño	195	15,26	2589,66	39517,25
Mugardos	195	9,99	40254	402083,86
Pontedeume	195	9,79	17495,4	171200,17
Sada	195	0,65	641847,3	415323,44
Cariño	121	1,19	543014,78	644455,55
Cedeira	121	4,92	1588506,57	7821407,38
Espasante	121	7,07	13015,32	91954,75
Burela	150	3,26	23519008,11	76696414,75
Celeiro	150	3,23	16544344,62	53440738,49
Foz	150	35,4	210,28	7444,5
O Barqueiro	150	2,43	32494,6	79106,79
O Vicedo	150	2,11	17031,19	35855,76
Ribadeo	150	9,56	13522,55	129223,22

Figura 3.1. Datos del problema, DMU: Lonjas

A Guarda	193	8,7	181466,65	1578616,4
Arcade	193	9,37	175208,8	1640868,49
Baiona	193	8,77	258805,7	2270358,94
Cangas	193	6,99	595796,4	4164160,36
Moaña	193	8,92	174251,15	1554445,48
Redondela	193	8,05	173659,5	1398272,95
Vigo	193	3,05	38197326,93	116394682,6
Vigo (Canido)	193	8,83	70176,79	619374,6
Vilaboa	193	10,1	78012,65	787889,59
Aldán-Hio	159	6,49	120204,45	780058,5
Bueu	159	5,12	883903,36	4528625,28
Campelo	159	8,77	433898,68	3803821,49
Marín	159	2,19	1447083,07	3164931,64
Pontevedra (Mercado)	159	14,77	16579,1	244833,9
Portonovo	159	0,88	2549008,41	2235988,98
Sanxenxo	159	66,88	25,91	1732,84
A Illa de Arousa	161	9,67	705506,8	6824593,96
Aguíño	161	12,95	199446,5	2583177,96
Cabo de Cruz	161	11,7	310904,55	3638723,95
Cambados	161	3,9	2144999,42	8366094,59
Carril	161	7	1152374,86	8061755,09
Coop. Ría de Arosa	161	11,14	17837,4	198709,6
O Grove	161	10,13	876221,41	8878510,12
Pobra do Caramiñal	161	7,9	116639,43	921634,21
Rianxo	161	7,08	518051,64	3667883,31
Ribeira	161	1,36	31834716,41	43261625,93
Vilanova	161	10,94	369408,58	4040347,64
Vilaxoán	161	10,28	83476,81	858300,28
Muros	127	1,47	4417519,83	6513299,26
Noia	127	5,73	1438611,7	8238811,91
Porto do Son	127	1,37	651277,9	892861,14
Portosin	127	0,62	7979068,05	4984752,04
Carnota (Lira)	124	5,27	142554,4	750753,82
Carnota (O Pindo)	124	91,32	251,37	22954

Figura 3.2. Datos del problema, DMU: Lonjas

3.1.2. Datos del experimento en el que las DMUs son las zonas

La figura 3.3 muestra los datos del experimento tomando como DMUs las $n=9$ zonas repartidas a lo largo de la costa gallega. La información detallada de las lonjas que componen cada una de estas zonas puede verse en la dirección web pescadegalicia.gal. En este experimento se consideraron $m=2$ inputs (columnas 2 y 3 en la figura 3.2) y $s=2$ outputs (columnas 4 y 5 en la figura 3.2).

DMUs: ($n=9$)

- zonas repartidas a lo largo de la costa gallega.

Inputs: ($m=2$)

- Especies autóctonas.
- Numero de lonjas.

Outputs: ($s=2$)

- Kg de producto anuales.
- Lucro en euros anuales.

