



FACULTAD DE FÍSICA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA FUNDAMENTAL

TRABAJO DE FIN DE GRADO:
**INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA
DE CUERDAS BOSÓNICAS**

Presentado por Nelson Hernández

Supervisado por:
José M^a Gómez Llorente

Índice

Índice	1
1. Entendiendo la Teoría de Cuerdas	5
1.1. Motivación de la Teoría de Cuerdas	5
1.2. Nacimiento y Evolución de la Teoría	7
1.3. ¿Cuántas Teorías de Cuerdas Existen?	9
1.3.1. Teoría bosónica de cuerdas	9
1.3.2. Teorías fermiónicas de cuerdas	9
1.4. Supersimetría	12
1.5. Compactificación	13
1.6. Dualidades y la Teoría M	14
2. Cálculo de la Acción de una Cuerda Bosónica	16
2.1. Cálculo de la Acción Relativista	17
2.2. Generalización de la Acción para las Cuerdas	20
3. Simetrías y Ecuaciones de Campo para la Cuerda Bosónica	23
3.1. Transformaciones de Poincaré e Invariancia de la Acción	24
3.2. Simetrías Locales de la Hoja de Mundo	25
3.3. Fijación del Contraste	26
3.4. Ecuaciones de Campo: Condiciones de Contorno y Resolución	28
4. Cuantización Canónica de la Cuerda	35
4.1. Análisis del Hamiltoniano y del Tensor de Energía-Impulso	35
4.2. Álgebra de Witt	37
4.3. Cuantización de la Cuerda Bosónica	37
4.4. Álgebra de Virasoro	39
4.5. Estados Espurios	41
4.6. Eliminación de los Estados Ghost o de Norma Negativa	42
4.7. Determinación de los Estados Físicos	44
5. Conclusión y Continuación	46
5.1. Conclusión	46
5.2. De las Cuerdas Bosónicas a las Supercuerdas	46

6. Anexo	47
6.1. Acción de la Cuerda	47
6.1.1. Determinación de la constante α	47
6.1.2. Demostración de la equivalencia de las acciones para la partícula relativista	48
6.1.3. Equivalencia entre la acción de Nambu-Goto y Poliakov	49
6.2. Simetrías y Ecuaciones de Campo para la Cuerda Bosónica .	51
6.2.1. Demostración de que $a^\mu{}_\nu$ genera las transformaciones de Lorentz	51
6.2.2. Transformaciones de Lorentz	52
6.2.3. Transformación de Weyl y tensor de energía-impulso .	54
6.2.4. Invariancia de Poincaré en función de las condiciones de contorno	54
6.3. Cuantización Canónica de la Cuerda	55
6.3.1. Resolviendo la ambigüedad del término \hat{L}_0	55
6.3.2. Estados espurios y la condición de la concha de masa .	55
6.3.3. Estados espurios de nivel 3 y superiores	56
7. Bibliografía	58
7.1. Principales documentos de referencia	58
7.2. Otras fuentes de información consultadas	58
7.3. Procedencia de las imágenes utilizadas	59
Referencias	60

Resumen

A qualitative study of the different string theories will be carried out, discussing topics of great interest such as “why string theory is so promising”, “how the theory began” or “the different types of theories that exist”. Furthermore, we will try to understand very complex and leading subjects in theoretical physics, for instance, compactification and landscape, supersymmetry, dualities and M. theory. We will try to understand what these themes are, what their function is and what consequences they generate. We will study in depth these issues, using the knowledge acquired during the Degree.

We will focus on bosonic string theory because does not include those complicated elements and allows the technical analysis of some of its properties. We will start studying how the string’s action is, because this will determine how most of its properties are. Nevertheless, to calculate this action is not so easy, so we will begin by understanding simpler analogous case: the relativistic point particle. The procedure for calculating the action of the relativistic particle is formally identical to the calculus of the string’s action, except that the latter is more laborious. Once we have attained the action of Nambu-Goto, imitating the scheme followed for relativistic point particles, we will look for an equivalent action, that will be the action of Polyakov, which will simplify calculations and will facilitate quantization. When we obtain it, we already have all the necessary elements to make a detailed analysis of the bosonic string theory properties.

One of the main applications of the action is the study of symmetries in function of their variation. We will examine whether bosonic theory contains global symmetries or local symmetries. Global symmetries leads to conserved currents and charges via Noether’s theorem, while local symmetries is a symptom of redundant degrees of freedom in the theory. In particular, the second one will be studied in this document: diffeomorphisms and Weyl transformations, because that will allow us to rescale the intrinsic metric of the worldsheet as a plane metric.

The next step will be to analyse what kind of strings underlie our theory and what characterizes them. It will be seen that there are three types: closed strings, open strings under Dirichlet boundary conditions and open strings under Neumann boundary conditions. It is important to understand the boundary conditions because although both are open string their behaviour is not the same. The equations of motion associated with the strings will be written and resolved. To do this, it will be necessary to use coordinates of the cone of light, since they will greatly simplify the calculations. Once the equations of motion are solved, they will be compared to observe the differences between the three types of strings and we will make a qualitative study of their dynamics.

Finally, the last objective of the study will be the quantization of the bosonic string and the elimination of non-physical states arising from it. We will begin by constructing the theory-associated Hamiltonian, using the Fourier modes, α , which leads to different Hamiltonians for open and closed strings. An interesting way to write the Hamiltonian is to use the generators, L_m , that are related with the Fourier modes, which simplify the equations and provide us with the proper tools for the quantization of the bosonic string.

The set of elements $\{L_m\}$ forms a complex Lie algebra very important in the theories of strings, denominated Witt's algebra. It is important to know their properties because they will be useful afterwards. To quantize, we use the canonical quantization method, which consists of writing the theory in terms of the relations of the Poisson brackets and then changing these by commutators. When we do this, the previous Witt's algebra disappears, since this is only valid for the classical case. Now another complex Lie algebra appears, whose quantization is not so trivial in the wake of the normal ordering in quantum field theory, which is constituted by the elements $\{\tilde{L}_m\}$, known as Virasoro's algebra and it's fundamental for the study of strings and the conformal field theory.

The commutation relations that satisfy this algebra are very important because they will allow us to obtain information from the theory. We will study what conditions are necessary for a state to be a physic state, because with quantization, states with problematic properties such as negative norm emerge. Since bosonic string theory is expected to be a formalism that can explain our world, it will be crucial to eliminate these non-physical states. To do this, we define a set of false states, which are called spurious states, that do not represent any particle, though, mathematically permit us to resolve the conflict. The use of the spurious states gives rise to having to fix three constants for the elimination of these unreal states. Two of them do not have a direct impact on the theory while the last one is the number of dimensions of space-time, where the theory is defined.

1. Entendiendo la Teoría de Cuerdas

Resumen

We will make a detailed description of the most important topics that appear in string theory. We will explain the reasons that have made this quantum theory of gravity so famous in the world of theoretical physics and how its beginning was, years in which the vast majority of scientists ignored it. We will briefly comment on how many theories exist and what the fundamental differences between them are. We will focus on the fermionic string theories, which are the most important ones. Finally, we will try to explain complex concepts such as compactification, supersimmetry, etcetera. Without entering into complex technicalities, we will enumerate the different dualities that exist between the different types of string theories and their implications. Finally, the chapter will end up talking about the revolutionary M-Theory of Edward Witten.

1.1. Motivación de la Teoría de Cuerdas

La teoría de cuerdas pese a su actual fama no es una teoría muy reciente. Fue formulada en la década de los setenta y desarrollada casi en su totalidad en las dos siguientes décadas. No obstante, en el ámbito científico y social tiene mucha relevancia y se muestra como la solución a muchos problemas.

La teoría de cuerdas se basa en la premisa de que las partículas fundamentales que conforman el mundo real están constituidas por unos diminutos filamentos que se denominan cuerdas. Estas cuerdas vibran, como las cuerdas de una guitarra, y sus diferentes modos de vibración generarían el universo de partículas que constituye el modelo estándar actual. Pero, ¿por qué es tan prometedora esta teoría?

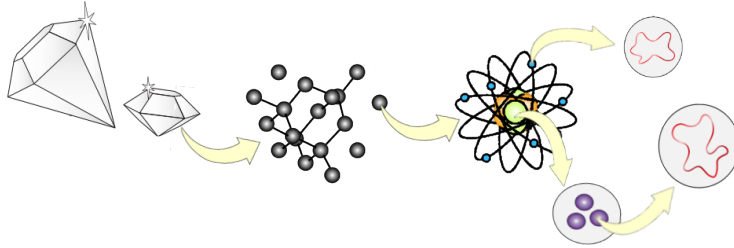


Figura 1: Esquema que representa con claridad la propuesta de la teoría de cuerdas para la formación de la materia.

La respuesta es que esta teoría soluciona algunos de los problemas más importantes de la física teórica, cuestiones que nunca antes habían sido resueltas. Los principales motivos de la fama de la teoría de cuerdas son:

1. **Teoría del todo (TOE).** La teoría de cuerdas fue la primera teoría, matemáticamente consistente, que permitía la coexistencia de la mecánica cuántica y la relatividad general.
2. **Teoría de gran unificación (GUT).** Permite la unión de las tres fuerzas fundamentales: electromagnetismo, nuclear fuerte y nuclear débil, en una teoría gauge con una única constante de acoplamiento. Esto es algo que el modelo estándar actual es incapaz de hacer.
3. **Reducción del número de parámetros fundamentales.** El modelo estándar requiere la determinación experimental de 25 constantes fundamentales, sin las cuáles la teoría no podría funcionar. Sin embargo, en la teoría de cuerdas esto cambia, ya que solamente se necesita la determinación de un único parámetro: la tensión de la cuerda, mientras que el resto son predichos por la propia teoría.
4. **Renormalización de la gravedad.** La gravedad cuántica funciona perfectamente en la actualidad siempre y cuando no se analice a distancias muy pequeñas, como la longitud de Planck. Al hacerlo, empiezan a surgir infinitos en la teoría. Estos infinitos se intentan resolver mediante la renormalización, que es un conjunto de técnicas cuyo objetivo es obtener términos finitos en un desarrollo perturbativo. Al usar la renormalización en las teorías convencionales, se solventa impecablemente el problema a costa de medir experimentalmente una constante por cada infinito que se resuelve. En el caso de la electrodinámica, la constante sería la masa del electrón. Sin embargo, con la gravedad ocurre algo desastroso, puesto que aparecen infinitos, pero al resolverlos surgen otros nuevos, lo que conduce

a la necesidad de hacer infinitas medidas para resolverlo. Al emplear la teoría de cuerdas dos factores eliminan el problema. Primero, el hecho de que no sean partículas puntuales, sino que su componente mínimo tenga una longitud finita, distinta de cero, evita que se alcancen los infinitos y segundo, aparece un nuevo término, consecuencia de la supersimetría, que compensa el resultado obtenido.

Empero, la teoría posee graves problemas que hasta el momento no se han conseguido resolver, siendo el principal de ellos la imposibilidad de demostrar que la teoría es errónea, puesto que para observar las cuerdas se necesitarían unas cantidades de energía ingentes que están muy lejos de ser producidas con el nivel tecnológico actual. El falsacionismo es uno de los pilares del método científico y por ende, una teoría que no puede ser contrastada experimentalmente, abre el debate de si pertenece a la ciencia o a la pseudociencia, de si es física o filosofía.

Asimismo, cabe destacar otros problemas de gran importancia que posee la teoría como el gran número de estados de vacío existentes, en torno a 10^{500} , la mala predicción de la constante cosmológica, muchos órdenes de magnitud por encima de los resultados experimentales, o la fijación necesaria del espacio-tiempo de fondo para poder realizar predicciones. Por consiguiente, se puede afirmar que la teoría de cuerdas es un sofisticado modelo matemático que tiene que solventar algunos problemas, pero que desde el punto de vista de la física teórica es realmente prometedor.

1.2. Nacimiento y Evolución de la Teoría

Todo comenzó en 1968 cuando un físico teórico italiano, Gabriele Veneziano, en su afán por entender la interacción nuclear fuerte, descubrió que una ecuación matemática escrita 200 años antes por Leonhard Euler, su conocida función beta

$$B(z, h) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(h)}{\Gamma(z+h)}, \quad (1.1)$$

parecía describir el comportamiento de ciertas partículas que interaccionaban fuertemente entre sí si se consideraba una amplitud apropiada de scattering conocida con el nombre de amplitud de Veneziano [1].

Esta función permitió describir muchas características de la fuerza nuclear fuerte, sin embargo, en cierto sentido la observación de Veneziano era incompleta, ya que la fórmula funcionaba pero no se entendía el motivo.

En 1970 los trabajos de Yoichiro Nambu (Universidad de Chicago)[2], Leonard Susskind (Universidad de Stanford)[3] y Holger Nielsen (Instituto

Niels Bohr)[4] arrojaron luz sobre el asunto. Demostraron que si se consideraba un modelo de partículas elementales tratándolas como pequeñas cuerdas vibratorias, sus interacciones quedaban perfectamente explicadas por la función beta de Euler. Además, si éstas eran lo suficientemente pequeñas, podrían seguir pareciendo partículas puntuales de manera que habría coherencia con las observaciones experimentales.

Rápidamente esta teoría que estaba en auge, empezó a perder adeptos por dos motivos principalmente:

- a. **Desarrollo de la cromodinámica cuántica.** El desarrollo de esta rama de la física y su satisfactoria explicación de la fuerza nuclear fuerte hizo que muchos investigadores perdieran su interés en la teoría de cuerdas.
- b. **Aparición de contradicciones en la teoría.** Se realizaron pruebas para ratificar la teoría que generaron más problemas que soluciones.

A mediados de la década de los 70, pocos físicos seguían trabajando en ella. John Schwarz y Jöel Scherk, dos físicos teóricos, embriagados por la belleza matemática de la teoría de cuerdas y convencidos de que era una teoría física válida, debido a que aparecían configuraciones con las mismas propiedades que los gluones y otros tipos de partículas, siguieron trabajando en el tema. La teoría de cuerdas además contenía partículas que actuaban como mensajeras, y que parecían no tener importancia en las observaciones experimentales de la fuerza nuclear fuerte. No obstante, Schwarz y Scherk en 1974 consiguen constatar que estas partículas, de espín 2 y largo alcance, encajan perfectamente con la hipotética partícula mediadora de la interacción gravitatoria: el gravitón [5]. Sugirieron que los problemas que había tenido la teoría de cuerdas eran debido a una reducción del alcance de la misma, ya que ésta no es únicamente una teoría que describa la interacción nuclear fuerte, sino una teoría cuántica que incluye la gravedad.

Pese a la importancia del hallazgo, el mundo científico apenas le dio importancia. Se había intentado unificar la gravitación y la mecánica cuántica en multitud de ocasiones y no creían que una teoría que aparentemente estaba plagada de problemas pudiera solventar dicho conflicto. Además, aparecieron múltiples inconsistencias matemáticas en la teoría, lo que generó aún más rechazo.

Tras 12 años de arduo trabajo, en 1984, John Schwarz y Michael Green, consiguieron eliminar todas las inconsistencias y además, demostraron que la teoría resultante es capaz de abarcar las cuatro fuerzas de la naturaleza [6]. Esto supuso el inicio de la primera revolución de la teoría de cuerdas.

1.3. ¿Cuántas Teorías de Cuerdas Existen?

1.3.1. Teoría bosónica de cuerdas

Fue el origen de la teoría de cuerdas y la primera candidata a ser teoría del todo. Describe el comportamiento tanto de cuerdas abiertas como de cuerdas cerradas. No obstante, la teoría posee varios problemas, siendo tres los principales: ausencia de fermiones, existencia de taquiones y el número de dimensiones.

