

Leticia Álvarez Hernández

Sistemas Dinámicos Discretos y Caos

Discrete Dynamical Systems and Chaos

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2017

DIRIGIDO POR

Antonio Lorenzo Bonilla Ramírez

Antonio Lorenzo Bonilla
Ramírez

*Departamento de Análisis
Matemático*

*Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife*

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de este trabajo es el estudio de la ecuación logística y la definición de caos.

La aplicación logística es una función matemática que se hizo muy conocida en 1976 gracias a un artículo científico del biólogo Robert May y puede expresarse matemáticamente como $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ siendo μ el parámetro que varía.

May pretendía hallar un modelo demográfico sencillo que explicase la dinámica de una población de la que se ha supuesto que tiene un crecimiento cada vez más lento a medida que se acerca a una cantidad de individuos considerada como límite. May comprobó que al cambiar los valores del único parámetro del modelo, este presentaba soluciones muy distintas y a veces muy complejas pese a que se trata de una simple aplicación polinómica de grado 2.

Por otro lado, en 1986, Devaney define un sistema dinámico como caótico si tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales, es topológicamente transitivo, y tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Palabras clave: *Aplicación logística – Sistema dinámico – Caos*

Abstract

The aim of this notes is to study the logistic map and the chaos definition.

The logistic map is a mathematical function given by the biologist Robert May in 1976 and it can be expressed mathematically as

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

where μ is a parameter.

The first approach was to obtain a simply demographic model that it explains the dynamics of a population that it has a slow behavior closed to the limit. Indeed, May proved that for different values of the parameter μ , the solutions are very different and sometimes it gives complex solutions.

In the other hand, Devaney in 1986, says that a dynamical system is chaotic if it has a sensible dependance on the initial condicions, it is topologically transitive and it has a dense set of periodic points.

Keywords: *Logistic map – Dynamical system – Chaos*

Contenido

Resumen/Abstract	III
Introducción	VII
1. Órbitas de aplicaciones unidimensionales	1
1.1. Puntos fijos	1
1.2. Iteraciones gráficas	2
1.3. Atractores y repulsores	3
1.4. Puntos fijos no hiperbólicos	7
2. Bifurcaciones y la Familia Logística	11
2.1. La cuenca de atracción	11
2.2. La familia logística	12
2.3. Puntos periódicos	15
2.4. Puntos periódicos de la aplicación logística	16
2.5. Análisis gráfico para $1 + \sqrt{6} < \mu \leq 4$ y diagramas de Feigenbaum	19
2.6. El teorema de Sharkovsky	22
3. Sistemas dinámicos y caos	23
3.1. Sistemas dinámicos	23
3.2. Sistemas dinámicos equivalentes	25
3.3. Aplicaciones topológicamente transitivas	29
3.4. Caos	34
3.5. Caos en intervalos	40

3.6. Dinámica Simbólica	43
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

La aplicación logística es una función matemática que se hizo muy conocida en 1976 gracias a un artículo científico del biólogo Robert May, que pretendía hallar un modelo demográfico sencillo que explicase la dinámica de una población de la que se ha supuesto que tiene un crecimiento cada vez más lento a medida que se acerca a una cantidad de individuos considerada como límite.

May comprobó que al cambiar los valores del único parámetro del modelo, este presentaba soluciones muy distintas y a veces muy complejas pese a que se trata de una simple aplicación polinómica de grado 2.

La aplicación logística puede expresarse matemáticamente como

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

siendo μ el parámetro que varía.

Esta ecuación describe dos efectos:

- El crecimiento de tipo exponencial de la población (efecto más visible cuando la población es pequeña).
- La mortalidad adicional que aumenta a medida que crece la población, debido a la competencia de los individuos entre sí para asegurarse el alimento necesario. Esto se traduce

matemáticamente por el término cuadrático con un signo negativo.

Este modelo asume que los recursos para la población son ilimitados y que no hay mortalidad debido a la competencia con otras especies.

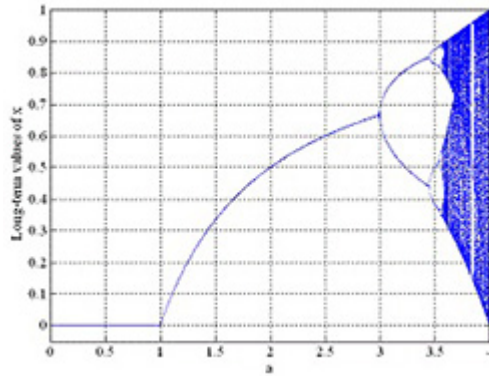
Según el valor que se le adjudique a « μ » se observarán los siguientes comportamientos:

- Si $0 < \mu \leq 1$ la población terminará desapareciendo independientemente del valor de la población inicial.
- Si $1 < \mu \leq 2$ la población rápidamente tenderá al valor $\frac{\mu-1}{\mu}$, independientemente del valor de la población inicial.
- si $2 < \mu \leq 3$ a la larga la población también se estabilizará en $\frac{\mu-1}{\mu}$, pero previamente fluctuará en el entorno de ese valor.
- Si $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ (casi 3,45), se aproximará a oscilaciones permanentes entre dos valores.
- Con μ entre 3,45 y 3,54 (aproximadamente), la población tendrá oscilaciones permanentes aproximándose a cuatro valores.
- Si μ es ligeramente mayor de 3,54, la población oscilará entre 8 valores (luego 16, luego 32, etc.).
- Cerca de 3,57 el comportamiento se complica aún más, pero todavía hay ciertos rangos aislados de μ que muestran un comportamiento simple, las a veces llamadas «islas de estabilidad».
- Además si $\mu = 4$ presenta Caos de Devaney.

El siguiente diagrama de bifurcación resume lo anteriormente mencionado. El eje horizontal muestra los valores del parámetro μ , y el eje vertical los valores a los que tiende la iteración de la función logística cuando n tiende a infinito.

En 1975 Li y Yorke probaron que si una función continua definida en un intervalo tiene un punto de periodo tres, entonces para todo $k = 1, 2, 3, \dots$ existe un punto de periodo k .

Poco tiempo después salió a la luz un teorema mucho más general, obra del matemático ucraniano Sharkovsky, y publicado en 1964 en



ruso en una revista ucraniana. Dicho teorema era desconocido en occidente hasta que el interés del Teorema de Li-Yorke lo puso de relevancia.

Para entender este teorema hay que definir un nuevo orden para los enteros positivos \mathbb{Z}^+ . En el «Orden de Sharkovsky» el 3 es el número mayor, seguido por el 5, luego el 7; a continuación van el resto de enteros impares; les sigue el $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, y el resto de enteros impares multiplicados por 2; a continuación aparecen todos enteros impares multiplicados por 2^2 ; luego multiplicados por 2^3 ; y así hasta llegar a los multiplicados por 2^n ; por último aparecen todas las potencias de 2 en orden decreciente.

En otras palabras:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

El Teorema de Sharkovsky dice que si una aplicación continua tiene un punto de periodo k , entonces tiene puntos de todos los periodos menores que k en el orden de Sharkovsky.

Otro de los ingredientes principales de este trabajo es la idea de caos. Para definirla necesitamos conocer tres conceptos: dependencia sensible de las condiciones iniciales, transitividad topológica y puntos periódicos.

- La dependencia sensible resume la idea del llamado efecto mariposa: pequeños cambios en las condiciones iniciales de un

sistema pueden conducir, después de un tiempo, a grandes cambios en el comportamiento del mismo.

- La transitividad topológica indica que el sistema dinámico es irreducible.
- La existencia de puntos periódicos implica que el sistema debe tener muchas órbitas regulares; concretamente, debe existir un conjunto denso de órbitas periódicas.

Basándose en estas tres características aparece la definición de caos, dada por Devaney en 1986. Según dicha definición, un sistema dinámico es caótico si tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales, es topológicamente transitivo, y tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Más adelante, en 1992, Banks, Brooks, Cairns, Davis y Stacey probaron en *American Math Monthly* que en un espacio métrico sin puntos aislados, la sensibilidad respecto a las condiciones iniciales se obtiene de las dos condiciones restantes y es, por tanto, una condición superflua. Entonces podemos decir que un sistema dinámico definido sobre un espacio métrico es caótico si es topológicamente transitivo y posee un conjunto denso de puntos periódicos.

Podría parecer que un sistema dinámico cuyo comportamiento sea caótico debe ser necesariamente complicado. Sin embargo un sistema tan sencillo como la aplicación logística de la que ya hemos hablamos, restringida al intervalo $[0,1]$ y con parámetro $\mu = 4$, es caótica.

Órbitas de aplicaciones unidimensionales

1.1. Puntos fijos

Definición 1.1.1 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Entonces para un $x \in \mathbb{R}$ el conjunto

$$\text{orb}(x, f) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

se denomina **órbita de x** .

Definición 1.1.2 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación. Un punto $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$ se denomina **punto fijo** de f . El conjunto de puntos fijos de f lo denotamos por **Fix(f)**.



Figura 1.1. Los puntos en los que una función interseca la recta $y = x$ son los puntos fijos de dicha función.

Tomemos como ejemplo la aplicación $f(x) = 4x(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$. Resolviendo $f(x) = x$ se obtiene que $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$ son sus puntos fijos, es decir, verifican $f(0) = 0$ y $f(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$.

Definición 1.1.3 Un $x^* \in \mathbb{R}$ se denomina **punto fijo eventual** de $f(x)$ si existe un punto fijo c de $f(x)$ y un $r \in \mathbb{Z}^+$ tales que $f^r(x^*) = c$ y $f^s(x^*) \neq c$ para todo $0 < s < r$.

Siguiendo con la aplicación anterior, $f(x) = 4x(1 - x)$, por un lado tenemos

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ y } f(1) = 0$$

y por otro

$$f\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{4} \text{ y } f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Entonces como $x = 0$ y $x = \frac{3}{4}$ son puntos fijos de la aplicación, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, $x = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$ y $x = \frac{1}{4}$ serán puntos fijos eventuales de la misma.

Teorema 1.1.1 Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $I = [a, b]$, $a < b$, una función continua tal que $I \subset f(I)$. Entonces $f(x)$ tiene un punto fijo en I .

Demostración. Definimos $g(x) = f(x) - x$. Como $I \subset f(I)$, existe un $c_1 \in (a, b)$ tal que $f(c_1) \leq c_1$ (de hecho $f(c_1) \leq a \leq c_1$), y un $c_2 \in (a, b)$ tal que $f(c_2) \geq c_2$ (de hecho, $f(c_2) \geq b \geq c_2$).

Entonces $g(c_1) \leq 0$ y $g(c_2) \geq 0$, y por ser $g(x)$ continua, el Teorema de Bolzano establece que existe un $c \in I$ (ya sea $c_1 < c < c_2$ o $c_2 < c < c_1$) tal que $g(c) = 0$. Por tanto $f(c) = c$ y c es punto fijo de $f(x)$. \square

1.2. Iteraciones gráficas

Es posible visualizar las iteraciones de una función $f(x)$ en un punto x_0 mediante **iteraciones gráficas**.

La idea es considerar un punto x_0 del eje x y dibujar una línea vertical hasta su valor por la función. Entonces llevamos ese punto horizontalmente hasta la recta $y = x$, de ahí otra vez verticalmente a su correspondiente punto por la función, de nuevo horizontalmente hasta $y = x$, y repetimos el proceso hasta la iteración que queramos ver.

En algunos ejemplos las iteraciones convergerán a un punto fijo, en otros se irán al infinito, y en otros oscilarán entre diferentes puntos indefinidamente.

Consideremos la aplicación $f(x) = x(1 - x)$. Examinando sus iteraciones gráficamente puede verse que las órbitas de cualquier punto del intervalo $[0, 1]$ se aproximan al punto $x = 0$.

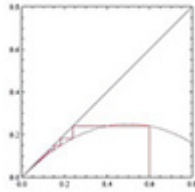


Figura 1.2. Las órbitas del punto $x = 0,6$ por iteraciones de la función $f(x) = x(1 - x)$ convergen a $x = 0$.

Proposición 1.2.1 *Si $f(x)$ es una función continua y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = c$ para algún x_0 , entonces $f(c) = c$; es decir, si la órbita converge a un punto c , entonces dicho punto c es un punto fijo de $f(x)$.*

Demostración. Tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = c \Rightarrow f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0)) = f(c),$$

de modo que por continuidad de f , $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0) = f(c)$.

A su vez $c = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x_0)$, luego por unicidad del límite se concluye que $c = f(c)$.

□

1.3. Atractores y repulsores

Definición 1.3.1 *Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación, y sea $c \in X$ tal que $f(c) = c$, es decir, c es un punto fijo de $f(x)$. Entonces:*

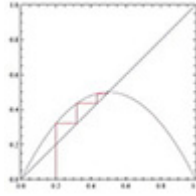


Figura 1.3. Las órbitas del punto $x = 0,2$ por una determinada función convergen al punto $x = \frac{3}{4}$.

i) c es un **punto fijo estable** si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in X$ y $|x - c| < \delta$, entonces $|f^n(x) - c| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$.

Cuando esto no ocurre, c se dice **punto fijo inestable**.

ii) c se dice **punto fijo atractor** si existe un número real $\eta > 0$ tal que

$$|x - c| < \eta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = c.$$

iii) c se dice **asintóticamente estable** si es a la vez estable y atractor.

Además podemos considerar el caso de c punto fijo de f tal que existe $\varepsilon > 0$ y x cercano a c que verifica, para alguna iteración de f , que $|f^n(x) - c| > \varepsilon$. En ese caso se dice que c es un **punto fijo repulsor**.

La siguiente clasificación de los puntos fijos será útil para su caracterización.

Definición 1.3.2 Un punto fijo c se denomina **hiperbólico** si $|f'(c)| \neq 1$. Cuando $|f'(c)| = 1$, c se dice **no hiperbólico**.

La caracterización de los puntos fijos no hiperbólicos se verá en la siguiente sección. Para los que sí son hiperbólicos se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.3.1 Sea $f : X \rightarrow X$ función diferenciable con primera derivada continua (f de clase C^1). Entonces:

- i) Si a es un punto fijo de $f(x)$ con $|f'(a)| < 1$, entonces a es asintóticamente estable. Las iteraciones por f de puntos cercanos a dicho punto fijo convergen geométricamente a él; es decir, existe una constante $0 < \lambda < 1$ tal que $|f^n(x) - a| < \lambda^n |x - a|$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ y para todo $x \in X$ suficientemente cercano a dicho a .
- ii) Si a es punto fijo de $f(x)$ tal que $|f'(a)| > 1$, entonces a es un punto fijo repulsor de f .

Demostración. (i) Supongamos X intervalo abierto y $|f'(a)| < \lambda < 1$ para algún $\lambda > 0$. Entonces por continuidad de $f'(x)$ existe un intervalo abierto $I \subset X$ tal que $|f'(x)| < \lambda < 1$ para todo $x \in I$. Por el Teorema del Valor Medio existe un $c \in I$ que satisface

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

de modo que

$$|f(x) - a| = |f'(c)| |x - a| < \lambda |x - a|$$

es decir, $f(x)$ está más cerca de a de lo que está x .

Repitiendo el procedimiento para $f(x)$ en lugar de x , y así sucesivamente, obtenemos:

$$|f^2(x) - a| < \lambda^2 |x - a|, \dots, |f^n(x) - a| < \lambda^n |x - a|.$$

Y como $\lambda^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, se concluye que $f^n(x) \rightarrow a$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto a es estable y atractor, es decir, asintóticamente estable.

(ii) Supongamos ahora $1 < \lambda < |f'(a)|$.

Por continuidad de $f'(x)$ existe un intervalo abierto $I \subset X$, con $a \in I$, tal que $1 < \lambda < |f'(x)|$, para todo $x \in I$. Entonces por el Teorema del Valor medio, si $x \in I$, existe un $c \in I$ que verifica

$$|f(x) - a| = |f'(c)| |x - a| > \lambda |x - a|.$$

Es decir, si $f(x)$ no pertenece a I , entonces $f(x)$ está separado de a . Repitiendo el proceso para $f(x)$ en lugar de x y así sucesivamente, llegamos a que $f^k(x) \in I$ o $|f^n(x) - a| > \lambda^n |x - a|$. Como ahora $\lambda^n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, las iteraciones de puntos cercanos a a

tienden a separarse de a . Concluimos que a es punto fijo inestable. \square

Nota 1.3.2 *En este contexto, cuando $|f'(a)| = 0$, se dice que a es punto fijo superatractor.*

Anteriormente hemos utilizado las aplicaciones $f(x) = 4x(1 - x)$ y $f(x) = x(1 - x)$ para ejemplificar algunos conceptos. Ambas aplicaciones son casos particulares de la **aplicación logística**, $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. En este contexto nos interesa su estudio para $0 \leq x \leq 1$ y $0 < \mu \leq 4$, ya que para esos valores del parámetro μ , L_μ lleva el intervalo $[0, 1]$ en sí mismo, de modo que tendrá al menos un punto fijo en dicho intervalo (Teorema 1.1.1), y sus iteraciones permanecerán en el interior del mismo (si $\mu > 4$, entonces $L_\mu > 1$ para algunos valores de x en $[0, 1]$ y las futuras iteraciones se irán a $-\infty$).

Resolviendo $L_\mu(x) = x$ se obtienen los puntos fijos $x = 0$ y $x = 1 - \frac{1}{\mu}$. Veamos como varía el comportamiento de la función según el valor de μ :

- Si $0 < \mu \leq 1$, entonces $1 - \frac{1}{\mu} \leq 0$, y por tanto $c = 0$ es el único punto fijo en $[0, 1]$. Se tiene que $L'_\mu(x) = \mu - 2\mu x$, luego $L'_\mu(0) = \mu < 1$ y por tanto $x = 0$ un punto fijo asintóticamente estable.
- Si $\mu > 1$, entonces tanto 0 como $1 - \frac{1}{\mu}$ son puntos fijos en $[0, 1]$. Ahora 0 es repulsor ya que

$$L'_\mu(0) = \mu > 1.$$

En cuanto al otro punto,

$$L'_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = \mu - 2\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) = 2 - \mu,$$

de modo que

$$\begin{aligned} |L'_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)| &= |2 - \mu| < 1 \iff 1 < \mu < 3 \\ |L'_\mu\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)| &= |2 - \mu| > 1 \iff 3 < \mu < 4 \end{aligned}$$

Luego en el primer caso se tiene que $c = 1 - \frac{1}{\mu}$ es punto fijo atractor, y en el segundo que es punto fijo repulsor.

Notemos también que para $\mu = 1, 3$ los respectivos puntos fijos $c = 0$ y $c = \frac{2}{3}$ verifican $L'_1(0) = 1$ y $L'_3(\frac{2}{3}) = -1$, de modo que se trata de puntos fijos no hiperbólicos.

1.4. Puntos fijos no hiperbólicos

En esta sección vamos a caracterizar los puntos fijos no hiperbólicos. Para ello nos hace falta saber que entre los puntos fijos inestables encontramos algunos que presentan estabilidad por la derecha o por la izquierda. Estos puntos se denominan **semiestables**.

Teorema 1.4.1 *Sea c punto fijo no hiperbólico de $f(x)$, siendo $f'(c) = 1$. Si $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ son continuas en $x = c$, se tiene:*

- i) Si $f''(c) \neq 0$, entonces c es punto fijo semiestable.*
- ii) Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) > 0$, entonces c es punto fijo inestable.*
- iii) Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) < 0$, entonces c es punto fijo asintóticamente estable.*

Demostración. (i) Si $f'(c) = 1$ entonces $f(x)$ es tangente a $y = x$ en $x = c$. Supongamos $f''(c) > 0$ sin pérdida de generalidad, de modo que $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $x = c$.

Como las derivadas son continuas por hipótesis, en este caso tenemos que $f''(x) > 0$ para todo $x \in (c - \delta, c + \delta)$, $\delta > 0$.

Concretamente $f'(x)$ debe ser creciente en ese intervalo, y como $f'(c) = 1$ se tendrá

$$\begin{aligned} f'(x) &< 1 \text{ para todo } x \in (c - \delta, c) \\ f'(x) &> 1 \text{ para todo } x \in (c, c + \delta). \end{aligned}$$

También por continuidad de $f'(x)$ podemos suponer que $f'(x) > 0$ en ese intervalo. Entonces por el Teorema del Valor Medio aplicado al intervalo $[x, c] \subset (c - \delta, c]$, existe $q \in (x, c)$ verificando

$$f'(q) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c},$$

y como $0 < f'(q) < 1$ y $c > x$ se tiene

$$0 < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 1, \text{ de modo que } x < f(x) < c.$$

Reiterando este procedimiento podemos ver que la sucesión $f^n(x)$ es creciente y acotada superiormente por c , de modo que converge a c . Además no puede existir otro punto fijo en ese intervalo ya que entonces el Teorema del Valor Medio daría $f'(q_1) = 1$ para algún $q_1 \in (x, c)$, lo que es una contradicción.

En conclusión, tenemos que c es estable y atractor por la derecha.

Por otro lado si consideramos $[c, x] \subset [c, c + \delta)$. Aplicando de nuevo el Teorema del Valor Medio se obtiene

$$f'(q) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 1, \text{ de modo que } f(x) > x > c,$$

ya que ahora $x > c$. Repitiendo el procedimiento tenemos que los puntos cercanos a c se alejan de dicho c por iteraciones de la función, y por tanto el punto fijo c es inestable por la izquierda.

Para ver esto mismo cuando $f''(c) < 0$ y la gráfica es cóncava hacia abajo en $x = c$, se utiliza un procedimiento análogo.

(iii) Ahora tenemos $f'''(c) < 0$, $f''(c) = 0$ y $f'(c) = 1$. Entonces hay un punto de inflexión en $x = c$, y por el estudio de la tercera derivada concluimos que $f'(x)$ tiene un máximo local en dicho punto.

Por continuidad se sigue que

$$f'(x) < 1 \text{ para todo } x \in (c - \delta, c + \delta), x \neq c \text{ y } \delta > 0.$$

En otras palabras, $f''(x) > 0$ para $x \in (c - \delta, c)$, de modo que $f'(x)$ es creciente en dicho intervalo; y $f''(x) < 0$ para $x \in (c, c + \delta)$, así que $f'(x)$ es decreciente en ese intervalo.

En particular, $f'(x) \neq 1$ si $x \neq c$, y por un procedimiento análogo al usado en (i), se obtiene que c es punto fijo asintóticamente estable.

(ii) Ahora $f''(c) = 0$, $f'''(c) > 0$ y $f'(c) = 1$. De nuevo hay un punto de inflexión en $x = c$, y por el estudio de la segunda derivada se trata de un mínimo local. Se sigue que

$$f'(x) > 1 \text{ para todo } x \in (c - \delta, c + \delta), x \neq c \text{ y } \delta > 0.$$

En particular $f'(x) \neq 1$ si $x \neq c$, y por el razonamiento hecho en i), los puntos cercanos a c se alejan bajo iteraciones por ambos lados de c . Por tanto c es punto fijo inestable. \square

Por último veamos qué ocurre cuando c es un punto fijo no hiperbólico con $f'(c) = -1$. Para ello necesitamos el siguiente concepto:

Definición 1.4.1 La *derivada schwarziana* de $f(x)$ es la función $Sf(x)$ definida por

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2.$$

Cuando $f'(x) = -1$,

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2} [f''(x)]^2.$$

Teorema 1.4.2 Supongamos c punto fijo de $f(x)$ siendo $f'(c) = -1$. Si $f'(x)$, $f''(x)$ y $f'''(x)$ son continuas en $x = c$, se tiene:

- i) Si $Sf(c) < 0$, entonces c es un punto fijo asintóticamente estable.
- ii) Si $Sf(c) > 0$, entonces c es un punto fijo inestable.

Demostración. (i) Definimos $g(x) = f^2(x)$. Entonces $g(c) = c$, es decir, c también es punto fijo de g . Además si c es asintóticamente estable respecto a g , entonces también lo es respecto a f . Veamos que efectivamente es así:

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(f(f(x))) = f'[f(x)]f'(x),$$

de modo que

$$g'(c) = f'(c)f'(c) = (-1)(-1) = 1.$$

Entonces podemos aplicar el teorema de caracterización anterior a $g(x)$. Empezamos por ver si g'' es igual o distinta de 0 en $x = c$:

$$g''(x) = f'[f(x)]f''(x) + f''[f(x)](f'(x))^2,$$

de modo que

$$g''(c) = f'(c)f''(c) + f''(c)(f'(c))^2 = -f''(c) + f''(c) = 0.$$

Estudiamos la derivada tercera:

$$g'''(x) = f''[f(x)]f'(x)f''(x) + f'[f(x)]f'''(x) + f'''[f(x)](f'(x))^3 + f''[f(x)]2f'(x)f''(x).$$

Por tanto en $x = c$:

$$g'''(c) = [f''(c)]^2(-1) - f'''(c) - f'''(c) + 2f''(c)(-1)f''(c) = -2f'''(c) - 3[f''(c)]^2 = 2Sf(c)$$

y por hipótesis $Sf(c) < 0$, de modo que $g'''(c) = 2Sf(c) < 0$ y concluimos que c es asintóticamente estable respecto de f .

(ii) Repitiendo el desarrollo hecho en i) para $g(x) = f^2(x)$, obtenemos igualmente que $g'(c) = 1$ y $g''(c) = 0$. Pero ahora $g'''(c) = 2Sf(c) > 0$ ya que por hipótesis $Sf(c) > 0$. Concluimos que c es inestable. \square

En la sección anterior vimos que, para algunos valores de μ , la aplicación logística $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ tenía puntos fijos no hiperbólicos que ahora podemos caracterizar. Para ello tenemos:

$$L'_\mu(x) = \mu - 2\mu x, \quad L''_\mu(x) = -2\mu \quad \text{y} \quad L'''_\mu(x) = 0.$$

Para $\mu = 1$ tenemos $x = 0$ punto fijo con $L'_1(0) = 1$. Como $L''_1(0) = -2 \neq 0$, se tendrá que $x = 0$ es semiestable, en particular atractor por la derecha y repulsor por la izquierda por ser $L''_1(0) < 0$. Sin embargo los puntos a la izquierda del intervalo $[0, 1]$ no pertenecen al dominio de la aplicación, por lo que podemos considerar $x = 0$ punto fijo estable.

Para $\mu = 3$ se tiene que $c = \frac{2}{3}$ es fijo con $L'_3(\frac{2}{3}) = -1$, y verifica que $Sf(\frac{2}{3}) = 0 - \frac{3}{2}(-6)^2 < 0$. Por tanto $c = \frac{2}{3}$ es punto fijo asintóticamente estable.

Bifurcaciones y la Familia Logística

2.1. La cuenca de atracción

En el Capítulo 1 utilizamos la función logística para ejemplificar algunos resultados. Ahora vamos a centrarnos en la propia función estudiando su dinámica. Pero antes necesitamos definir la cuenca de atracción de una función.

Definición 2.1.1 *La **cuenca de atracción** $B_f(c)$ de un punto fijo c de $f(x)$ es el conjunto de todos los x para los que la sucesión $x_n = f^n(x)$ converge a c :*

$$B_f(c) = \{x \in X : f^n(x) \rightarrow c, \text{ para } n \rightarrow \infty\}.$$

*La **cuenca de atracción inmediata** de f es el mayor intervalo contenido en $B_f(c)$ al que pertenezca c .*

Proposición 2.1.1 *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua que tiene un punto fijo atractor p . Entonces la cuenca de atracción inmediata de p es un intervalo abierto.*

Demostración. Como p es punto fijo atractor existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in I_\varepsilon = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, $f^n(x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Sea J el mayor intervalo que contiene a p y que cumple $f^n(x) \rightarrow p$ para todo $x \in J$, cuando $n \rightarrow \infty$. Suponiendo $J = [a, b]$ intervalo cerrado, entonces existe $r \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^r(a) \in I_\varepsilon$. Sin embargo f^r es continua por hipótesis, de modo que puntos cercanos a a tendrán

su imagen también en I_ε , en particular puntos cercanos a a por la izquierda. Llegamos por tanto a una contradicción.

Formalmente, existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f^r(x) - f^r(a)| < \eta$, donde $\eta = \min\{|f^r(a) - (p - \varepsilon)|, |(p + \varepsilon) - f^r(a)|\}$. Esto implica que hay puntos $x < a$ cercanos a a para los que $f^r(x) \in I_\varepsilon$, y por tanto para dichos puntos $f^{rn}(x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo que es una contradicción.

Concluimos que $a \notin J$ (y lo mismo para b), de modo que J debe ser un intervalo abierto. \square

2.2. La familia logística

Como vimos en el Capítulo 1, las aplicaciones logísticas $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ son funciones de dos variables reales μ y x , donde x pertenece al intervalo $[0, 1]$ y se considera $\mu \in (0, 4]$. También estudiamos sus puntos fijos a medida que varía μ obteniendo:

- Para $0 < \mu \leq 1$, L_μ tiene exactamente un punto fijo en $[0, 1]$, el $c = 0$, que es atractor.
- Para $1 < \mu < 3$, $c = 0$ pasa a ser repulsor y aparece un nuevo punto fijo atractor, $c = 1 - \frac{1}{\mu}$.

Estos cambios representan variaciones en la naturaleza de la función denominadas **bifurcaciones**. Para $\mu = 3$ teníamos que $c = \frac{2}{3}$ es atractor, y vamos a ver que se produce un nuevo cambio en la naturaleza. Más adelante también consideraremos qué ocurre para $\mu > 3$.

Empezamos el estudio de la ecuación logística calculando su cuenca de atracción: es decir, para un μ dado y un punto fijo c , estudiamos el conjunto de los $x \in [0, 1]$ que convergen a c por iteraciones de L_μ . Nos restringiremos a μ variando entre 0 y 3, ya que para esos valores la dinámica de L_μ resulta ser muy sencilla.

Nota 2.2.1 La función logística con $0 \leq x \leq 1$ tiene valor máximo $\frac{\mu}{4}$ para $x = \frac{1}{2}$, por lo que para $0 < \mu \leq 4$, L_μ lleva el intervalo unidad $[0, 1]$ en sí mismo.

Teorema 2.2.2 Sea la aplicación logística $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$. Entonces:

- i) Para $0 < \mu \leq 1$, la cuenca de atracción del punto fijo atractor $c = 0$ es $B_{L_\mu}(0) = [0, 1]$.
- ii) Para $1 < \mu \leq 3$, la cuenca de atracción del punto fijo atractor $c = 1 - \frac{1}{\mu}$ es $B_{L_\mu}(1 - \frac{1}{\mu}) = (0, 1)$.

Demostración. i) $0 < \mu \leq 1$.

Tenemos que $c = 0$ es el único punto fijo de L_μ en $[0, 1]$ y hemos visto que efectivamente es asintóticamente estable.

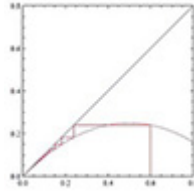


Figura 2.1. Ecuación logística para $0 < \mu < 1$.

Formalmente como $0 < \mu \leq 1$ por hipótesis, entonces $0 < 1 - x < 1 \Rightarrow 0 < \mu(1 - x) < 1 \Rightarrow 0 < L_\mu(x) = \mu x(1 - x) < x$, para todo $x \in (0, 1]$.

Y por el mismo razonamiento se obtiene que $L_\mu^2(x) < L_\mu(x), \dots, L_\mu^n(x) < L_\mu^{n-1}(x)$, de modo que la sucesión $L_\mu^n(x)$ es decreciente y acotada inferiormente por 0. Por tanto converge al único punto fijo $c = 0$.

Efectivamente se concluye que la cuenca de atracción es $B_{L_\mu}(0) = [0, 1]$.

- ii) $1 < \mu \leq 3$.

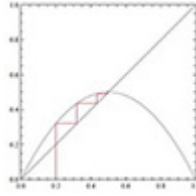


Figura 2.2. Aplicación logística para $1 < \mu < 2$

Tenemos que $c = 1 - \frac{1}{\mu}$ es punto fijo atractor, de modo que denotamos su cuenca de atracción inmediata por $I = (a, b)$. Es decir para todo $x \in I$, $L_\mu^n(x) \rightarrow c$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Por otro lado denotamos la cuenca de atracción de $c = 1 - \frac{1}{\mu}$ por $B_\mu(c)$. Como $L_\mu(0) = 0$ y $L_\mu(1) = 0$, tenemos que $0, 1 \notin B_\mu(c)$; es decir, $B_\mu(c) \neq [0, 1]$. De hecho vamos a ver que para $I = (a, b)$, $a, b \notin B_\mu(c)$.

Por el teorema de los Valores Intermedios, $L_\mu(a, b)$ es un intervalo contenido en (a, b) para el que si $x \in (a, b)$, $L_\mu^n(L_\mu(x)) \rightarrow c$ cuando $n \rightarrow \infty$. Sea x_n una sucesión en (a, b) que converge a a , $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Entonces por continuidad de L_μ , $\lim_{n \rightarrow \infty} L_\mu(x_n) = L_\mu(a)$.

Por otro lado, como $x_n \in (a, b)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se tiene que $L_\mu(x_n) \in (a, b)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Entonces como $L_\mu(a) \notin (a, b)$, esto solo podrá ocurrir si $L_\mu(a) = a$ o $L_\mu(a) = b$ (y lo mismo para b). Las posibilidades para que se de esto son:

1. a y b son puntos fijos.
2. a y b son puntos fijos eventuales.
3. $\{a, b\}$ es un 2-ciclo, es decir, $L_\mu(a) = b$ y $L_\mu(b) = a$.

Veamos que 3. no puede ocurrir:

$$L_\mu^2(x) - x = \mu^2 x(1 - (\mu + 1)x + 2\mu x^2 - \mu x^3) - x = -x(\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1)(\mu x - \mu + 1),$$

ya a, b deben satisfacer esta ecuación.

Si separamos los dos factores de la ecuación que nos dan los puntos fijos, el discriminante del factor cuadrático es $\mu^2(\mu + 1)^2 - 4\mu^2(\mu + 1) = \mu^2(\mu + 1)(\mu - 3)$. Para $1 < \mu < 3$ este discriminante es negativo, y para $\mu = 3$ es nulo. Por tanto no existe dicho 2-ciclo para $1 < \mu < 3$.

Esto implica que se da 1 o 2, y como 0,1 son los únicos puntos fijos (o puntos fijos eventuales) en $[0,1]$, se concluye que $a = 0$ y $b = 1$.

En consecuencia, $B_\mu(1 - \frac{1}{\mu}) = (0, 1)$. □

Nota 2.2.3 Cuando $\mu = 2$, $x = \frac{1}{2}$ es **punto fijo superatractor** ya que verifica $L_2'(\frac{1}{2}) = 0$. Como acabamos de ver su correspondiente cuenca de atracción será $(0,1)$.

2.3. Puntos periódicos

Los puntos con órbitas finitas son de gran importancia en el estudio del comportamiento de los sistemas dinámicos. En esta sección los caracterizaremos de forma general, y en la siguiente veremos el caso particular de la ecuación logística, pues nos permitirán avanzar en su análisis para $\mu > 3$.

Definición 2.3.1 Sea $f : X \rightarrow X$ función y sea $c \in X$. Entonces:

i) c es un **punto periódico** de $f(x)$ de **periodo** $r \in \mathbb{Z}^+$ si $f^r(c) = c$ y $f^k(c) \neq c$ para $0 < k < r$ (en particular c es punto fijo de f^r). Denotamos

$$\text{Per}_r(f) = \{x \in X : f^r(x) = x\}.$$

ii) c es **eventualmente periódico** de f si existe $m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $f^m(c)$ es punto periódico de f (asumiendo que c no es periódico).

iii) c es **estable** (respectivamente **asintóticamente estable**, **inestable**, etc.) si es punto fijo estable de f^r .

Nota 2.3.1 El conjunto $O(c) = \{c, f(c), f^2(c), \dots, f^{r-1}(c)\}$ es un r -ciclo.

Teniendo en cuenta esta definición, es evidente que $Fix(f) \subset Per_n(f)$ para $n = 1, 2, \dots$

Para la caracterización de los puntos periódicos disponemos del siguiente teorema.

Teorema 2.3.2 *Supongamos que c es punto periódico de periodo r de la función f , y supongamos $f'(x)$ continua en c . Si $c_i = f^i(c)$, $i = 0, 1, 2, \dots, r - 1$, entonces:*

i) c es asintóticamente estable si

$$|f'(c_0)f'(c_1)f'(c_2) \dots f'(c_{r-1})| < 1.$$

ii) c es repulsor si

$$|f'(c_0)f'(c_1)f'(c_2) \dots f'(c_{r-1})| > 1.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad veamos la demostración para $r = 3$, que además es un caso típico.

Tenemos

$$O(c) = \{c, f(c), f^2(c)\} = \{c_0, c_1, c_2\}.$$

Entonces:

$$\frac{d}{dx}(f^3(x)) = \frac{d}{dx}(f(f^2(x))) = f'(f^2(x))(f^2(x))' = f'(f^2(x))f'(f(x))f'(x)$$

de modo que para $x = c$

$$\frac{d}{dx}(f^3(c)) = f'(f^2(c))f'(f(c))f'(c) = f'(c_2)f'(c_1)f'(c_0)$$

y por el teorema 1.3.1 se obtiene el resultado. □

2.4. Puntos periódicos de la aplicación logística

Ahora podemos ampliar el estudio del comportamiento de la aplicación logística.

Teorema 2.4.1 *Para $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ la aplicación logística $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ tiene un 2-ciclo asintóticamente estable. Para $1 + \sqrt{6} < \mu$ dicho 2-ciclo es inestable.*

Demostración. Para encontrar los 2-ciclos de la ecuación logística $L_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$ resolvemos la ecuación

$$\begin{aligned} L_\mu^2(x) &= x \\ \mu[\mu x(1 - x)][1 - \mu x(1 - x)] - x &= 0 \\ -\mu^3 x^4 + 2\mu^3 x^3 - (\mu^3 + \mu^2)x^2 + \mu^2 x - x &= 0. \end{aligned}$$

Como $c = 0$ y $c = 1 - \frac{1}{\mu}$ son puntos fijos de $L_\mu(x)$, x y $x - (1 - \frac{1}{\mu})$ deben ser factores de la ecuación, de modo que:

$$L_\mu^2(x) - x = -x(\mu x - \mu + 1)(\mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1),$$

obteniendo una ecuación cuadrática que no tiene raíces reales si $\mu < 3$:

$$\begin{aligned} \mu^2 x^2 - \mu(\mu + 1)x + \mu + 1 &= 0 \\ c &= \frac{\mu(\mu+1) \pm \sqrt{\mu^2(\mu+1)^2 - 4\mu^2(\mu+1)}}{2\mu^2} \\ &= \frac{(1+\mu) \pm \sqrt{(\mu-3)(\mu+1)}}{2\mu}. \end{aligned}$$

Sean c_1 y c_2 las raíces resultantes (que dependen de μ). Buscamos que el 2-ciclo sea asintóticamente estable, por tanto hacemos

$$\begin{aligned} |(L_\mu^2)'(c_1)| &= |L'_\mu(c_1)L'_\mu(c_2)| < 1 \\ -1 < \mu^2(1 - 2c_1)(1 - 2c_2) &< 1 \\ -1 < (-1 - \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3})(-1 + \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3}) &< 1 \\ -1 < 1 - (\mu^2 - 2\mu - 3) &< 1, \end{aligned}$$

de donde salen dos inecuaciones:

$$\mu^2 - 2\mu - 3 > 0 \text{ y } \mu^2 - 2\mu - 5 < 0$$

y resolviendo obtenemos el rango de valores de μ buscado:

$$3 < \mu < 1 + \sqrt{6}.$$

Además $\mu = 1 + \sqrt{6}$ se tiene

$$L'_\mu(c_1)L'_\mu(c_2) = -1,$$

de modo que el 2-ciclo es no hiperbólico. Calculando su derivada schwarziana obtenemos

$$SL_{\mu}^2(c_1) < 0$$

así que por la caracterización 1.4.2. , el 2-ciclo también es asintóticamente estable.

Por tanto hemos obtenido que en general $\{c_1, c_2\}$ es asintóticamente estable para $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, y que para $\mu > 1 + \sqrt{6}$ dicho 2-ciclo es inestable. \square

Ahora buscamos un periodo superatractor de L_{μ} cuando $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, ya que esto ilustra lo que sucede para 2^n -ciclos.

Proposición 2.4.2 *Cuando $\mu = 1 + \sqrt{5}$, $\{\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\}$ es un 2-ciclo superatractor de $L_{\mu}(x)$.*

Demostración. Acabamos de ver que para $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$, $L_{\mu}(x)$ presenta un 2-ciclo asintóticamente estable. Vamos a buscar en particular uno que es además superatractor. Supongamos $\{x_1, x_2\}$ ese 2-ciclo de L_{μ} superatractor. Entonces se tiene que verificar

$$x_1 = \mu x_2(1 - x_2) \text{ y } x_2 = \mu x_1(1 - x_1),$$

de modo que multiplicando las ecuaciones entre sí obtenemos

$$\mu^2(1 - x_1)(1 - x_2) = 1.$$

Por otro lado, por la condición de punto fijo superatractor

$$(L_{\mu}^2)'(x_1) = L'_{\mu}(x_2)L'_{\mu}(x_1) = 0$$

es decir

$$\mu^2(1 - 2x_1)(1 - 2x_2) = 0.$$

Luego $x_1 = \frac{1}{2}$ o $x_2 = \frac{1}{2}$. Suponiendo el segundo caso sin pérdida de generalidad, entonces $x_1 = \frac{\mu}{4}$, y sustituyendo en la primera ecuación tenemos:

$$\begin{aligned}\mu^2\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) &= 1 \\ \mu^3 - 4\mu^2 + 8 &= 0 \\ (\mu - 2)(\mu^2 - 2\mu - 4) &= 0\end{aligned}$$

y esto nos da $\mu = 1 + \sqrt{5}$. Concluimos que efectivamente el 2-ciclo superatractor buscado es $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right\}$. \square

2.5. Análisis gráfico para $1 + \sqrt{6} < \mu \leq 4$ y diagramas de Feigenbaum

Cuando μ sobrepasa $1 + \sqrt{6}$, y hasta llegar al valor 3.57 aproximadamente, el comportamiento de la función logística es el siguiente: el 2-ciclo deja de ser atractor y pasa a ser repulsor. Al mismo tiempo se crea un 4-ciclo atractor que se mantiene hasta que μ supere un valor determinado. En ese momento dicho 4-ciclo se convierte en repulsor y se crea un 8-ciclo atractor. En general ocurre que al superar μ un determinado punto b_n , se crea un 2^{n-1} -ciclo atractor que se mantiene hasta que μ alcanza un cierto b_{n+1} , $n \in \mathbb{Z}^+$. Además cada uno de esos ciclos pasa a ser superatractor en algún s_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ ($b_n < s_n < b_{n+1}$).

El comportamiento de la ecuación logística, incluido el ilustrado en el párrafo anterior, se puede ver y ampliar mediante un **diagrama de bifurcación** o **diagrama de Feigenbaum**. Dicho diagrama representa los valores de μ entre 0 y 4 en el eje X , y valores de $L_\mu^n(x)$ en el eje Y . La idea es calcular las primeras 500 iteraciones para un x_0 arbitrario, para cada valor de μ , y representar en el diagrama las últimas 50 iteraciones.

- Para $\mu \in [0, 1]$ el único punto del diagrama es el 0. Esto indica que el comportamiento a largo plazo es un punto fijo, el 0.
- Para μ variando entre 1 y 3 las iteraciones se acercan al punto fijo $1 - \frac{1}{\mu}$, y es aproximadamente dicho valor el que vemos representado.
- Cuando $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ el punto fijo deja de ser atractor y desaparece, pero se crea el 2-ciclo y en el diagrama observamos la primera bifurcación.

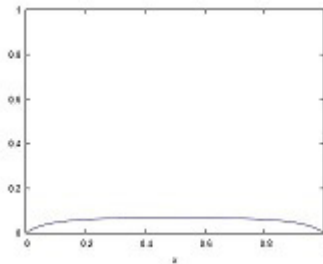
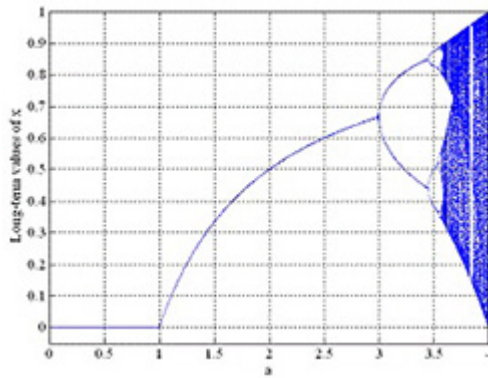


Figura 2.3. Décima iteración de la aplicación logística para $\mu = 1$.

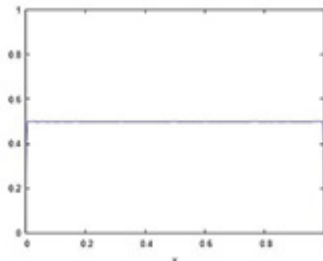


Figura 2.4. Décima iteración de la aplicación logística para $\mu = 2$.

- En el momento en que $\mu = 1 + \sqrt{6}$ el diagrama se vuelve a bifurcar y aparece el 4-ciclo.
- Las áreas oscuras del diagrama representan los valores de μ para los que la dinámica de las iteraciones no es convergente a un punto, ni tampoco oscilatoria.

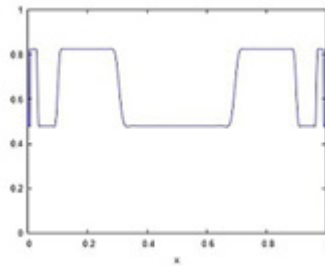


Figura 2.5. Décima iteración de la aplicación logística para $\mu = 3,3$.

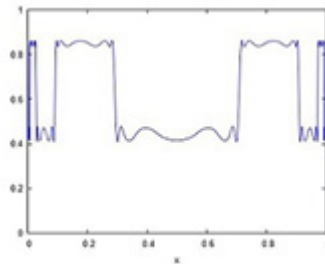


Figura 2.6. Décima iteración de la aplicación logística para $\mu = 3,45$.

Puede verse claramente el 8-ciclo que sigue al 4-ciclo, e incluso se podría apreciar el 16-ciclo con una imagen mayor. Pero además podemos intuir que para estos valores de μ existen todos los $2^n - \text{ciclos}$.

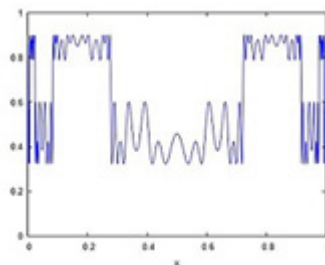


Figura 2.7. Décima iteración de la aplicación logística para $\mu = 3,6$.

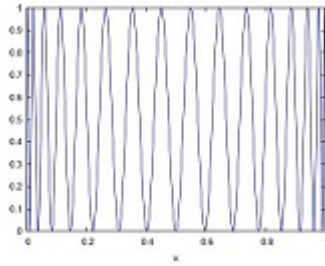


Figura 2.8. Quinta iteración de la aplicación logística para $\mu = 4$.

2.6. El teorema de Sharkovsky

En 1975 Li y Yorke probaron el siguiente teorema.

Teorema 2.6.1 *Sea $f : X \rightarrow X$ una función continua definida en un intervalo $X \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto periódico de periodo tres, entonces para todo $k = 1, 2, 3, \dots$ f tiene un punto periódico de periodo k .*

Poco tiempo después salió a la luz un teorema mucho más general, obra del matemático ucraniano Sharkovsky, publicado en 1964 en ruso en una revista ucraniana. Dicho teorema era desconocido en occidente hasta que el interés del Teorema de Li-Yorke lo puso de relevancia.

Para entender este teorema hay que definir un nuevo orden para los enteros positivos \mathbb{Z}^+ . En el «Orden de Sharkovsky» el 3 es el número mayor, seguido por el 5 y luego el 7; a continuación van el resto de enteros impares; les sigue el $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, y el resto de enteros impares multiplicados por 2; a continuación aparecen todos enteros impares multiplicados por 2^2 ; luego multiplicados por 2^3 ; y así hasta llegar a los multiplicados por 2^n ; por último aparecen todas las potencias de 2 en orden decreciente. En otras palabras:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \cdot 3 \triangleright 2^n \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^n \triangleright 2^{n-1} \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1.$$

Teorema 2.6.2 (Teorema de Sharkovsky) *Sea $f : X \rightarrow X$ una aplicación continua en un intervalo $X \subset \mathbb{R}$. Si f tiene un punto periódico de periodo k , entonces tiene puntos periódicos de periodo r , para todo $r \in \mathbb{Z}^+$, $k \triangleright r$.*

Sistemas dinámicos y caos

3.1. Sistemas dinámicos

Definición 3.1.1 *Un sistema dinámico (discreto) es un par (X, T) formado por un espacio métrico X y una aplicación continua $T : X \rightarrow X$.*

Cuando el espacio X es conocido, el sistema dinámico puede denotarse simplemente $T : X \rightarrow X$. Además utilizaremos la notación Tx para referirnos a $T(x)$.

Dado que nos interesa la evolución de un sistema a partir de un determinado estado x_0 , vamos a considerar las iteraciones sucesivas de T ,

$$T^n = T \circ T \circ \dots \circ T, \text{ } n \text{ veces,}$$

siendo

$$T^0 = I$$

donde I es el operador identidad en X . Además recordemos que la órbita de un punto $x \in X$ por la aplicación T viene dada por el conjunto

$$\text{orb}(x, T) = \{x, Tx, T^2x, \dots\}.$$

Ejemplo 3.1.1 *Algunos ejemplos de sistemas dinámicos son:*

1. La aplicación logística

La aplicación logística vista en los primeros capítulos, $L_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $L_\mu x = \mu x(1 - x)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

2. La aplicación cuadrática

La aplicación cuadrática viene dada por el sistema dinámico real $Q_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \rightarrow x^2 + c$, siendo $c \in \mathbb{R}$ un parámetro; o por el correspondiente sistema dinámico complejo $Q_c : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \rightarrow z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.

3. La aplicación doblante del círculo

Dada la aplicación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $Tz = z^2$, sus iteraciones son de la forma $T^n z = z^{2^n}$. Entonces se tiene que las órbitas de los z tales que $|z| < 1$ tienden a cero, mientras que para los z tales que $|z| > 1$ dichas órbitas tienden a infinito.

Para los z tales que $|z| = 1$, si denotamos la circunferencia unidad por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, resulta que $T(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Por tanto el sistema dinámico de más interés es el $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $z \rightarrow z^2$, que duplica el argumento de los $z \in \mathbb{C}$ que están sobre la circunferencia unidad.

4. La aplicación rotación del círculo

El sistema $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $z \rightarrow e^{i\alpha} z$, $\alpha \in [0, 2\pi)$ describe la rotación de un punto z sobre la circunferencia unidad por un ángulo α . Se verá más adelante que este comportamiento dinámico depende en gran medida de que las rotaciones sean racionales ($\alpha \in \pi\mathbb{Q}$) o irracionales ($\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$).

5. La aplicación tienda

La aplicación tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$Tx = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

6. La aplicación doblante en un intervalo

Se considera el intervalo $[0, 1]$ en el que identificamos el 0 con el 1. La métrica en este espacio viene dada por $d(x, y) = \min\{|x - y|, 1 - |x - y|\}$. Entonces la aplicación $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$Tx = 2x \pmod{1} = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

describe un sistema dinámico.

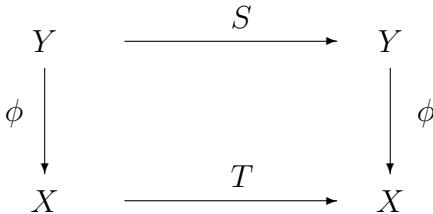
7. **La aplicación traslación en un intervalo**

Identificando de nuevo 0 y 1, la aplicación $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $x \rightarrow x + \alpha \pmod{1}$ describe la variación por $\alpha, \pmod{1}$, de todo punto del intervalo unidad.

3.2. Sistemas dinámicos equivalentes

Definición 3.2.1 Sean $S : Y \rightarrow Y$ y $T : X \rightarrow X$ dos sistemas dinámicos. Entonces:

1. Se dice que T es **cuasiconjugado** de S si existe una aplicación continua $\phi : Y \rightarrow X$ de rango denso tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$; es decir, cuando se verifica el siguiente diagrama:



2. En el caso de que exista un homeomorfismo ϕ que verifique $T \circ \phi = \phi \circ S$, S y T se dirán **conjugados**.

La conjugación es una relación de equivalencia entre sistemas dinámicos, por lo que dos sistemas conjugados son **equivalentes**, y es esperable que sistemas dinámicos equivalentes tengan un comportamiento similar. Sin embargo no siempre resultará fácil ver cuando dos sistemas son conjugados.

Proposición 3.2.1 Para $\mu \in (0, 2)$ las aplicaciones logísticas L_μ y $L_{2-\mu}$ son conjugadas.

Demostración. Tenemos $L_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow L_\mu x = \mu x(1 - x)$ y $L_{2-\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow L_{2-\mu} x = (2 - \mu)x(1 - x)$. Veamos que tomando

como homeomorfismo $\phi(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $L_{2-\mu} \circ \phi = \phi \circ L_\mu$ y el diagrama siguiente conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{L_\mu} & \mathbb{R} \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{L_{2-\mu}} & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Por un lado

$$L_{2-\mu}\phi(x) = (\mu a^2 - 2a^2)x^2 + (2a - \mu a - 4ab + 2\mu ab)x + (\mu b^2 - \mu b + 2b - 2b^2)$$

$$\text{Y por otro, } \phi(L_\mu x) = a[\mu x(1 - x)] + b = \mu ax - \mu ax^2 + b$$

Entonces imponiendo la conmutatividad del diagrama obtenemos el sistema:

$$\left. \begin{aligned}
 a(\mu a - 2a + \mu) &= 0 \\
 2a(1 - \mu - 2b + \mu b) &= 0 \\
 b(\mu b - \mu + 1 - 2b) &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

de donde se obtiene $a = -\frac{\mu}{\mu-2}$ y $b = \frac{\mu-1}{\mu-2}$.

Por tanto $\phi(x) = -\frac{\mu}{\mu-2}x + \frac{\mu-1}{\mu-2}$ para $\mu \in (0, 2)$ es una aplicación continua, biyectiva, y su inversa $\phi^{-1}(y) = \frac{2-\mu}{\mu}y + \frac{\mu+1}{\mu}$ es continua para $y \in \mathbb{R}$. □

Proposición 3.2.2 *La aplicación logística L_4 es conjugada de la aplicación cuadrática Q_{-2} .*

Demostración. Tenemos $L_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $L_4x = 4x(1 - x)$ y $Q_{-2} : [-2, 2] \rightarrow [-2, 2]$, $Q_{-2}x = x^2 - 2$. Veamos que tomando como homeomorfismo $\phi(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se cumple que $Q_{-2} \circ \phi = \phi \circ L_4$. Es decir, el correspondiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{L_4} & [0, 1] \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 [-2, 2] & \xrightarrow{Q_{-2}} & [-2, 2]
 \end{array}$$

Por un lado tenemos $\phi[L_4x] = 4ax - 4ax^2 + b$

Y por otro $Q_{-2}[\phi(x)] = Q_{-2}(ax + b) = (ax + b)^2 - 2 = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2$

Entonces imponiendo la conmutatividad del diagrama

$$\begin{aligned}
 a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2 &= 4ax - 4ax^2 + b \iff \\
 (a^2 + 4a)x^2 + (2ab - 4a)x + (b^2 - 2 - b) &= 0
 \end{aligned}$$

queda el sistema:

$$\left. \begin{aligned}
 a(a + 4) &= 0 \\
 2a(b - 2) &= 0 \\
 b^2 - 2 - b &= 0
 \end{aligned} \right\}$$

para el que se obtienen los valores $a = -4$ y $b = 2$ que verifican la igualdad buscada.

Y puede verse que $\phi(x) = -4x + 2$ es continua, biyectiva y con inversa continua.

□

Proposición 3.2.3 *La aplicación logística L_4 , restringida al intervalo $[0,1]$, es conjugada de la aplicación tienda.*

Demostración. Tenemos que la aplicación tienda es

$$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1], T x = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{si } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Veamos que tomando $\phi(x) = \sin^2(\frac{\pi}{2}x)$ el correspondiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{T} & [0, 1] \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 [0, 1] & \xrightarrow{L_4} & [0, 1]
 \end{array}$$

Por un lado tenemos $L_4\phi(x) = 4 \sin^2(\frac{\pi}{2}x)[1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}x)] = 4 \sin^2(\frac{\pi}{2}x) \cos^2(\frac{\pi}{2}x) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}x) \cos(\frac{\pi}{2}x) = \sin^2(\pi x)$.

Y por otro tenemos dos casos:

- $\phi(Tx) = 2 \sin(\frac{\pi}{2}x) = \sin^2(\pi x) = L_4\phi(x)$ si $x \in [0, \frac{1}{2}]$.
- $\phi(Tx) = \sin^2[\frac{4\pi-4\pi x}{2}] = 2 - 2 \sin(\frac{\pi}{2}x) = 2 - \sin^2(\pi x) = \sin^2(\pi(1-x)) = \sin^2(\pi x) = L_4\phi(x)$ si $x \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Y ϕ es homeomorfismo por ser continua y biyectiva, y su inversa $\phi^{-1}(y) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1}(\sqrt{y})$, $y \in [0, 1]$ es continua. □

Proposición 3.2.4 *La aplicación logística L_4 , restringida al intervalo $[0, 1]$, es conjugada de la aplicación duplicación del intervalo.*

Demostración. La aplicación duplicación del intervalo está dada por $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $Tx = 2x$ (mód 1). Veamos que tomando $\phi(x) = \sin^2(\pi x)$, el correspondiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{T} & [0, 1] \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\
 [0, 1] & \xrightarrow{L_4} & [0, 1]
 \end{array}$$

Por un lado, $L_4\phi(x) = 4 \sin^2(\pi x)(1 - \sin^2(\pi x)) = 4 \sin^2(\pi x) \cos^2(\pi x) = (2 \sin(\pi x) \cos(\pi x))^2 = \sin^2(2\pi x)$

$$\text{Y por otro, } \phi(Tx) = \sin^2[\pi(2x \pmod{1})] = \begin{cases} \sin^2(2\pi x) & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \sin^2(\pi(2x - 1)) = \sin^2(2\pi x) & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

ϕ es homeomorfismo por ser continua, biyectiva y de inversa $\phi^{-1}(y) = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \sqrt{y}$ continua. □

Por los últimos tres ejemplos concluimos que la aplicación tienda T , la aplicación logística L_4 , la aplicación cuadrática Q_{-2} y la aplicación duplicación del intervalo son conjugadas unas de otras.

Definición 3.2.2 *Se dice que una propiedad P de un sistema dinámico se **conserva por (cuasi)conjugación** si dado un sistema dinámico $S : Y \rightarrow Y$ con la propiedad P , entonces todo $T : X \rightarrow X$ (cuasi)conjugado a S también tendrá dicha propiedad.*

3.3. Aplicaciones topológicamente transitivas

Definición 3.3.1 *Sea $T : X \rightarrow X$ un sistema dinámico. Entonces un subconjunto $Y \subset X$ se dice **T-invariante** o **invariante bajo T** si $T(Y) \subset Y$.*

Luego si $Y \subset X$ es invariante bajo T , entonces $T|_Y : Y \rightarrow Y$ también es un sistema dinámico.

Ejemplo 3.3.1 *El intervalo $[0, 1]$ es invariante bajo la aplicación logística L_μ para $0 < \mu \leq 4$.*

Para el estudio de los sistemas dinámicos se considerará que el sistema $T : X \rightarrow X$ es **irreducible** si X no se puede dividir en dos subconjuntos invariantes bajo T con interior no vacío.

Proposición 3.3.1 *Sea $T : X \rightarrow X$ un sistema dinámico. Entonces se verifica (i) \iff (ii) \iff (iii) \iff (iv) \iff (v) donde:*

- i) X no se puede escribir como $X = A \cup B$ siendo A, B subconjuntos de X invariantes bajo T y de interior no vacío.
- ii) X no puede escribirse como $X = A \cup B$ para A, B subconjuntos disjuntos de X de interior no vacío, siendo A invariante bajo T .

- iii) Para todo par U, V de subconjuntos no vacíos de X existe $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
- iv) Para cualquier subconjunto U de X abierto y no vacío, el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ es denso en X .
- v) Para cualquier subconjunto U de X abierto y no vacío, el conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ es denso en X .

Demostración.

- (ii) \implies (i) Trivial.
- (ii) \implies (iv) Sea un abierto U de X , $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ y sea $B = X \setminus A$. A es invariante bajo T , y al contener a U su interior, también es no vacío. Entonces por hipótesis de (ii), B debe tener interior vacío. Se concluye por tanto que A es denso.
- (iii) \implies (ii) Veamos por contrarrecíproco. Para ello supongamos $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y $T(A) \subset A$. Entonces $\text{int}(A)$ e $\text{int}(B)$ son conjuntos abiertos con $T^n(\text{int}(A)) \cap \text{int}(B) \subset A \cap B = \emptyset$ para todo $n \geq 0$. Luego por hipótesis de (iii), esto ocurre sólo si A o B tiene interior vacío.
- (iii) \iff (iv) Trivial.
- (iii) \iff (v) Notar que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ es equivalente a $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$. \square

Como puede verse, la condición (iii) es más fuerte que la irreducibilidad de un sistema dinámico.

Definición 3.3.2 Un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ se dice **topológicamente transitivo** si, para todo par U, V de subconjuntos de X abiertos y no vacíos, existe $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Proposición 3.3.2 La aplicación tienda es topológicamente transitiva.

Demostración. Para ver esto, notar que T^n es una aplicación lineal a trozos de la forma

$$\begin{cases} T^n\left(\frac{2k}{2^n}\right) = 0 & \text{si } k = 0, 1, 2, \dots, 2^{n-1} \\ T^n\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = 1 & \text{si } k = 1, 2, \dots, 2^{n-1} \end{cases}$$

Sea $U \subset [0, 1]$ abierto no vacío. Entonces U contiene algún intervalo de la forma $J := [\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$, y como $[0, 1] = T^n(J) \subset T^n(U)$, $T^n(U)$ encuentra a todo abierto no vacío de $[0, 1]$. \square

Proposición 3.3.3 *La aplicación doblante del círculo, $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $z \rightarrow z^2$, es topológicamente transitiva.*

Demostración. Todo abierto no vacío $U \subset \mathbb{T}$ contiene un arco cerrado del ángulo $\frac{2\pi}{2^n}$, para algún $n \geq 1$. Dado que la aplicación T duplica ángulos, se tiene que $T^n(U)$ contiene un arco cerrado de 2π . Por tanto $T^n(U) = \mathbb{T}$ encuentra a todo abierto no vacío de \mathbb{T} . \square

Proposición 3.3.4 *Ninguna rotación racional $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$, $z \rightarrow e^{i\alpha}z$, es topológicamente transitiva. Por contra toda rotación irracional es topológicamente transitiva.*

Por ejemplo, si $\alpha = \frac{2\pi}{n}$, entonces las iteraciones de un arco abierto γ del ángulo $\frac{\pi}{n}$ nunca encontrarán al arco $e^{i\frac{\pi}{n}}\gamma$.

Proposición 3.3.5 *La transitividad topológica se conserva por cuasiconjugación*

Demostración. Sea $T : X \rightarrow X$ cuasiconjugada de $S : Y \rightarrow Y$ mediante $\phi : Y \rightarrow X$, siendo S topológicamente transitiva, y sean U y V subconjuntos de X abiertos y no vacíos. Dado que ϕ es continua y de rango denso, $\phi^{-1}(U)$ y $\phi^{-1}(V)$ serán abiertos y no vacíos. Entonces existirá $y \in \phi^{-1}(U)$ y $n \geq 0$ tales que $S^n y \in \phi^{-1}(V)$, lo que implica que $\phi(y) \in U$ y $T^n \phi(y) = \phi(S^n y) \in V$. \square

Por las proposiciones 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4, además del resultado anterior, se tiene la siguiente conclusión.

Corolario 3.3.6 *La aplicación logística L_4 , la cuadrática Q_{-2} y la duplicación del intervalo en $[0, 1]$ son topológicamente transitivas.*

La equivalencia de las condiciones (iv) y (v) en la Proposición 3.3.1 implican el siguiente resultado.

Proposición 3.3.7 *Sea $T : X \rightarrow X$ un sistema dinámico con inversa continua T^{-1} . Entonces T es topológicamente transitiva si y sólo si T^{-1} lo es.*

La transitividad topológica se puede interpretar diciendo que T conecta todas las partes no triviales de X . Y esto ocurrirá en espacios sin puntos aislados siempre que haya un punto $x \in X$ con órbita densa bajo T .

Proposición 3.3.8 *Sea T una aplicación continua sobre un espacio métrico X sin puntos aislados. Entonces:*

- i) *Si $x \in X$ tiene órbita densa bajo T , entonces también la tendrá cada $T^n x$, $n \geq 1$.*
- ii) *Si T tiene órbita densa entonces es topológicamente transitiva.*

Demostración.

- i) $orb(x, T) \setminus \{x, Tx, \dots, T^{n-1}x\}$ está contenido en $orb(T^n x, T)$, y en cualquier espacio métrico sin puntos aislados un conjunto denso permanece denso aún después de quitar una cantidad finita de puntos.
- ii) Supongamos que $x \in X$ tiene órbita densa bajo T . Sean U y V subconjuntos de X abiertos no vacíos. Entonces, como T tiene órbita densa por hipótesis, existe algún $n \geq 0$ tal que $T^n x \in U$. Por otro lado (i) implica que $T^n x$ tiene también órbita densa, de modo que hay algún $m \geq n$ tal que $T^m x \in V$. Concluimos que $T^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

El siguiente ejemplo muestra que la condición de no tener puntos aislados no puede ser omitida.

Ejemplo 3.3.2 *Consideremos la aplicación $f : X \rightarrow X$ siendo $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ equipado con la métrica $d(x, y) = |x - y|$ para todo $x, y \in X$, siendo $f(0) = 0$ y $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, \dots$. Sean $U = \{\frac{1}{2}\}$ y $V = \{1\}$. Entonces $f(U) \cap V = \emptyset$ y por tanto f no es topológicamente transitiva. Sin embargo $orb(1, f) = \{\frac{1}{n}\}$, que es densa en X .*

En espacios métricos completos y separables las aplicaciones topológicamente transitivas deben tener órbita densa. Este resultado fue obtenido por primera vez en 1920 por G.D. Birkhoff.

Teorema 3.3.9 (Teorema de transitividad de Birkhoff)

Sea T una aplicación continua sobre un espacio métrico completo y separable X sin puntos aislados. Entonces son equivalentes:

- i) T es topológicamente transitiva.
- ii) Existe algún $x \in X$ tal que $\text{orb}(x, T)$ es densa en X .

Si una de esas condiciones se cumple, entonces el conjunto de puntos de X con órbita densa en un conjunto G_δ denso.

Demostración. Por la proposición anterior, (ii) implica (i). Veamos entonces la implicación contraria.

Sea T topológicamente transitiva y denotamos $D(T)$ el conjunto de puntos de X que tienen órbita densa bajo T . Por ser separable, X contiene un conjunto denso numerable $\{y_j : j \geq 1\}$. Entonces las bolas abiertas de radio $\frac{1}{m}$ y centro y_j , con $m, j \geq 1$, forman una base numerable $(U_k)_{k \geq 1}$ de la topología de X .

Por tanto $x \in D(T)$ llegará por iteraciones de T a todos los abiertos de X , y en particular a los de la base $(U_k)_{k \geq 1}$. Es decir, x pertenece a $D(T)$ si y sólo si, para cada $k \geq 1$, existe un $n \geq 0$ tal que $T^n x \in U_k$. Entonces podemos escribir el conjunto de puntos de X que tienen órbita densa como

$$D(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

Por continuidad de T y la Proposición 3.3.1, cada conjunto $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$, $k \geq 1$, es abierto y denso. Como X es espacio de Baire por ser métrico completo, toda intersección de abiertos densos será densa, luego $D(T)$ es un conjunto denso. Y como $(U_k)_{k \geq 1}$ es numerable, $D(T)$ es en particular un conjunto G_δ denso, y por tanto es no vacío. □

Nota 3.3.10 Notar que la ausencia de puntos aislados no es necesaria para la demostración de que (i) \implies (ii).

Ejemplo 3.3.3 De los ejemplos 3.3.2 y 3.3.3 se sigue que la aplicación tienda y la doblante del círculo tienen órbitas densas

por ser topológicamente transitivas y $[0, 1]$, \mathbb{T} espacios de Baire respectivamente.

En las rotaciones irracionales ($\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$) todas sus órbitas son densas.

El siguiente ejemplo demuestra que la hipótesis de completitud no puede ser ignorada en el Teorema de transitividad.

Ejemplo 3.3.4 Sea X el conjunto de todos los puntos en el círculo unidad que son raíces 2^n -ésimas de la unidad, para algún $n \geq 1$. La aplicación doblante restringida a X es topológicamente transitiva, pero claramente no tiene órbitas densas.

Proposición 3.3.11 La propiedad de tener órbita densa se conserva por cuasiconjugación.

Demostración. Sea $T : X \rightarrow X$ cuasiconjugada de $S : Y \rightarrow Y$ mediante $\phi : Y \rightarrow X$, y sea $y \in Y$ de órbita densa bajo S . Si U es subconjunto abierto no vacío de X , entonces $\phi^{-1}(U)$ es abierto no vacío por continuidad de ϕ , de modo que alguna iteración $S^n y$, $n \geq 0$, encontrará a $\phi^{-1}(U)$. Por tanto $T^n \phi(y) = \phi(S^n y)$ pertenece a U , y se concluye que $\phi(y)$ tiene órbita densa bajo T . \square

Proposición 3.3.12 La aplicación logística tiene órbita densa.

Demostración. Por la Proposición 3.2.3 tenemos que L_4 en $[0, 1]$ es conjugada de la aplicación tienda, y por el Ejemplo 3.3.3 vemos que la aplicación tienda tiene órbita densa. Por tanto concluimos que la aplicación logística L_4 en $[0, 1]$ también tiene órbita densa. \square

3.4. Caos

Tomaremos la definición de caos propuesta por Devaney en 1986. Dicha definición consta de tres ingredientes que procederemos a estudiar en orden.

El primero de estos ingredientes es la idea del llamado efecto mariposa: pequeños cambios en el estado inicial pueden conducir, después de algún tiempo, a grandes discrepancias en las órbitas. En adelante consideraremos espacios sin puntos aislados para asegurar que dicho comportamiento es posible.

Definición 3.4.1 Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces se dice que un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ tiene **dependencia sensible de las condiciones iniciales** si existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in X$ con $d(x, y) < \varepsilon$ tal que, para algún $n \geq 0$, $d(T^n x, T^n y) > \delta$. El número δ se denomina **constante de sensibilidad** de T .

Notar que esta definición involucra la métrica del espacio. En los siguientes ejemplos consideremos la métrica usual.

Ejemplo 3.4.1 (a) La aplicación tienda tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{1}{4}$. De hecho si $x \in [0, 1]$ y $\varepsilon > 0$, existe $n \geq 0$ tal que la bola abierta de radio ε y centro x contiene puntos y_1 e y_2 para los que $T^n y_1 = 0$ y $T^n y_2 = 1$. Por tanto $|T^n x - T^n y_j| \geq \frac{1}{2}$ para algún $j \in \{1, 2\}$.

(b) Un argumento similar al visto en (a) basado en el hecho de que la aplicación doblante del círculo duplica ángulos, muestra que dicha aplicación tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

(c) Ninguna rotación del círculo tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales ya que claramente $|T^n z_1 - T^n z_2| = |z_1 - z_2|$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{T}$.

Proposición 3.4.1 Sea un intervalo no necesariamente finito I y sea $T : I \rightarrow I$ tal que $|T'(x)| > a > 1$, para todo $x \in I$. Entonces T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Demostración. Sean $x, y \in I$. Entonces para $c_n \in (x, y) \subset I$

$$|T^{(n+1)}(x) - T^{(n+1)}(y)| = |T(T^{(n)}(x)) - T(T^{(n)}(y))| = |T'(c_n)| |T^n(x) - T^n(y)| \geq a |T^n(x) - T^n(y)| \geq a^n |x - y| \rightarrow \infty.$$

□

Ejemplo 3.4.2 La aplicación $T : X \rightarrow X$ definida por $Tx = 2x$ tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.

La segunda condición del caos demanda que el sistema sea irreducible en el sentido de que la aplicación T conecte todas las partes no triviales de X , y dicha idea está bien captada por la transitividad topológica vista en la sección anterior.

La tercera condición implica que el sistema tenga muchas órbitas de comportamiento regular; más precisamente, que haya un conjunto denso puntos con órbitas periódicas.

Recordemos que un punto $x \in X$ se llama punto fijo de T si $Tx = x$; y que un punto $x \in X$ se denomina punto periódico de T si existe algún $n \geq 1$ tal que $T^n x = x$.

Además un punto es periódico si y sólo si es punto fijo de alguna iteración T^n , $n \geq 1$.

Ejemplo 3.4.3 (a) *Al considerar las iteraciones de la aplicación tienda se encuentra que en cada intervalo de la forma $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}]$ hay un punto periódico de periodo n . Por tanto la aplicación tienda tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

(b) *Los puntos periódicos de la aplicación doblante del círculo son exactamente las raíces $(2^n - 1)$ -ésimas de la unidad, $n \geq 1$, de modo que dicha aplicación también tiene un conjunto denso de puntos periódicos*

(c) *Para cualquier rotación racional T existe algún $N \geq 1$ tal que $T^N = I$, de modo que todo punto es periódico. Por contra las rotaciones irracionales no tienen ningún punto periódico.*

Proposición 3.4.2 *La propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos se conserva bajo cuasiconjugación.*

Demostración. Sea $T : X \rightarrow X$ cuasiconjugado de $S : Y \rightarrow Y$ por $\phi : Y \rightarrow X$, teniendo S un conjunto denso de puntos periódicos, y sea $U \subset X$ abierto no vacío. Entonces $\phi^{-1}(U)$ es también abierto no vacío por continuidad de ϕ , y contendrá por hipótesis algún $y \in Y$ periódico para alguna interacción $n \geq 1$ de S . Por tanto $\phi(y) \in U$ y $T^n \phi(y) = \phi(S^n y) = \phi(y)$. Luego el conjunto imagen de $Per(S)$ por

ϕ es denso, lo que implica que X tiene un conjunto denso de puntos periódicos. \square

Definición 3.4.2 (Caos de Devaney (versión preliminar))

Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ se dice que es caótico (en el sentido de Devaney) si satisface las siguientes condiciones:

- i) T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.
- ii) T es topológicamente transitiva.
- iii) T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.

Ejemplo 3.4.4 Por los Ejemplos 3.4.1 y 3.4.3 tenemos que las aplicaciones tienda y doblante del círculo son caóticas, mientras que ninguna rotación del círculo lo es.

Sin embargo esta definición de caos tiene un serio problema: la dependencia sensible de las condiciones iniciales no se conserva bajo conjugación; o lo que es lo mismo, depende de la métrica del espacio subyacente. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 3.4.5 Sea la aplicación $T : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ definida por $Tx = 2x$. Dado que $|T^n x - T^n y| = 2^n |x - y| \rightarrow \infty$ para todo $x \neq y$, se cumple que T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales respecto a la métrica usual en $(1, \infty)$.

Sin embargo si definimos $d(x, y) = |\log x - \log y|$, entonces d es una métrica equivalente para la que $d(T^n x, T^n y) = |\log 2^n x - \log 2^n y| = |\log \frac{2^n x}{2^n y}| = |\log \frac{x}{y}| = |\log x - \log y| = d(x, y)$, para todo $x, y \in (1, \infty)$. De modo que T no tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales respecto a d .

Y es evidente que ambas versiones de T son conjugadas (basta tomar la aplicación identidad como homeomorfismo).

Afortunadamente podemos eliminar la dependencia sensible de las condiciones de la definición de Devaney. En 1992 Banks-Brooks-Cains-Davis-Stacey prueban, en Amer. Math. Monthly, que la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales se obtiene de las condiciones restantes de la definición.

Teorema 3.4.3 [*Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacey*] Sea X un espacio métrico sin puntos aislados. Si un sistema dinámico $T : X \rightarrow X$ es topológicamente transitivo y tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales respecto a cualquier métrica que defina la topología de X .

Demostración. Fijamos una métrica d que defina la topología de X . En primer lugar vamos a ver que existe una constante $\eta \geq 0$ tal que, para todo $x \in X$ hay un punto periódico p que verifica

$$d(x, T^n p) \geq \eta, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

En efecto, dado que X no tiene puntos aislados y por tanto es un conjunto infinito, podemos encontrar dos puntos periódicos p_1 y p_2 cuyas órbitas son disjuntas. Entonces denotando

$$\eta := \inf_{n,m \in \mathbb{N}_0} \frac{d(T^n p_1, T^m p_2)}{2} > 0,$$

se tiene por la desigualdad triangular que para todo $x \in X$, ya sea para $j = 1$ o $j = 2$, que $d(x, T^n p_j) \geq \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Veamos ahora que T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales con constante de sensibilidad $\delta = \frac{\eta}{4} > 0$. Para ello, sea $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existe un punto q tal que

$$d(x, q) < \min(\varepsilon, \delta).$$

Sea N el periodo de q . Como ya se ha visto hay también un punto periódico p tal que

$$d(x, T^n p) \geq \eta = 4\delta \text{ para } n \in \mathbb{N}_0.$$

Por otro lado, por continuidad de T , existe un entorno V de p tal que, para $y \in V$

$$d(T^n p, T^N y) < \delta, \text{ para } n = 0, 1, \dots, N.$$

Finalmente, por transitividad topológica de T , podemos encontrar un punto z y algún $k \in \mathbb{N}_0$ tales que $d(x, z) < \varepsilon$ y $T^k z \in V$.

Sea $j \in \mathbb{N}_0$ que verifique $k \leq jN < k + N$. Entonces mediante la desigualdad triangular y los resultados anteriores llegamos a que

$$\begin{aligned}
d(T^{jN}q, T^{jN}z) &= d(T^{jN}q, T^{jN-k}T^kz) = d(q, T^{jN-k}T^kz) \\
&\geq d(x, T^{jN-k}p) - d(T^{jN-k}p, T^{jN-k}T^kz) - d(x, q) \\
&> 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.
\end{aligned}$$

Obteniendo que $d(T^{jN}x, T^{jN}q) > \delta$ o $d(T^{jN}x, T^{jN}z) > \delta$. Como z y q distan menos de ε de x , se concluye lo que queríamos demostrar. \square

Además puede verse que cualesquiera de las otras dos condiciones de la definición de caos no implican la tercera.

a) Veamos que (i), (iii) no implican (ii).

Sea $X = S^1 \setminus \{e^{\frac{2i\pi p}{q}} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ con la métrica usual d . Definimos la aplicación continua $T : X \rightarrow X$ dada por $Te^{i\theta} = e^{i2\theta}$. Entonces T no tiene puntos periódicos ya que hemos quitado las raíces $(2^n - 1)$ -ésimas de la unidad para todo n que, como hemos visto, son los únicos puntos periódicos posibles del sistema. Sin embargo T es transitiva y tiene dependencia lineal de las condiciones iniciales. Para ver esto último, dados $e^{i\theta}, e^{i\phi} \in X$ tales que $0 < |\theta - \phi| < \pi$, para un determinado n se tendrá $2^n|\theta - \phi| \leq \pi < 2^{n+1}|\theta - \phi|$; y por tanto, $d(T^n e^{i\theta}, T^n e^{i\phi}) > \frac{\pi}{2}$.

b) Veamos ahora que (ii), (iii) no implican (i).

Sean la circunferencia unidad S^1 y el intervalo $[0, 1]$ con la métrica usual, y consideramos el cilindro $Y = S^1 \times [0, 1]$ con la taxi-métrica inducida. Definimos la aplicación continua $T : Y \rightarrow Y$ dada por $T(e^{i\theta}, t) = (e^{i2\theta}, t)$. Entonces T no es transitiva: tomando $U = S^1 \times [0, \frac{1}{2}]$ y $V = S^1 \times (\frac{1}{2}, 1]$ se tiene que $T^n U \cap V = U \cap V = \emptyset$.

De modo que efectivamente hay una única redundancia en la definición preliminar de caos. Podemos reescribir la definición de caos de la siguiente manera.

Definición 3.4.3 (Caos de Devaney) Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces un sistema dinámico se dice que es Devaney caótico si verifica las siguientes condiciones:

- i) T es topológicamente transitivo.*
- ii) T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Corolario 3.4.4 *Sea (X, d) un espacio métrico completo y separable sin puntos aislados. Son equivalentes:*

- i) T es Devaney caótico.*
- ii) a) Existe $x \in X$ tal que $\overline{\text{orb}(x, T)} = X$*
- b) T tiene un conjunto denso de puntos periódicos.*

Por las Proposiciones 3.3.11 y 3.4.2 tenemos también el siguiente resultado.

Proposición 3.4.5 *El caos en el sentido de Devaney se conserva por cuasiconjugación.*

Por la Proposición 3.2.3 y el Ejemplo 3.4.4 se tiene:

Ejemplo 3.4.6 *La aplicación logística L_4 es caótica en $[0, 1]$.*

3.5. Caos en intervalos

En esta sección vamos a ver que sobre aplicaciones definidas en intervalos, caos es equivalente a transitividad topológica.

Previamente necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 3.5.1 *Sea I un intervalo no necesariamente finito, y sea $T : I \rightarrow I$ una aplicación continua. Consideramos $J \subset I$ intervalo que no contiene puntos periódicos de T tal que $z, T^m z$ y $T^n z$ pertenecen a J con $0 < m < n$. Entonces $z < T^m z < T^n z$ o $z > T^m z > T^n z$.*

Demostración. Por reducción a un absurdo, supongamos que podemos encontrar $z \in J$ tal que $z < T^m z$ y $T^m z > T^n z$. Definimos la función $g(z) = T^m z$.

Entonces tenemos que $z < g(z)$ implica que $z < g(z) < g^{k+1}(z)$ para todo $k \geq 1$ natural. Veámoslo.

Si $z < g^{k+1}(z) < g(z)$ para algún k , entonces la función $g^k(x) - x$ tiene valor positivo en z ($g^n(z) - z > 0$) y negativo en $g(z)$ ($g^k(g(z)) - g(z) = g^{k+1}(z) - g(z) < 0$). Esto significa que existe

un punto $c \in (z, g(z)) \subset J$ tal que $g^k(c) - c = 0$, de modo que $g^k(c) = T^{mk}c = c$. Se obtiene por tanto un punto km -periódico de T en J , lo que contradice las hipótesis.

Entonces $z < g(z) < g^k(z)$ para todo k positivo, y en particular para $k = n - m > 0$ (ya que por hipótesis $0 < m < n$), obteniéndose que $z < T^{(n-m)m}z$; y habíamos asumido que esto se verifica a la vez que $T^{(n-m)m}z < T^mz \iff T^{n-m}T^mz < T^mz$.

Entonces podemos ver que $T^{(n-m)m}T^mz < T^mz$. Tomando $g = T^{n-m}$ y procediendo como antes llegamos a que la función $T^{(n-m)m}x - x$ tiene valor positivo en z y negativo en T^mz . De nuevo existe un $c \in (z, T^mz) \subset J$ tal que $T^{(n-m)m}c = c$, obteniéndose un punto $(n - m)m$ -periódico de J y contradiciendo de nuevo las hipótesis.

El caso de $z > T^mz$ y $T^mz < T^nz$ se prueba de forma análoga, y por tanto podemos concluir que efectivamente $z < T^mz < T^nz$ o $z > T^mz > T^nz$. \square

Teorema 3.5.2 *Sea I un intervalo no necesariamente finito, y sea $T : I \rightarrow I$ una aplicación continua y topológicamente transitiva. Entonces T es caótica.*

Demostración. Tenemos que f es continua y topológicamente transitiva. Por el Teorema 3.4.3 sólo hay que ver que el conjunto de puntos periódicos es denso en I .

Supongamos que esto no ocurre, es decir, que los puntos periódicos no son densos. Entonces existe un intervalo $J \subset I$ que no contiene puntos periódicos.

Supongamos $x \in J$ que no sea un extremo de J ; sea un entorno abierto $N \subsetneq J$ de x ; y sea un intervalo abierto $E \subset J \setminus N$.

Dado que T es topológicamente transitiva en I , existe un número natural $m > 0$ para el cual $T^mN \cap E \neq \emptyset$; y por tanto existirá un $y \in J$ que verifica $T^my \in E \subset J$.

Dado que J no contiene puntos periódicos ocurrirá que $y \neq T^my$, y por ser T continua esto implica que podemos encontrar un entorno U de y para el que $T^mU \cap U = \emptyset$.

U es abierto, de modo que podemos usar de nuevo la transitividad para encontrar un $n > m$ y un $z \in U$ tales que $T^m z \in U$. Pero entonces se tendrá $0 < m < n$ y $z, T^n z \in U$, mientras que $T^m z \notin U$, lo que contradice el lema anterior. \square

Este resultado no puede extenderse a más dimensiones o al círculo unidad porque el lema se basa fundamentalmente en el orden de \mathbb{R} .

Puede demostrarse que no existen otras posibles restricciones en la definición preliminar de Devaney restringida a intervalos:

- i) Una aplicación continua en un intervalo cuyos puntos periódicos son densos no necesariamente tendrá dependencia sensible de las condiciones iniciales. Para verlo basta con considerar la función identidad en un intervalo.
- ii) Una aplicación continua en un intervalo con dependencia sensible de las condiciones iniciales y cuyos puntos periódicos son densos, no necesariamente es transitiva.

Consideremos en $I = \mathbb{R}^+$ la aplicación

$$Tx = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ -3x + 2 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ T(x - 1) + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Dado que $|T'(x)| = 3$ para todo punto de I , la aplicación tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. También se ve que T^n tiene $3^n - 2$ puntos fijos entre cualesquiera dos enteros que no disten más de $(\frac{1}{3})^{n-1}$, de modo que el conjunto de puntos periódicos es denso.

Sin embargo se tiene también que $T[0, 1] = [0, 1]$, y por tanto la aplicación no es topológicamente transitiva. Si restringimos al intervalo $[0, 2]$, este caso también es válido como contraejemplo

para intervalos finitos.

iii) Una función continua en un intervalo con dependencia sensible de las condiciones iniciales no necesariamente tiene un conjunto de puntos periódicos denso.

Como contraejemplo tomamos el intervalo $I = [0, \frac{3}{4}]$ y la aplicación

$$Tx = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}(1-x) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

La dependencia sensible está clara dado que $|T'(x)| = \frac{3}{2}$ para todo $x \in I$, pero no pueden existir puntos periódicos en $(0, \frac{3}{8})$ ya que cualquier trayectoria de un valor inicial en este subintervalo no volverá al mismo.

Para el caso infinito basta tomar $I = \mathbb{R}^+$ y $Tx = 2x$

3.6. Dinámica Simbólica

Sea Σ_2 el espacio formado por sucesiones de cero y unos, $\{x = x_0x_1x_2 \dots : x_i = 0, 1\}$. Entonces dados $x = (x_0x_1x_2 \dots)$ e $y = (y_0y_1y_2 \dots)$ dos puntos de Σ_2 , se define la distancia entre x e y como:

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i}.$$

Proposición 3.6.1 (Σ_2, d) es un espacio métrico.

Lema 3.6.2 Sean x e y dos elementos de Σ_2 . Si los primeros $n + 1$ dígitos son iguales, entonces $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$. Por otro lado, si $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$, entonces los n primeros dígitos son iguales.

Demostración. Sean $x = x_0x_1x_2 \dots$ e $y = y_0y_1y_2 \dots$ dos sucesiones en Σ_2 donde x_i y y_i son dígitos de x e y respectivamente, $i = 0, 1, \dots$. Ahora, suponiendo que $x_i = y_i$ para todo $i \leq n$ llegamos a:

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^n \frac{0}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_{i+n+1} - y_{i+n+1}|}{2^i} \leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, si hay algún $j < n$ tal que $x_j \neq y_j$, entonces:

$$d(x, y) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^i} \geq \frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^n}.$$

Consecuentemente, si $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n}$, entonces $x_j = y_j$ para todo $j < n$, y los primeros n dígitos de x e y son idénticos. \square

De este resultado se observa fácilmente que (Σ_2, d) es un espacio métrico sin puntos aislados.

Definición 3.6.1 La aplicación $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ dada por $\sigma(x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ se denomina *aplicación desplazamiento*.

Proposición 3.6.3 La aplicación desplazamiento es continua.

Demostración. Sea x un elemento de Σ_2 y sea $\varepsilon > 0$. