
DECOHERENCIA INDUCIDA POR EL ENTORNO EN PEQUEÑOS SISTEMAS CUÁNTICOS

Betsabé C. Aguiar Álvarez

Trabajo Fin de Grado

Tutor: Santiago Brouard Martín

Departamento de Física Fundamental II

Universidad de La Laguna



Summary

Quantum systems can only rarely be considered as isolated from their environments. Particles or photons are usually coupled to other systems that affect their dynamics, sometimes in a very important and drastic manner. The environment of a charged particle or system of particles, for instance, is the electromagnetic field which can not be switched off and always affects the dynamics of the particle or particles even though it is in its vacuum state (no photons). The mere existence of the coupling to the electromagnetic field is responsible for the eventual decay of excited systems and subsequent emission of a photon or several photons. The measurement of a given observable of a system is another simple example where the coupling of a (small) quantum system to a larger (detector) system affects its dynamics in a critical manner, producing the collapse of the wave function to an eigenstate or a set of eigenstates associated to the measured quantity.

This project focuses on the study of the dynamics of a quantum system interacting with an environment or a macroscopic/classical detector. In particular I will be interested in describing the decoherence effect induced by the environment, the decay of the coherence elements of the density matrix describing the system in a given basis. The main objective is to obtain the master equation that describes the evolution of a small quantum system \mathcal{A} in the presence of a larger system (reservoir) \mathcal{R} . In particular, the master equation is obtained and studied for small quantum systems such as two and three-level atoms.

The master equation for the system \mathcal{A} is obtained in detail in the basis of energy eigenstates of the system \mathcal{A} , where the evolution of populations and coherences is evaluated. The dynamics of the system $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ is described first using the Schrodinger equation in an interaction picture, where the free Hamiltonian of system \mathcal{A} and environment \mathcal{R} is eliminated and only the relative dynamics with respect to the free motion is described. Taking into account that in general it is not necessary to have a complete or detailed knowledge of the dynamics of the environment, a trace operator is performed on the density matrix of the complete system to keep only a reduced density operator for system \mathcal{A} .

Some approximations and assumptions are used to obtain the master equation, of which only the more important ones will be mentioned in this summary. Firstly, the Von Neumann equation is formally integrated by iteration where only terms up to the second order in the interaction V between the two subsystems are kept. Secondly, a Markovian reservoir is assumed so that the integro-differential equation we are dealing with is rewritten as a differential equation, which allows one to calculate the future evolution of the system \mathcal{A} from the knowledge of the state of the system at the present time, not depending on the past history. Thirdly, when dealing with the set of coupled differential equations it is shown that only populations and/or coherences that evolve freely with similar frequencies (similar within the range $1/\Delta t$) affect each other's dynamics. A secular approximation is made which consists on keeping in each differential equation terms that evolve freely with almost the same frequency.

Then, the master equation is derived for a two-level atom coupled to the radiation field. A quite generic state for the radiation field is considered, with its reduced density matrix $\sigma_{\mathcal{R}}$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

corresponding to a constant of motion for the isolated radiation field, with Hamiltonian H_R ($[\sigma_R, H_R] = 0$). The particular case of the vacuum state of the radiation field is considered separately. To go further in this particular case of two levels the asymptotic values of the populations is obtained as time goes to infinity and it is studied how decoherence is induced in the system \mathcal{A} .

A master equation is next derived for a three level atomic system. The set of equations for populations and coherences in the energy basis is obtained and studied in more detail for three different cases. The three cases are studied as whether decoherence appears or not and which are the asymptotic values of populations and coherences: 1) The difference between the energies of the levels are all different and non zero (no degeneracy is allowed). The populations are decoupled from the coherences according to the secular approximation. An expression is obtained for the asymptotic values of populations whereas coherences (all decoupled from the rest) are shown to go to zero (decoherence). 2) The energies of the levels are distributed equidistantly, so two of the Bohr frequencies are equal and different to the third (and also non zero). In this case, the asymptotic populations are evaluated in the same way as before, and all the coherences are shown to go to zero as well (decoherence). 3) Two of the energy levels are degenerate, so one of the Bohr frequencies is zero and the other two are both equal and non zero. One of the coherences is coupled to the populations since its free evolution frequency is zero. In this case populations are coupled to this coherence and their asymptotic values are obtained. The rest of the coherences go to zero as time goes to infinity but no complete decoherence is observed since one of the coherences will in general have a non zero value.

Índice

Introducción.....	4
Dinámica de un sistema pequeño \mathcal{A} en presencia de un “baño” \mathcal{R}: ecuación maestra.....	5
1. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA.....	5
2. ECUACIÓN MAESTRA PROYECTANDO EL OPERADOR DENSIDAD REDUCIDO EN LA BASE DE ESTADOS DE ENERGÍA.....	9
3. ECUACIÓN MAESTRA PARA UN SISTEMA ATÓMICO DE DOS NIVELES ACOPLADO AL CAMPO DE RADIACIÓN.....	15
• 3.1 Ecuación maestra para la emisión espontánea en un campo de radiación en el estado de vacío.....	16
• 3.2 Ecuación maestra incluyendo absorción y emisión estimulada por un campo de radiación de banda ancha.....	18
4. ESTUDIO DE LA ECUACIÓN MAESTRA PARA UN SISTEMA ATÓMICO DE TRES NIVELES.....	22
Conclusiones.....	30
Bibliografía.....	31

Introducción

Un tema de bastante interés en el campo de la mecánica cuántica es el estudio del mecanismo por el cual ocurre la transición cuántico-clásica. La mecánica cuántica tiene un dominio de aplicación bastante amplio y sus predicciones concuerdan con los experimentos con gran precisión, sin embargo existe cierta ambigüedad cuando se quiere establecer la frontera entre lo que se considera cuántico y lo que se piensa que es clásico.

Una explicación para esta transición de lo cuántico a lo clásico podría ser que los sistemas macroscópicos, debido a su interacción con el entorno, se comportan de manera clásica. La interacción de un sistema cuántico abierto con el entorno produce decoherencia, esto es, la pérdida de coherencia. La decoherencia puede definirse como la pérdida de las propiedades cuánticas de un sistema por interacción con los alrededores, es decir, como un estado cuántico entrelazado puede dar lugar a un estado físico clásico no entrelazado.

El problema de la medida siempre ha estado presente en la mecánica cuántica. Surge la pregunta de cómo es posible explicar, en una medición cuántica, el valor definido de los observables del aparato macroscópico, si desde el punto de vista cuántico el sistema se encuentra en una superposición de estados. Una de las primeras explicaciones fue la interpretación de Copenhague, propuesta por Niels Bohr, quien asumió que el resultado de un aparato debería de ser clásico.

Wojciech Hubert Zurek [1] jugó un importante papel con su trabajo sobre decoherencia cuántica, ya que preparó el camino hacia la comprensión de cómo el mundo clásico emerge de la mecánica cuántica. Zurek desarrolló la idea de que los sistemas macroscópicos, como los aparatos de medición, nunca están aislados sino que interactúan significativamente con su entorno.

Este trabajo está centrado en estudiar la decoherencia en el proceso de interacción de un sistema con su entorno. El objetivo es definir en detalle la ecuación maestra que describe la evolución de un sistema cuántico “pequeño” \mathcal{A} en interacción con sistemas que hacen el papel de entorno o detector (aparato de medida). En particular se obtiene la ecuación maestra para un sistema de dos niveles y se estudia cómo se induce decoherencia en el sistema \mathcal{A} . También se deriva y discute la ecuación para un sistema de tres niveles donde se analizan diferentes casos en función de que muestren o no decoherencia.

En términos de las matrices densidad, la pérdida de coherencia equivale a la desaparición de elementos no diagonales, por lo que basta con estudiar si las coherencias se van a cero en un tiempo lo suficientemente largo. De esta manera, se comprueba si el acoplamiento del sistema con el baño produce o no decoherencia en una determinada base, que en este caso será la de autoestados del Hamiltoniano del sistema aislado \mathcal{A} .

Dinámica de un sistema pequeño \mathcal{A} en presencia de un “baño” \mathcal{R} : ecuación maestra

1. OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN MAESTRA

Se considera un sistema cuántico $\mathcal{A} + \mathcal{R}$ constituido por dos subsistemas, uno de ellos (\mathcal{A}) con un número reducido de grados de libertad en comparación con el otro (\mathcal{R}) que se denomina “baño” [2].

El Hamiltoniano del sistema total será

$$H = H_A + H_R + V, \quad (1.1)$$

donde V describe la interacción entre \mathcal{A} y \mathcal{R} , de manera que el operador densidad ρ del sistema total obedece la ecuación de evolución

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{1}{i\hbar}[H, \rho(t)]. \quad (1.2)$$

Haciendo uso del cambio de representación (imagen de interacción)

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = U|\Psi(t)\rangle = e^{i(H_A+H_R)t/\hbar}|\Psi(t)\rangle = e^{iH_0t/\hbar}|\Psi(t)\rangle,$$

donde U es un operador unitario, $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$,

$$\tilde{\rho}(t) = U\rho(t)U^\dagger,$$

se tiene para la ecuación de evolución (1.2)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= \frac{1}{i\hbar}[H, \rho(t)] = \frac{1}{i\hbar}[H\rho(t) - \rho(t)H] = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[(H_0 + V)U^\dagger\tilde{\rho}(t)U - U^\dagger\tilde{\rho}(t)U(H_0 + V)] = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[H_0U^\dagger\tilde{\rho}(t)U + VU^\dagger\tilde{\rho}(t)U - U^\dagger\tilde{\rho}(t)UH_0 - U^\dagger\tilde{\rho}(t)UV] = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[U^\dagger H_0\tilde{\rho}(t)U + VU^\dagger\tilde{\rho}(t)U - U^\dagger\tilde{\rho}(t)H_0U - U^\dagger\tilde{\rho}(t)UV] = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[VU^\dagger\tilde{\rho}(t)U - U^\dagger\tilde{\rho}(t)UV] = \frac{1}{i\hbar}[U^\dagger UVU^\dagger\tilde{\rho}(t)U - U^\dagger\tilde{\rho}(t)UVU^\dagger U] = \\ &= \frac{1}{i\hbar}[U^\dagger\tilde{V}(t)\tilde{\rho}(t)U - U^\dagger\tilde{\rho}(t)\tilde{V}(t)U]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Por otro lado

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \frac{d}{dt}[U^\dagger\tilde{\rho}(t)U] = \frac{dU^\dagger}{dt}(\tilde{\rho}(t)U) + U^\dagger\frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt}(U) + U^\dagger\tilde{\rho}(t)\frac{dU}{dt}, \quad (1.4)$$

y teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} \frac{dU^\dagger}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{-iH_0t/\hbar}) = e^{-iH_0t/\hbar}\left(\frac{-iH_0}{\hbar}\right) = U^\dagger\left(\frac{-iH_0}{\hbar}\right) \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{d}{dt}(e^{iH_0t/\hbar}) = e^{iH_0t/\hbar}\left(\frac{iH_0}{\hbar}\right) = U\left(\frac{iH_0}{\hbar}\right), \end{aligned}$$

la ecuación (1.4) queda

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = U^+ \left(\frac{-iH_0}{\hbar} \right) (\tilde{\rho}(t)U) + U^+ \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} U + U^+ \tilde{\rho}(t)U \left(\frac{iH_0}{\hbar} \right) = U^+ \frac{d\tilde{\rho}(t)}{dt} U.$$

Finalmente se obtiene para la ecuación de evolución de $\tilde{\rho}(t)$

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}(t)], \quad (1.5)$$

con

$$\tilde{\rho}(t) = e^{i(H_A+H_R)t/\hbar} \rho(t) e^{-i(H_A+H_R)t/\hbar} \quad (1.6.a)$$

$$\tilde{V}(t) = e^{i(H_A+H_R)t/\hbar} V e^{-i(H_A+H_R)t/\hbar}. \quad (1.6.b)$$

Integrando la ecuación (1.5) entre t y $t + \Delta t$,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{d}{dt'} \tilde{\rho}(t') &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t')], \\ \tilde{\rho}(t + \Delta t) &= \tilde{\rho}(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t')]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

De igual forma,

$$\tilde{\rho}(t') = \tilde{\rho}(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t'} dt'' [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}(t'')].$$

Incluyendo esta última expresión en (1.7) y estableciendo que $\Delta\tilde{\rho}(t) = \tilde{\rho}(t + \Delta t) - \tilde{\rho}(t)$,

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\rho}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t')] = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' \left[\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t) + \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t'} dt'' [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}(t'')] \right] = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' [\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t)] + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' [\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}(t'')]]. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Lo que interesa es la evolución del sistema \mathcal{A} . El operador densidad reducido σ de \mathcal{A} se obtiene como $\tilde{\sigma}(t) = Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{\rho}(t)]$, de manera que, tomando la traza con respecto a \mathcal{R} de la ecuación (1.8)

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\sigma}(t) &= \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{V}(t'), \tilde{\rho}(t)] + \\ &+ \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\rho}(t'')]]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

El baño por su parte está descrito por el operador densidad reducido $\tilde{\sigma}_{\mathcal{R}}(t) = Tr_{\mathcal{A}}[\tilde{\rho}(t)]$.