DMU	LONJAS	ESPECIES	Kg	EUROS
ZONA1	9	191	34100611,9	117787098
ZONA2	6	155	4966102,58	12762370,4
ZONA3	12	157	30731752,7	74985189,4
ZONA4	4	125	12318132,7	23450256,8
ZONA5	4	123	892141,84	4192057,1
ZONA6	9	126	7253288,6	10149686,8
ZONA7	8	192	36961891,5	83344035
ZONA8	3	119	2095592	8454728,9
ZONA9	6	147	38981488,9	129815407

Figura 3.3. Datos del problema, DMU: Zonas

3.2. Resultado del experimento

En esta sección mostraremos y analizaremos los resultados de las salidas de la interfaz DEA.Shyni. Empezaremos con un estudio de la eficiencia de las lonjas mediante el modelo VRS orientado al input para 1 input y 2 output, luego para 2 input y 1 output, y por último una vez terminado el experimento de la eficiencia lonjas, empezaremos el de la eficiencia de las Zonas, dándonos éste un resultado más general de la geografía gallega.

3.2.1. Lonjas: 1 input (especies) y 2 output

La interfaz nos da los datos de la ineficiencia, la ineficiencia se corresponde con $1 - \theta_B$ en el modelo $BLPO_o$. Observamos, en los datos del Apéndice A, que las lonjas menos eficientes son aquellas que abarcan más especies, aquellas que disponen de 195 especies tienen una ineficiencia de 0.379 sobre 1, mientras que, aquellas que solo tienen 121 especies alcanzan el óptimo.

Para mejorar la eficiencia de las lonjas deberíamos atender a los multiplicadores (dados en el Apéndice A) los cuales se corresponden a los pesos v en nuestros modelos, al variar la cantidad de input según nos indican los pesos mejoraríamos el resultado.

3.2.2. Lonjas: 2 input y 1 output (Kg anuales)

Observamos en los datos del Apéndice B que varias DMU alcanzan el óptimo (*ineficiencia* = 0), por lo que para la cantidad de output que obtienen utilizan unos inputs adecuados. Las lonjas que mayor eficiencia obtienen son la 26, la 47 y la 53, que coinciden con aquellas que permiten pescar menos Kg. al año. Este puede ser debido a que una menor oferta mejora la calidad del producto al dejarlo crecer durante más tiempo y permite establecer unos precios más favorables obteniendo mayores ingresos.

Respecto a los multiplicadores, vemos que influye más la cantidad de especies (input1) que los kg que pueden coger al día los trabajadores (input2).

Para mejorar nuestros niveles de eficiencia bastaría con aplicar los multiplicadores o pesos que nos recomienda la interfaz, variando la cantidad de input en la cantidad que nos parece reflejada.

3.2.3. Zonas : 2 input y 2 output

Los estudios por zonas nos dan unos resultados más generales y nos dan una visión más global.

Observamos que la zona mas eficiente es la zona 8, por lo que deducimos que tener un menor número de lonjas y especies nos hace ahorrar en inputs sin perder apenas output, esto se debe a que los kg de producto obtenido se obtiene con un menor gasto. La zona menos eficientemente es la zona 1, en la que observamos que abarcar demasiadas especies desmejora la eficiencia.

En cuanto a los pesos o multiplicadores, al igual que observábamos en los datos de la eficiencia, se nos recomienda reducir el número de especies a trabajar.

Conclusiones y Trabajos Futuros

Con este trabajo nos hemos introducido y hemos profundizado en el estudio de técnicas de análisis de eficiencia, concretamente en el método “Análisis de envoltente de datos” (DEA). Empezamos introduciendo los conocimientos necesarios para entender el método, luego desarrollamos el método y finalmente expusimos un ejemplo. Este ejemplo es el caso práctico “La eficiencia y la productividad del sector pesquero gallego” en él obtuvimos unos resultados que, al aplicarlos, podemos mejorar la eficiencia de este sector.

La utilidad del DEA para la gestión de las zonas pesqueras de Galicia radica en que proporciona unidades operativas de referencia que sugieren líneas de acción para una mejor asignación de recursos que pueden ponerse en práctica en aquellas zonas que se han revelado menos eficientes.

Los resultados obtenidos mediante la utilización del análisis envoltente de datos (DEA), podrían ser validados a partir del uso de otras técnicas como lo es por ejemplo el de fronteras estocásticas.

Las técnicas utilizadas en esta investigación dependen totalmente de la calidad de los datos, y teniendo en cuenta que la metodología DEA es una técnica determinista, sería interesante explorar técnicas de muestreo que permitan incluir la componente estocástica a los análisis.