El nombre de teoría de cuerdas bosónicas es consecuencia de que la teoría solamente es capaz de describir bosones y por lo tanto, no incluye a la materia ordinaria que está compuesta de fermiones. Sin embargo, toda introducción a la teoría de cuerdas suele comenzar por el estudio de la teoría de cuerdas bosónicas debido a que permite entender el comportamiento de éstas y matemáticamente es menos compleja.

Además, al desarrollar la teoría surge una partícula que posee una velocidad superior a la de la luz, y por ende, según la relatividad, una masa en reposo imaginaria. Esta partícula es conocida como Taquión y se ha intentado eliminar de la teoría, aunque sin resultado.

Por último, para que esta teoría tenga consistencia cuántica y desaparezcan los estados con norma negativa, que se generan en su desarrollo, es necesario considerar que el espacio-tiempo de fondo posee 26 dimensiones: 1 temporal y el resto espaciales.

Como consecuencia de que una teoría del todo debe considerar tanto bosones como fermiones, inmediatamente se buscó la correspondiente teoría de cuerdas que pudiera contener a la materia ordinaria.

1.3.2. Teorías fermiónicas de cuerdas

Las teorías de cuerdas fermiónicas, a pesar de lo que su nombre da a entender, poseen grados de libertad bosónicos y fermiónicos, lo que corrige el problema de la teoría bosónica, ya que éstas sí pueden contener la materia de nuestro Universo.

Asimismo, solucionan o mejoran los otros dos problemas subyacentes en su versión bosónica.

- a. **Eliminación del Taquión.** En las teorías de cuerdas fermiónicas el taquión no aparece.
- b. **Reducción drástica de las dimensiones.** Para que la teoría de cuerdas bosónica tuviera consistencia física (es decir, sin estados con norma negativa) había que recurrir a un número exacto de 26 dimensiones del

espacio-tiempo. Las teorías fermiónicas mediante la incorporación de la supersimetría, reducen el número de dimensiones de 26 a 10, lo cuál es mucho más tangible.

Sin embargo, pese a que se podría pensar que los avances realizados en las teorías de cuerdas fermiónicas impulsarían la investigación en el campo en cuestión, no fue así debido a su número. Se esperaba de una teoría del todo que fuese única y no se comprendía porque surgieron hasta cinco teorías matemáticamente consistentes que intentaban describir el Universo. Las cinco teorías fermiónicas existentes son las siguientes:

1. **Tipo I.** Presenta tanto cuerdas abiertas como cuerdas cerradas. Contiene las interacciones encontradas en la naturaleza, es decir, la gravedad y una colección de campos gauge muy similares a los del mundo real, y la materia ordinaria está presente. También tienen quiralidad definida lo que viene a significar que hay una violación de la paridad o de la simetría izquierda-derecha. Esto último es muy importante, ya que la interacción nuclear débil no cumple la conservación de la paridad y por lo tanto, una teoría que explicara el Universo no podría conservarla.
2. **Tipo II A.** No contiene las partículas mediadoras que aparecen en nuestro mundo, aunque sí que aparece el gravitón. Aparecen partículas de materia fermiónica, pero al no existir los portadores de fuerza habituales, éstas no pueden transportar cargas. La paridad es conservada por esta teoría, lo que ha supuesto que no se tenga mucho interés en ella.
3. **Tipo II B.** Es prácticamente igual a la teoría de Tipo IIA salvo que en ésta, la paridad no es conservada.

Las teorías heteróticas son un híbrido entre la teoría de cuerdas de tipo I y la teoría de cuerdas bosónica, que cómo se dijo más arriba posee 26 dimensiones. Lo que se hace es considerar que 16 de estas dimensiones son compactas y aluden a grados de libertad que están manifestados como campos gauge. Sólo hay dos soluciones que permitan esto y de ahí, las dos teorías heteróticas existentes.

Estas teorías consideran que las excitaciones de la cuerda cerrada son similares a pequeñas ondas que se desplazan en un sentido o en el contrario alrededor de la cuerda. Estas ondas son conocidas como modo de movimiento hacia la izquierda y modo de movimiento hacia la derecha en función del sentido de desplazamiento. Dado que pese a que se propaguen en la misma cuerda, no interactúan unas con otras, se suelen hacer combinaciones de

ondas comunes en un sentido y ondas supersimétricas en el otro (de ahí la raíz hetero-).

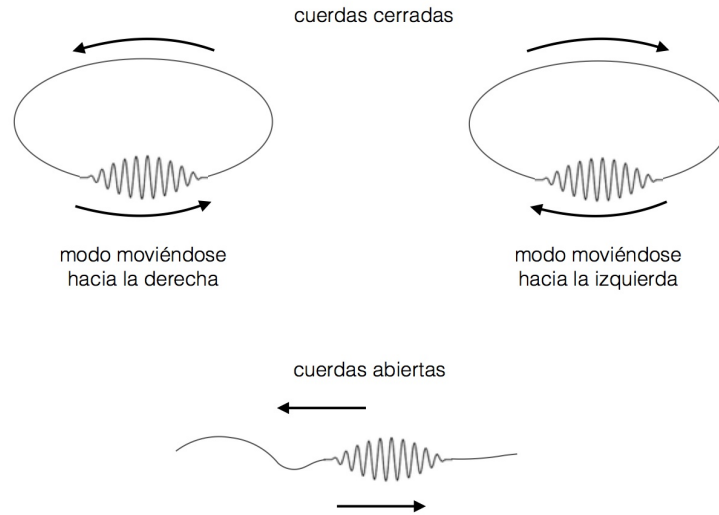


Figura 2: Las oscilaciones que sufre una cuerda cerrada hacia la derecha o hacia la izquierda son independientes entre sí, de manera que no interactúan entre ellas. Sin embargo, esto no ocurre para la cuerda abierta debido a que las oscilaciones al llegar al extremo de la cuerda rebotan y cambian de sentido, ocasionando que los dos tipos de oscilaciones se mezclen.

4. **Heterótica $SO(32)$.** Las 16 dimensiones sobrantes pueden ser explicadas con una simetría $SO(32)$ que es un producto de tres simetrías: $SU(3)$, $SU(2)$ y $U(1)$. Como contrapartida se obtiene un grupo de simetría mucho mayor del esperado para las interacciones fuerte, débil y electromagnética.
5. **Heterótica $E_8 \times E_8$.** En este caso el problema es solventado con la consideración de una simetría $E(8) \times E(8)$, que es un producto del grupo $E(8)$ consigo mismo. $E(8)$ es un grupo de Lie simple y excepcional de bastante complejidad matemática.

En la figura 3, se muestra una tabla con las diferentes características de cada una de las teorías, con el fin de compararlas. La teoría de tipo IIA es la única que conserva la paridad, que como se dijo antes causa mucho rechazo en esta teoría. También cabe destacar que la teoría de tipo I es la única que permite la existencia de cuerdas abiertas, el resto construye su formalismo a partir de cuerdas cerradas.

Nombre	Tipo	¿Gravedad?	¿Simetría Gauge?	Paridad
Tipo I	Abierta/cerrada	Sí	SO(32)	Violación
Tipo IIA	Cerrada	Sí	No	Conservación
Tipo IIB	Cerrada	Sí	No	Violación
Heterótica SO(32)	Cerrada	Sí	SO(32)	Violación
Heterótica E8xE8	Cerrada	Sí	E(8)xE(8)	Violación

Figura 3: En la tabla se muestran las similitudes y diferencias entre las diferentes teorías de cuerdas fermiónicas.

1.4. Supersimetría

El modelo estándar de la física de partículas establece que la materia ordinaria está formada por fermiones (leptones y quarks) y que las interacciones fundamentales de la naturaleza son mediadas por bosones. La supersimetría es una simetría hipotética que relacionaría las propiedades de bosones y fermiones, es decir, a cada bosón le correspondería un compañero supersimétrico fermión y viceversa. Es un elemento fundamental en la formulación de las teorías de cuerdas fermiónicas o teoría de supercuerdas.

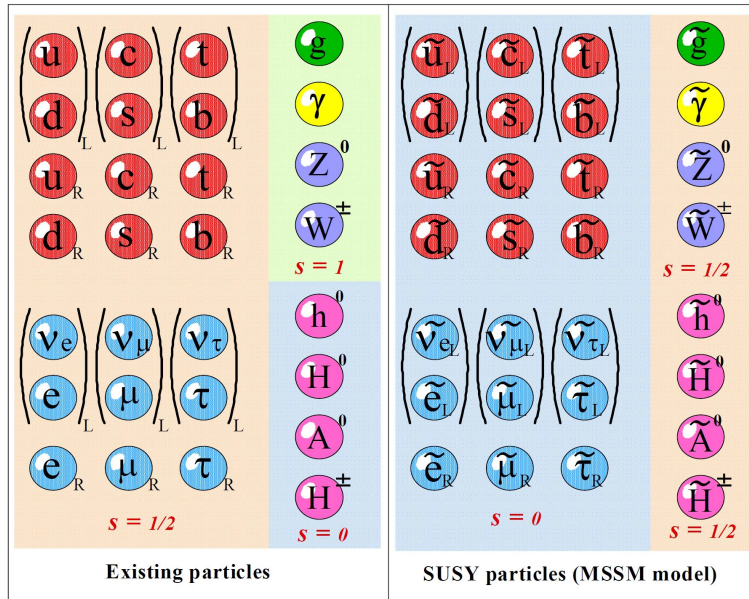


Figura 4: A la izquierda están representadas las partículas descubiertas por los aceleradores en la actualidad, mientras que a la derecha se visualizan sus compañeras supersimétricas predichas por la teoría. Nótese la variación de espín entre una partícula y su compañera.

En la actualidad se intenta, en el LHC (*Large Hadron Collider*) y en otros aceleradores, encontrar estas partículas supersimétricas, ya que tendrían numerosas implicaciones en muchos campos de la física, como por ejemplo en la cosmología donde han sido propuestas como candidatas a formar la materia oscura.

1.5. Compactificación

Como se ha visto con antelación las teorías de cuerdas con las que más comulga el sector científico son las fermiónicas, sin embargo, éstas poseían 10 dimensiones, lo que resulta extraño dado que solamente se han detectado 4 (3 espaciales y 1 temporal). ¿Dónde están las otras 6 dimensiones espaciales?

La solución que se propone a este problema es una extensión de la idea de Kaluza [7], basada en el enrollamiento de una dimensión hasta que sea lo suficientemente pequeña para que no pueda ser vista. Un ejemplo para entenderlo podría ser un cable de alta tensión colocado en una torre. Este desde lejos parece unidimensional, pero si se tuviera el tamaño de una hormiga y se estuviera justamente encima del mismo, se vería con facilidad que es un cilindro. Siguiendo este principio lo que se ha hecho para resolver el problema de las dimensiones extra es postular que 6 dimensiones espaciales forman una variedad compacta, cuyo tamaño es tan pequeño que los seres humanos no son capaces de detectar su existencia directamente con las investigaciones disponibles.

La forma de enrollar estas dimensiones no es arbitraria y tiene que cumplir ciertas propiedades, como por ejemplo corresponder a una solución para el vacío de las ecuaciones de Einstein. La opción más conocida es la de considerar una variedad de Calabi-Yau (Calabi conjeturó sobre ellas y Yau las demostró). En la figura 5 se muestra una sección bidimensional de una variedad de este tipo.

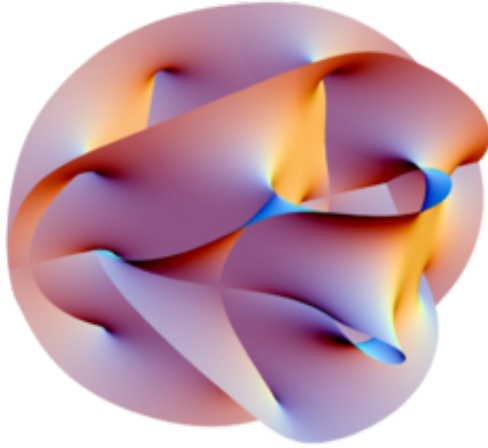


Figura 5: Se muestra una sección bidimensional proyectada en 3D de una variedad de Calabi-Yau en seis dimensiones.

No obstante, surge un problema y es la existencia de muchos tipos de variedad de Calabi-Yau. Yau estimó la existencia de unas 30.000 variedades aunque en la actualidad utilizando potentes ordenadores sólo se han encontrado poco más de 15.000. La dificultad reside en el hecho de que de ser cierta la teoría de cuerdas, sólo una de estas variedades de Calabi-Yau sería la correcta, pero ¿qué pasa con el resto? Se especula sobre si el resto de variedades de Calabi-Yau, podrían reflejar otros universos con distintas propiedades, formando un “paisaje” (*landscape* en inglés) de teorías de cuerdas.

1.6. Dualidades y la Teoría M

En Física una dualidad se define como una correspondencia entre dos objetos que aparentemente son diferentes pero en el fondo son equivalentes. Antes se habló de las diferentes teorías de cuerdas existentes y del problema que suponía la presencia de cinco teorías del todo igualmente válidas. Resulta que si estas teorías, aparentemente independientes, se analizan en ciertas condiciones, empiezan a aparecer concordancias entre algunas de ellas. Hasta el momento, se han descubierto las siguientes dualidades:

- **Dualidad T.** Une entre sí las dos teorías de tipo II y las dos heteróticas.

- **Dualidad S.** Relaciona la teoría de cuerdas tipo I con la heterótica $SO(32)$ y la teoría de tipo IIB consigo mismo (relación autodual-S).
- **Dualidad U.** Es una simetría que combina la dualidad T y la S.

Las dualidades conducían a que estas teorías tan dispares, parecían tener más similitudes de las que se creía. A mitad de la década de los 90, Edward Witten hace temblar el mundo de la física teórica con una innovadora idea, la teoría M [8][9]. A esta idea y las que la precedieron se les suele catalogar como la segunda revolución de la teoría de cuerdas. Witten sugirió que las 5 teorías existentes, formaban parte en realidad de una misma teoría, a la que llamó teoría M. Para su formulación ésta requeriría de una dimensión más que el resto de teorías y en ella aparecería, la supergravedad, que es una teoría de campos que combina supersimetría y relatividad general, y que había sido rechazada por los físicos teóricos. Los trabajos más punteros en teoría de cuerdas buscan entender cómo es y cómo funciona esta teoría M, dado que la comprensión actual que se tiene de la misma, es muy pobre.

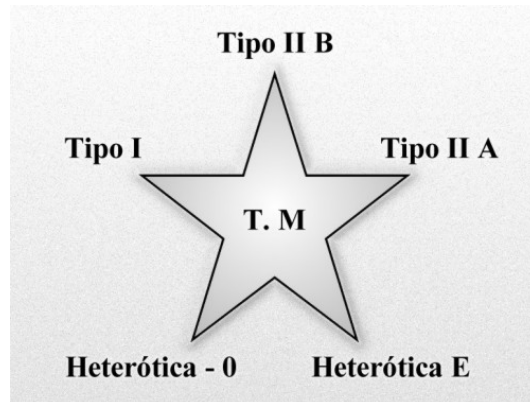


Figura 6: En el esquema se ve como todas las teorías de cuerdas fermiónicas estarían relacionadas entre sí y formarían parte de una teoría superior: la teoría M.

2. Cálculo de la Acción de una Cuerda Bosónica

Resumen

We will focus on studying the formalism associated with the bosonic string theory. In this chapter we will discuss different ways of obtaining the action of a string, since it will be fundamental for the analysis of the theory. Because of the non-trivial calculation, we will begin by calculating the action for a relativistic point particle and then following a very similar procedure we will cope with the case of the strings. At the end of the chapter we will derive Polyakov action.