Interesa la situación en que la variación de $\tilde{\sigma}_{\mathcal{R}}(t)$ debido al acoplamiento con \mathcal{A} sea pequeña. Como primera aproximación, $\tilde{\sigma}_{\mathcal{R}}(t)$ puede considerarse como una constante en la representación de interacción

$$\tilde{\sigma}_{\mathcal{R}}(t) \simeq \tilde{\sigma}_{\mathcal{R}}(0) = \sigma_{\mathcal{R}}, \quad (1.10)$$

y se asume que el baño está en un estado estacionario, es decir que $\sigma_{\mathcal{R}}$ conmuta con $H_{\mathcal{R}}$

$$[\sigma_{\mathcal{R}}, H_{\mathcal{R}}] = 0. \quad (1.11)$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

σ_R no tiene elementos diagonales entre autoestados de H_R con diferentes autovalores y puede considerarse como una mezcla estadística de autoestados $|\mu\rangle$ de H_R

$$H_R|\mu\rangle = E_\mu|\mu\rangle, \quad (1.12)$$

con pesos p_μ

$$\sigma_R = \sum_{\mu} p_{\mu} |\mu\rangle\langle\mu|. \quad (1.13)$$

La interacción V entre \mathcal{A} y \mathcal{R} se tomará como el producto de un observable A de \mathcal{A} y un observable R de \mathcal{R}

$$V = -AR. \quad (1.14)$$

En la representación de interacción

$$\tilde{V}(t) = -\tilde{A}(t)\tilde{R}(t), \quad (1.15)$$

con

$$\tilde{A}(t) = e^{iH_A t/\hbar} A e^{-iH_A t/\hbar} \quad (1.16)$$

$$\tilde{R}(t) = e^{iH_R t/\hbar} R e^{-iH_R t/\hbar}. \quad (1.17)$$

Se asume también que el valor medio de R en el estado σ_R de R es 0,

$$Tr[\sigma_R R] = Tr[\sigma_R \tilde{R}(t)] = 0, \quad (1.18)$$

y teniendo en cuenta (1.17), (1.11) y la invariancia de la traza de un producto en una permutación cíclica, se sigue que, para todo t el valor medio en σ_R del acoplamiento $\tilde{V}(t)$ es 0.

$$Tr_R[\sigma_R \tilde{V}(t)] = \tilde{A}(t) Tr[\sigma_R \tilde{R}(t)] = 0. \quad (1.19)$$

Se considera ahora

$$g(t', t'') = Tr[\sigma_R \tilde{R}(t') \tilde{R}(t'')] \quad (1.20)$$

igual al valor medio en el estado σ_R de un producto de dos observables $\tilde{R}(t')$ y $\tilde{R}(t'')$ tomados en dos tiempos diferentes y donde $g(t', t'')$ depende solo de $\tau = t' - t''$,

$$\begin{aligned} Tr_R[\sigma_R \tilde{R}(t') \tilde{R}(t'')] &= Tr_R[\sigma_R e^{iH_R t'/\hbar} R e^{-iH_R t'/\hbar} e^{iH_R t''/\hbar} R e^{-iH_R t''/\hbar}] = \\ &= Tr_R[\sigma_R e^{iH_R t'/\hbar} R e^{-iH_R(t'-t'')/\hbar} R e^{-iH_R t''/\hbar}] = \\ &= Tr_R[\sigma_R e^{-iH_R t''/\hbar} e^{iH_R t'/\hbar} R e^{-iH_R(t'-t'')/\hbar}] = \\ &= Tr_R[\sigma_R e^{iH_R(t'-t'')/\hbar} R e^{-iH_R(t'-t'')/\hbar}] = Tr_R[\sigma_R e^{iH_R \tau/\hbar} R e^{-iH_R \tau/\hbar}] = \\ &= Tr_R[\sigma_R \tilde{R}(\tau) \tilde{R}(0)] = g(\tau). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Si se sustituye $\sigma_R = \sum_{\mu} p_{\mu} |\mu\rangle\langle\mu|$ en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} g(\tau) &= Tr \sum_{\mu} \{p_{\mu} |\mu\rangle\langle\mu| \tilde{R}(\tau) \tilde{R}(0)\} = Tr \sum_{\mu} p_{\mu} \langle\mu| e^{iH_R \tau/\hbar} R e^{-iH_R \tau/\hbar} \tilde{R}(0) |\mu\rangle = \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\mu} p_{\mu} \langle\mu| e^{iH_R \tau/\hbar} R |\nu\rangle \langle\nu| e^{-iH_R \tau/\hbar} \tilde{R}(0) |\mu\rangle = \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\mu} p_{\mu} \langle\mu| e^{iE_{\mu} \tau/\hbar} R |\nu\rangle \langle\nu| e^{-iE_{\nu} \tau/\hbar} R |\mu\rangle = \\ &= \sum_{\nu} \sum_{\mu} p_{\mu} e^{i\omega_{\mu} \tau} \langle\mu| R |\nu\rangle e^{-i\omega_{\nu} \tau} \langle\nu| R |\mu\rangle = \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} |R_{\mu\nu}|^2 e^{i\omega_{\mu\nu} \tau}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

donde se ha establecido $R_{\mu\nu} \equiv \langle\mu| R |\nu\rangle$, $\omega_{\mu\nu} \equiv \omega_{\mu} - \omega_{\nu}$ y $\omega_{\mu} \equiv E_{\mu}/\hbar$.

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

Como p_μ y $|R_{\mu\nu}|^2$ son reales, está claro de (1.22) que

$$g(-\tau) = g(\tau)^*. \quad (1.23)$$

(1.22) muestra que $g(\tau)$ es una superposición de exponenciales oscilando a diferentes frecuencias de Bohr $\omega_{\mu\nu}$ de \mathcal{R} . Como \mathcal{R} es un baño, tiene un conjunto denso de niveles de energía y, por tanto, un espectro casi continuo de frecuencias de Bohr.

Para derivar la ecuación maestra para $\tilde{\sigma}$ se han de introducir varias aproximaciones. Si V es bastante pequeño y si Δt es suficientemente corto comparado con la evolución de tiempo T_R de $\tilde{\sigma}$, se puede ignorar la evolución de $\tilde{\rho}$ entre t y t'' en el último término de (1.9) y reemplazar $\tilde{\rho}(t'')$ por $\tilde{\rho}(t)$. Tal aproximación es equivalente a una iteración de (1.7), donde solo los términos hasta segundo orden en V se mantienen.

Después de esta aproximación, el lado derecho de (1.9) contiene sólo $\tilde{\rho}(t)$, que puede escribirse en la forma

$$\tilde{\rho}(t) = Tr_{\mathcal{R}}\tilde{\rho}(t) \otimes Tr_{\mathcal{A}}\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}_{correl}(t), \quad (1.24)$$

donde $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ es igual a la diferencia entre $\tilde{\rho}(t)$ y el producto de los operadores de densidad reducidos de \mathcal{A} y \mathcal{R} . $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ describe las correlaciones que existen entre \mathcal{A} y \mathcal{R} a tiempo t . Para proseguir con la obtención de la ecuación maestra, se va a asumir que estas correlaciones desaparecen rápidamente en comparación con el tiempo de evolución de \mathcal{A} , por lo que no se tiene en cuenta la contribución de $\tilde{\rho}_{correl}(t)$ a $\Delta\tilde{\sigma}(t)$.

Tal aproximación es equivalente a escribir

$$\tilde{\rho}(t) = \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_{\mathcal{R}}. \quad (1.25)$$

Las aproximaciones introducidas están basadas en la condición de que $\Delta t \ll T_R$ y que $\Delta t \gg \tau_c$, lo que implica la existencia de dos escalas de tiempo muy diferentes $T_R \gg \tau_c$

$$\tau_c \ll \Delta t \ll T_R. \quad (1.26)$$

Si en (1.9) se reemplaza $\tilde{\rho}(t'')$ y $\tilde{\rho}(t)$ por (1.25) y se divide ambos lados de la ecuación entre Δt , se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = & \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{i\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{V}(t'), \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_{\mathcal{R}}] \\ & + \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\sigma}(t'') \otimes \sigma_{\mathcal{R}}]], \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que el primer término es cero según (1.19)

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = - \frac{1}{\hbar^2} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' Tr_{\mathcal{R}}[\tilde{V}(t'), [\tilde{V}(t''), \tilde{\sigma}(t'') \otimes \sigma_{\mathcal{R}}]]. \quad (1.27)$$

El ritmo de variación $\Delta\tilde{\sigma}/\Delta t$ se llama ritmo de variación “de grano grueso” porque puede considerarse el tiempo promedio del ritmo instantáneo $d\tilde{\sigma}/dt$ sobre un intervalo Δt ,

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = \frac{\tilde{\sigma}(t + \Delta t) - \tilde{\sigma}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \frac{d\tilde{\sigma}}{dt'}. \quad (1.28)$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

Todas las variaciones rápidas del ritmo instantáneo que ocurren en una escala de tiempo más pequeña que Δt se suavizan en promedio. El hecho de que $\Delta\tilde{\sigma}/\Delta t$ dependa sólo del estado $\tilde{\sigma}(t)$ del sistema \mathcal{A} a tiempo t significa que, examinado con un tiempo de resolución que no es muy grande, la evolución de \mathcal{A} depende sólo del presente y no del pasado (proceso Markoviano).

La integral de (1.27) depende del baño sólo a través de $g(\tau)$ o $g(-\tau)$, con $\tau = t' - t''$. Como $g(\tau)$ decrece muy rápidamente con τ , es conveniente cambiar las variables de integración en (1.27), pasando de las variables t' y t'' a las variables τ y t' .

Para un valor fijado τ , se puede integrar sobre t' de $t + \tau$ a $t + \Delta t$, luego se integra sobre τ de 0 a Δt , que da

$$\int_t^{t+\Delta t} dt' \int_t^{t'} dt'' = \int_0^{\Delta t} d\tau \int_{t+\tau}^{t+\Delta t} dt'. \quad (1.29)$$

Como $g(\tau)$ y $g(-\tau)$ son despreciables para $\tau \gg \tau_c$, la única región del dominio de integración donde el integrando es distinto de cero es una estrecha banda de ancho del orden de τ_c .

Como $\Delta t \gg \tau_c$, se comete un error despreciable si el límite superior de la integral en τ de (1.29) se extiende hasta $+\infty$ y si el límite inferior de la integral sobre t' se extiende a t .

Si se expande el doble conmutador de (1.27), y usando (1.15) se tiene,

$$\begin{aligned} & Tr_R \left[-\tilde{A}(t')\tilde{R}(t'), [-\tilde{A}(t'')\tilde{R}(t''), \tilde{\sigma}(t) \otimes \sigma_R] \right] = \\ & = Tr_R \left[\tilde{A}(t')\tilde{R}(t')\tilde{A}(t'')\tilde{R}(t'')\tilde{\sigma}(t)\sigma_R - \tilde{A}(t')\tilde{R}(t')\tilde{\sigma}(t)\sigma_R\tilde{A}(t'')\tilde{R}(t'') \right. \\ & \quad \left. - \tilde{A}(t'')\tilde{R}(t'')\tilde{\sigma}(t)\sigma_R\tilde{A}(t')\tilde{R}(t') + \tilde{\sigma}(t)\sigma_R\tilde{A}(t'')\tilde{R}(t'')\tilde{A}(t')\tilde{R}(t') \right] = \\ & = Tr_R \left[\tilde{R}(t')\tilde{R}(t'')\sigma_R \right] \tilde{A}(t')\tilde{A}(t'')\tilde{\sigma}(t) - Tr_R \left[\tilde{R}(t')\sigma_R\tilde{R}(t'') \right] \tilde{A}(t')\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t'') \\ & \quad - Tr_R \left[\tilde{R}(t'')\sigma_R\tilde{R}(t') \right] \tilde{A}(t'')\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t') + Tr_R \left[\sigma_R\tilde{R}(t'')\tilde{R}(t') \right] \tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t'')\tilde{A}(t') = \\ & = g(\tau)\tilde{A}(t')\tilde{A}(t' - \tau)\tilde{\sigma}(t) - g(-\tau)\tilde{A}(t')\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t' - \tau) - g(\tau)\tilde{A}(t' - \tau)\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t') \\ & \quad + g(-\tau)\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t' - \tau)\tilde{A}(t'), \end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio $\tau = t' - t''$; $t'' = t' - \tau$ y se ha tenido en cuenta (1.21).

Finalmente se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tilde{\sigma}}{\Delta t} = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \times \{ g(\tau) [\tilde{A}(t')\tilde{A}(t' - \tau)\tilde{\sigma}(t) - \tilde{A}(t' - \tau)\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t')] + \\ & + g(-\tau) [\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t' - \tau)\tilde{A}(t') - \tilde{A}(t')\tilde{\sigma}(t)\tilde{A}(t' - \tau)] \} \quad (1.30) \end{aligned}$$

Para seguir con el estudio, conviene proyectar el operador de la ecuación (1.30) sobre una base de estados.

2. ECUACIÓN MAESTRA PROYECTANDO EL OPERADOR DENSIDAD REDUCIDO EN LA BASE DE ESTADOS DE ENERGÍA

Sean $|u_i\rangle$ los autoestados de H_A con autovalores E_i ,

$$H_A|u_i\rangle = E_i|u_i\rangle. \quad (2.1)$$

La ecuación (1.30) se convierte, en la base ortonormal $\{|u_i\rangle, i = 1, \dots\}$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}_{ij}}{\Delta t} = \sum_{kl} \gamma_{ijkl}(t) \tilde{\sigma}_{kl}(t), \quad (2.2)$$

donde

$$\gamma_{ijkl}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' \times \left\{ g(\tau) \left[\delta_{jl} \sum_n \tilde{A}_{in}(t') \tilde{A}_{nk}(t' - \tau) - \tilde{A}_{ik}(t' - \tau) \tilde{A}_{lj}(t') \right] \right. \\ \left. + g(-\tau) \left[\delta_{ik} \sum_n \tilde{A}_{ln}(t' - \tau) \tilde{A}_{nj}(t') - \tilde{A}_{ik}(t') \tilde{A}_{lj}(t' - \tau) \right] \right\} \quad (2.3)$$

Los elementos de matriz $\tilde{A}_{in}(t')$, $\tilde{A}_{nk}(t' - \tau)$,...varían como $\exp[i\omega_{in}t']$, $\exp[i\omega_{nk}(t' - \tau)]$,...

Todos los términos de (2.3) dentro de los paréntesis varían como $e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t'}$. Por ejemplo, teniendo en cuenta δ_{jl} , $\omega_j = \omega_l$, la dependencia en t' del primer término es

$$e^{i(\omega_{in}-\omega_{nk})t'} = e^{i(\omega_i-\omega_n+\omega_n-\omega_k)t'} = e^{i(\omega_i-\omega_k)t'} = e^{i(\omega_i-\omega_j+\omega_l-\omega_k)t'} = e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t'}. \quad (2.4)$$

La dependencia del segundo término es

$$e^{i(\omega_i-\omega_j+\omega_l-\omega_k)t'} = e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t'}, \quad (2.5)$$

y de manera análoga puede hacerse para el tercer y cuarto término. Se sigue que la integral sobre t' de (2.3) puede calcularse fácilmente y da

$$\frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t'} = e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t} f[(\omega_{ij} - \omega_{kl})\Delta t] \quad (2.6)$$

donde

$$f(x) = e^{ix/2} \frac{\sin(x/2)}{(x/2)}. \quad (2.7)$$

Si $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \ll 1/\Delta t$, el valor de f en (2.6) está cerca a 1 y se anula para $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \gg 1/\Delta t$. Se puede ignorar el acoplamiento entre $\Delta\tilde{\sigma}_{ij}/\Delta t$ y $\tilde{\sigma}_{kl}$ si $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \gg 1/\Delta t$. Si $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \sim 1/\Delta t$, la condición $T_R \gg \Delta t$ implica que el acoplamiento entre $\Delta\tilde{\sigma}_{ij}/\Delta t$ y $\tilde{\sigma}_{kl}$ tiene un efecto débil. Por tanto, se mantienen sólo los términos que acoplan $\Delta\tilde{\sigma}_{ij}/\Delta t$ a $\tilde{\sigma}_{kl}$ con $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \ll 1/\Delta t$. Estos términos, donde $f = 1$, se llaman seculares. Finalmente con esta aproximación secular, la ecuación maestra (2.2) tiene la forma

$$\frac{\Delta\tilde{\sigma}_{ij}}{\Delta t} = \sum_{k,l}^{(sec)} e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t} \mathcal{R}_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl}(t), \quad (2.8)$$

donde $\sum_{k,l}^{(sec)}$ indica que la suma está restringida a estados k, l tales que $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \ll 1/\Delta t$. \mathcal{R}_{ijkl} son coeficientes independientes de t y que viene dados por la integral sobre τ de (2.3),

$$\mathcal{R}_{ijkl} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \times \left\{ g(\tau) \left[\delta_{jl} \sum_n A_{in} A_{nk} e^{i\omega_{kn}\tau} - A_{ik} A_{lj} e^{i\omega_{kl}\tau} \right] + \right. \\ \left. + g(-\tau) \left[\delta_{ik} \sum_n A_{ln} A_{nj} e^{i\omega_{nl}\tau} - A_{ik} A_{lj} e^{i\omega_{jl}\tau} \right] \right\}, \quad (2.9)$$

donde se ha tenido en cuenta

$$\tilde{A}_{in}(t') = \langle u_i | \tilde{A}(t') | u_n \rangle = \langle u_i | e^{iH_A t'/\hbar} A e^{-iH_A t'/\hbar} | u_n \rangle = e^{iE_i t'/\hbar} \langle u_i | A | u_n \rangle e^{-iE_n t'/\hbar} = \\ = A_{in} e^{i\omega_{in} t'}. \quad (2.10)$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

Para calcular los coeficientes \mathcal{R}_{ijkl} de la ecuación maestra hay que cambiar de la representación de interacción a la representación de Schrödinger, donde el operador densidad de \mathcal{A} es $\sigma(t)$. De la relación

$$\sigma_{ij}(t) = e^{-i\omega_{ij}t} \tilde{\sigma}_{ij}(t) \quad (2.11)$$

entre los elementos de matriz de $\sigma(t)$ y $\tilde{\sigma}(t)$ sigue la relación

$$\frac{d\sigma_{ij}(t)}{dt} = e^{-i\omega_{ij}t} (-i\omega_{ij}) \tilde{\sigma}_{ij}(t) + e^{-i\omega_{ij}t} \frac{d\tilde{\sigma}_{ij}(t)}{dt} = -i\omega_{ij}\sigma_{ij}(t) + e^{-i\omega_{ij}t} \frac{d\tilde{\sigma}_{ij}(t)}{dt} \quad (2.12)$$

entre el rango instantáneo de variación de σ_{ij} y $\tilde{\sigma}_{ij}$. Si se aproxima el ritmo instantáneo $d\tilde{\sigma}_{ij}/dt$ que aparece en (2.12) usando el ritmo de grano grueso $\Delta\tilde{\sigma}_{ij}/\Delta t$ calculado en (2.8) y teniendo en cuenta (2.11)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma_{ij}(t) &= -i\omega_{ij}\sigma_{ij}(t) + e^{-i\omega_{ij}t} \sum_{k,l}^{(sec)} e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t} \mathcal{R}_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl}(t) = \\ &= -i\omega_{ij}\sigma_{ij}(t) + e^{-i\omega_{ij}t} \sum_{k,l}^{(sec)} e^{i(\omega_{ij}-\omega_{kl})t} \mathcal{R}_{ijkl} e^{i\omega_{kl}t} \sigma_{kl}(t) \\ &= \boxed{\frac{d}{dt} \sigma_{ij}(t) = -i\omega_{ij}\sigma_{ij}(t) + \sum_{k,l}^{sec} \mathcal{R}_{ijkl} \sigma_{kl}(t)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

En la representación de Schrödinger, la ecuación maestra, expandida sobre la base de autoestados de H_A tiene la estructura de un sistema diferencial lineal con coeficientes independientes del tiempo, de manera que ya no aparecen las exponenciales que aparecían en (2.8).

El primer término del lado derecho de (2.13) describe la evolución libre de σ_{ij} y el segundo término describe el efecto de la interacción con \mathcal{R} . Los coeficientes \mathcal{R}_{ijkl} son del orden de $1/T_R$, donde T_R es el tiempo de evolución de \mathcal{A} . Si los elementos de matriz de σ_{ij} y σ_{kl} tienen autofrecuencias ω_{ij} y ω_{kl} suficientemente diferentes, es decir, si $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \gg 1/T_R$, el acoplamiento \mathcal{R}_{ijkl} entre ellos tendrá efectos muy débiles.

Como $T_R \gg \Delta t$ la condición $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \sim 1/\Delta t$ corresponde a $|\omega_{ij} - \omega_{kl}| \gg 1/T_R$, de donde se deduce que es posible ignorar en (2.8) el acoplamiento entre σ_{ij} y σ_{kl} cuando $|\omega_{ij} - \omega_{kl}|$ no es muy pequeño comparado con $1/\Delta t$.

Evolución de las poblaciones

Las poblaciones σ_{ii} de los niveles de energía $|u_i\rangle$ de \mathcal{A} tendrán todas la misma frecuencia libre de evolución ($\omega_{ii} = 0$). Se asume que no hay coherencia σ_{kl} con una frecuencia de evolución muy baja ($\omega_{kl} \ll 1/\Delta t$), de manera que las poblaciones están acopladas sólo a poblaciones y la ecuación (2.13) puede escribirse

$$\frac{d\sigma_{ii}}{dt} = \sum_k \mathcal{R}_{iikk} \sigma_{kk}. \quad (2.14)$$

Para calcular \mathcal{R}_{iikk} , se establece que $j = i$ y $l = k$ en (2.9) y se asume que $i \neq k$. Los dos símbolos de Kronecker δ_{jl} y δ_{ik} son cero. Los dos términos restantes dentro del paréntesis de (2.9) son complejos conjugados uno de otro y se reagrupan para dar

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{iik k} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \times \{g(\tau)[-A_{ik}A_{ki}e^{i\omega_{ki}\tau}] + g(-\tau)[-A_{ik}A_{ki}e^{i\omega_{ik}\tau}]\} = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(\tau)[|A_{ik}|^2 e^{i\omega_{ki}\tau}] + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(-\tau)[|A_{ik}|^2 e^{-i\omega_{ki}\tau}].\end{aligned}$$

Haciendo un cambio de variable $-\tau \rightarrow \tau$; $d\tau \rightarrow -d\tau$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{iik k} &= \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(\tau)[|A_{ik}|^2 e^{i\omega_{ki}\tau}] + \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^0 (-d\tau)g(\tau)[|A_{ik}|^2 e^{i\omega_{ki}\tau}] = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^\infty d\tau g(\tau) |A_{ik}|^2 e^{i\omega_{ki}\tau}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Reemplazando $g(\tau)$ por $\sum_\mu \sum_\nu p_\mu |R_{\mu\nu}|^2 e^{i\omega_{\mu\nu}\tau}$

$$\mathcal{R}_{iik k} = \frac{1}{\hbar^2} \sum_\mu p_\mu \sum_\nu \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i(\omega_{\mu\nu} + \omega_{ki})\tau} |A_{ik}|^2 |R_{\mu\nu}|^2. \quad (2.16)$$

La integral sobre τ es igual a $2\pi\delta(\omega_{\mu\nu} + \omega_{ki}) = 2\pi\hbar\delta(E_\mu + E_k - E_\nu - E_i)$ y $|A_{ik}|^2 |R_{\mu\nu}|^2 = |\langle \nu, u_i | V | \mu, u_k \rangle|^2$.

Finalmente, estableciendo que

$$\mathcal{R}_{iik k} = \Gamma_{k \rightarrow i} \quad (2.17)$$

para $\Gamma_{k \rightarrow i}$ se obtiene

$$\Gamma_{k \rightarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_\mu p_\mu \sum_\nu |\langle \nu, u_i | V | \mu, u_k \rangle|^2 \delta(E_\mu + E_k - E_\nu - E_i). \quad (2.18)$$

$\Gamma_{k \rightarrow i}$ es la probabilidad por unidad de tiempo de que el sistema \mathcal{A} haga una transición del nivel k al nivel i como resultado del acoplamiento con \mathcal{R} . La ecuación (2.18) da el ritmo para la transición promediado sobre todos los posibles estados iniciales μ del baño (con peso p_μ) y sumados sobre todos los posibles estados finales ν del baño, con la función delta expresando la conservación de la energía para el sistema total $\mathcal{A} + \mathcal{R}$.

Falta evaluar \mathcal{R}_{iiii} . Ahora los símbolos de Kronecker δ_{jl} y δ_{ik} valen uno y el segundo y cuarto término dentro del corchete de (2.9) cancelan el término $n = i$ de la primera y tercera sumas.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{iiii} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \times \left\{ g(\tau) \left[\sum_n A_{in} A_{ni} e^{i\omega_{in}\tau} - A_{ii} A_{ii} e^{i\omega_{ii}\tau} \right] \right. \\ &\quad \left. + g(-\tau) \left[\sum_n A_{in} A_{ni} e^{i\omega_{ni}\tau} - A_{ii} A_{ii} e^{i\omega_{ii}\tau} \right] \right\}, \\ \mathcal{R}_{iiii} &= -\sum_{n \neq i} \Gamma_{i \rightarrow n}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

Finalmente, la ecuación maestra para las poblaciones (2.14) es

$$\frac{d\sigma_{ii}}{dt} = -\sigma_{ii} \sum_{n \neq i} \Gamma_{i \rightarrow n} + \sum_{k \neq i} \sigma_{kk} \Gamma_{k \rightarrow i} \quad (2.20)$$

$$\boxed{\frac{d\sigma_{ii}}{dt} = \sum_{k \neq i} (\sigma_{kk} \Gamma_{k \rightarrow i} - \sigma_{ii} \Gamma_{i \rightarrow k})}. \quad (2.21)$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

La ecuación (2.20) indica que la población σ_{ii} de \mathcal{A} decrece como consecuencia de las transiciones que ocurren de i a otros niveles n y se incrementa como resultado de transiciones de otros niveles k al nivel i . La forma de (2.21) muestra el balance de transferencias que ocurren para cada pareja de niveles k e i

$$\sum_i \frac{d}{dt} \sigma_{ii} = 0. \quad (2.22)$$

Es frecuente que la solución del estado estacionario de la ecuación (2.21) corresponda a

$$\sigma_{ii}^{st} \Gamma_{i \rightarrow k} = \sigma_{kk}^{st} \Gamma_{k \rightarrow i}, \quad (2.23)$$

ecuación llamada “condición detallada de balance” y muestra que en el estado estacionario, y para cada par de niveles i y k , el número de transiciones de i a k compensa el número de transiciones de k a i .