A

Apéndice

A.1. Salidas: Lonjas, 1 inputs (Especies) y 2 outpus

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers Lambdas Constraints defined by user

Show entries Search:

	Inefficiency
2	0.373
3	0.373
4	0.373
5	0.373
6	0.373
7	0.373
8	0.373
9	0.373
10	0.239
11	0.239
12	0.239
13	0.239
14	0.239
15	0.239
16	0.239
17	0.248
18	0.248
19	0.248
20	0.248
21	0.248
22	0.248
23	0.248
24	0.248
25	0.248
26	0.248

Inefficiency

Showing 1 to 25 of 60 entries

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deamh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deamh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers Lambdas Constraints defined by user

Show entries Search:

	Inefficiency
27	0.248
28	0.248
29	0.047
30	0.047
31	0.047
32	0.047
33	0.024
34	0.024
35	0.024
36	0.024
37	0.04
38	0.04
39	0.04
40	0.04
41	0.04
42	0.04
43	0.04
44	0.04
45	0.04
46	0.379
47	0.379
48	0.379
49	0.379
50	0.379
51	0.379

Inefficiency

Showing 26 to 50 of 60 entries

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers Lambdas Constraints defined by user

Show entries Search:

	Inefficiency
52	0.379
53	0.379
54	0
55	0
56	0
57	0.193
58	0.193
59	0.193
60	0.193
61	0.193

Inefficiency

Showing 51 to 60 of 60 entries

DEAS hiny

Choose CSV File

 Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>)

Constraints defined by user

Show entries Search:

	C1	P1	P2
2	0.005181	0	0
3	0.005181	0	0
4	0.005181	0	0
5	0.005181	0	0
6	0.005181	0	0
7	0.005181	0	0
8	0.005181	0	0
9	0.005181	0	0
10	0.006289	0	0
11	0.006289	0	0
12	0.006289	0	0
13	0.006289	0	0
14	0.006289	0	0
15	0.006289	0	0
16	0.006289	0	0
17	0.006211	0	0
18	0.006211	0	0
19	0.006211	0	0
20	0.006211	0	0
21	0.006211	0	0
22	0.006211	0	0
23	0.006211	0	0
24	0.006211	0	0
25	0.006211	0	0
26	0.006211	0	0

	C1	P1	P2
--	----	----	----

DEAS hiny

Choose CSV File

 Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>)

Constraints defined by user

Show entries Search:

	C1	P1	P2
27	0.006211	0	0
28	0.006211	0	0
29	0.007874	0	0
30	0.007874	0	0
31	0.007874	0	0
32	0.007874	0	0
33	0.008065	0	0
34	0.008065	0	0
35	0.008065	0	0
36	0.008065	0	0
37	0.007937	0	0
38	0.007937	0	0
39	0.007937	0	0
40	0.007937	0	0
41	0.007937	0	0
42	0.007937	0	0
43	0.007937	0	0
44	0.007937	0	0
45	0.007937	0	0
46	0.005128	0	0
47	0.005128	0	0
48	0.005128	0	0
49	0.005128	0	0
50	0.005128	0	0
51	0.005128	0	0

<input type="text"/>	<input type="text" value="C1"/>	<input type="text" value="P1"/>	<input type="text" value="P2"/>
----------------------	---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>)

Constraints defined by user

Show entries Search:

	C1	P1	P2
52	0.005128	0	0
53	0.005128	0	0
54	0.008264	0	0
55	0.008264	0	0
56	0.008264	0	0
57	0.006667	0	0
58	0.006667	0	0
59	0.006667	0	0
60	0.006667	0	0
61	0.006667	0	0

Showing 51 to 60 of 60 entries

A.2. Salidas: Lonjas, 2 inputs y 1 outpus (Beneficio)

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>) Lambdas

Constraints defined by user

Show entries Search:

	Inefficiency
1	0.373
2	0.373
3	0.373
4	0.358
5	0.373
6	0.373
7	0
8	0.373
9	0.37
10	0.227
11	0.217
12	0.239
13	0.235
14	0.239
15	0
16	0.239
17	0.248
18	0.248
19	0.248
20	0.238
21	0.231
22	0.248
23	0.246
24	0.243
25	0.234

	Inefficiency
--	--------------

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>) Lambdas

Constraints defined by user

Show entries Search:

	Inefficiency
26	-0.669
27	0.248
28	0.248
29	0
30	0.046
31	0
32	0
33	0.024
34	0.024
35	0.024
36	0.024
37	0.04
38	0.04
39	0
40	0.04
41	0.04
42	0.04
43	0.038
44	0.04
45	0.04
46	0.363
47	-0.137
48	0.37
49	0.369
50	0.379

Inefficiency

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>) Lambdas

Constraints defined by user

Show entries Search:

	Inefficiency
51	0.376
52	0.379
53	-0.25
54	0
55	0
56	0
57	0
58	0.061
59	0.193
60	0.193

Showing 51 to 60 of 60 entries

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>) Lambdas

Constraints defined by user

Show entries Search:

	C1	C2	P1
1	0.005181	0	0
2	0.005181	0	0
3	0.005181	0	0
4	0.005066	0.003187	0
5	0.005181	0	0
5	0.005181	0	0
7	0.005181	0	0
3	0.005181	0	0
3	0.005018	0.003157	0
10	0.006098	0.005081	0
11	0.006167	0.003881	0
12	0.006289	0	0
13	0.006233	0.004476	0
14	0.006289	0	0
15	0	1	0
16	0.006289	0	0
17	0.006211	0	0
18	0.006211	0	0
19	0.006211	0	0
20	0.006102	0.004382	0
21	0.006211	0	0
22	0.006211	0	0
23	0.006211	0	0
24	0.006023	0.00379	0
25	0.006046	0.003804	0

	C1	C2	P1
--	----	----	----

DEAS hiny

Choose CSV File

 Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>)

Constraints defined by user

Show entries Search:

	C1	C2	P1
26	0	1	0
27	0.006211	0	0
28	0.006211	0	0
29	0	1	0
30	0.007874	0	0
31	0	1	0
32	0	1	0
33	0.008065	0	0
34	0.008065	0	0
35	0.008065	0	0
36	0.008065	0	0
37	0.007937	0	0
38	0.007937	0	0
39	0	1	0
40	0.007937	0	0
41	0.007937	0	0
42	0.007937	0	0
43	0.007847	0.005635	0
44	0.007937	0	0
45	0.007937	0	0
46	0.005021	0.004184	0
47	0	0.5	0
48	0.004999	0.003146	0
49	0.004999	0.003146	0
50	0.005128	0	0

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>) Lambdas

Constraints defined by user

Show entries Search:

	C 1	C 2	P 1
51	0.004918	0.004098	0
52	0.005128	0	0
53	0	1	0
54	0.008264	0	0
55	0.008264	0	0
56	0.008264	0	0
57	0.006667	0	0
58	0.006572	0.004719	0
59	0.006667	0	0
60	0.006667	0	0

Showing 51 to 60 of 60 entries

A.3. Salidas: Zonas, 2 inputs y 2 output

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers Lambdas Constraints defined by user

Show entries Search:

	Inefficiency
2	0.377
3	0.232
4	0.242
5	0.048
6	0.033
7	0.056
8	0.38
9	0
10	0.19

Inefficiency

Showing 1 to 9 of 9 entries

DEAS hiny

Choose CSV File

Upload complete

Header

<https://drive.google.com/open?id=0B4VlhpYW8DTgakjzSTVlam9ZU28>

Enter the number of inputs

Enter the number of outputs

Enter the number of DMUs

Model:

Return to S scale:

- Variable
- Constant
- Nonincreasing
- Nondecreasing

Orientation:

Click to see the result

Data (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-1>)

Inefficiency results (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-2>)

Multipliers (<https://deaumh.shinyapps.io/DEAUMH/#tab-6549-3>) Lambdas

Constraints defined by user

Show entries Search:

	C1	C2	P1
2	0	0.005236	0
3	0	0.006452	0
4	0	0.006369	0
5	0	0.008	0
6	0	0.00813	0
7	0	0.007937	0
8	0	0.005208	0
9	0	0.008403	0
10	0	0.006803	0

Showing 1 to 9 of 9 entries

Bibliografía

- [1] *Apuntes de grado* 2011-2016.
- [2] COOPER W.W., CHARNES A. AND RHODES L. *Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through*. Management Science 27, 1981.
- [3] RAFACELA DIOS PALOMARES, DAVID ALCAIDE LÓPEZ DE PABLO AND ÁNGEL M. PRIETO *A new multicriteria approach for the analysis of efficiency in the Spanish olive oil sector by modelling decision maker preferences*. European Journal Of Operational Research, 2014.
- [4] UNIVERSIDAD MIGUEL HERNANDEZ DE ELCHE. *Interfaz DEA.Shiny*.
- [5] FARREL M.J *The measurement of productive efficiency* Journal of the Royal Statistical Society, 1957.
- [6] FÁTIMA URDANETA *Análisis de eficiencia técnica en fincas ganaderas de doble propósito en la cuenca del lago Maracaibo, Venezuela*. Thesis, Departamento de Estadística, Investigación Operativa, Organización de Empresas y Economía Aplicada. Universidad de Córdoba, 2012.
- [7] SEIFORD L.M., COOPER W.W. AND TOME K. *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. New York. Springer, 2 edition, 2017.
- [8] CONSELLERÍA DO MAR, XUNTA DE GALICIA <http://www.pescadegalicia.gal>.

An application of the DEA (Data Envelopment Analysis) non-parametrical model to a real case: Efficiency and productivity in the fishing economic sector in

Galicia

Aurora Figueroa García

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0100925869@ull.edu.es

Resumen

Firms usually use a ratio of inputs versus outputs to evaluate their efficiency, but if the process is complex then weighted indexes are required. This paper identifies the comparative efficiency level for 9 zones in the fishing sector, located on Galician coast, obtained by applying the Data Envelopment Analysis (DEA), a linear programming based method. This document shows that the overall efficiency of the fishing areas of Galicia is good, although small changes could be applied to the inputs used in order to improve it.

1. Introduction

The study of efficiency has become, in recent years, one of the fields of applied economics and operational research that has developed the most.

The companies need resources in order to produce. We will name those resources "inputs" whereas we will call the produced goods "outputs". We might consider, in a way, as better those companies, which consuming the same amount of inputs are capable of producing more outputs. We also could see as the best, those which requires less inputs to produce the same amount of outputs.

1.1 Definitions

- Given a set of n companies or organizations (departments, schools, hospitals, bars, etc.) of a certain sector we are interested in comparing their performance, we consider each one of these companies or organizations a "Decision making unit" or "DMU".
- A total of m inputs are used in the production process of each DMU to produce s outputs. The companies share the same sets of inputs and outputs and are therefore comparable.
- We define the Production Possibility Set, PPS in the literature, as:
 $P = PPS = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} | x \text{ puede producir } y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} | y = f(x)\}$
where $f: \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^s, x \rightarrow y = f(x)$ is the "Production Function".

2. DEA method

A non-parametric alternative to calculate the total productivity of production units (DMUs), which is based on the use of linear programming, is what is given by the DEA data envelope analysis method.

The DEA estimation procedure consists of solving, for each of the productive units, an optimization problem using linear programming. The border is represented by the convex combinations of the optimal or the efficient companies.

The rest of the inefficient companies stay surrounded by that border due to a lack of technical efficiency.

This way, the empirical production frontier is first constructed and then the efficiency of each observed unit that does not belong to the efficiency frontier is evaluated.

2.1 The DEA with Constant Scale Returns.

Production possibility set $P_{CRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} : x \geq X\lambda; y \leq Y\lambda; \lambda \geq 0\}$

- The CRS model oriented to the input and the DUAL problem.

$$(CLP_o) \max_{\lambda, \mu} \eta_o \\ \text{sujeto a } v_o x_o = 1 \\ -eX + uY \leq 0 \\ v \geq 0, u \geq 0$$

The dual problem of the problem CLP_o is:

$$(DCLP_o) \min_{\lambda} \theta \\ \text{sujeto a } \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ Y\lambda \geq y_o \\ \lambda \geq 0$$

- The CRS model oriented to the output and the DUAL problem.

$$(DCLP_o) \max_{\mu} \eta \\ \text{sujeto a } x_o - X\mu \geq 0 \\ \eta y_o - Y\mu \leq 0 \\ \mu \geq 0$$

The dual problem of the $DCLP_o$ problem is:

$$(CLP_o) \min_{\mu, \rho} z_o \\ \text{sujeto a } \rho x_o = 1 \\ -\rho X + \mu Y \leq 0 \\ \rho \geq 0, \mu \geq 0$$

2.2 The DEA with Variable Scale Returns.

Production possibility set $P_{VRS} = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{m+s} : x \geq X\lambda; y \leq Y\lambda; e^T \lambda = 1; \lambda \geq 0\}$

- The VRS model oriented to the input and the DUAL problem.

$$(BLP_o) \min_{\lambda, \theta} \theta \\ \text{sujeto a } \theta x_o - X\lambda \geq 0 \\ Y\lambda \geq y_o \\ e\lambda = 1 \\ \lambda \geq 0$$

where θ_j is a escalor.

The dual problem of the BLP_o problem is:

$$(DBLP_o) \max_{u, v} z = u y_o - u_o \\ \text{sujeto a } v x_o = 1 \\ -vX + uY - u_o e \leq 0 \\ v \geq 0, u \geq 0, u_o \text{ sin restringir el signo}$$

- EL modelo VRS orientado al output y el problema DUAL.

$$(BLP_o) \min_{\theta, \lambda} \theta \\ \text{sujeto a } X\lambda \leq x_o \\ \eta y_o - Y\lambda \leq 0 \\ e\lambda = 1 \\ \lambda \geq 0$$

The dual problem of the BLP_o problem is:

$$(DBLP_o) \max_{v, u} z = v x_o - v_o \\ \text{sujeto a } u y_o = 1 \\ vX - uY - v_o e \geq 0 \\ v \geq 0, u \geq 0, v_o \text{ sin restringir el signo}$$

The optimal solutions to these problems will give us efficiency benchmarks so we can improve efficiency and productivity.

3. The real case

The Galician fishing sector covers everything related to the collection of marine products.

Galician coast into 9 zones, each with a certain number of markets, in which the respective species of each zone are sold. We will study several outputs of the "DEA-Shyml" interface, first taking the 62 markets as DMUs, and finally in a more general study we will take as DMU the 9 zones, in which these markets are grouped, and these will become inputs of each zone.

4. Conclusions

With this work we tried to introduce ourselves in the techniques of efficiency analysis, specifically in the "Data Envelopment Analysis"(DEA) method. We started introducing the necessary knowledge to understand the method, then developed the method and finally set an example. This example is the case study "The efficiency and productivity of the Galician fishing sector", we obtained results that we can improve the efficiency of this sector.

The utility of the DEA for the management of the fishing zones of Galicia is that provides operational reference units that suggest lines of action for better allocation of resources that can be put into practice in areas that have been revealed less efficient.

Referencias

- [1] Apuntes del grado, 2011-2016.
- [2] W. W. Cooper A. Charnes and Edward L. Rhodes. *Evaluating program and managerial efficiency: An application of data envelopment analysis to program follow through*. Management Science 27, 1981.
- [3] Rafaela Dios Palomares David Alcáide López de Pablo and Angel M. Prieto. A new multicriteria approach for the analysis of efficiency in the Spanish olive oil sector by modelling decision maker preferences. *European Journal of Operational Research*, 234:241–252, 2014.
- [4] Universidad Miguel Hernandez de Elche. Interfaz dea shyml.
- [5] M. J. Farrell. *The measurement of productive efficiency*. Journal of the Royal Statistical Society, 1957.
- [6] Fátima Urdaneta. *Análisis de eficiencia técnica en fincas ganaderas de doble propósito en la cuenca del lago de Maracaibo, Venezuela*. PhD thesis, Departamento de Estadística, Investigación Operativa, Organización de Empresas y Economía Aplicada, Universidad de Córdoba, 2012.
- [7] L. M. Seiford W. W. Cooper and K. Tone. *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*. New York, Springer, 2 edition, 2007.
- [8] Consellería do mar Xunta de Galicia. <http://www.pescadegalicia.gal>.