Pese a que en el capítulo anterior se comentó que la teoría de cuerdas bosónicas poseía algunos problemas, es un recurso excelente para la introducción a las teorías de cuerdas y al formalismo que las engloba. En los consecuentes capítulos se intentará profundizar en esta teoría y en las propiedades que la caracterizan.

Se empezará con el cálculo de la acción de una cuerda. Para ello, se analizará como es la acción en el caso de una partícula puntual relativista, que se propaga en un espacio-tiempo arbitrario (se considerará D -dimensional), debido a que existen muchas similitudes en el cálculo de ésta acción y la de una cuerda.

La notación que se utilizará para hacer referencia a la posición de la partícula en el espacio-tiempo es

$$X = (X^0, X^i),$$

donde X^0 hace referencia a la coordenada de tipo temporal y X^i a las coordenadas de tipo espacial. El índice i toma los siguientes valores: $i = 1, 2, \dots, D - 1$.

La acción relativista para una partícula puntual, debido a que se debe preservar la invariancia de Lorentz [10], es

$$S_0 = -\alpha \int ds, \tag{2.1}$$

donde α es una constante a determinar y ds el intervalo invariante relativista.

Con el objetivo de que la acción sea dimensionalmente correcta se observa que α ha de ser proporcional a la masa de la partícula y además, se puede considerar, sin perder generalidad, que dicha constante de proporcionalidad es la unidad, cómo se demuestra en el capítulo 5 constituido de información adicional. Por lo tanto, la acción quedaría definida como

$$S_0 = -m \int ds. \quad (2.2)$$

2.1. Cálculo de la Acción Relativista

Se comenzará reescribiendo la ecuación (2.2) de manera que ahora la acción posea de manera explícita las coordenadas espacio-temporales de la partícula. Para ello se recurre a la definición de intervalo invariante relativista:

$$(-ds)^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + \dots + (dX^{D-1})^2 \quad (2.3)$$

Si ahora se utiliza 1-formas y se opera, el intervalo relativista varía a

$$(-ds)^2 = -(dX_0 dX^0) + (dX_1 dX^1) + (dX_2 dX^2) + \dots + (dX_{D-1} dX^{D-1})$$

expresión que se puede simplificar mediante el empleo de sumatorios

$$(ds)^2 = \sum_{\mu=0}^{D-1} dX_\mu dX^\mu. \quad (2.4)$$

Si se utiliza el convenio de la suma de Einstein en (2.4) se obtiene la expresión

$$(ds)^2 = dX_\mu dX^\mu, \quad (2.5)$$

que tras emplear la métrica para subir el índice finalmente resulta

$$(ds)^2 = -g_{\mu\nu}(X) dX^\mu dX^\nu. \quad (2.6)$$

Para caracterizar la métrica se usará el criterio (p, q) , donde p hace referencia al número de elementos negativos en la diagonal principal de la métrica (coordenadas temporales) y q al número de elementos positivos (coordenadas espaciales). Por ejemplo, la métrica $(1, 4)$ correspondería a

$$g_{\mu\nu}(X) = \begin{pmatrix} -g_{00}(X) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}(X) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}(X) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33}(X) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{44}(X) \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

En concreto, se trabajará con signaturas métricas del tipo Lorentziano: $(p = 1, q = D - 1)$, puesto que se toma como condición inicial que sólo exista una dimensión temporal [11]. No parece lógico considerar más de una dimensión temporal debido que a diferencia de las dimensiones espaciales, éstas no pueden ser compactificadas, dado que darían lugar a sucesos extraños y poco probables como pueden ser los bucles temporales.

Retomando el análisis de la partícula relativista, al representar su trayectoria en el espacio-tiempo, lo que se obtiene es conocido como línea de mundo.

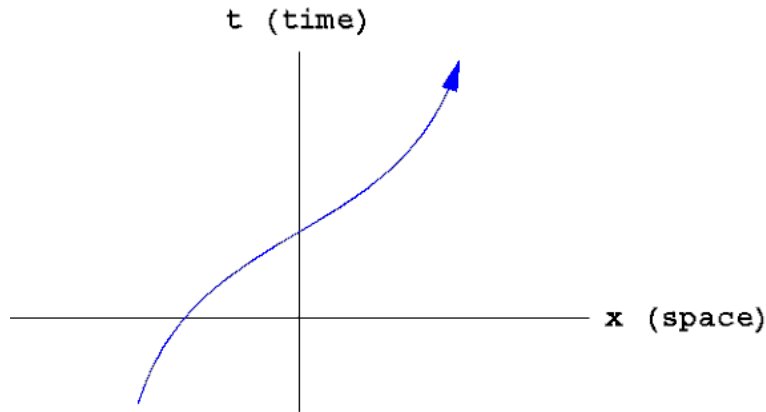


Figura 7: Línea de mundo de una partícula relativista. Por simplicidad se ha considerado únicamente una dimensión espacial.

Es posible parametrizar esta curva de manera que, las coordenadas de cada punto de la trayectoria (X^μ) sean función de un parámetro τ , que se le conoce como tiempo propio de la partícula, dando lugar a unas coordenadas resultantes de la forma: $X^\mu = X^\mu(\tau)$.

Regresando a la ecuación (2.6) y teniendo en cuenta la dependencia de las coordenadas con τ se puede escribir

$$(ds)^2 = -g_{\mu\nu}(X)dX^\mu dX^\nu = -g_{\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{dX^\nu(\tau)}{d\tau}d\tau^2. \quad (2.8)$$

Dado que se ha considerado un convenio para la métrica en el cuál la parte temporal lleva signo menos, es posible despejar ds debido a que no se anulará el radicando. Si se sustituye en (2.2), la acción queda

$$S_0 = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(X)\frac{dX^\mu(\tau)}{d\tau}\frac{dX^\nu(\tau)}{d\tau}}d\tau. \quad (2.9)$$

Con el objetivo de simplificar la ecuación, se realizará un cambio en la notación: $\frac{dX^\nu(\tau)}{d\tau} = X'^\nu$. Se puede reescribir la ecuación (2.9) de la siguiente forma

$$S_0 = -m \int \sqrt{-g_{\mu\nu}(X)X'^\mu X'^\nu} d\tau, \quad (2.10)$$

donde se ha obtenido para la partícula relativista una acción que depende del espacio-tiempo en el que ésta se mueve, así como de las coordenadas de su posición en el mismo.

Sin embargo, esta formulación de la acción presenta dos problemas que relucen a primera vista:

1. **Acción nula para partículas sin masa.** No se pueden obtener las ecuaciones del movimiento para los fotones y otras partículas con $m = 0$.
2. **La raíz cuadrada es una función no lineal.** Dificulta notablemente la cuantización de la acción y obliga a trabajar con hojas de Riemann.

Por lo tanto, como la acción escrita en su forma actual genera dificultades, se buscará una acción equivalente que solvete los problemas. Para ello, el procedimiento que se seguirá se fundamenta en la introducción de un campo auxiliar a determinar variacionalmente, $a(\tau)$, dependiente del parámetro τ , de manera que se obtenga un lagrangiano del tipo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2a(\tau)} g_{\mu\nu}(X) X'^\mu X'^\nu - \frac{m^2 a(\tau)}{2} = \frac{1}{2a(\tau)} X'^2 - \frac{m^2 a(\tau)}{2}, \quad (2.11)$$

el cuál está asociado a la siguiente acción

$$S'_0 = \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{1}{a(\tau)} X'^2 - m^2 a(\tau) \right). \quad (2.12)$$

Esta acción elimina los problemas subyacentes en (2.10), ya que el término cuadrático elimina la raíz cuadrada y la masa no multiplica a todos los elementos de la ecuación, lo que permite obtener una expresión de la acción para partículas de $m = 0$. Además, es equivalente a la acción (2.10) como se muestra en el subcapítulo 5.1.2 del anexo.

El siguiente objetivo será obtener la acción para una cuerda realizando un procedimiento similar al ejecutado para la partícula relativista, de manera que se obtenga una expresión que pueda ser cuantizada y que sea general.

2.2. Generalización de la Acción para las Cuerdas

Se observó anteriormente que la trayectoria de una partícula puntual en el espacio-tiempo generaba una línea de mundo, la cuál se podía parametrizar (por ejemplo, con τ). No obstante, ahora se tiene en el espacio-tiempo un objeto no puntual, una cuerda, que en su propagación por éste no genera una línea, sino una superficie que se conoce como hoja de mundo. Dado que se tiene una superficie se necesitarán dos parámetros para poder caracterizarla: $\sigma^0 = \tau$, el tiempo propio de la cuerda, y $\sigma^1 = \sigma$, que hace referencia a la longitud propia de la cuerda.

La acción de una cuerda será similar a la de una partícula relativista, (2.2), salvo que ahora no se integra en una dimensión sino en una superficie. En la figura 8, se pueden apreciar las diferencias entre hoja de mundo y línea de mundo, mientras que, en la figura 9 se observa con claridad los cuerpos que generan distintos objetos al moverse en el espacio-tiempo.

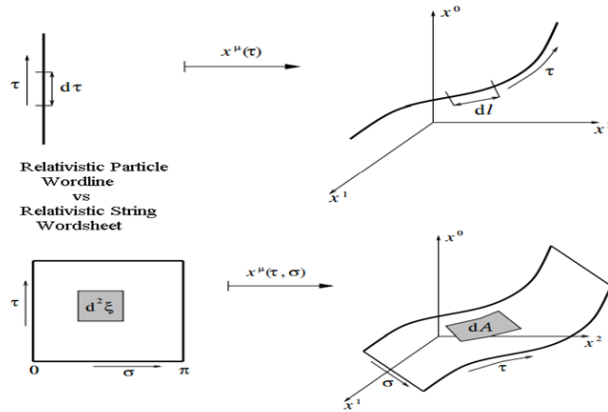


Figura 8: Se realiza una comparación entre la línea de mundo formada por una partícula puntual en su propagación en el espacio-tiempo y una hoja de mundo creada por la propagación de una cuerda.

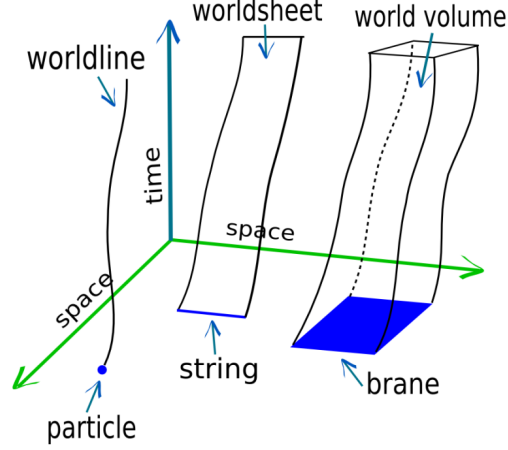


Figura 9: Se muestra una representación de los cuerpos que originan distintos objetos en su propagación por el espacio-tiempo. La partícula puntual (0D) generará una línea de mundo (1D), la cuerda (1D) formará una hoja de mundo(2D) y por último, la brana(2D) dará lugar a un volumen de mundo(3D).

Mediante un análisis dimensional se obtiene que la constante α en este caso corresponderá a una tensión, que se denominará tensión de la cuerda [12], T_c .

$$S_c = -T_c \int dA, \quad (2.13)$$

donde dA es un diferencial de superficie en la hoja de mundo, que según la geometría diferencial [13] se calcula como

$$dA = \sqrt{\det [G_{\alpha\beta}(X)]} d\sigma d\tau, \quad (2.14)$$

en la cual $G_{\alpha\beta}(X)$ hace referencia a la métrica que se induce en la superficie de mundo, por el espacio-tiempo en el que se encuentra. Esta métrica poseerá la siguiente forma

$$G_{\alpha\beta}(X) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^\beta} g_{\mu\nu}(X) \quad \text{donde } \alpha, \beta = 0, 1. \quad (2.15)$$

Para la descripción de la propagación de la hoja de mundo por el espacio-tiempo se utilizarán las siguientes coordenadas: $X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma)$.

Si se supone que la cuerda se encuentra en un espacio-tiempo pseudoeuclídeo y plano (en 4 dimensiones correspondería al espacio-tiempo

de Minkowski), las componentes de la métrica serían

$$\begin{aligned} G_{00}(X) &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^0} \eta_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} \eta_{\mu\nu} = X^{*2} \\ G_{11}(X) &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^1} \eta_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \eta_{\mu\nu} = X'^2 \\ G_{10}(X) = G_{01}(X) &= \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^1} \frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^0} \eta_{\mu\nu} = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} \eta_{\mu\nu} = X' X^*, \end{aligned}$$

donde se ha realizado las siguientes modificación en la notación: $\frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} = X^*$ y $\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} = X'$. Si se escribe la métrica en forma matricial queda

$$G_{\alpha\beta}(X) = \begin{pmatrix} X^{*2} & X' X^* \\ X' X^* & X'^2 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

de manera que su determinante adquiere el valor

$$\det(G_{\alpha\beta}(X)) = \left\| \begin{array}{cc} X^{*2} & X' X^* \\ X' X^* & X'^2 \end{array} \right\| = (X^{*2})(X'^2) - (X' X^*)^2. \quad (2.17)$$

Si se sustituye el resultado en la ecuación (2.14) y posteriormente en la (2.13), se obtiene como expresión para la acción de una cuerda

$$S_{NG} = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{(X^{*2})(X'^2) - (X' X^*)^2}, \quad (2.18)$$

que es conocida como la acción de Nambu-Goto.

Al igual que en el caso de la partícula relativista, la presencia de la raíz cuadrada en la expresión dificultará notablemente la cuantización de la acción, así que se buscará una acción equivalente que no tenga dicha función. El procedimiento, aunque más laborioso, es similar al seguido con anterioridad introduciéndose en lugar de un campo auxiliar, una métrica auxiliar (a determinar variacionalmente) diferente de $G_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$, para la hoja de mundo. La acción resultante es

$$S_\sigma = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \frac{\partial X^\mu}{\partial \alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \beta} g_{\mu\nu}(X), \quad (2.19)$$

donde $h = \det(h_{\alpha\beta})$ [14].

La ecuación (2.19) es conocida como la acción de Poliakov y en ella se puede apreciar como se ha solucionado el problema de la raíz. Además, hay que destacar que se ha trabajado con tres métricas totalmente distintas: $g_{\mu\nu}$, métrica no dinámica del espacio-tiempo en el que se propaga la cuerda; $G_{\alpha\beta}$, métrica inducida en la hoja de mundo por el espacio-tiempo en el que se encuentra y $h_{\alpha\beta}$, métrica intrínseca de la hoja de mundo. Por último, esta acción es equivalente a la de Nambu-Goto como se muestra en el anexo 5.1.3.

3. Simetrías y Ecuaciones de Campo para la Cuerda Bosónica

Resumen

With the action of Polyakov already calculated, we will study with it the local and global symmetries that exist in the worldsheet, focusing in particular on the study of the local symmetries, since their existence leads to important consequences in the theory. We will study the different types of strings present in the theory and their boundary conditions, which are very important because they will characterize the string dynamics. We will finish the chapter solving the field equations for each type of string.

Una de las ventajas de la acción de Polyakov, además de facilitar la cuantización, es que permite visualizar bajo qué transformaciones la teoría es invariante o no.

Para estudiar como son las simetrías que posee la hoja de mundo, se partirá por comprender qué tipos de transformación hay y sus características.

- **Transformaciones globales.** Es una transformación cuyos parámetros no dependen de dónde en el espacio-tiempo la transformación es realizada. Las rotaciones en torno a un eje a velocidad angular constante y las traslaciones son transformaciones globales.
- **Transformaciones locales.** Es una transformación cuyos parámetros dependen de la posición en el espacio-tiempo en la que se realiza. Una rotación donde el giro dependa de la posición sería una transformación local.

Éstas transformaciones tienen suma importancia en la física teórica, ya que al analizar su conservación se podrá obtener información de la teoría física que las contenga. La invariancia de la teoría frente a transformaciones globales, según el teorema de Noether [15], da lugar a la conservación de cargas y corrientes. Mientras que la invariancia frente a transformaciones locales es síntoma de una reducción en el número de grados de libertad independientes de la teoría.

Se realizará un análisis de cómo afectan ambas transformaciones a la hoja de mundo y de sus consecuencias.

3.1. Transformaciones de Poincaré e Invariancia de la Acción

Son un caso particular de transformaciones globales que poseen la siguiente forma

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = a^\mu{}_\nu X^\nu(\tau, \sigma) + b^\mu \quad (3.1)$$

$$\delta h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = 0, \quad (3.2)$$

donde los campos $X^\mu(\tau, \sigma)$ están definidos en la hoja de mundo. El tensor $a^\mu{}_\nu$ generará las transformaciones de Lorentz, mientras que b^μ dará lugar a las traslaciones espaciales.

A continuación, se analizará si la acción de Poliakov en particular, es invariante bajo transformaciones de Poincaré, ya que esto arrojará importante información sobre la teoría física que se está estudiando. En el subcapítulo

Se considerará una transformación que ocasiona la siguiente variación en la acción

$$\delta S_\sigma = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha (\delta X^\mu) \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

dónde se ha utilizado (3.2), la invariancia de la métrica respecto a la transformación. Si se sustituye (3.1) resulta

$$\delta S_\sigma = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha (a^\mu{}_\gamma X^\gamma + b^\mu) \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

Esta expresión se puede simplificar notando que $a^\mu{}_\gamma$ y b^μ son independientes del espacio-tiempo, de manera que se anula la parcial sobre b^μ y se puede sacar fuera de la derivada el tensor $a^\mu{}_\gamma$, obteniéndose

$$\delta S_\sigma = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} a^\mu{}_\gamma \partial_\alpha X^\gamma \partial_\beta X^\nu g_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

de manera que si se utilizan las propiedades de la métrica se alcanza una expresión equivalente

$$\delta S_\sigma = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} a_{\nu\gamma} \partial_\alpha X^\gamma \partial_\beta X^\nu, \quad (3.6)$$

dónde se visualiza un producto entre una parte simétrica con respecto a los índices γ y ν , $a_{\nu\gamma}$, y una parte antisimétrica respecto a los mismos índices, $h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\gamma \partial_\beta X^\nu$. Finalmente la variación de la acción es la siguiente

$$\delta S_\sigma = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} a_{\nu\gamma} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\gamma \partial_\beta X^\nu = 0. \quad (3.7)$$

Por ende, se ha demostrado que la acción de Poliakov es invariante bajo transformaciones de Poincaré, lo que supone que la teoría de cuerdas bósónicas posee las correspondientes cargas y corrientes conservadas (asociadas a la conservación de la energía, momento lineal, etc.).

3.2. Simetrías Locales de la Hoja de Mundo

El siguiente paso será descubrir si la teoría de cuerdas bosónicas posee simetrías cuyos parámetros dependan de las coordenadas de la hoja de mundo. De haberlas, serían un indicio de que la teoría considera más grados de libertad de los que verdaderamente tiene. En particular, se centrará el estudio en dos simetrías locales:

1. **Difeomorfismo.** Invariancia bajo reparametrización. La acción de Poliakov es invariante bajo el intercambio de un parámetro σ por un nuevo parámetro $\sigma' = f(\sigma)$, donde f es diferenciable y tiene inversa a su vez diferenciable,

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X'^\mu(\tau, \sigma') \quad (3.8)$$

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = \frac{\partial f^\gamma}{\partial \sigma^\alpha} \frac{\partial f^\delta}{\partial \sigma^\beta} h'_{\gamma\delta}(\tau, \sigma'), \quad (3.9)$$

en la cual X^μ se ha transformado como escalar, mientras que $h_{\alpha\beta}$ como un tensor de segundo orden.

2. **Simetría de Weyl.** Invariancia bajo transformaciones de Weyl, es decir, transformaciones que modifican la escala de la métrica

$$h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = h'_{\alpha\beta}(\tau, \sigma) = e^{2\phi(\sigma)} h_{\alpha\beta}(\tau, \sigma), \quad (3.10)$$

mientras que el resto de elementos permanecen inalterados. En la figura 4 se ha representado cómo es su funcionamiento.

Es una transformación local dado que el parámetro $\phi(\sigma)$ depende de las coordenadas de la hoja de mundo.

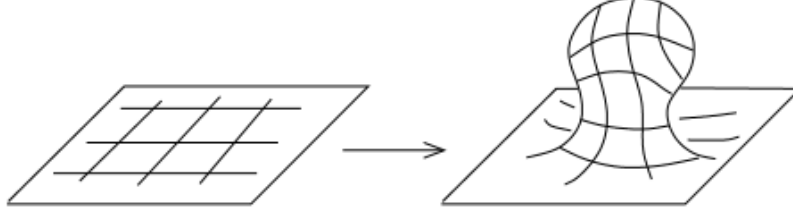


Figura 10: Un ejemplo de transformación de Weyl.

Para observar si la acción de Poliakov es invariante bajo transformaciones de Weyl, primero se tiene que saber como se transforman $\sqrt{-h}$ y $\sqrt{-h} h^{\alpha\beta}$ (debido a que los demás términos se anulan). La primera de ellas será transformada de la siguiente manera

$$\sqrt{-h'} = \sqrt{-\det[h'_{\alpha\beta}]} = e^{\frac{2(2\phi(\sigma))}{2}} \sqrt{-\det[h_{\alpha\beta}]} = e^{2\phi(\sigma)} \sqrt{-h}, \quad (3.11)$$

mientras que la segunda

$$\sqrt{-h'} h'^{\alpha\beta} = \sqrt{-h} e^{2\phi} e^{-2\phi} h^{\alpha\beta} = \sqrt{-h} h^{\alpha\beta}. \quad (3.12)$$

Por consiguiente, se concluye que la acción de Poliakov, S_σ , es invariante frente a transformaciones de Weyl. Al ser invariante la acción, ambas métricas son vistas por ésta como equivalentes, lo cuál es una propiedad poco común.

3.3. Fijación del Contraste

Dado que la teoría de cuerdas bosónicas posee simetrías locales (o de gauge), es un hecho que se tienen más grados de libertad de los que realmente se necesitan. Estas simetrías pueden ser utilizadas para hacer frente a las redundancias de la teoría, lo que se conoce como fijación del contraste (*Gauge Fixing*).

A modo de ejemplo, se tratará el caso particular de la electrodinámica. Ésta posee simetría local bajo el grupo de Lie $U(1)$, dado que sus parámetros son dependientes de las coordenadas espacio-temporales ($e^{\phi(X)}$), lo que conduce a redundancias. Sin embargo, este problema puede ser solucionado si se fija algún grado de libertad. La manera más usual de realizarlo es imponiendo una condición. En este caso, uno de los contrastes más importantes es el de Lorentz, que impone $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Una vez se ha fijado el contraste parte de las redundancias que la teoría poseía desaparecen, además, de sufrir ésta una simplificación en su descripción. Verbigracia, la fijación del contraste de Lorentz permite reescribir las ecuaciones de Maxwell como

$$\square A^\nu = e j^\nu$$

donde e es una constante [16].

Se va a ver ahora como es esta fijación de contraste para la teoría de cuerdas bosónicas. Para lograr este objetivo, se comenzará por analizar la métrica $h_{\alpha\beta}$

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{10} & h_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

donde se ha obviado la dependencia espacio-temporal con fines estéticos. La métrica es simétrica y por lo tanto, tiene 3 componentes a calcular: $h_{00}(X)$, $h_{11}(X)$ y $h_{10}(X) = h_{01}(X)$.

Como se conoce que la teoría es invariante bajo difeomorfismo se pueden realizar transformaciones de coordenadas de manera que se obtenga el siguiente resultado

$$h_{10}(X) = h_{01}(X) = 0 \quad h_{00}(X) = -h_{11}(X). \quad (3.14)$$

Debido a esta simetría la métrica intrínseca en la hoja de mundo se ha convertido en

$$h_{\alpha\beta}(X) = h(X)\eta_{\alpha\beta}. \quad (3.15)$$

Si la acción además de ser invariante frente a reparametrización, lo es bajo transformaciones de Weyl (cuya combinación recibe el nombre de transformaciones conformes), la métrica bidimensional $h_{\alpha\beta}$ puede ser reescalada en una métrica plana

$$h_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Es importante fijarse en que dado que estas simetrías son solamente locales, la capacidad de pasar de la métrica intrínseca de la hoja de mundo, $h_{\alpha\beta}$, a una métrica plana, $\eta_{\alpha\beta}$, se restringe al ámbito local y en general, no se podrá extender a la hoja de mundo global. Solamente para algunas superficies topológicas determinadas, por ejemplo, aquellas con característica de Euler igual a cero [17], se podrá extender este reescalado de la métrica.

Tras la fijación del contraste, la acción escrita en (2.19) se convierte en

$$S_\sigma = \frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \left[(X^*)^2 - (X')^2 \right], \quad (3.17)$$

donde se ha recuperado la notación empleada en el capítulo anterior: $\frac{\partial X^\nu}{\partial \tau} = X^*$ y $\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} = X'$.

3.4. Ecuaciones de Campo: Condiciones de Contorno y Resolución

Con el fin de observar los diferentes tipos de cuerdas que alberga la teoría, se prestará especial atención a las condiciones de contorno que surgen y cómo son las ecuaciones de campo asociadas. Para ello se supondrá que la topología de la hoja de mundo es tal que permite la consideración de que la métrica intrínseca de la misma es plana. Las ecuaciones para los campos $X^\mu(\tau, \sigma)$ provienen de anular la variación de (3.17), es decir

$$\delta S_\sigma = \frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \left(2X^* \delta X^* - 2X' \delta X' \right) = 0. \quad (3.18)$$

Para resolverlo se integra por partes dicha expresión

$$\begin{aligned} T \int d\tau d\sigma \left[(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu \right] \delta X^\mu + T \int d\sigma X^{\mu*} \delta X^\mu \Big|_{\partial_\tau} \\ - \left[T \int d\tau X^{\mu'} \delta X^\mu \Big|_{\sigma=\pi} - T \int d\tau X^{\mu'} \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0} \right] \end{aligned}$$

Nótese que los valores de σ son la longitud inicial(0) y final(π) de la hoja de mundo. Se impone que $\delta X^\mu|_{\partial_\tau} = 0$, resultando

$$(-\partial_\tau^2 + \partial_\sigma^2) X^\mu - T \int d\tau \left[X^{\mu'} \delta X^\mu \Big|_{\sigma=\pi} - X^{\mu'} \delta X^\mu \Big|_{\sigma=0} \right]. \quad (3.19)$$

Las ecuaciones de movimiento han de estar descritas por elementos dinámicos, de manera que los términos de frontera deben anularse. En función de las condiciones que se empleen para lograrlo, se distinguen tres tipos de cuerdas:

- **Cuerdas cerradas:** Se selecciona σ de manera que tenga una condición de contorno periódica.

$$X^\mu(\tau, \sigma + \pi) = X^\mu(\tau, \sigma). \quad (3.20)$$

Debido a ello, los términos de contorno que aparecen en la variación de la acción se anulan ya que $\delta X(\tau, \sigma) = \delta X(\tau, \sigma + \pi)$ y por lo tanto, su sustracción da cero.

- **Cuerdas abiertas (Condición de contorno de Neumann):** La condición de contorno de Neumann lo que establece es que la cuerda en sus extremos sea suave, es decir, que posea una derivada que se anule,

$$\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = 0, \quad (3.21)$$

ocasionando la anulación de los términos de contorno en (3.19)

- **Cuerdas abiertas (Condición de contorno de Dirichlet):** La condición de contorno de Dirichlet establece que en los extremos de la cuerda el valor del campo X^μ sea constante,

$$X^\mu(\tau, \sigma = 0) = X_0^\mu \quad y \quad X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = X_\pi^\mu, \quad (3.22)$$

donde tanto X_0^μ como X_π^μ son constantes. Como consecuencia, la variación de los campos dará cero.

Nótese como en los tres casos mencionados, a pesar de estar bajo condiciones de contorno diferentes, las ecuaciones del movimiento son las mismas,

$$(\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2)X^\mu(\tau, \sigma) = 0. \quad (3.23)$$

No obstante, estas diferencias asociadas a las condiciones en la frontera provocarán que los distintos tipos de cuerdas posean comportamientos dispares. En la figura 11 se puede observar una comparación entre las condiciones de contorno de Dirichlet y Neumann.

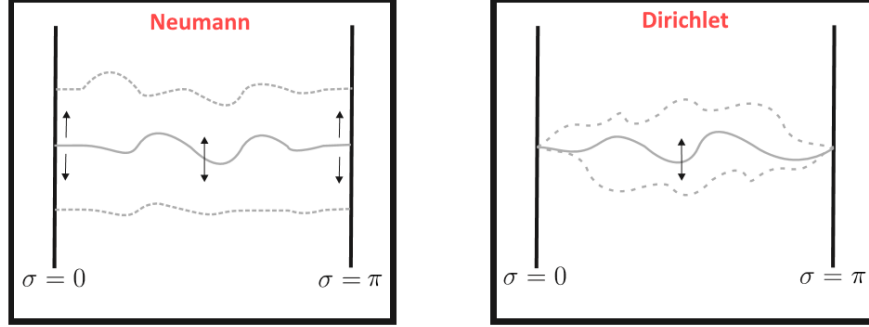


Figura 11: En el dibujo de la izquierda se observa como las condiciones de contorno de Neumann, permite que la cuerda y sus oscilaciones varíen, imponiendo únicamente que la derivada en los extremos se anule. En el caso de las condiciones de Dirichlet, los extremos están fijos y sólo los puntos interiores de la cuerda pueden oscilar.

Además, es necesario imponer que las ecuaciones de campo resultantes de variar la acción respecto de $h^{\alpha\beta}$ sean iguales a cero, lo que fija la métrica auxiliar. Esto conduce a

$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha X \partial_\beta X - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X, \quad (3.24)$$

cuya demostración ha sido adjuntada en el anexo 5.1.3. A causa del reescalado de la métrica $h_{\alpha\beta}$ en una plana, $\eta_{\alpha\beta}$, se obtienen dos condiciones

$$T_{00} = T_{11} = \frac{1}{2} \left((X^*)^2 + (X')^2 \right) = 0, \quad (3.25)$$

y

$$T_{01} = T_{10} = X^* X' = 0. \quad (3.26)$$

Para resolver las ecuaciones del movimiento de (3.23), (3.25) y (3.26) se recurrirá a las coordenadas del cono de luz para la hoja de mundo

$$\sigma^\pm = (\tau \pm \sigma), \quad (3.27)$$

lo que lleva a

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma^+ + \sigma^-) \quad (3.28)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma^+ - \sigma^-) \quad (3.29)$$

mientras que las derivadas son

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^+} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^+} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^+} \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\tau + \partial_\sigma), \quad (3.30)$$

$$\partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial \sigma^-} = \frac{\partial \tau}{\partial \sigma^-} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma^-} \frac{\partial}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} (\partial_\tau - \partial_\sigma) \quad (3.31)$$

de manera que las ecuaciones de campo a resolver en función de estas nuevas coordenadas quedan

$$\partial_+ \partial_- X^\mu = 0. \quad (3.32)$$

La solución más general para las ecuaciones de campo $X^\mu(\sigma^+, \sigma^-)$ es considerar una combinación lineal de dos funciones arbitrarias cuyos argumentos dependan de las coordenadas del cono de luz, es decir, $X^\mu(\sigma^+, \sigma^-) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+)$. Una vez se han resuelto las ecuaciones de campo, se regresará a las coordenadas de la hoja de mundo, de manera que resulta

$$X^\mu = X_R^\mu(\tau - \sigma) + X_L^\mu(\tau + \sigma), \quad (3.33)$$

lo que puede ser interpretado en este sistema de coordenadas como ondas de movimiento hacia la izquierda (X_L^μ) y ondas de movimiento hacia la derecha (X_R^μ), que se mueven por el espacio a la velocidad de la luz. Por lo tanto, las ecuaciones de campo se convierten en una combinación lineal de dos funciones: una que depende de $(\tau - \sigma)$ y otra cuya dependencia es en $(\tau + \sigma)$, a faltar de aplicar las condiciones de contorno específicas de cada caso.

- **Cuerdas cerradas.** Aplicando las condiciones de contorno para la cuerda cerrada

$$X^\mu(\tau, \sigma + \pi) = X^\mu(\tau, \sigma),$$

se obtienen las soluciones particulares de cada modo

$$X_R^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l_s^2 (\tau - \sigma) p^\mu + \frac{i}{2} l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-2in(\tau - \sigma)}$$

$$X_L^\mu = \frac{1}{2} x^\mu + \frac{1}{2} l_s^2 (\tau + \sigma) p^\mu + \frac{i}{2} l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau + \sigma)},$$

donde x^μ es una constante denominada centro de masas de la cuerda, p^μ es el momento total y l_s es la longitud de la cuerda.

Por lo tanto, la solución a las ecuaciones de movimiento para la cuerda cerrada es

$$X^\mu = X_L^\mu + X_R^\mu = \mathbf{x}^\mu + \tau l_s^2 \mathbf{p}^\mu + \frac{i}{2} l_s \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{2in\sigma} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in\sigma}) e^{-2in\tau},$$

que como se puede observar la parte del sumatorio en la ecuación es periódica en σ lo que satisface las condiciones de contorno. Los términos sombreados están relacionados con el centro de masas de la cuerda, así que serán los que regulen su trayectoria espacio-temporal, mientras que el término que no lo está tiene forma de un oscilador, por lo tanto, será el encargado de describir como es la oscilación de la cuerda.

Como consecuencia de que los campos X^μ tengan que ser reales, se tiene que x^μ y p^μ también son reales mientras que

$$\begin{aligned}\alpha_{-n}^\mu &= (\alpha_n^\mu)^* \\ \tilde{\alpha}_{-n}^\mu &= (\tilde{\alpha}_n^\mu)^* .\end{aligned}$$

Por definición, el momento canónico es $P^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$ [18], de manera que la expansión del momento canónico en la hoja de mundo será de la siguiente forma

$$\begin{aligned}P^\mu &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}^\mu} = T \dot{X}^\mu = \frac{\dot{X}^\mu}{\pi l_s^2} \\ &= \frac{p^\mu}{\pi} + \frac{1}{\pi l_s} \sum_{n \neq 0} \left(\alpha_n^\mu e^{-2in(\tau-\sigma)} + \tilde{\alpha}_n^\mu e^{-2in(\tau+\sigma)} \right).\end{aligned}\quad (3.34)$$

Además, se cumplen las siguientes relaciones de corchetes de Poisson para el momento canónico y los campos

$$\begin{aligned}\left\{ P^\mu(\tau, \sigma), P^\nu(\tau, \sigma') \right\} &= 0 \\ \left\{ X^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma') \right\} &= 0 \\ \left\{ P^\mu(\tau, \sigma), X^\nu(\tau, \sigma') \right\} &= \eta^{\mu\nu} \delta(\sigma - \sigma').\end{aligned}\quad (3.35)$$

Si se sustituye en estos corchetes los valores de $P^\mu(\tau, \sigma)$ y $X^\mu(\tau, \sigma)$ se obtendrán ecuaciones equivalentes en función de α_n^μ , $\tilde{\alpha}_n^\mu$, x^μ y p^μ . Las expresiones resultantes son

$$\begin{aligned}\left\{ \alpha_m^\mu, \alpha_n^\nu \right\} &= \left\{ \tilde{\alpha}_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu \right\} = im\eta^{\mu\nu} \delta_{m, -n} \\ \left\{ \alpha_m^\mu, \tilde{\alpha}_n^\nu \right\} &= 0 \\ \left\{ p^\mu, x^\nu \right\} &= i\eta^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (3.36)$$

Una vez se han comentado estas consideraciones para la cuerda cerrada se calculará cómo son las correspondientes soluciones para el caso de las cuerdas abiertas.

- **Cuerdas abiertas con condición de contorno de Neumann.** Las condiciones de contorno marcan que

$$\partial_\sigma X^\mu (\tau, \sigma)|_{\sigma=0, \pi} = 0$$

teniendo la solución general en este caso la forma

$$X^\mu (\tau, \sigma) = a_0 + a_1\sigma + a_2\tau + a_3\sigma\tau + \sum_{k \neq 0} (b_k^\mu e^{ik\sigma} + \tilde{b}_k^\mu e^{-ik\sigma}) e^{-ik\tau}, \quad (3.37)$$

donde a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , b_k y \tilde{b}_k son constantes y la única restricción que existe en la ecuación es que $k \neq 0$ pudiendo ser incluso número complejo. Si se añaden nuevas constantes con el objetivo de asemejar la forma a la de la cuerda cerrada se obtiene

$$X^\mu (\tau, \sigma) = \mathbf{x}^\mu + \mathbf{l}_s \tau \mathbf{p}^\mu + i l_s \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \cos(m\sigma), \quad (3.38)$$

donde se ha representado en negrita aquellos términos que contribuyen a la propagación de la cuerda en el espacio-tiempo y se ha dejado sin sombrear los que se encargan de su oscilación.

- **Cuerdas abiertas con condición de contorno de Dirichlet.** Estas condiciones implican que

$$X^\mu (\tau, \sigma = 0) = X_0^\mu \quad X^\mu (\tau, \sigma = \pi) = X_\pi^\mu,$$

por ende, la solución para las ecuaciones de campo será

$$X^\mu (\tau, \sigma) = \mathbf{x}_0^\mu + \frac{\sigma}{\pi} (\mathbf{x}_\pi^\mu - \mathbf{x}_0^\mu) + \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_m^\mu e^{-im\tau} \sin(m\sigma), \quad (3.39)$$

donde se ha seguido el mismo criterio que en los casos anteriores para diferenciar los términos que justifican el movimiento de propagación de la cuerda y el de oscilación.

Nótese como las ecuaciones de movimiento obtenidas para los dos tipos de cuerdas abiertas están caracterizadas por un seno o por un coseno. Esto es debido a que, como se comentó en las teorías de cuerdas heteróticas (subcapítulo 1.3 y en concreto la figura 2), las oscilaciones existentes en

una cuerda abierta al llegar a un extremo de ésta se reflejan, cambiando de sentido, lo que genera ondas estacionarias. Las ondas generadas por los dos tipos de cuerdas abiertas tendrán diferentes parámetros en función de sus condiciones de contorno. No obstante, para el caso de cuerdas cerradas ocurre todo lo contrario. En su ecuación de movimiento aparecen ondas viajeras representando las distintas combinaciones de modos hacia la izquierda y hacia la derecha que son posibles en la cuerda.

4. Cuantización Canónica de la Cuerda

Resumen

This chapter is probably the most complex because we deal with the issue of quantization. For this, the Hamiltonian will be written in terms of Virasoro generators, L_m , and the theory will be developed using Poisson bracket relations. We will study the Lie algebra formed by the generators L_m , known as Witt algebra. Using the canonical quantization method, these relations are converted into commutation relations, and the classical Witt's algebra gives rise to another Lie algebra encompassing it, the Virasoro's algebra. Using the commutation relations and the Virasoro's algebra we will try to define the unphysical states, because the theory is quantized some states with strange properties arise that can not be considered physical (negative probabilities, negative norms, etc). Finally, the chapter will end up with the elimination of the spurious states by fixing certain constants of the theory (such as the dimension of space-time where it is defined) and the determination of the physical states.

4.1. Análisis del Hamiltoniano y del Tensor de Energía-Impulso

El Hamiltoniano tiene la función de evolucionar temporalmente un sistema. Se introducirá desde un punto de vista clásico con el objetivo de determinar completamente las ecuaciones de movimiento vistas en el capítulo anterior.

Se introduce la función de Hamilton de la hoja de mundo de la forma habitual [?],

$$H = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} d\sigma (\dot{X}_\mu P^\mu - \mathcal{L}), \quad (4.1)$$

donde P^μ es el momento canónico y \mathcal{L} el lagrangiano. Se definen en el caso de la cuerda bosónica de la siguiente manera: $P^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{X}^\mu} = T \dot{X}^\mu$ y $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 X'^2)$. Sustituyendo en la ecuación (4.1) se obtiene la función hamiltoniana para una cuerda bosónica.

$$H = T \int_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} d\sigma \left(\dot{X}^2 - \frac{1}{2} (\dot{X}^2 X'^2) \right) = \frac{T}{2} \int_{\sigma=0}^{\sigma=\pi} d\sigma (\dot{X}^2 + X'^2).$$

Esta función es general, válida tanto para cuerdas abiertas como cuerdas cerradas. Si se quisiera expresar en términos de éstas es necesario recurrir a

los modos de expansión para los campos $X^\mu(\tau, \sigma)$. Así que el Hamiltoniano clásico se transformará para una cuerda cerrada de la siguiente forma

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_{-n}\alpha_n + \tilde{\alpha}_{-n}\tilde{\alpha}_n),$$

donde se tiene definido que $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = \frac{1}{2}l_s p^\mu$. Mientras que para una cuerda abierta se obtiene

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{-n}\alpha_n,$$

con $\alpha_0^\mu = \tilde{\alpha}_0^\mu = l_s p^\mu$. Asimismo nótese como para ambos casos H se conserva en el tiempo debido a que ninguno de los parámetros es dependiente de τ .

Una vez calculada la función Hamiltoniana, se procederá a analizar como ha variado, al utilizar las coordenadas del cono de luz, la expresión del tensor de energía-impulso. Para ello se hace el cambio de coordenadas en las ecuaciones (3.25) y (3.26), convirtiéndose en

$$\begin{aligned} T_{--} &= (\partial_- X_R^\mu)^2 \\ T_{++} &= (\partial_+ X_L^\mu)^2 \\ T_{-+} &= T_{+-} = 0. \end{aligned}$$

Si se sustituyen las soluciones particulares de X_L^μ y X_R^μ para la cuerda cerrada se consigue para T_{--} lo siguiente

$$\begin{aligned} T_{--} &= (\partial_- X_R^\mu)^2 = l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n}\alpha_n e^{-2im(\tau-\sigma)} \\ &= 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m e^{-2im(\tau-\sigma)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

mientras que para T_{++} el resultado es

$$\begin{aligned} T_{++} &= (\partial_+ X_L^\mu)^2 = l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n}\tilde{\alpha}_n e^{-2im(\tau+\sigma)} \\ &= 2l_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{L}_m e^{-2im(\tau+\sigma)}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde se ha definido los elementos L_m y \tilde{L}_m , conocidos como generadores de Virasoro, de la siguiente manera

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m-n} \alpha_n \quad (4.6)$$

$$\tilde{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}_{m-n} \tilde{\alpha}_n. \quad (4.7)$$

Por último, nótese como el Hamiltoniano clásico puede ser reescrito utilizando estas dos variables. Para la cuerda cerrada éste se convierte en

$$H = 2(L_0 + \tilde{L}_0), \quad (4.8)$$

mientras que para la cuerda abierta la expresión es aún más simple

$$H = L_0. \quad (4.9)$$

4.2. Álgebra de Witt

El álgebra de Witt [19], o también llamada álgebra de Virasoro clásica, es un álgebra de Lie compleja definida en base al conjunto de elementos $\{L_m\}$ cuya multiplicación viene expresada por los corchetes de Poisson como sigue

$$\{L_m, L_n\} = i(m-n)L_{m+n}. \quad (4.10)$$

Este álgebra tiene una peculiaridad fundamental para el posible desarrollo matemático que se está llevando a cabo. Esta es

$$L_m = 0 \quad \tilde{L}_m = 0 \quad \forall m, \quad (4.11)$$

propiedad que conduce a que la teoría contiene un infinito número de cantidades conservadas L_m y \tilde{L}_m . Mediante la imposición de que estas cantidades se anulen el problema clásico de la cuerda queda completamente resuelto.

4.3. Cuantización de la Cuerda Bosónica

El objetivo del subcapítulo será cuantizar la cuerda bosónica mediante el procedimiento de cuantización canónica y resolver los problemas que surgen de ello. Asimismo, cabe destacar la existencia de otros métodos de cuantización como el del cono de luz.

Según el procedimiento de cuantización canónica [20], para cuantizar la teoría se tendrá que sustituir los corchetes de Poisson por conmutadores de la siguiente forma

$$\{a, b\} \longrightarrow i [a, b] = i (ab - ba),$$

así como los campos X^μ , o lo que es lo mismo, los modos α , x^μ y p^μ , por operadores del correspondiente espacio de Hilbert. Para el caso de las expresiones de la ecuación (3.38) al cuantizarlas resulta

$$\begin{aligned} [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^\nu] &= [\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] = m\eta^{\mu\nu} \delta_{m,-n} \\ [\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^\nu] &= 0 \\ [\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu] &= i\eta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si se definen unos nuevos operadores: $\hat{a}_m^\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \hat{\alpha}_m^\mu$ y $\hat{a}_m^{\mu\dagger} \equiv \frac{1}{\sqrt{m}} \hat{\alpha}_{-m}^{\mu\dagger}$ para $m > 0$, entonces se satisface que

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^{\nu\dagger}] = [\hat{\tilde{\alpha}}_m^\mu, \hat{\tilde{\alpha}}_n^{\nu\dagger}] = \eta^{\mu\nu} \delta_{m,n} \quad m, n > 0 \quad (4.13)$$

Estas estructuras recuerdan al álgebra de los operadores de aniquilación y creación de la mecánica cuántica salvo por un detalle, en éste caso cuando se considera $\mu = \nu = 0$ se obtiene un signo negativo debido a la signatura de la métrica, es decir

$$[\hat{\alpha}_m^\mu, \hat{\alpha}_n^{\nu\dagger}] = \eta^{00} \delta_{m,n} = -\delta_{m,n}. \quad (4.14)$$

Este signo tendrán gran repercusión en la teoría pero antes de explicar el motivo se tendrá que definir el estado fundamental, el cuál se denotará con $|0\rangle$, y será aquel que se anule al aplicarle el operador aniquilación, \hat{a}_m^μ , de manera que

$$\hat{a}_m^\mu |0\rangle = 0 \quad m > 0 \quad (4.15)$$

El signo menos que surgía en la ecuación (4.14) tiene gran relevancia en la teoría debido a que es el causante de la aparición de estados con norma negativa, conocidos como estados *ghosts*, los cuáles no son considerados físicos y suponen un gran problema para el formalismo. Para demostrar su existencia lo que se hará será calcular la norma para un estado $|\psi\rangle = \hat{a}_m^{0\dagger} |0\rangle$ para $m > 0$ obteniendo

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \langle 0 | \hat{a}_m^0 \hat{a}_m^{0\dagger} | 0 \rangle = \langle 0 | [\hat{a}_m^0, \hat{a}_m^{0\dagger}] | 0 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle \quad (4.16)$$

Si se define $\langle 0|0\rangle$ de manera que sea positivo, se observa en (4.16) que se obtendrán estados con signo menos, mientras que por el contrario si se define

como negativo existirán otros muchos estados que den lugar a una norma negativa. El objetivo final del estudio será buscar una forma de eliminar estos estados no físicos y hacer que la teoría pueda volver a representar la realidad.

Por último, cabe destacar que el espacio de Hilbert en el que la teoría está definida corresponde a un espacio de Fock generado por vectores $|\psi\rangle$ que poseen la siguiente forma

$$|\psi\rangle = \hat{a}_{m1}^{\mu1\dagger} \hat{a}_{m2}^{\mu2\dagger} \dots \hat{a}_{mn}^{\mu n\dagger} |0\rangle \quad (4.17)$$

4.4. Álgebra de Virasoro

Teniendo esta propiedad (4.11) en mente y sabiendo que el álgebra de Witt corresponde únicamente al caso clásico se definirá el álgebra de Virasoro. Ésta es un álgebra compleja de Lie que tiene mucha aplicación tanto en la teoría de campos conformes como en la teoría de cuerdas. Está formada por el conjunto de generadores $\{\hat{L}_m\}$, por lo tanto, para poder definirla primero se tendrá que obtener la expresión de estos operadores.

Al cuantizar la teoría los modos α se convirtieron en operadores, así que las funciones L_m que están compuestas de los modos α , también serán operadores de nuestra teoría. Aunque su cuantización no será tan trivial como hacer

$$A \longrightarrow \hat{A}$$

en las ecuaciones (4.6) y (4.7). Ello es debido a que en la teoría cuántica de campos el ordenamiento de los operadores no es arbitrario y suele hacerse de manera que se cumpla el orden normal o de Wick [21]. El orden normal lo que establece es que en un producto de operadores, los operadores de creación siempre van a la izquierda de los operadores de aniquilación. En este caso se usará una formulación equivalente representada del siguiente modo

$$:\alpha_i \alpha_j: = \begin{cases} \alpha_i \alpha_j & \text{si } i \leq j \\ \alpha_j \alpha_i & \text{si } i > j \end{cases} \quad (4.18)$$

de manera que los operadores con menor índice van a la izquierda y los operadores con índices superiores a la derecha.

Por lo tanto, la cuantización de los generadores L_m quedará definida como

$$\hat{L}_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \hat{\alpha}_{m,-n} \hat{\alpha}_n : \quad (4.19)$$

apareciendo ambigüedad únicamente en el término L_0 o lo que es igual, para $m = 0$. En este caso particular, se ha resuelto el problema en el anexo 5.3.1 y el resultado es el siguiente

$$\hat{L}_0 = \frac{1}{2}\hat{\alpha}_0^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_{m,-n}\hat{\alpha}_n \quad (4.20)$$

Finalmente, a partir de las relaciones de conmutación para los operadores $\hat{\alpha}$ se obtienen las relaciones de conmutación para los operadores \hat{L}_m , que poseen la siguiente forma

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m - n)\hat{L}_{m+n} + \frac{c}{12}m(m^2 - 1)\delta_{m,-n}, \quad (4.21)$$

donde c es conocida como la carga central. Ésta constante es muy relevante en la teoría debido a que corresponde al número de dimensiones en las que la teoría está definida. En los próximos subcapítulos se obtendrá el valor de esta constante.

Antes se hizo énfasis en una propiedad del álgebra de Witt, $L_m = 0$ para $\forall m$, sin embargo, ¿esta propiedad se conservará al cuantizar este álgebra y obtener el de Virasoro?

Primero se verá si se cumple para \hat{L}_0 y luego para \hat{L}_m con $m \neq 0$. Una vez se ha cuantizado la teoría no se puede decir que $\hat{L}_0 = 0$ debido a que del ordenamiento normal pueden surgir constantes arbitrarias. Sabiendo esto todo lo que se puede afirmar es que

$$(\hat{L}_0 - a)|\phi\rangle = 0, \quad (4.22)$$

donde a es una constante y la ecuación es conocida como condición de la concha de masa (*Mass Shell Condition*, la etimología del término proviene de una referencia al hiperboloide y la curvatura de sus hojas) para una cuerda abierta. No obstante, por simplicidad se le denominará ecuación de masa. Para la cuerda cerrada las expresiones resultantes son

$$(\hat{L}_0 - a)|\psi\rangle = 0, \quad (4.23)$$

$$(\hat{\tilde{L}}_0 - a)|\psi\rangle = 0, \quad (4.24)$$

donde $\hat{\tilde{L}}$ simboliza el operador asociado al generador \tilde{L} .

Una vez visto como la propiedad $Lm = 0$, no se cumple al cuantizar para $m = 0$, cabe preguntarse si será cierta o no para $m \neq 0$. Si se parte de que la proposición es correcta la siguiente expresión es cierta

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n]|\phi\rangle = 0, \quad (4.25)$$

siempre y cuando $n+m \neq 0$. Una vez se sustituya la relación de conmutación (4.21), quedará

$$(m-n)\hat{L}_{m+n}|\phi\rangle + \frac{c}{12}m(m^2-1)\delta_{m,-n}|\phi\rangle = 0, \quad (4.26)$$

donde el primer término se anula ya que se parte de la premisa de que $\hat{L}_m|\phi\rangle = 0$ para $\forall m$, mientras que el segundo término si se considera $c \neq 0$ la única manera de que sea cierto es que $m = 1$, $m = -1$ o $m = 0$, lo que conduce inmediatamente a una restricción del álgebra de Virasoro a un subálgebra constituido por los elementos $\{\hat{L}_{-1}, \hat{L}_0, \hat{L}_1\}$. Cómo no es conveniente que esto ocurra, se buscará un camino alternativo consistente en imponer que $\hat{L}_m|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{L}_m^\dagger = 0$ para $m > 0$.

Finalmente, los estados reales y físicamente consistentes válidos en la teoría de cuerdas bosónica que se ha desarrollado necesitan cumplir dos condiciones.

$$\hat{L}_{m>0}|\phi\rangle = \langle\phi|\hat{L}_{m>0}^\dagger = 0 \quad (4.27)$$

y

$$(\hat{L}_0 - a)|\phi\rangle = 0. \quad (4.28)$$

4.5. Estados Espurios

Los estados espurios son ficticios o matemáticos, es decir, no corresponden a partículas físicas. Son muy importantes debido a que gracias a ellos se pueden eliminar los estados con norma negativa que surgen en la teoría.

La descripción formal de un estado espurio es la siguiente: se define un estado espurio como aquel que satisface la condición (4.22),

$$(\hat{L}_0 - a)|\phi\rangle = 0,$$

y además es ortogonal a todos los estados físicos, es decir,

$$\langle\phi|\psi\rangle = 0 \quad \text{para } \forall \text{ estado físico } |\phi\rangle.$$

En general, se puede escribir como

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n}|\chi_n\rangle, \quad (4.29)$$

donde el ket $|\chi_n\rangle$ representa los estados que satisfacen la nueva condición de masa dada por la ecuación

$$(\hat{L}_0 - a + n)|\chi_n\rangle = 0. \quad (4.30)$$

El motivo por el cuál surge esta nueva condición ha sido adjuntado en el anexo 5.3.2. Esta notación además incluye una ventaja: cualquier \hat{L}_{-n} con $n \geq 1$ puede ser expresado como una combinación de \hat{L}_{-1} y \hat{L}_{-2} , lo que conduce a una simplificación de la ecuación general para un estado espurio, (4.29), a

$$|\psi\rangle = \hat{L}_{-1} |\chi_1\rangle + \hat{L}_{-2} |\chi_2\rangle, \quad (4.31)$$

donde los términos

Por definición se ha dicho que un estado espurio ha de ser perpendicular a todos los estados físicos. Si se desea que los estados espurios sean estados físicos esto necesariamente implica que estos sean perpendiculares a si mismos y por ende, que posean norma cero

$$\| |\psi\rangle \|^2 = \langle \psi | \psi \rangle = 0. \quad (4.32)$$

4.6. Eliminación de los Estados Ghost o de Norma Negativa

El objetivo de estudiar cómo son los estados espurios físicos es utilizarlos para eliminar los estados con norma negativa que se mencionaban previamente en el subcapítulo 4.3. Se intentará determinar las constantes a y c para que estos estados tan molestos de la teoría desaparezcan.

Se partirá con un estado espurio físico de nivel 1, ya que primero se fijará la constante a y por lo tanto, se recurre al caso más simple

$$|\psi\rangle = \hat{L}_{-1} |\chi_1\rangle, \quad (4.33)$$

donde $|\chi_1\rangle$ satisface las condiciones (4.27) y (4.28) para ser estado físico.

En particular debido a la ecuación (4.27) se tiene que el operador \hat{L}_1 cumple $\hat{L}_1 |\psi\rangle = 0$, que si se sustituye la expresión (4.33) resulta el siguiente desarrollo

$$\begin{aligned} \hat{L}_1 (\hat{L}_{-1} |\chi_1\rangle) &= ([\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] + \hat{L}_{-1} \hat{L}_1) |\chi_1\rangle = [\hat{L}_1, \hat{L}_{-1}] |\chi_1\rangle \\ &= 2\hat{L}_0 |\chi_1\rangle = 2(a-1) |\chi_1\rangle = 0, \end{aligned}$$

en el cuál ha sido utilizada (4.26) para el caso $m = 1$. Por lo tanto, se llega a la conclusión de que si se quiere que $|\psi\rangle$, (4.33), sea un estado espurio físico se ha de imponer que $a = 1$.

Se continuará abordando un estado físico espurio de nivel 2, con el propósito de poder obtener cuánto ha de valer la c para tener una teoría sin estados de norma negativa. Un estado espurio de nivel 2, en general se define como

$$|\psi\rangle = (\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}) |\chi_2\rangle, \quad (4.34)$$

donde γ es una constante adicional que habrá que fijar. Asimismo como ocurría con $|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$ cumple las condiciones necesarias para ser estado físico.

Con un razonamiento muy similar al seguido anteriormente se llega a

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{L}_1 (\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}) |\chi_2\rangle \\
&= ([\hat{L}_1, \hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}] + (\hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}) \hat{L}_1) |\chi_2\rangle \\
&= ([\hat{L}_1, \hat{L}_{-2} + \gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}]) |\chi_2\rangle \\
&= (3\hat{L}_{-1} + 4\gamma \hat{L}_{-1} \hat{L}_0 + \gamma 2\hat{L}_{-1}) |\chi_2\rangle \\
&= (3\hat{L}_{-1} - 4\gamma \hat{L}_{-1} + \gamma 2\hat{L}_{-1}) |\chi_2\rangle \\
&= (3 - 4\gamma + 2\gamma) \hat{L}_{-1} |\chi_2\rangle,
\end{aligned}$$

y como los estados espurios son perpendiculares a todos los estados físicos incluido a sí mismo, se tiene

$$3 - 2\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{3}{2}. \quad (4.35)$$

Cabe destacar que en el desarrollo ya se aplicó el hecho de que $a = 1$. Con este resultado la ecuación general de un estado espurio de nivel 2 se convierte en

$$|\psi\rangle = \left(\hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle, \quad (4.36)$$

Como se cumple la ecuación (4.31), se puede particularizar para el caso $m = 2$ y obtener $\hat{L}_2 |\psi\rangle = 0$ lo que obliga a

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{L}_2 \left(\hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1} \right) |\chi_2\rangle = 0 \\
&= \left([\hat{L}_2, \hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}] + \left(\hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1} \right) \hat{L}_2 \right) |\chi_2\rangle \\
&= \left([\hat{L}_2, \hat{L}_{-2} + \frac{3}{2} \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-1}] \right) |\chi_2\rangle \\
&= \left(13\hat{L}_0 + 9\hat{L}_{-1} \hat{L}_1 + \frac{c}{2} \right) |\chi_2\rangle \\
&= \left(-13 + \frac{c}{2} \right) |\chi_2\rangle \quad \Rightarrow \quad c = 26.
\end{aligned}$$

Los resultados obtenidos tienen una gran importancia en la teoría, ya que imponiendo esos valores a las constantes α , γ y c , se obtendría una teoría libre de estados espurios y físicamente consistente. No obstante, la teoría paga un alto precio por la eliminación de este problema, debido a que necesita que la constante c , definida como el número de dimensiones del espacio-tiempo en el que vive la teoría, tome el valor 26.

4.7. Determinación de los Estados Físicos

Una vez se han eliminado los estados espurios de la teoría resulta interesante ver qué forma poseen los estados resultantes de la misma. Para ello se utilizará la ecuación de masas, cuya derivación se obtiene a partir del cálculo del momento lineal para la cuerda [22].

La ecuación de masas para una cuerda abierta corresponde a la siguiente expresión,

$$\alpha' M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \hat{\alpha}_n : -a, \quad (4.37)$$

donde $\alpha' = \frac{(l_s)^2}{2}$. Esta ecuación puede ser simplificada empleando el operador número, quedando

$$\alpha' M^2 = -a + n, \quad (4.38)$$

donde n es el autovalor de dicho operador.

Los estados asociados a cuerdas cerradas pueden ser obtenidos a partir de los estados de cuerdas abiertas. Ello se debe a que los estados de cuerdas cerradas están formados por un producto tensorial entre un estado de movimiento hacia la izquierda y uno de movimiento hacia la derecha, cada uno de ellos con la misma estructura que un estado de cuerdas abiertas. De forma simplificada se puede escribir la ecuación de masas para la cuerda cerrada como

$$\alpha' M^2 = 4(n - 1). \quad (4.39)$$

Haciendo uso de estas expresiones y utilizando la ecuación (4.17) que permite caracterizar un vector en un espacio de Fock, se analizarán los estados fundamentales para ambos tipos de cuerda.

En primer lugar, empezando con las cuerdas abiertas, se observa que para los distintos valores de n se obtienen los siguientes estados,

$$\begin{aligned} \alpha' M^2 = -a + 0 = -1 & \quad \text{Estado fundamental} \quad (n = 0) \\ \alpha' M^2 = -a + 1 = 0 & \quad \text{Primer estado excitado} \quad (n = 1). \end{aligned}$$

Para las cuerdas cerradas se llega a unos resultados similares,

$$\begin{aligned} \alpha' M^2 = 4(0 - a) = -4 & \quad \text{Estado fundamental} \quad (n = 0) \\ \alpha' M^2 = 4(1 - a) = 0 & \quad \text{Primer estado excitado} \quad (n = 1). \end{aligned}$$

En ambos casos se ha utilizado que $a = 1$.

Estas ecuaciones muestran algunos de los resultados más importantes de la teoría. Como se puede observar, al estado fundamental le corresponde una masa imaginaria, lo que lleva a la existencia de los taquiones en el formalismo. De ellos se comentó, en el subcapítulo 1.3, que era uno de los problemas que surgen de la teoría de cuerdas bosónicas, dado que una partícula con masa imaginaria no parece concebible.

Si se estudian los niveles excitados para ambos tipos de cuerdas se descubren nuevas partículas. Comenzando por las cuerdas abiertas, el primer estado excitado arroja bosones vectoriales sin masa, similares a aquellos que regulan las interacciones fundamentales. Los posteriores niveles darán lugar a las partículas masivas que conforman la teoría.

No obstante, algo diferente ocurre al estudiar los estados asociados a las cuerdas cerradas. El estado fundamental conduce al mismo estado problemático, el taquión, sin embargo, al estudiar el primer estado excitado aparece una partícula que no se encuentra para cuerdas abiertas. Su estado es un tensor producto de dos vectores sin masa, uno hacia la izquierda y otro hacia la derecha. Utilizando (4.17), el estado de la partícula sería

$$|\Omega^{ij}\rangle = \alpha_{-1}^i \tilde{\alpha}_{-1}^j |0\rangle. \quad (4.40)$$

Esta partícula tiene unas características especiales como no tener masa y poseer un espín de valor 2, coincidiendo perfectamente con la descripción de un gravitón, es decir, el bosón mediador de la interacción gravitatoria. Este resultado es de suma importancia como consecuencia de la aparición de la gravedad en una teoría de partida no-gravitatoria.

5. Conclusión y Continuación

5.1. Conclusión

Se ha derivado la acción para una cuerda que se propaga en un espacio-tiempo pseudoeuclídeo debido a que es fundamental para el análisis de una teoría física.

Empleando la acción se estudian las simetrías locales y globales de la hoja de mundo. Esto es fundamental para el posterior cálculo de las ecuaciones de movimiento asociadas.

Se cuantiza la cuerda empleando el método de cuantización canónico. Se observa la aparición de estados ficticios que han de ser eliminados de la teoría.

Usando el álgebra de Virasoro y fijando unas constantes importantes de la teoría se eliminan los estados espurios. Como consecuencia se ha fijado el espacio-tiempo en el que vive la teoría a 26 dimensiones.

Por último, se muestran los estados, y por ende, las partículas que componen la teoría, siendo todas ellas de espín entero, es decir, bosones. Entre ellas se encuentran el taquión, los bosones mediadores y para el caso de las cuerdas cerradas, además, el gravitón.

5.2. De las Cuerdas Bosónicas a las Supercuerdas

La existencia del taquión o de las 26 dimensiones del espacio-tiempo, son algunas de las dificultades que presenta esta teoría y que han sido comentadas a lo largo de los últimos subcapítulos. Urge, por tanto, encontrar solución a las mismas, para que finalmente se pueda obtener una teoría representativa del Universo.

Introduciendo el concepto de supersimetría, tal y como se indica en el subcapítulo 1.4, estos problemas son corregidos. Se incorporan los fermiones a la teoría gracias a la inclusión de una nueva simetría bosón-fermión y como consecuencia de ello, el número de dimensiones del espacio-tiempo de fondo, se reduce de 26 a 10. Cabe destacar, además, la presencia de la materia ordinaria en la teoría, debido a la existencia de fermiones en su formalismo.

6. Anexo

6.1. Acción de la Cuerda

6.1.1. Determinación de la constante α

La constante α posee unidades de la inversa de la longitud, de manera que la acción sea adimensional. No obstante, dado que se trabaja con unidades naturales ($\hbar=1$, $c=1$) poseerá unidades de masa, que como se verá a continuación dicha constante guarda una relación directa con la masa de la partícula.

La acción relativista necesariamente tendrá que tender en el límite clásico (bajas velocidades) a la expresión

$$S_{clasica} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt, \quad (6.1)$$

por lo tanto, en el límite se cumple que

$$S_{clasica} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = -\alpha \int_a^b ds = S_{relativista}. \quad (6.2)$$

Sustituyendo la ecuación del intervalo relativista que proporciona la relatividad especial

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (6.3)$$

en (2.1) y comparando con (2.2), se concluye

$$\mathcal{L}_{relativista} = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (6.4)$$

Realizando una expansión en serie de Taylor para $v \ll c$ se llega a

$$\mathcal{L}_{relativista} \simeq \alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c^2} + \dots, \quad (6.5)$$

sucesión en la que se despreciarán los términos superiores al segundo orden. Nótese como el primer término hace referencia a la masa en reposo de la partícula, mientras que el segundo representa la energía cinética de la misma.

En el caso clásico la expresión para el Lagrangiano de una partícula puntual es $\mathcal{L}_{clasico} = \frac{1}{2}mv^2$, así que igualándola a la parte referida a la energía cinética de (5.5) se obtiene

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{\alpha v^2}{2c^2}, \quad (6.6)$$

de donde se puede despejar α :

$$\alpha = mc, \quad (6.7)$$

y sabiendo que se está trabajando en unidades naturales finalmente queda

$$\alpha = m. \quad (6.8)$$

Por último, se sustituye el valor de la constante α en (2.1) obteniéndose

$$S_0 = -m \int ds. \quad (6.9)$$

6.1.2. Demostración de la equivalencia de las acciones para la partícula relativista

Se empezará extremando la acción (2.12).

$$\begin{aligned} \delta S'_0 &= \delta \left[\frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{1}{a(\tau)} X'^2 - m^2 a(\tau) \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\delta \left[\frac{1}{a(\tau)} \right] X'^2 - m^2 \delta [a(\tau)] \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{\delta [a(\tau)]}{a(\tau)^2} [-X'^2 - m^2 a(\tau)^2] \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

en donde se puede observar que como la variación del campo auxiliar es arbitraria, necesariamente se ha de cumplir

$$-X'^2 - m^2 a(\tau)^2 = 0, \quad (6.10)$$

y por lo tanto, el campo auxiliar vale

$$a(\tau) = \sqrt{\frac{-X'^2}{m^2}}. \quad (6.11)$$

Una vez obtenido la expresión para el campo auxiliar, se sustituirá en (2.12) con el objetivo de mostrar la equivalencia de dicha expresión con

(2.10).

$$\begin{aligned}
S'_0 &= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\frac{1}{a(\tau)} X'^2 - m^2 a(\tau) \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\sqrt{\frac{m^2}{-X'^2}} X'^2 - m^2 \sqrt{\frac{-X'^2}{m^2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\left(\sqrt{\frac{m^2}{-X'^2}} \right) \left[X'^2 - m^2 \frac{-X'^2}{m^2} \right] \right) \\
&= \frac{1}{2} \int d\tau \left(\left(\sqrt{\frac{m^2}{-X'^2}} \right) [2X'^2] \right) \\
&= -m \int d\tau \left(\frac{1}{\sqrt{-X'^2}} [-X'^2] \right) \\
&= -m \int d\tau \left(\frac{1}{\sqrt{-X'^2}} [\sqrt{-X'^2} \sqrt{-X'^2}] \right) \\
&= -m \int d\tau \sqrt{-g_{\mu\nu}(X) X'^\mu X'^\nu} \\
&= S_0
\end{aligned}$$

Lo que demuestra que ambas acciones son equivalentes.

6.1.3. Equivalencia entre la acción de Nambu-Goto y Poliakov

Cualquier variación que se realice de una acción con respecto a la métrica da lugar a un tensor de energía impulso, por ejemplo

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_\sigma}{\delta h^{\alpha\beta}}. \quad (6.12)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento con respecto al campo $h^{\alpha\beta}$ lo que se hará es extremar S_σ

$$\delta S_\sigma \equiv \int \frac{\delta S_\sigma}{\delta h^{\alpha\beta}} \delta h^{\alpha\beta} = -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \delta h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.13)$$

donde se ha despejado en la ecuación (5.12) y sustituido en la (5.13).

Que la variación de la acción sea igual a cero, solo es posible si $T_{\alpha\beta} = 0$. No obstante, antes de poder analizarlo se necesita saber qué es δh . El resultado es el siguiente

$$\delta h \equiv \delta (\det (h_{\alpha\beta})) = -h h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta}. \quad (6.14)$$

Para llegar a él hay que darse cuenta de que

$$h = \det(h_{\alpha\beta}) = \frac{1}{n!} e^{\alpha_1 \dots \alpha_n} e^{\beta_1 \dots \beta_n} h_{\alpha_1 \beta_1} \dots h_{\alpha_n \beta_n},$$

así que se tiene

$$\delta h = \frac{1}{n!} e^{\alpha_1 \dots \alpha_n} e^{\beta_1 \dots \beta_n} h_{\alpha_1 \beta_1} \dots h_{\alpha_n \beta_n} + \frac{1}{(n-1)!} e^{\alpha_1 \dots \alpha_n} e^{\beta_1 \dots \beta_n} h_{\alpha_1 \beta_1} \dots h_{\alpha_n \beta_n},$$

lo que implica tanto

$$\delta h = h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} h,$$

como

$$\delta h = -h_{\alpha\beta} \delta h^{\alpha\beta} h.$$

Si se ponen ambas en común se consigue

$$\delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} + h^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta} = 0, \quad (6.15)$$

lo que conduce al resultado obtenido en (5.14).

Una vez obtenido δh se puede calcular $\delta\sqrt{-h}$ que da

$$\delta\sqrt{-h} = -\frac{1}{2}\sqrt{-h}\delta h^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (6.16)$$

Determinadas las variaciones desconocidas, el siguiente paso será la variación de la acción de Poliakov

$$\delta S_\sigma = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \delta h^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X + \partial_\alpha X \partial_\beta X \right) = 0 \quad (6.17)$$

que da como resultado las ecuaciones de campo para $h_{\alpha\beta}$

$$-\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X + \partial_\alpha X \partial_\beta X = 0. \quad (6.18)$$

Si se pasa el primer miembro al otro lado de la ecuación se obtiene la igualdad

$$\frac{1}{2} h_{\alpha\beta} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X = \partial_\alpha X \partial_\beta X = 0, \quad (6.19)$$

donde se sabe que $\partial_\alpha X \partial_\beta X = G_{\alpha\beta}$. Por lo tanto, si se aplica el determinante en ambos miembros y posteriormente la raíz cuadrada se obtiene

$$\frac{1}{2} \sqrt{h} h^{\gamma\delta} \partial_\gamma X \partial_\delta X = \sqrt{-\det(G_{\alpha\beta})}, \quad (6.20)$$

lo que demuestra que la acción de Poliakov es clásicamente equivalente a la acción de Nambu-Goto.

6.2. Simetrías y Ecuaciones de Campo para la Cuerda Bosónica

6.2.1. Demostración de que $a^\mu{}_\nu$ genera las transformaciones de Lorentz

Se demostrará a continuación que $a^\mu{}_\nu$ que aparece en la transformación de Poincaré (3.1) genera las transformaciones de Lorentz.

Según la teoría de la relatividad de Einstein, la velocidad de la luz es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales. Por lo tanto, si se considera (t, X^i) como las coordenadas espacio-temporales de un rayo de luz para un instante dado y (t', X'^i) para otro momento concreto, la relación entre ambos viene dada por

$$\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -c^2 t^2 + X_i X^i = -c^2 t'^2 + X'_i X'^i = \eta_{\mu\nu} X'^\mu X'^\nu.$$

Las transformaciones lineales que preserven esta relación son conocidas como transformaciones de Lorentz, es decir,

$$X'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu. \quad (6.21)$$

Si ahora se trata la transformación de forma infinitesimal se obtiene

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + a^\mu{}_\nu, \quad (6.22)$$

donde δ^μ_ν es una delta de Kronecker. Nótese que no se ha demostrado que el tensor $a^\mu{}_\nu$ de (5.22) y (3.1) sean el mismo. Para demostrarlo se sustituye (5.22) en (5.21) de manera que se observa la siguiente expresión

$$X'^\mu = X^\mu + a^\mu{}_\nu X^\nu, \quad (6.23)$$

lo que lleva a que la variación de las coordenadas espacio-temporales, X^μ , bajo una transformación de Lorentz es igual a

$$\delta X^\mu = a^\mu{}_\nu X^\nu. \quad (6.24)$$

Si se impone que bajo una transformación de Lorentz el intervalo espacial no varía, se cumple que

$$\delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = 0, \quad (6.25)$$

y por lo tanto, se llega a

$$\begin{aligned} \delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) &= 2\eta_{\mu\nu} (\delta X^\mu) X^\nu \\ &= 2\eta_{\mu\nu} (a^\mu{}_\gamma X^\gamma) X^\nu \\ &= 2a_{\gamma\nu} X^\gamma X^\nu = 0, \end{aligned}$$

cuya solución más general es que los índices del tensor $a_{\mu\nu}$ sean antisimétricos: $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$ y por consiguiente, se demuestra que el $a^\mu{}_\nu$ de (3.1) y (5.22) son equivalentes.

En el próximo subcapítulo del anexo se han adjuntado algunos ejemplos de transformaciones de Lorentz (una rotación y un boost).

6.2.2. Transformaciones de Lorentz

El grupo de transformaciones de Lorentz está formado por dos tipos de transformaciones: Rotaciones espacio-temporales o Boosts y rotaciones espaciales. Se verá un ejemplo de cada uno de ellos:

1. **Rotación Espacial.** Se analizará una rotación en torno al eje Z, con un ángulo θ . Para un espacio-tiempo dimensional, la rotación espacial actuará sobre los dos ejes espaciales restantes, $X = X^1$ y $Y = X^2$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} X'^1 &= \cos(\theta)X^1 + \sin(\theta)X^2 \\ X'^2 &= -\sin(\theta)X^1 + \cos(\theta)X^2. \end{aligned}$$

Si se considera el ángulo θ como infinitesimal, se pueden emplear las aproximaciones para ángulos pequeños

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &\longrightarrow 1 \\ \sin(\theta) &\longrightarrow \theta, \end{aligned}$$

de manera que si se sustituye en la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} X'^1 &= X^1 + \theta X^2 \\ X'^2 &= -\theta X^1 + X^2. \end{aligned}$$

De manera que se pueden obtener las transformaciones infinitesimales asociadas a cada uno de los campos

$$\begin{aligned} \delta X^1 &= \theta X^2 \\ \delta X^2 &= -\theta X^1. \end{aligned}$$

Dado que se conoce la forma que posee una transformación de Lorentz

$$\delta X^\mu = a^\mu{}_\nu X^\nu,$$

realizando una comparación se obtiene el valor para los siguientes índices

$$a^1_2 = \theta$$

$$a^2_1 = -\theta,$$

mientras que el resto de índices a^μ_ν son iguales a cero.

Además, se demostrará que existe antisimetría en los índices, $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$. Con el fin de mostrarlo, se hará el siguiente cálculo

$$a_{12} = \eta_{1\lambda} a^\lambda_2 = \eta_{10} a^0_2 + \eta_{11} a^1_2 + \eta_{12} a^2_2 + \eta_{13} a^3_2 = \eta_{11} a^1_2 = \theta$$

$$a_{21} = \eta_{2\lambda} a^\lambda_1 = \eta_{20} a^0_1 + \eta_{21} a^1_1 + \eta_{22} a^2_1 + \eta_{23} a^3_1 = \eta_{22} a^2_1 = -\theta,$$

donde queda demostrado con claridad.

2. **Boost.** Se analizará un boost en la dirección X^0 y X^1 caracterizado por el ángulo φ . Las transformaciones tienen la forma

$$X'^0 = \cosh(\varphi) X^0 + \sinh(\varphi) X^1$$

$$X'^1 = \sinh(\varphi) X^0 + \cosh(\varphi) X^1,$$

que utilizando las aproximaciones para ángulos pequeños

$$\cosh(\varphi) \rightarrow 1$$

$$\sinh(\varphi) \rightarrow \varphi,$$

son convertidas en

$$X'^0 = X^0 + \varphi X^1$$

$$X'^1 = \varphi X^0 + X^1.$$

Las transformaciones infinitesimales dan $\delta X^0 = \varphi X^1$ y $\delta X^1 = \varphi X^0$ lo que demuestra que $a^0_1 = \varphi$ y $a^1_0 = \varphi$ mientras que el resto de elementos, a^μ_ν son iguales a cero. Para la demostración de que los elementos de matriz son antisimétricos se recurrirá al siguiente desarrollo

$$a_{01} = \eta_{0\lambda} a^\lambda_1 = \eta_{00} a^0_1 + \eta_{01} a^1_1 + \eta_{02} a^2_1 + \eta_{03} a^3_1 = \eta_{00} a^0_1 = -\varphi$$

$$a_{10} = \eta_{1\lambda} a^\lambda_0 = \eta_{10} a^0_0 + \eta_{11} a^1_0 + \eta_{12} a^2_0 + \eta_{13} a^3_0 = \eta_{11} a^1_0 = \varphi,$$

lo que demuestra como los índices son antisimétricos: $a_{\mu\nu} = -a_{\nu\mu}$.

6.2.3. Transformación de Weyl y tensor de energía-impulso

Se va a demostrar a continuación cómo la invariancia bajo transformaciones de Weyl obliga a que el tensor de energía-impulso asociado a la teoría necesariamente ha de tener traza nula. Para ello se definirá en primer lugar el tensor de energía-impulso

$$T_\alpha \equiv -\frac{2}{T} \frac{1}{\sqrt{-h}} \frac{\delta S_\sigma}{\delta h_{\alpha\beta}}. \quad (6.26)$$

Sabiendo que la variación de la acción bajo una transformación del campo $h^{\alpha\beta}$ es

$$\delta S_\sigma \equiv \int \frac{\delta S_\sigma}{\delta h^{\alpha\beta}} \delta h^{\alpha\beta},$$

si se despeja en (5.26) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta S_\sigma &= -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} \delta h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \sqrt{-h} (-2\phi) h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el desarrollo en serie de la transformación de Weyl

$$h'^{\alpha\beta} = e^{-2\phi} h^{\alpha\beta} = (1 - 2\phi + \dots) h^{\alpha\beta}, \quad (6.27)$$

truncando a primer orden para obtener la variación de la métrica $h^{\alpha\beta}$, de manera que queda

$$\delta h^{\alpha\beta} = h'^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta} = -2\phi h^{\alpha\beta}. \quad (6.28)$$

Como $\sqrt{-h}$ y ϕ son arbitrarios, necesariamente se ha de cumplir que

$$h^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = T_\alpha{}^\alpha = 0, \quad (6.29)$$

lo que demuestra que el tensor de energía-impulso asociado a la teoría tiene traza nula.

6.2.4. Invariancia de Poincaré en función de las condiciones de contorno

Se va a observar si las condiciones de contorno de Neumann y de Dirichlet preservan o no la invariancia bajo transformaciones del grupo de Poincaré.

Se empezará con las condiciones de contorno de Neumann: $\partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = 0) = \partial_\sigma X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = 0$, que resultan en

$$\left. \partial_\sigma (X'^\mu) \right|_{\sigma=0,\pi} = \left. \partial_\sigma (a^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu) \right|_{\sigma=0,\pi} = a^\mu{}_\nu \partial_\sigma X^\nu \Big|_{\sigma=0,\pi} = 0,$$

lo que corresponde a una clara conservación de la invariancia de Poincaré.

Sin embargo, al analizar las condiciones de contorno de Dirichlet: $X^\mu(\tau, \sigma = 0) = X_0^\mu$ y $X^\mu(\tau, \sigma = \pi) = X_\pi^\mu$ se llega a

$$\left. (X'^\mu) \right|_{\sigma=0,\pi} = \left. (a^\mu{}_\nu X^\nu + b^\mu) \right|_{\sigma=0,\pi} = a^\mu{}_\nu X_{0,\pi}^\nu + b^\mu \neq X_{0,\pi}^\mu,$$

lo que indica que no invariancia bajo una transformación de Poincaré.

6.3. Cuantización Canónica de la Cuerda

6.3.1. Resolviendo la ambigüedad del término \hat{L}_0

Se parte de la ecuación (4.19) particularizando para el caso $m = 0$ lo que da lugar a

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 &= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} : \hat{\alpha}_{-n} \hat{\alpha}_n : \\ &= \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^2 + : \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{\alpha}_{-n} \hat{\alpha}_n : + : \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n} \hat{\alpha}_n : \\ &= \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{\alpha}_n \hat{\alpha}_{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n} \hat{\alpha}_n \\ &= \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-m} \hat{\alpha}_m + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n} \hat{\alpha}_n \\ &= \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-n} \hat{\alpha}_n, \end{aligned}$$

donde se ha intercambiado el índice $n \rightarrow -m$ para así poder unir ambos sumatorios. El resultado obtenido es el que se plasma en la ecuación (4.20).

6.3.2. Estados espurios y la condición de la concha de masa

Los estados espurios se escriben de forma general con la siguiente ecuación

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle.$$

Como se sabe por definición que cumplen la ecuación (4.22) si se opera se obtiene

$$\begin{aligned}
0 &= (\hat{L}_0 - a) |\psi\rangle \\
&= \hat{L}_0 |\psi\rangle - a |\psi\rangle \\
&= \hat{L}_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle \right) - a |\psi\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{L}_0 \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle) - a |\psi\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} ([\hat{L}_0, \hat{L}_{-n}] + \hat{L}_{-n} \hat{L}_0) |\chi_n\rangle - a |\psi\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n \hat{L}_{-n} + \hat{L}_{-n} \hat{L}_0) |\chi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n \hat{L}_{-n} + \hat{L}_{-n} \hat{L}_0) |\chi_n\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} a \hat{L}_{-n} |\chi_n\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{L}_{-n} (\hat{L}_0 - a + n) |\chi_n\rangle,
\end{aligned}$$

donde se demuestra la expresión utilizada en el correspondiente capítulo.

6.3.3. Estados espurios de nivel 3 y superiores

Considérese un estado espurio de nivel 3 que posea la siguiente forma

$$|\psi\rangle = \hat{L}_{-3} |\chi_3\rangle,$$

y que además cumpla la ecuación de masa asociada, es decir, $(\hat{L}_0 - a + 3) |\chi_n\rangle$

Si se utiliza la ecuación (4.30) se puede reescribir \hat{L}_{-3} consiguiéndose

$$\begin{aligned}
\hat{L}_{-3} |\chi_3\rangle &= [\hat{L}_{-1}, \hat{L}_{-2}] |\chi_3\rangle \\
&= \hat{L}_{-1} \hat{L}_{-2} |\chi_3\rangle - \hat{L}_{-2} \hat{L}_{-1} |\chi_3\rangle \\
&= \hat{L}_{-1} (\hat{L}_{-2} |\chi_3\rangle) + \hat{L}_{-2} (\hat{L}_{-1} |-\chi_3\rangle).
\end{aligned}$$

Donde se impondrá que $|\chi_1\rangle = \hat{L}_{-2} |\chi_3\rangle$ y $|\chi_2\rangle = \hat{L}_{-1} |-\chi_3\rangle$, ya que el objetivo es expresar el estado espurio de nivel 3 como una combinación de uno de nivel 1 y otro de nivel 2.

Para terminar la demostración habrá que comprobar que se cumple $(\hat{L}_0 - a + 1) |\chi_1\rangle = 0$ y $(\hat{L}_0 - a + 2) |\chi_2\rangle = 0$.

Es importante notar que el operador \hat{L}_{-n} eleva el autovalor del operador \hat{L}_0 a la cantidad n . Para su demostración basta con suponer la existencia de un estado $|h\rangle$ tal que $\hat{L}_0|h\rangle = h|h\rangle$ donde se tiene

$$\begin{aligned}\hat{L}_0(\hat{L}_{-n}|h\rangle) &= ([\hat{L}_0, \hat{L}_{-n}] + \hat{L}_{-n}\hat{L}_0)|h\rangle \\ &= (n\hat{L}_{-n} + h\hat{L}_{-n})|h\rangle \\ &= (n+h)\hat{L}_{-n}|h\rangle,\end{aligned}$$

de manera que se llega a que $\hat{L}_{-n}|h\rangle$ es autovector de \hat{L}_0 con autovalor $n+h$.

Si se tiene $(\hat{L}_0 - a + 3)|\chi_3\rangle = 0$, entonces se puede afirmar que $\hat{L}_0|\chi_3\rangle = (a-3)|\chi_3\rangle$ y que por tanto, se puede escribir

$$\hat{L}_0(\hat{L}_{-2}|\chi_3\rangle) = (a-3+2)\hat{L}_{-2}|\chi_3\rangle,$$

lo que implica

$$(\hat{L}_0 - a + 1)\hat{L}_{-2}|\chi_3\rangle = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$(\hat{L}_0 - a + 1)|\chi_1\rangle = 0.$$

Realizando un procedimiento análogo se llega a

$$\hat{L}_0(\hat{L}_{-1}|\chi_3\rangle) = (a-3+1)\hat{L}_{-1}|\chi_3\rangle,$$

lo que lleva a

$$(\hat{L}_0 - a + 2)\hat{L}_{-1}|\chi_3\rangle = 0,$$

o equivalentemente

$$(\hat{L}_0 - a + 2)|\chi_2\rangle = 0.$$

Por ende, ha quedado demostrado que un estado espurio de nivel 3 puede ser escrito como una combinación de un estado espurio de nivel 1 y otro de nivel 2. La demostración para el estado espurio de nivel n , se omitirá por lo tedioso del cálculo, pero el razonamiento y procedimiento a seguir es el mismo.

7. Bibliografía

7.1. Principales documentos de referencia

1. Wray, K. (2011). An Introduction to String Theory. Universidad de Berkeley pp.1-71. Disponible en: https://math.berkeley.edu/~kwwray/papers/string_theory.pdf.
2. Tong, D. (2009). String Theory. Universidad de Cambridge, pp.1-33. Disponible en: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string/string.pdf>.
3. Zwiebach, B. (2009). A first course in string theory. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press.

7.2. Otras fuentes de información consultadas

1. Pereyra, J. (2015). ¿Qué es la teoría de cuerdas?. [Blog] Ciencia de Sofá. Disponible en: <http://cienciadesofa.com/2015/02/que-es-la-teoria-de-cuerdas.html>.
2. Cuerdas Clásicas: Acción de Nambu-Goto. (2011). [Blog] Cuentos Cuánticos. Disponible en: <https://cuentos-cuanticos.com/2011/10/11/cuerdas-clasicas-accion-de-nambu-goto/>
3. Nuñez, C. (2015). La teoría de cuerdas. Entrevista realizada por <http://magazinedeciencia.com.ar>. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=MKYQpxBc6Cg>
4. Greene, B. (2006). El universo elegante. 1st ed. Barcelona: Booket.
5. Polchinski, J. (2007). String theory. 1st ed. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press.
6. Pérez Hernández, F. (2016). Relatividad General. [Apuntes] Universidad de La Laguna.
7. Villatoro, F. (2017). ¿Cuántos vacíos hay en la teoría de cuerdas? — Ciencia — La Ciencia de la Mula Francis. [online] La Ciencia de la Mula Francis. Disponible en: <http://francis.naukas.com/2012/12/12/cuantos-vacios-hay-en-la-teoria-de-cuerdas/>

8. Hermán, M. (2007). La Teoría de Cuerdas: Una introducción detallada (II) – Ciencia Kanija 2.0. [online] Cienciakanija.com. Disponible en: <http://www.cienciakanija.com/2007/04/02/la-teoria-de-cuerdas-una-introduccion-detallada-ii/>.
9. Vázquez Mozo, M. (2015). Los orígenes de la teoría de supercuerdas II: la primera revolución. [online] Investigación y Ciencia. Disponible en: <http://www.investigacionyciencia.es/blogs/fisica-y-quimica/55/posts/los-origenes-de-la-teora-de-supercuerdas-ii-la-primera-revolucin-12793>
10. La teoría de cuerdas en 7 minutos. (2016). [video] Directed by J. Crespo Cepeda. Instituto de física teórica IFT. Disponible en: <https://www.youtube.com/watch?v=yd1jx1DkXb4t=12s>

7.3. Procedencia de las imágenes utilizadas

- Figura 1: <https://es.wikipedia.org/wiki/Teor>
- Figura 2: <http://www.investigacionyciencia.es/blogs/fisica-y-quimica/55/posts/los-origenes-de-la-teora-de-supercuerdas-ii-la-primera-revolucin-12793>
- Figura 3: <http://www.cienciakanija.com/2007/04/02/la-teoria-de-cuerdas-una-introduccion-detallada-ii/>
- Figura 4: <http://scienceblogs.com/startswithabang/files/2013/05/MSSMBrokenEnglish.jpeg>
- Figura 5: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Calabi-Yau.png/250px-Calabi-Yau.png>
- Figura 6: http://www.emiliosilveravazquez.com/blog/wp-content/uploads/2008/10/estrella_teoría - m.jpg
- Figura 7: <http://www.daviddarling.info/images/worldline.gif>
- Figura 8: <http://francis.naukas.com/files/2015/08/Dibujo20150818-worldline-worldsheet-d-branes-szabo.png>
- Figura 9: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/e6/Brane-wlswv.png/300px-Brane-wlswv.png>
- Figura 10: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/string/string.pdf>.
- Figura 11: https://math.berkeley.edu/~kwey/papers/string_theory.pdf.

Referencias

- [1] Veneziano, G. (1968). Construction of a crossing-symmetric, Regge-behaved amplitude for linearly rising trajectories. *Nuovo Cimento A Serie*, 57:190–197.
- [2] Nambu, Y. (1980). Quark model and the factorization of the Veneziano amplitude. *Proceedings of the International Conference on Symmetries and Quark Models*. Wayne State University, 269-277.
- [3] Susskind, L. (1969). Structure of hadrons implied by duality. *Physical Review D*, 1(4), 1182–1186.
- [4] Nielsen, H. (1969). An almost physical interpretation of the dual N point function. *Nordita*, Unpublished.
- [5] Scherk, J. and Schwarz, J. H. (1974). Dual models for non-hadrons. *Nuclear Physics B*, 81:118–144
- [6] Green, M. B. and Schwarz, J. H. (1984). Anomaly cancellations in supersymmetric $D = 10$ gauge theory and superstring theory. *Physics Letters B*, 149:117–122
- [7] Kaluza, Theodor (1921). Zum Unitätsproblem in der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* pp. 966–972.
- [8] Witten, E. (1995). Future Perspectives in String Theory.
- [9] Witten, E. (1995). String theory dynamics in various dimensions. *Nuclear Physics B*, 443:85–126.
- [10] Landau, L., Lifshitz, E. and Ortiz Fornaguera, R. (1992). *Teoría clásica de los campos*. 2nd ed. Barcelona: Reverté, pp.33-35.
- [11] Beem, J. K., Ehrlich, P. E. and Easley, K. L. (1996). *Global Lorentzian Geometry* 2nd. ed., CRC Press.
- [12] Tong, D. (2009). *String Theory*.
- [13] Callahan, J. (2013). *The geometry of spacetime*. 1st ed. New York: Springer.
- [14] Polchinski, J. (2007). *String theory*. 1st ed. Cambridge [u.a.]: Cambridge Univ. Press, pp.9-16.

- [15] Peskin, M. and Schroeder, D. (2005). *Introduction to quantum field theory*. 1st ed. Kolkata, India: Levant Books.
- [16] Landau, L., Lifshitz, E. and Ortiz Fornaguera, R. (1992). *Teoría clásica de los campos*. 2nd ed. Barcelona: Reverté, pp.153-155.
- [17] Munkres, J.R. (1984). *Elements of algebraic topology*, Addison-Wesley.
- [18] Goldstein, H. (2002). *Mecanica clasica*. 1st ed. Barcelona [etc]: Reverte, pp. 334-343.
- [19] Hazewinkel, Michiel, ed. (2001), *Witt algebra*, Springer.
- [20] Ali,S. T. and Engliš, M. (2005). *Quantization Methods: A Guide for Physicists and Analysts*. Rev.Math.Phys., pp. 391-490.
- [21] Lancaster, T. and Blundell, S. (2015). *Quantum field theory for the gifted amateur*. 1st ed. Oxford: Oxford University Press. pp. 104-106
- [22] Wray, K. (2011). *An Introduction to String Theory*. Berkeley University pp.58-59.