Evolución de Coherencias

Se examina ahora la evolución de los elementos no diagonales σ_{ij} de σ y primero se considera el caso donde las frecuencias de Bohr ω_{ij} , asociadas con la coherencia σ_{ij} , no están degeneradas, es decir, no hay otras frecuencia de Bohr ω_{kl} que difieran de ω_{ij} en menos de $1/\Delta t$. El único término secular es el que acopla la coherencia σ_{ij} a si misma, y la ecuación (2.13) se escribe

$$\boxed{\frac{d}{dt} \sigma_{ij} = -i\omega_{ij} \sigma_{ij} + \mathcal{R}_{ijij} \sigma_{ij}}. \quad (2.24)$$

Para calcular \mathcal{R}_{ijij} , se establece $k = i$ y $l = j$ en (2.9),

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ijij} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \times \left\{ g(\tau) \left[\sum_n A_{in} A_{ni} e^{i\omega_{in}\tau} - A_{ii} A_{jj} e^{i\omega_{ii}\tau} \right] + \right. \\ &\quad \left. + g(-\tau) \left[\sum_n A_{jn} A_{nj} e^{i\omega_{jn}\tau} - A_{ii} A_{jj} e^{i\omega_{jj}\tau} \right] \right\} = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(\tau) \sum_n |A_{in}|^2 e^{i\omega_{in}\tau} + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(\tau) A_{ii} A_{jj} - \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(-\tau) \sum_n |A_{jn}|^2 e^{-i\omega_{jn}\tau} + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(-\tau) A_{ii} A_{jj}. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Si se reemplaza $g(\tau)$ por $\sum_\mu \sum_\nu p_\mu |R_{\mu\nu}|^2 e^{i\omega_{\mu\nu}\tau}$, $g(-\tau)$ por $g(\tau)^*$ y se evalúan las integrales desde $\tau = 0$ a $\tau = \infty$ de las exponenciales, esto conduce a la aparición de partes principales y funciones deltas. Tomando el primer término de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau g(\tau) \sum_n |A_{in}|^2 e^{i\omega_{in}\tau} &= \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_\mu p_\mu \sum_\nu |R_{\mu\nu}|^2 \sum_n |A_{in}|^2 \int_0^\infty d\tau e^{i(\omega_{\mu\nu} + \omega_{in})\tau} = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_\mu p_\mu \sum_\nu \sum_n |R_{\mu\nu}|^2 |A_{in}|^2 \left\{ \pi \delta(\omega_{\mu\nu} + \omega_{in}) + i\mathcal{P} \left(\frac{1}{\omega_{\mu\nu} + \omega_{in}} \right) \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_n |R_{\mu\nu}|^2 |A_{in}|^2 \pi \delta\left(\frac{E_{\mu\nu}}{\hbar} + \frac{E_{in}}{\hbar}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_n |R_{\mu\nu}|^2 |A_{in}|^2 i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\frac{E_{\mu\nu}}{\hbar} + \frac{E_{in}}{\hbar}}\right) = \\
&= -\frac{1}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{n \neq i} |\langle \nu, u_n | V | \mu, u_i \rangle|^2 \pi \delta(E_{\mu} - E_{\nu} + E_i - E_n) - \\
&\quad - \frac{1}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} |\langle \nu, u_i | V | \mu, u_i \rangle|^2 \pi \delta(E_{\mu} - E_{\nu}) - \\
&\quad - \frac{1}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_n |R_{\mu\nu}|^2 |A_{in}|^2 i\mathcal{P}\left(\frac{1}{E_{\mu} - E_{\nu} + E_i - E_n}\right), \tag{2.26}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\infty} e^{i\omega\tau + i\varepsilon\tau} d\tau = \left\{ \pi \delta(\omega) + i\mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega}\right) \right\}. \tag{2.27}$$

Se resuelve de manera análoga el tercer término de (2.25). Si se coge ahora el segundo y cuarto término, teniendo en cuenta que son complejos conjugados,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} |R_{\mu\nu}|^2 e^{i\omega_{\mu\nu}\tau} A_{ii} A_{jj} = \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} |R_{\mu\nu}|^2 A_{ii} A_{jj} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_{\mu\nu}\tau} d\tau = \\
&= \frac{1}{\hbar} \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} \langle \mu | R | \nu \rangle \langle u_i | A | u_i \rangle \langle \nu | R | \mu \rangle \langle u_j | A | u_j \rangle 2\pi \delta(E_{\mu} - E_{\nu}).
\end{aligned}$$

Finalmente se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ijij} = & - \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{n \neq i} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} |\langle \nu, u_n | V | \mu, u_i \rangle|^2 \delta(E_{\mu} - E_{\nu} + E_i - E_n) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{n \neq j} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} |\langle \nu, u_n | V | \mu, u_j \rangle|^2 \delta(E_{\mu} - E_{\nu} + E_j - E_n) \right) \right\} + \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \delta(E_{\mu} - E_{\nu}) \times \\
& \times \left(\frac{1}{2} |\langle \nu, u_i | V | \mu, u_i \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle \nu, u_j | V | \mu, u_j \rangle|^2 - \langle \nu, u_i | V | \mu, u_i \rangle \langle \nu, u_j | V | \mu, u_j \rangle \right) - \\
& - \frac{1}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_n |\langle \nu, u_n | V | \mu, u_i \rangle|^2 i\mathcal{P}\left(\frac{1}{E_{\mu} - E_{\nu} + E_i - E_n}\right) + \\
& + \frac{1}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_n |\langle \nu, u_n | V | \mu, u_j \rangle|^2 i\mathcal{P}\left(\frac{1}{E_{\mu} - E_{\nu} + E_j - E_n}\right). \tag{2.28}
\end{aligned}$$

\mathcal{R}_{ijij} se puede escribir como

$$\mathcal{R}_{ijij} = -\Gamma_{ij} - i\Delta_{ij} \tag{2.29}$$

donde Γ_{ij} y Δ_{ij} son cantidades reales dadas por

$$\Delta_{ij} = \Delta_i - \Delta_j \tag{2.30}$$

con

$$\Delta_i = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_n \frac{|\langle \nu, u_n | V | \mu, u_i \rangle|^2}{E_{\mu} + E_i - E_{\nu} - E_n} \quad (2.31)$$

y una expresión análoga para Δ_j , y donde

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{noad} + \Gamma_{ij}^{ad} \quad (2.32)$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^{noad} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n \neq i} \Gamma_{i \rightarrow n} + \sum_{n \neq j} \Gamma_{j \rightarrow n} \right) \quad (2.33) \\ \Gamma_{ij}^{ad} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \delta(E_{\mu} - E_{\nu}) \times \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} |\langle \nu, u_i | V | \mu, u_i \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle \mu, u_j | V | \nu, u_j \rangle|^2 \right) - \\ &\quad - \text{Re} \left[\langle \mu, u_i | V | \nu, u_i \rangle \langle \nu, u_j | V | \mu, u_j \rangle \right]^2. \quad (2.34) \end{aligned}$$

La cantidad $\hbar \Delta_{ij}$ representa un desplazamiento de la frecuencia ω_{ij} debido a la interacción entre \mathcal{A} y \mathcal{R} y la cantidad Γ_{ij} representa el ritmo de decaimiento de la coherencia σ_{ij} debido a la interacción entre \mathcal{A} y \mathcal{R} . La primera contribución a Γ_{ij} , mostrada en (2.33) viene de efectos no adiabáticos debido a que esta expresión es la mitad de la suma de los ritmos con los cuales el sistema deja el estado i o j . La segunda contribución, mostrada en (2.34) se llama adiabática porque se debe a un proceso donde \mathcal{A} no cambia el estado mientras interactúa con \mathcal{R} , que va del estado μ al estado ν teniendo la misma energía que μ .

Para finalizar esta sección, queda considerar el caso donde la frecuencia ω_{ij} es degenerada. Hay que tener en cuenta el acoplamiento entre la coherencia σ_{ij} y las otras coherencias σ_{kl} tales que $|\omega_{kl} - \omega_{ij}| \ll 1/\Delta t$. Si se calcula \mathcal{R}_{ijkl} en (2.9) con $k \neq i$ y $j \neq l$ ($\delta_{jl} = 0$ y $\delta_{ik} = 0, \omega_{ki} = \omega_{jl}$)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ijkl} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^{\infty} d\tau \times \{g(\tau) [-A_{ik} A_{lj} e^{i\omega_{ki}\tau}] + g(-\tau) [-A_{ik} A_{lj} e^{i\omega_{jl}\tau}]\} = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} |R_{\mu\nu}|^2 e^{i\omega_{\mu\nu}\tau} [-A_{ik} A_{lj} e^{i\omega_{ki}\tau}] = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} R_{\mu\nu} R_{\nu\mu} e^{i\omega_{\mu\nu}\tau} A_{ik} A_{lj} e^{i\omega_{ki}\tau} = \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{\mu} \sum_{\nu} p_{\mu} R_{\nu\mu} A_{ik} R_{\mu\nu} A_{lj} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_{ki}\tau} e^{i\omega_{\mu\nu}\tau}, \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{R}_{ijkl} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, u_i | V | \mu, u_k \rangle \langle \mu, u_l | V | \nu, u_j \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_k - E_{\nu} - E_i)}. \quad (2.35)$$

3. ECUACIÓN MAESTRA PARA UN SISTEMA ATÓMICO DE DOS NIVELES ACOPLADO AL CAMPO DE RADIACIÓN

Se estudia en esta sección el caso particular de un sistema atómico de dos niveles. Se denota por $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ la base de autoestados del Hamiltoniano, con energías E_a y E_b respectivamente.

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

Se supone que los electrones atómicos evolucionan en torno al punto fijo en el origen de coordenadas $\vec{R} = \vec{0}$. Se trata un átomo infinitamente pesado y en reposo, por lo que se estudian sólo los grados de libertad internos.

En la aproximación dipolar eléctrica el Hamiltoniano de interacción entre el átomo y el campo de radiación viene dado por

$$V = -\vec{d} \cdot \vec{E}_\perp(\vec{0}) = -i\vec{d} \sum_j \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0 L^3}} \vec{\epsilon}_j (a_j - a_j^\dagger) \equiv \sum_j g_j (a_j - a_j^\dagger), \quad (3.1)$$

donde \vec{d} es el operador momento dipolar eléctrico del átomo y $\vec{E}_\perp(\vec{0})$ el campo cuántico de radiación en la posición del átomo,

$$\vec{d} = \sum_\alpha q_\alpha \vec{r}_\alpha \quad ; \quad \vec{E}_\perp(\vec{r}) = \sum_j i \sqrt{\frac{\hbar\omega_j}{2\epsilon_0 L^3}} (a_j \vec{\epsilon}_j e^{i\vec{k}_j \vec{r}} - a_j^\dagger \vec{\epsilon}_j e^{-i\vec{k}_j \vec{r}}).$$

3.1 Ecuación maestra para la emisión espontánea en un campo de radiación en el estado de vacío

Se supone que el campo de radiación se encuentra en el estado de vacío

$$\sigma_R = |0\rangle\langle 0|. \quad (3.2)$$

El sistema completo, compuesto por el átomo y el baño, viene descrito por el Hamiltoniano

$$H = H_P + H_R + V,$$

donde V viene dado por (3.1) y

$$H_P = \sum_\alpha \frac{\vec{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + V_{coul} + \varepsilon_{dip} \quad ; \quad V_{coul} = \sum_\alpha \varepsilon_{coul}^\alpha + \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\alpha \neq \beta} \frac{q_\alpha q_\beta}{|\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta|},$$

$$H_R = \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \rightarrow \sum_i \hbar\omega_i a_i^\dagger a_i \quad (E_{vacío} \equiv 0),$$

$$\vec{d}(t) \equiv e^{iH_P t/\hbar} \vec{d} e^{-iH_P t/\hbar} \quad ; \quad \vec{E}_\perp(t) \equiv e^{iH_R t/\hbar} \vec{E}_\perp e^{-iH_R t/\hbar}.$$

σ_R satisface las ecuaciones (1.11) y (1.19), por lo que se puede considerar el campo de radiación en tal estado como un baño,

$$[\sigma_R, H_R] = \left[|0\rangle\langle 0|, \sum_i \hbar\omega_i \left(a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right) \right] = \sum_i \hbar\omega_i \left[|0\rangle\langle 0|, a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$Tr_R[\sigma_R \tilde{V}(t)] = Tr_R \left[\sigma_R \left(-\vec{d}(t) \vec{E}_\perp(t) \right) \right] = -\vec{d}(t) Tr \left[\sigma_R \vec{E}_\perp(t) \right] = -\vec{d}(t) Tr \left[|0\rangle\langle 0| \vec{E}_\perp(t) \right]$$

$$= -\vec{d}(t) \langle 0| \vec{E}_\perp(t) |0\rangle = 0.$$

Como se tiene un átomo de dos niveles $|a\rangle$ y $|b\rangle$, la ecuación (2.18) tendría ahora la forma

$$\Gamma_{b \rightarrow a} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_\mu p_\mu \sum_\nu |\langle \nu, a | V | \mu, b \rangle|^2 \delta(E_\mu + E_b - E_\nu - E_a). \quad (3.3)$$

En el caso estudiado $p_\mu = \delta_{\mu 0}$, $\sigma_R = \sum_\mu p_\mu |\mu\rangle\langle \mu| = |0\rangle\langle 0|$ y $E_\mu \equiv 0$,

$$\Gamma_{b \rightarrow a} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_\nu |\langle a, \nu | V | b, 0 \rangle|^2 \delta(E_\nu - (E_b - E_a)),$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

$$\Gamma_{b \rightarrow a} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} |\langle a, \vec{k}\vec{\epsilon} | V | b, 0 \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_{ba}).$$

Evolución de las poblaciones

Para dos niveles $|a\rangle$ y $|b\rangle$, la ecuación (2.21) es

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{bb}}{dt} &= \sigma_{aa}\Gamma_{a \rightarrow b} - \sigma_{bb}\Gamma_{b \rightarrow a} \\ \frac{d\sigma_{aa}}{dt} &= \sigma_{bb}\Gamma_{b \rightarrow a} - \sigma_{aa}\Gamma_{a \rightarrow b}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

con

$$\Gamma_{b \rightarrow a} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} |\langle a, \vec{k}\vec{\epsilon} | V | b, 0 \rangle|^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_{ba}) \equiv \Gamma = \frac{1}{\tau}, \quad (3.5)$$

donde el ritmo de emisión espontánea de un fotón es igual a la inversa del tiempo de vida τ del nivel b .

Sin embargo

$$\Gamma_{a \rightarrow b} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} |\langle b, \vec{k}\vec{\epsilon} | V | a, 0 \rangle|^2 \delta(\hbar\omega + \hbar\omega_{ba}) = 0 \quad (3.6)$$

($\hbar\omega + \hbar\omega_{ba} \neq 0$ porque $\omega \geq 0$).

La emisión espontánea de un fotón desde el estado $|a\rangle$ no conserva la energía total. Finalmente (3.4) queda

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{bb}}{dt} &= -\sigma_{bb}\Gamma_{b \rightarrow a} ; \quad \boxed{\frac{d\sigma_{bb}}{dt} = -\Gamma\sigma_{bb}} \\ \frac{d\sigma_{aa}}{dt} &= \sigma_{bb}\Gamma_{b \rightarrow a} ; \quad \boxed{\frac{d\sigma_{aa}}{dt} = \Gamma\sigma_{bb}} \end{aligned}$$

y las poblaciones tienen la forma de las ecuaciones de Einstein con $\mu(\omega) = 0$

$$\begin{aligned} \sigma_{bb}(t) &= \sigma_{bb}(0)e^{-\Gamma t} \\ \sigma_{aa}(t) &= 1 - \sigma_{bb}(0)e^{-\Gamma t}. \end{aligned}$$

Evolución de las coherencias

Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.24) y (2.29),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\sigma_{ba}(t) &= -i\omega_{ba}\sigma_{ba}(t) + \mathcal{R}_{baba}\sigma_{ba}(t) \quad \text{con } \mathcal{R}_{baba} = -\Gamma_{ba} - i\Delta_{ba}, \\ \frac{d\sigma_{ba}}{dt} &= -i(\omega_{ba} + \Delta_{ba})\sigma_{ba} - \Gamma_{ba}\sigma_{ba} \end{aligned} \quad (3.7)$$

y según (2.32) y (2.33) se tiene $\Gamma_{ba} = \Gamma_{ba}^{noad} + \Gamma_{ba}^{ad}$, con

$$\Gamma_{ba}^{noad} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \neq b} \Gamma_{b \rightarrow n} + \sum_{n \neq a} \Gamma_{a \rightarrow n} \right) = \frac{1}{2} (\Gamma_{b \rightarrow a} + \Gamma_{a \rightarrow b}) = \frac{\Gamma}{2}$$

En el caso particular que se está estudiando, la ecuación (2.34) toma la forma

$$\begin{aligned} \Gamma_{ba}^{ad} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} \delta(\hbar\omega) \left(\frac{1}{2} |\langle b, \vec{k}\vec{\epsilon} | V | b, 0 \rangle|^2 + \frac{1}{2} |\langle a, 0 | V | a, \vec{k}\vec{\epsilon} \rangle|^2 - \right. \\ &\quad \left. - \text{Re} \langle b, 0 | V | b, \vec{k}\vec{\epsilon} \rangle \langle a, \vec{k}\vec{\epsilon} | V | a, 0 \rangle \right) = 0 \end{aligned}$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

debido a que $V \sim \vec{d} \cdot \vec{E}_\perp(\vec{0})$ no tiene elementos diagonales en los estados $|a\rangle$ ó $|b\rangle$ ($|a\rangle$ y $|b\rangle$ se supone que tienen paridad bien definida y \vec{d} es impar).

Finalmente, teniendo en cuenta que $\Gamma_{ba} = \Gamma_{ba}^{noad} = \Gamma/2$ y sustituyendo en (3.7),

$$\boxed{\frac{d\sigma_{ba}}{dt} = -i(\omega_{ba} + \Delta_{ba})\sigma_{ba} - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ba}}, \quad (3.8)$$

donde

$$\Delta_{ba} = \Delta_b - \Delta_a, \quad (3.9)$$

$$\Delta_b = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} \frac{|\langle a, \vec{k}\vec{\epsilon} | V | b, 0 \rangle|^2}{\hbar\omega_{ba} - \hbar\omega}, \quad \Delta_a = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\vec{k}\vec{\epsilon}} \frac{|\langle b, \vec{k}\vec{\epsilon} | V | a, 0 \rangle|^2}{-\hbar\omega_{ba} - \hbar\omega}.$$

Una vez obtenida la ecuación maestra para el caso particular de dos niveles, se quiere estudiar cuál es el comportamiento de las poblaciones y las coherencias en un tiempo tendiendo a infinito.

Si se toman las ecuaciones para las poblaciones

$$\frac{d\sigma_{bb}}{dt} = -\Gamma\sigma_{bb},$$

$$\frac{d\sigma_{aa}}{dt} = \Gamma(1 - \sigma_{aa}) \quad \text{con} \quad \sigma_{aa} + \sigma_{bb} = 1$$

y se igualan a 0, se obtiene para el estado estacionario

$$\frac{d\sigma_{bb}}{dt} = 0; \quad -\Gamma\sigma_{bb}^\infty = 0$$

$$\frac{d\sigma_{aa}}{dt} = 0; \quad (1 - \sigma_{aa}^\infty)\Gamma = 0,$$

donde se observa que $\sigma_{bb}^\infty = 0$ y que $\sigma_{aa}^\infty = 1$.

En el caso de la coherencia,

$$\frac{d\sigma_{ba}}{dt} = -i(\omega_{ba} + \Delta_{ba})\sigma_{ba} - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ba},$$

si se igualan a 0 se obtiene para el estado estacionario

$$\frac{d\sigma_{ba}}{dt} = 0; \quad -i\omega_{ba}'\sigma_{ba}^\infty - \frac{\Gamma}{2}\sigma_{ba}^\infty = 0$$

$$\text{con } \omega_{ba}' = \omega_{ba} + \Delta_{ba},$$

$$\left\{ i\omega_{ba}' + \frac{\Gamma}{2} \right\} \sigma_{ba}^\infty = 0.$$

Se comprueba fácilmente que $\sigma_{ba}^\infty = 0$, es decir, que en el estado estacionario las coherencias se van a cero, y por lo tanto se produce decoherencia.

3.2 Ecuación maestra incluyendo absorción y emisión estimulada por un campo de radiación de banda ancha

En este caso el operador densidad del baño viene dado por

$$\sigma_R = \sum_{\{n_i\}} p(n_1, \dots, n_i, \dots) |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle \langle n_1, \dots, n_i, \dots|, \quad (3.10)$$

donde $|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle$ son los autoestados de H_R con n_1 fotones en el modo 1, n_i fotones en el modo i, \dots

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

En dicho estado el campo puede considerarse un baño, σ_R satisface las ecuaciones (1.11) y (1.19)

$$\begin{aligned} [\sigma_R, H_R] &= \left[\sum_{\{n_i\}} p(n_{1,-}, \dots, n_{i,-}, \dots) |n_{1,-}, \dots, n_{i,-}, \dots\rangle \langle n_{1,-}, \dots, n_{i,-}, \dots|, \sum_j \hbar\omega_j \left(a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= \sum_{\{n_i\}} p(n_{1,-}, \dots, n_{i,-}, \dots) \sum_j \hbar\omega_j \left[|\{n_i\}\rangle \langle \{n_i\}|, a_j^\dagger a_j + \frac{1}{2} \right] = 0 \\ Tr_R[\sigma_R \tilde{V}(t)] &= Tr_R \left[\sigma_R \left(-\tilde{d}(t) \tilde{E}_\perp(t) \right) \right] = -\tilde{d}(t) Tr \left[\sigma_R \tilde{E}_\perp(t) \right] = \\ &= -\tilde{d}(t) \sum_{\{n_i\}} p(n_{1,-}, \dots, n_{i,-}, \dots) \langle \{n_i\} | \tilde{E}_\perp(t) | \{n_i\} \rangle = 0. \end{aligned}$$

El tiempo de correlación del campo es del orden de $\tau_c = 1/\Delta\omega$ siendo $\Delta\omega$ la anchura espectral de la radiación. El tiempo medio T_R tras el cual ocurre absorción o emisión atómica (tiempo de evolución atómica) es inversamente proporcional a la intensidad de la luz I , $T_R \propto I^{-1}$, por lo tanto, $\frac{\tau_c}{T_R} \propto \frac{I}{\Delta\omega}$. Si la I es baja y $\Delta\omega$ grande, entonces $\tau_c \ll T_R$ y la radiación podría tratarse como un baño.

Evolución de las poblaciones

A diferencia de las ecuaciones (3.4), la probabilidad por unidad de tiempo de absorción de un fotón desde $|a\rangle$ es ahora distinta de 0. Teniendo en cuenta (3.3) y (3.10),

$$\Gamma_{a \rightarrow b} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\{n_i\}} p(\{n_i\}) \sum_{\{n_i'\}} |\langle b; \{n_i'\} | V | a; \{n_i\} \rangle|^2 \delta(E_{final} - E_{inicial}) \equiv \Gamma'. \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta (3.1)

$$\begin{aligned} \sum_{\{n_i'\}} |\langle b; \{n_i'\} | V | a; \{n_i\} \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) &= \\ &= \sum_i |\langle b; n_{1,-}, n_i - 1, \dots | V | a; n_{1,-}, n_i, \dots \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_{ba} - \hbar\omega_i) + \\ &+ \sum_i |\langle b; n_{1,-}, n_i + 1, \dots | V | a; n_{1,-}, n_i, \dots \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_{ba} + \hbar\omega_i) \end{aligned}$$

y también

$$\langle n_i - 1 | a_i | n_i \rangle = \sqrt{n_i} \langle n_i - 1 | n_i - 1 \rangle = \sqrt{n_i} = \sqrt{n_i} \langle 0_i | 0_i \rangle = \sqrt{n_i} \langle 0_i | a_i | 1_i \rangle,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \Gamma' &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\{n_i\}} p(\{n_i\}) \sum_i |\sqrt{n_i} \langle b; 0_i | V | a; 1_i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}) \\ \Gamma' &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_i \sum_{\{n_i\}} (n_i p(n_{1,-}, n_i, \dots)) |\langle b; 0_i | V | a; 1_i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde

$$\langle n_i \rangle = \sum_{\{n_i\}} (n_i p(n_{1,-}, n_i, \dots)) \quad (3.13)$$

es el número medio de fotones en el modo i .

Finalmente, la aparición de la función $\delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba})$, que expresa la conservación de la energía en (3.12), tiene como consecuencia que sólo el número medio de fotones en los

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

modos resonantes contribuye. Por tanto Γ' es proporcional a la intensidad promedio $I(\omega_{ba})$ de la radiación incidente a la frecuencia atómica ω_{ba} .

De igual forma

$$\begin{aligned}\Gamma_{b \rightarrow a} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\{n_i\}} p(\{n_i\}) \sum_{\{n_i'\}} |\langle a; \{n_i'\} | V | b; \{n_i\} \rangle|^2 \delta(E_f - E_i), \\ \sum_{\{n_i'\}} |\langle a; \{n_i'\} | V | b; \{n_i\} \rangle|^2 \delta(E_f - E_i) &= \\ &= \sum_i |\langle a; n_{1-}, n_i + 1, - | V | b; n_{1-}, n_i, - \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}) = \\ &= \sum_i |\sqrt{n_i + 1} \langle a; 1_i | V | b; 0_i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}).\end{aligned}$$

Ahora es el elemento de matriz asociado a a_i^\dagger el que conserva la energía, luego

$$\begin{aligned}\Gamma_{b \rightarrow a} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\{n_i\}} p(\{n_i\}) \sum_i |\sqrt{n_i + 1} \langle a; 1_i | V | b; 0_i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}) = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_i (\langle n_i \rangle + 1) |\langle a; 1_i | V | b; 0_i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}).\end{aligned}$$

Como $\sum_{\{n_i\}} p(\{n_i\}) = 1$,

$$\begin{aligned}\Gamma_{b \rightarrow a} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_i \langle n_i \rangle |\langle a; 1_i | V | b; 0_i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}) \\ &\quad + \frac{2\pi}{\hbar} \sum_i |\langle a; 1_i | V | b; 0_i \rangle|^2 \delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}),\end{aligned}\tag{3.14}$$

donde el primer término da la probabilidad de transición Γ' de la ecuación (3.12) y el segundo término da el ritmo de transición Γ asociado con la emisión espontánea de b a a .

Finalmente se puede escribir

$$\Gamma_{b \rightarrow a} = \Gamma + \Gamma',\tag{3.15}$$

con lo que las ecuaciones (3.4) tienen la forma

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{bb}}{dt} &= \sigma_{aa}\Gamma' - \sigma_{bb}(\Gamma + \Gamma'); & \boxed{\frac{d\sigma_{bb}}{dt} = -\Gamma\sigma_{bb} + \Gamma'(\sigma_{aa} - \sigma_{bb})} \\ \frac{d\sigma_{aa}}{dt} &= \sigma_{bb}(\Gamma + \Gamma') - \sigma_{aa}\Gamma'; & \boxed{\frac{d\sigma_{aa}}{dt} = \Gamma\sigma_{bb} + \Gamma'(\sigma_{bb} - \sigma_{aa})},\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde Γ' es proporcional a la intensidad de la luz.

La diferencia entre Γ y Γ' viene sólo de la integral en ω_i , pero debido a la $\delta(\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba})$ esa integral es trivial, el valor del integrando en ω_i es igual a ω_{ab} . Por tanto, la única diferencia entre Γ y Γ' sería el factor multiplicativo $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$.

$$\Gamma' = \Gamma \langle n(\omega_{ba}) \rangle\tag{3.17}$$

donde $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es el número medio de fotones en el modo resonante.

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

Evolución de las coherencias

La única coherencia definida en este sistema es σ_{ba} , para la que se tiene

$$\frac{d\sigma_{ba}}{dt} = -i(\omega_{ba} + \Delta_{ba})\sigma_{ab} - \Gamma_{ba} \sigma_{ba}, \text{ con } \Delta_{ba} = \Delta_b - \Delta_a \text{ y}$$

$$\Delta_b = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \sum_n \frac{|\langle \nu, n | V | \mu, b \rangle|^2}{E_{\mu} + E_b - E_{\nu} - E_n},$$

$$\Gamma_{ba} = \Gamma_{ba}^{noad} + \Gamma_{ba}^{ad} = \Gamma_{ba}^{noad} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \neq a} \Gamma_{a \rightarrow n} + \sum_{n \neq b} \Gamma_{b \rightarrow n} \right),$$

donde se ha tenido en cuenta que Γ_{ba}^{ad} vale cero debido a que los elementos de matriz $\langle a | V | a \rangle$ y $\langle b | V | b \rangle$ valen cero.

$$\Delta_a = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\{n_i\}} p(n_1, \dots, n_i, \dots) \sum_{\{n_i'\}} \frac{|\langle b, n_1', \dots, n_i', \dots | V | a, n_1, \dots, n_i, \dots \rangle|^2}{E_{\{n_i\}} + E_a - E_{\{n_i'\}} - E_b} =$$

$$= \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{\{n_i\}} p(n_1, \dots, n_i, \dots) \left\{ \sum_i \frac{|\langle b, n_1, \dots, n_i - 1, \dots | V | a, n_1, \dots, n_i, \dots \rangle|^2}{\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}} \right.$$

$$\left. + \sum_i \frac{|\langle b, n_1, \dots, n_i + 1, \dots | V | a, n_1, \dots, n_i, \dots \rangle|^2}{-\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}} \right\} \equiv \Delta'_a + (\Delta_a - \Delta'_a).$$

Los elementos de matriz distintos de cero son

$$\langle n_i - 1 | a_i | n_i \rangle = \sqrt{n_i} \langle 0_i | a_i | 1_i \rangle \text{ y } \langle n_i + 1 | a_i | n_i \rangle = \sqrt{n_i + 1} \langle 1_i | a_i | 0_i \rangle.$$

$$\Delta'_a = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_i \left(\sum_{\{n_i\}} n_i p(n_1, \dots, n_i, \dots) \right) \frac{|\langle b, 0_i | V | a, 1_i \rangle|^2}{\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}},$$

$$\Delta_a - \Delta'_a = \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_i \left(\sum_{\{n_i\}} (1 + n_i) p(n_1, \dots, n_i, \dots) \right) \frac{|\langle b, 1_i | V | a, 0_i \rangle|^2}{-\hbar\omega_i - \hbar\omega_{ba}} =$$

$$= \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_i \frac{|\langle b, 1_i | V | a, 0_i \rangle|^2}{-\hbar\omega_{ba} - \hbar\omega_i} + \frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \sum_i \langle n_i \rangle \frac{|\langle b, 1_i | V | a, 0_i \rangle|^2}{-\hbar\omega_{ba} - \hbar\omega_i} = \Delta_a^0 + \Delta_a'',$$

donde Δ_a^0 es el Δ_a de emisión espontánea calculado en (3.9. b). Finalmente se puede escribir

$$\Delta_a = \Delta_a^0 + (\Delta'_a + \Delta_a'') \equiv \Delta_a^0 + \Delta_a^1 \quad (3.18)$$

$$\Delta_a^1 \equiv \Delta'_a + \Delta_a''.$$

Teniendo en cuenta (3.11) y (3.15)

$$\Gamma_{ba} = \Gamma_{ba}^{noad} = \frac{1}{2} (\Gamma_{b \rightarrow a} + \Gamma_{a \rightarrow b}) = \frac{1}{2} ([\Gamma + \Gamma'] + \Gamma'). \quad (3.19)$$

Con (3.18) y (3.19), la ecuación para las coherencias (3.7) tiene la forma

$$\boxed{\frac{d\sigma_{ba}}{dt} = -i(\omega_{ba} + \Delta_{ba}^0 + \Delta_{ba}^1)\sigma_{ba} - \frac{1}{2} (\Gamma + 2\Gamma')\sigma_{ba}}$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

Para estudiar el comportamiento de las poblaciones y las coherencias en un tiempo infinito, se igualan a cero las ecuaciones obtenidas y se resuelven.

Para la coherencia $\sigma_{ba}(t)$, se obtiene para el estado estacionario

$$\frac{d\sigma_{ba}}{dt} = -i(\omega_{ba} + \Delta_{ba}^0 + \Delta_{ba}^1)\sigma_{ba} - \frac{1}{2}(\Gamma + 2\Gamma')\sigma_{ba} = 0,$$

y esto conduce a

$$-i\omega'_{ba}\sigma_{ba}^\infty - \frac{1}{2}(\Gamma + 2\Gamma')\sigma_{ba}^\infty = 0, \quad \text{con } \omega'_{ba} = \omega_{ba} + \Delta_{ba}^0 + \Delta_{ba}^1,$$

y por tanto a $\sigma_{ba}^\infty = 0$. Es decir, que en el estado estacionario las coherencias se van a cero, y por lo tanto hay decoherencia.

Para la población $\sigma_{bb}(t)$, se obtiene para el estado estacionario,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{bb}}{dt} &= -\Gamma\sigma_{bb} + \Gamma'(\sigma_{aa} - \sigma_{bb}) = 0 \quad (\sigma_{aa} + \sigma_{bb} = 1), \\ -\Gamma\sigma_{bb}^\infty + \Gamma'(1 - 2\sigma_{bb}^\infty) &= 0; \quad (\Gamma + 2\Gamma')\sigma_{bb}^\infty = \Gamma', \\ \sigma_{bb}^\infty &= \frac{\Gamma'}{\Gamma + 2\Gamma'} = \frac{\Gamma\langle n(\omega_{ba}) \rangle}{\Gamma + 2\Gamma\langle n(\omega_{ba}) \rangle} = \frac{\langle n(\omega_{ba}) \rangle}{1 + 2\langle n(\omega_{ba}) \rangle}, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (3.17).

En este caso particular de un átomo de dos niveles se observa que las poblaciones son distintas de cero. Si el número medio de fotones con frecuencia ω_{ba} es cero, $\langle n(\omega_{ba}) \rangle = 0$, entonces $\sigma_{bb}^\infty = 0$. Esto es lo que se esperaba obtener, ya que si el número de fotones es igual a cero se recupera el caso ya estudiado, donde el campo de radiación se encuentra en el estado de vacío.

Si por el contrario $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es muy grande, en el estado estacionario las poblaciones serán $\sigma_{bb}^\infty = 1/2$ y $\sigma_{aa}^\infty = 1/2$, es decir, que estarán repartidas por igual entre los dos niveles.

4. ESTUDIO DE LA ECUACIÓN MAESTRA PARA UN SISTEMA ATÓMICO DE TRES NIVELES

Para entender un poco mejor el tema de estudio, se va a considerar en esta sección el caso de un sistema atómico de tres niveles. Se denota por $\{|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle\}$ la base de autoestados del Hamiltoniano, con energías E_a , E_b y E_c respectivamente. Se estudiarán tres casos diferentes en función de que muestren o no decoherencia.

Para comenzar el estudio, se vuelve a la ecuación maestra (2.13)

$$\dot{\sigma}_{ij}(t) = -i\omega_{ij}\sigma_{ij}(t) + \sum_{k,l}^{(\text{sec})} R_{ijkl}\sigma_{kl}(t),$$

donde hay que recordar que $\sum_{k,l}^{(\text{sec})}$ indica que la suma está restringida sólo a términos seculares.

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

• Caso 1

Se comenzará estudiando el caso donde los tres niveles de energía no están equidistantes y las frecuencias ω_{ab} , ω_{bc} y ω_{ac} son diferentes y distintas de cero.

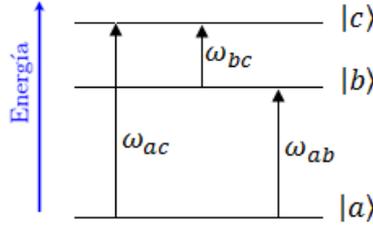


Figura 1. Esquema de los tres niveles con $\omega_{ab} \neq \omega_{bc} \neq \omega_{ac} \neq 0$.

En este caso las poblaciones están acopladas sólo a poblaciones, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{aa}(t)}{dt} &= R_{aabb}\sigma_{bb}(t) + R_{aacc}\sigma_{cc}(t) + R_{aaaa}\sigma_{aa}(t) = \\ &= \sigma_{bb}(t)\Gamma_{b\rightarrow a} + \sigma_{cc}(t)\Gamma_{c\rightarrow a} - \sigma_{aa}(t)(\Gamma_{a\rightarrow b} + \Gamma_{a\rightarrow c}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{bb}(t)}{dt} &= R_{bbba}\sigma_{aa}(t) + R_{bbcc}\sigma_{cc}(t) + R_{bbbb}\sigma_{bb}(t) = \\ &= \sigma_{aa}(t)\Gamma_{a\rightarrow b} + \sigma_{cc}(t)\Gamma_{c\rightarrow b} - \sigma_{bb}(t)(\Gamma_{b\rightarrow a} + \Gamma_{b\rightarrow c}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde

$$\mathcal{R}_{iikk} = \Gamma_{k\rightarrow i} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_{iiii} = -\sum_{n \neq i} \Gamma_{i\rightarrow n}.$$

Teniendo en cuenta que se cumple

$$\frac{d\sigma_{aa}(t)}{dt} + \frac{d\sigma_{bb}(t)}{dt} + \frac{d\sigma_{cc}(t)}{dt} = 0,$$

se tiene además

$$\frac{d\sigma_{cc}(t)}{dt} = -\frac{d\sigma_{aa}(t)}{dt} - \frac{d\sigma_{bb}(t)}{dt}. \quad (4.3)$$

Se emplea ahora la notación $\Gamma_{j\rightarrow i}^0$ para designar la transición del nivel j al i cuando el campo de radiación se encuentra en el estado de vacío. De manera análoga al caso anterior de dos niveles, donde

$$\Gamma_{a\rightarrow b} = \Gamma', \quad \Gamma_{b\rightarrow a} = \Gamma + \Gamma' \quad \text{y} \quad \Gamma' = \Gamma \langle n(\omega_{ba}) \rangle,$$

los ritmos de transición ahora son

$$\begin{aligned} \Gamma_{a\rightarrow b} &= \Gamma_{b\rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ba}) \rangle \\ \Gamma_{b\rightarrow a} &= \Gamma_{b\rightarrow a}^0 + \Gamma_{b\rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ba}) \rangle \\ \Gamma_{a\rightarrow c} &= \Gamma_{c\rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ca}) \rangle \\ \Gamma_{c\rightarrow a} &= \Gamma_{c\rightarrow a}^0 + \Gamma_{c\rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ca}) \rangle \\ \Gamma_{b\rightarrow c} &= \Gamma_{c\rightarrow b}^0 \langle n(\omega_{cb}) \rangle \\ \Gamma_{c\rightarrow b} &= \Gamma_{c\rightarrow b}^0 + \Gamma_{c\rightarrow b}^0 \langle n(\omega_{cb}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

Si se resuelve el sistema de ecuaciones para las poblaciones en el estado estacionario igualando $d\sigma_{ii}/dt$ a 0, se obtiene que σ_{aa}, σ_{bb} y σ_{cc} son en general distintas de cero.

Esto se debe a que se tiene un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. El sistema admite una ecuación de matrices $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, donde la matriz \mathbf{A} es la matriz de los coeficientes, \mathbf{X} es la matriz de incógnitas, \mathbf{B} la matriz de términos independientes y \mathbf{A}' la matriz ampliada del sistema lineal. Se trata de un sistema compatible ya que $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}')$ y por lo tanto podemos afirmar que el sistema tiene solución distinta de cero.

Los valores que tomen las poblaciones dependerán de los ritmos de transición y del número medio de fotones que se tenga para cada frecuencia.

Si se estudian las coherencias,

$$\frac{d\sigma_{ab}(t)}{dt} = -i\omega_{ab}\sigma_{ab}(t) + R_{abab}\sigma_{ab}(t) = -i(\omega_{ab} + \Delta_{ab})\sigma_{ab}(t) - \Gamma_{ab}\sigma_{ab}(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{d\sigma_{ac}(t)}{dt} = -i\omega_{ac}\sigma_{ac}(t) + R_{acac}\sigma_{ac}(t) = -i(\omega_{ac} + \Delta_{ac})\sigma_{ac}(t) - \Gamma_{ac}\sigma_{ac}(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{d\sigma_{bc}(t)}{dt} = -i\omega_{bc}\sigma_{bc}(t) + R_{bcbc}\sigma_{bc}(t) = -i(\omega_{bc} + \Delta_{bc})\sigma_{bc}(t) - \Gamma_{bc}\sigma_{bc}(t). \quad (4.7)$$

Se ha tenido en cuenta que en el caso de frecuencias no degeneradas

$$\mathcal{R}_{ijij} = -\Gamma_{ij} - i\Delta_{ij} \quad \text{con} \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{noad} + \Gamma_{ij}^{ad},$$

$$\text{y como } \Gamma_{ij}^{ad} = 0, \quad \Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{noad} = \frac{1}{2}(\sum_{n \neq i} \Gamma_{i \rightarrow n} + \sum_{n \neq j} \Gamma_{j \rightarrow n}),$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ab} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{a \rightarrow b} + \Gamma_{a \rightarrow c} + \Gamma_{b \rightarrow a} + \Gamma_{b \rightarrow c}) = \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma_{b \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ba}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ca}) \rangle + \Gamma_{b \rightarrow a}^0 + \Gamma_{b \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ba}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow b}^0 \langle n(\omega_{cb}) \rangle) = \\ &= \frac{1}{2}\{\Gamma_{b \rightarrow a}^0(1 + 2\langle n(\omega_{ba}) \rangle) + \Gamma_{c \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ca}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow b}^0 \langle n(\omega_{cb}) \rangle\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{bc} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{b \rightarrow a} + \Gamma_{b \rightarrow c} + \Gamma_{c \rightarrow a} + \Gamma_{c \rightarrow b}) = \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma_{b \rightarrow a}^0 + \Gamma_{b \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ba}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow b}^0 \langle n(\omega_{cb}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow a}^0 + \Gamma_{c \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ca}) \rangle \\ &\quad + \Gamma_{c \rightarrow b}^0 + \Gamma_{c \rightarrow b}^0 \langle n(\omega_{cb}) \rangle) = \\ &= \frac{1}{2}\{\Gamma_{b \rightarrow a}^0(1 + \langle n(\omega_{ba}) \rangle) + \Gamma_{c \rightarrow b}^0(1 + 2\langle n(\omega_{cb}) \rangle) + \Gamma_{c \rightarrow a}^0(1 + \langle n(\omega_{ca}) \rangle)\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ac} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{a \rightarrow b} + \Gamma_{a \rightarrow c} + \Gamma_{c \rightarrow a} + \Gamma_{c \rightarrow b}) = \\ &= \frac{1}{2}(\Gamma_{b \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ba}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ca}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow a}^0 + \Gamma_{c \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ca}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow b}^0 + \Gamma_{c \rightarrow b}^0 \langle n(\omega_{cb}) \rangle) = \\ &= \frac{1}{2}\{\Gamma_{b \rightarrow a}^0 \langle n(\omega_{ba}) \rangle + \Gamma_{c \rightarrow a}^0(1 + 2\langle n(\omega_{ca}) \rangle) + \Gamma_{c \rightarrow b}^0(1 + \langle n(\omega_{cb}) \rangle)\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

El único término secular que aparece en cada una de las ecuaciones es aquél que acopla cada coherencia consigo misma, con lo que las coherencias están desacopladas unas de otras. Al estudiar cómo se comportan las coherencias en un tiempo tendiendo a infinito haciendo el estado estacionario

$$\frac{d\sigma_{ab}(t)}{dt} = 0,$$

se comprueba fácilmente que las coherencias van a cero. La solución para las coherencias es

$$\sigma_{ab}(t) = \sigma_{ab}(0)e^{-i(\omega_{ab} + \Delta_{ab})t - \Gamma_{ab}t}$$

y como la solución en un tiempo tendiendo a infinito es cero, se produce decoherencia.

- **Caso 2**

En el segundo caso que se considera en esta sección, los tres niveles de energía están igualmente espaciados, con lo que las frecuencias ω_{ab} y ω_{bc} son iguales pero distintas de ω_{ac} .

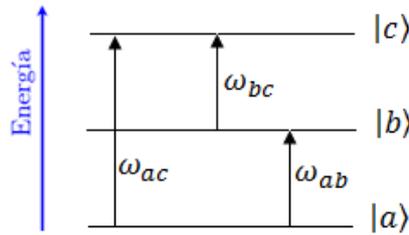


Figura 2. Esquema de los tres niveles con $\omega_{ab} = \omega_{bc}$ y $\omega_{bc} \neq \omega_{ac} \neq 0$.

Si se estudian las poblaciones, se observa que son iguales al caso 1, sin embargo en las coherencias se observa que ahora σ_{ab} y σ_{bc} están acopladas,

$$\frac{d\sigma_{ab}(t)}{dt} = -i\omega_{ab}\sigma_{ab}(t) + R_{abab}\sigma_{ab}(t) + R_{abbc}\sigma_{bc}(t) \quad (4.11)$$

$$\frac{d\sigma_{bc}(t)}{dt} = -i\omega_{bc}\sigma_{bc}(t) + R_{bcbc}\sigma_{bc}(t) + R_{bcab}\sigma_{ab}(t) \quad (4.12)$$

$$\frac{d\sigma_{ac}(t)}{dt} = -i\omega_{ac}\sigma_{ac}(t) + R_{acac}\sigma_{ac}(t) = -i(\omega_{ac} + \Delta_{ac})\sigma_{ac}(t) - \Gamma_{ac}\sigma_{ac}(t), \quad (4.13)$$

donde Γ_{ac} viene dada por la ecuación (4.10) y

$$\begin{aligned} R_{abbc} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, a | V | \mu, b \rangle \langle \mu, c | V | \nu, b \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_b - E_{\nu} - E_a) = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} R_{\nu\mu} A_{ab} R_{\mu\nu} A_{cb} \times \delta(E_{\mu} + E_b - E_{\nu} - E_a), \\ R_{bcab} &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, b | V | \mu, a \rangle \langle \mu, b | V | \nu, c \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_a - E_{\nu} - E_b) = \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} R_{\nu\mu} A_{bc} R_{\mu\nu} A_{ba} \times \delta(E_{\mu} + E_b - E_{\nu} - E_a). \end{aligned}$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

En la ecuación (4.13) se observa que la coherencia $\sigma_{ac}(t)$ está desacoplada, con lo que es fácil demostrar que en el estado estacionario ($d\sigma_{ac}/dt = 0$), σ_{ac} vale cero, $\sigma_{ac}(t) = \sigma_{ac}(0)e^{-i(\omega_{ac} + \Delta_{ac})t - \Gamma_{ac}t}$.

Si se estudia además cuánto valen σ_{ab} y σ_{bc} en un tiempo tendiendo a infinito, se comprueban que valen cero también. Por tanto se puede afirmar que, al igual que en el caso anterior, todas las coherencias tienden a cero, por lo que se produce decoherencia.

• Caso 3

Para ir un poco más allá, se pretende estudiar ahora el caso donde las frecuencias $\omega_{ab}, \omega_{aa}, \omega_{bb}$ y ω_{cc} sean iguales a cero y además ω_{bc} y ω_{ac} sean iguales y distintas de cero.

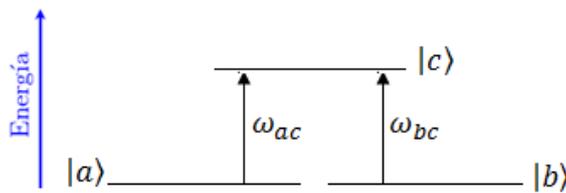


Figura 3. Esquema de los tres niveles con $\omega_{ab} = \omega_{aa} = \omega_{bb} = \omega_{cc} = 0$ y $\omega_{bc} = \omega_{ac} \neq 0$.

Al escribir la ecuación maestra para este caso, aparecen las poblaciones acopladas con la coherencia σ_{ab} ,

$$\frac{d\sigma_{aa}(t)}{dt} = R_{aaaa}\sigma_{aa}(t) + R_{aabb}\sigma_{bb}(t) + R_{aaccc}\sigma_{cc}(t) + R_{aaab}\sigma_{ab}(t) \quad (4.14)$$

$$\frac{d\sigma_{bb}(t)}{dt} = R_{bbbb}\sigma_{bb}(t) + R_{bbaa}\sigma_{aa}(t) + R_{bbcc}\sigma_{cc}(t) + R_{bbab}\sigma_{ab}(t) \quad (4.15)$$

$$\frac{d\sigma_{ab}(t)}{dt} = -i\omega_{ab}\sigma_{ab}(t) + R_{abab}\sigma_{ab}(t) + R_{abbb}\sigma_{bb}(t) + R_{abaa}\sigma_{aa}(t) + R_{abcc}\sigma_{cc}(t), \quad (4.16)$$

donde

$$R_{aaab} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, a | V | \mu, a \rangle \langle \mu, b | V | \nu, a \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_a - E_{\nu} - E_a)$$

$$R_{bbab} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, b | V | \mu, a \rangle \langle \mu, b | V | \nu, b \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_a - E_{\nu} - E_b)$$

$$R_{abbb} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, a | V | \mu, b \rangle \langle \mu, b | V | \nu, b \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_b - E_{\nu} - E_a)$$

$$R_{abaa} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, a | V | \mu, a \rangle \langle \mu, a | V | \nu, b \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_a - E_{\nu} - E_a)$$

$$R_{abcc} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, a | V | \mu, c \rangle \langle \mu, c | V | \nu, b \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_c - E_{\nu} - E_a).$$

Por otro lado se tienen las otras dos coherencias acopladas entre sí

$$\frac{d\sigma_{bc}(t)}{dt} = -i\omega_{bc}\sigma_{bc}(t) + R_{bcbc}\sigma_{bc}(t) + R_{bcac}\sigma_{ac}(t) \quad (4.17)$$

$$\frac{d\sigma_{ac}(t)}{dt} = -i\omega_{ac}\sigma_{ac}(t) + R_{acac}\sigma_{ac}(t) + R_{acbc}\sigma_{bc}(t), \quad (4.18)$$

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

donde

$$\mathcal{R}_{bcac} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, b | V | \mu, a \rangle \langle \mu, c | V | \nu, a \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_a - E_{\nu} - E_b)$$

$$\mathcal{R}_{acbc} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\mu} p_{\mu} \sum_{\nu} \langle \nu, a | V | \mu, b \rangle \langle \mu, c | V | \nu, c \rangle \times \delta(E_{\mu} + E_b - E_{\nu} - E_a).$$

En el caso 1 y el caso 2 estudiados, el acoplamiento con el baño produce decoherencia y en ambos casos, aun siendo las poblaciones diferentes de cero, las coherencias se iban a cero. Sin embargo en este tercer caso, todas las coherencias no se van a cero, por lo que se trata de un ejemplo donde no se produce decoherencia total en la base en que se trabaja. Aunque el resto de coherencias (con frecuencia libre de evolución distinta de cero) se van a cero a un tiempo tendiendo a infinito, no hay decoherencia completa si una de ellas tiene un valor distinto de cero.

Esto se debe a que se tiene un sistema lineal no homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Al igual que las poblaciones en los casos 1 y 2, ahora se tiene un sistema compatible y se puede afirmar que el sistema tiene solución distinta de cero.

Hasta este punto, en esta sección se ha obtenido la ecuación maestra para un sistema atómico de tres niveles y se ha estudiado en detalle para tres casos diferentes.

Se va a considerar ahora el caso particular en que los tres niveles de energía no están equidistantes (caso 1) y se va a estudiar de manera detallada el comportamiento de las poblaciones mediante gráficas que representen σ_{aa} y σ_{bb} en función del número medio de fotones para las diferentes frecuencias ω_{ba} , ω_{ca} y ω_{cb} .

Interesa el estudio de las poblaciones en el estado estacionario, con lo que las ecuaciones (4.1) y (4.2) se igualan a cero. Se estudiarán tres situaciones diferentes, haciendo que en cada situación una de las posibles transiciones sea cero.

I) Se comenzará con la condición de que $\Gamma_{b \rightarrow a}^0$ sea cero, es decir, no se permite la emisión espontánea del nivel $|b\rangle$ a $|a\rangle$ ni tampoco la transición del nivel $|a\rangle$ a $|b\rangle$. Las ecuaciones (4.1) y (4.2) para las poblaciones en el estado estacionario quedarían de la forma

$$\sigma_{cc}(t)\Gamma_{c \rightarrow a} - \sigma_{aa}(t)\Gamma_{a \rightarrow c} = 0$$

$$\sigma_{cc}(t)\Gamma_{c \rightarrow b} - \sigma_{bb}(t)\Gamma_{b \rightarrow c} = 0.$$

Desde este momento y en las tres situaciones que se estudiarán a continuación, se va a considerar que el resto de transiciones $\Gamma_{j \rightarrow i}^0$ posibles tomen el valor uno (en las unidades apropiadas).

Si se tiene en cuenta las ecuaciones (4.4) y que $\sigma_{cc} = -\sigma_{aa} - \sigma_{bb}$, se tiene

$$\sigma_{aa}[1 + 2\langle n(\omega_{ca}) \rangle] + \sigma_{bb}[1 + \langle n(\omega_{ca}) \rangle] = 1 + \langle n(\omega_{ca}) \rangle \quad (4.19)$$

$$\sigma_{aa}[1 + \langle n(\omega_{cb}) \rangle] + \sigma_{bb}[1 + 2\langle n(\omega_{cb}) \rangle] = 1 + \langle n(\omega_{cb}) \rangle \quad (4.20)$$

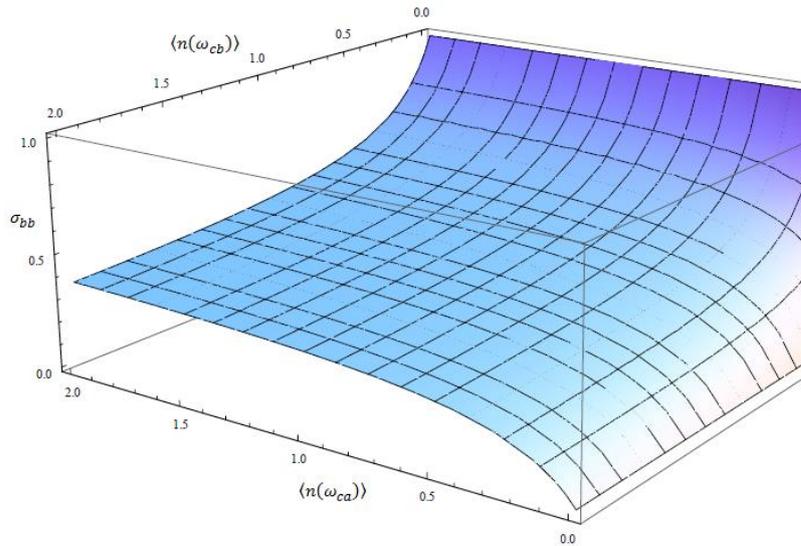


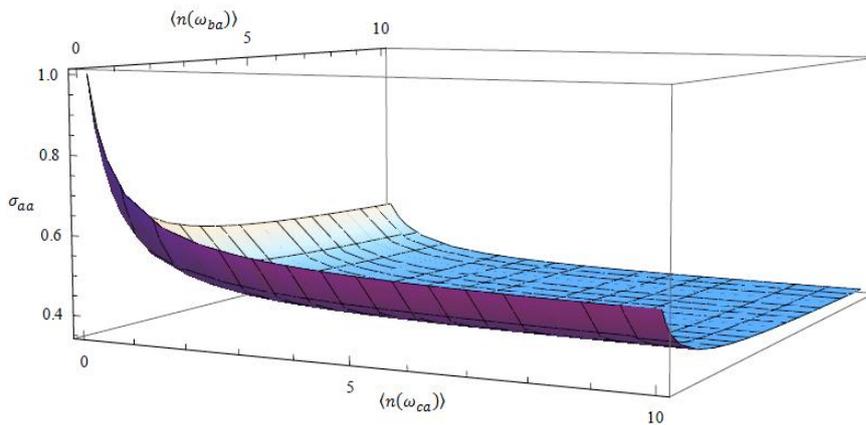
Figura 4. Evolución de la población σ_{bb} en función de $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ es cero, σ_{bb} vale uno para cualquier valor de $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ es cero, σ_{bb} vale cero para cualquier valor de $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$. El número medio de fotones para cada frecuencia es una cantidad adimensional.

- Si se analiza el límite donde $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ sean muy grandes se obtiene que las poblaciones se reparten entre los tres niveles $|a\rangle$, $|b\rangle$ y $|c\rangle$, de manera que $\sigma_{aa} = \sigma_{bb} = \sigma_{cc} = 1/3$

II) Ahora se cambia la condición inicial y lo que se hace es considerar que $\Gamma_{c \rightarrow b}^0$ es cero. Ahora las ecuaciones (4.1) y (4.2) para el estado estacionario serán

$$\sigma_{aa}[1 + 2\langle n(\omega_{ca}) \rangle + \langle n(\omega_{ba}) \rangle] - \sigma_{bb}[\langle n(\omega_{ba}) \rangle - \langle n(\omega_{ca}) \rangle] = 1 + \langle n(\omega_{ca}) \rangle \quad (4.21)$$

$$\sigma_{aa}\langle n(\omega_{ba}) \rangle - \sigma_{bb}[1 + \langle n(\omega_{ba}) \rangle] = 0. \quad (4.22)$$



1/2 cuando $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ sea grande.

Figura 5. Evolución de la población σ_{aa} en función de $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es cero σ_{aa} decae desde el valor 1 en $\langle n(\omega_{ca}) \rangle = 0$ hasta 1/2 si $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ es grande. Si $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ es cero σ_{aa} decae desde el valor 1 en $\langle n(\omega_{ba}) \rangle = 0$ hasta

- Si se analiza el caso donde $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ sea igual a cero se obtiene que $\sigma_{bb} = 1$ y $\sigma_{aa} = \sigma_{cc} = 0$.

- De igual forma si se hace que $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ sea cero, se tiene que $\sigma_{bb} = 0$ y por tanto $\sigma_{aa} = 1$ y $\sigma_{cc} = 0$.

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

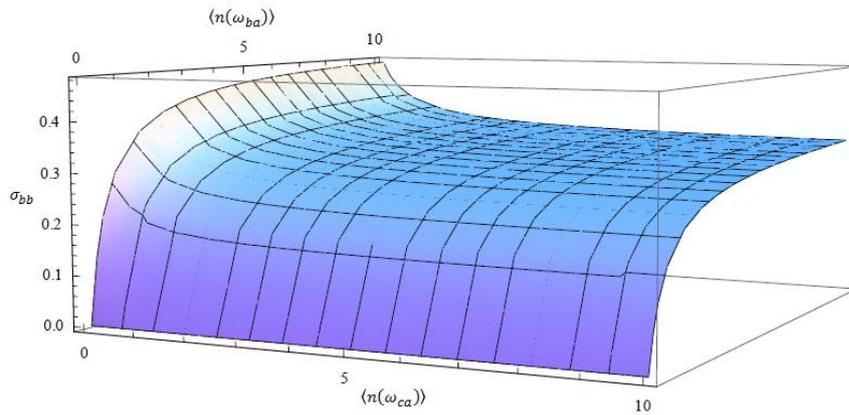


Figura 6. Evolución de la población σ_{bb} en función de $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es cero, σ_{bb} vale cero para cualquier valor de $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ es cero, σ_{bb} aumenta desde cero hasta el valor $1/2$.

- Si el número medio de fotones $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es igual a cero, se obtiene de la ecuación (4.22) que $\sigma_{bb} = 0$ y de (4.21) se tiene que

$$\sigma_{aa} = \frac{1 + \langle n(\omega_{ca}) \rangle}{1 + 2\langle n(\omega_{ca}) \rangle}$$

donde si $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ es cero, $\sigma_{aa} = 1$ y $\sigma_{cc} = 0$ y cuando $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ tiende a un valor muy grande $\sigma_{aa} = 1/2$ y $\sigma_{cc} = 1/2$

- Si se estudia el límite cuando $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ valga cero y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ tienda a un valor grande, se tiene $\sigma_{aa} = 1/2$, $\sigma_{bb} = 1/2$ y $\sigma_{cc} = 0$.
- Queda por estudiar el límite cuando $\langle n(\omega_{ca}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ tomen valores muy grandes. En este caso $\sigma_{aa} = \sigma_{bb} = \sigma_{cc} = 1/3$

III) Por último queda por estudiar la condición de que $\Gamma_{c \rightarrow a}^0$ sea cero, no es posible subir del nivel $|a\rangle$ al $|c\rangle$, ni bajar del $|c\rangle$ al $|a\rangle$. Ahora las ecuaciones (4.1) y (4.2) para el estacionario serán

$$\sigma_{bb}[1 + \langle n(\omega_{ba}) \rangle] - \sigma_{aa}\langle n(\omega_{ba}) \rangle = 0 \quad (4.23)$$

$$-\sigma_{aa}[\langle n(\omega_{ba}) \rangle - 1 - \langle n(\omega_{cb}) \rangle] + \sigma_{bb}[2 + 2\langle n(\omega_{cb}) \rangle - \langle n(\omega_{ba}) \rangle] = 1 + \langle n(\omega_{cb}) \rangle. \quad (4.24)$$

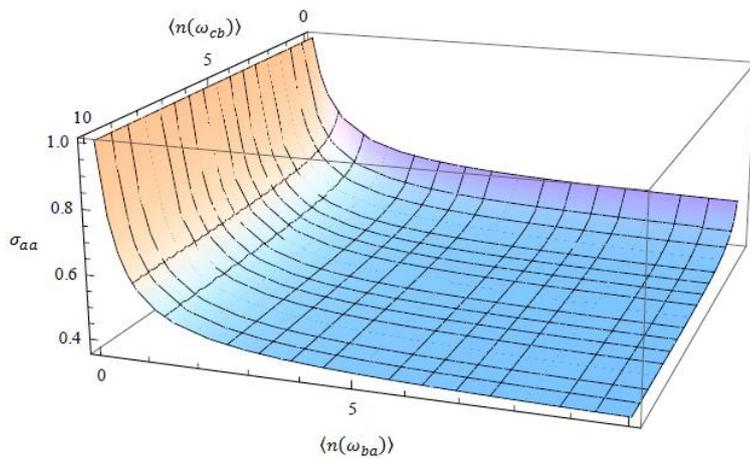
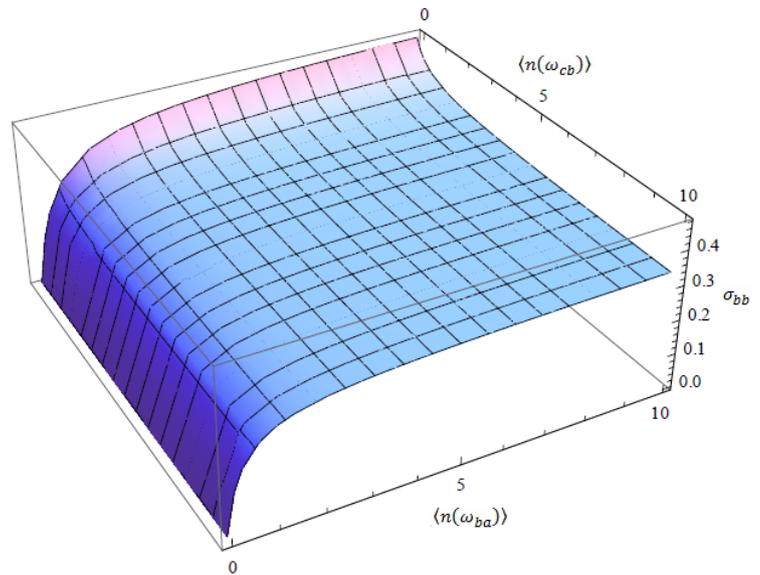


Figura 7. Evolución de la población σ_{aa} en función de $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es cero, σ_{aa} vale uno para cualquier valor de $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ es cero, σ_{aa} va decayendo desde 1 hasta $1/2$.

Figura 8. Evolución de la población σ_{bb} en función de $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$. Si $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es cero, σ_{bb} vale cero siempre. Si $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ es cero, σ_{bb} aumenta desde 0 en $\langle n(\omega_{ba}) \rangle = 0$ hasta tomar el valor $1/2$ cuando $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es muy grande.



- Si $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es igual a cero, se obtiene de la ecuación (4.23) que $\sigma_{bb} = 0$ y de (4.24) se tiene que $\sigma_{aa} = 1$, por lo que $\sigma_{cc} = 0$.
- Si $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ es igual a cero y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ es un número muy grande $\sigma_{aa} = \sigma_{bb} = 1/2$ y $\sigma_{cc} = 0$.
- Si se analiza el límite donde $\langle n(\omega_{cb}) \rangle$ y $\langle n(\omega_{ba}) \rangle$ sean muy grandes se obtiene que las poblaciones se reparten entre los tres niveles $|a\rangle$, $|b\rangle$ y $|c\rangle$, de forma que $\sigma_{aa} = \sigma_{bb} = \sigma_{cc} = 1/3$.

Conclusiones

El objetivo claro de este trabajo era estudiar la decoherencia en el proceso de interacción de un sistema con su entorno. En la primera sección el objetivo principal era obtener la ecuación maestra que describe la evolución de un sistema cuántico pequeño \mathcal{A} en interacción con sistemas que hacen el papel de entorno o detector \mathcal{R} . En la segunda sección el siguiente paso fue obtener en detalle la ecuación maestra para el sistema \mathcal{A} en la base de autoestados de energía del sistema \mathcal{A} para luego evaluar la evolución de las poblaciones y coherencias.

Decoherencia inducida por el entorno en pequeños sistemas cuánticos

En la tercera sección se consideró el caso particular de un sistema atómico de dos niveles, donde se obtuvieron los valores de las poblaciones y coherencias en un tiempo tendiendo a infinito. En el estado estacionario las coherencias se iban a cero, por lo que la decoherencia es inducida en el sistema \mathcal{A} .

Finalmente en la última sección se derivó la ecuación maestra para el caso de un sistema de tres niveles. Al analizar los tres casos propuestos, se observa que sólo en el último caso, cuando las coherencias están acopladas a poblaciones, no se produce decoherencia.

Se sabe que la interacción de un sistema cuántico abierto con el entorno produce decoherencia. Este proceso de decoherencia es un tema interesante dentro de la mecánica cuántica ya que explica por qué muchos sistemas físicos macroscópicos tienen un comportamiento diferente de los sistemas que muestran efectos cuánticos.

Bibliografía

- [1] W.H.Zurek, *Physics Today* (1991).
- [2] Claude Cohen Tanoudji, Jacques Dupont-Roc y Gilbert Grynberg, "*Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*". Ed. Wiley Interscience, 1992.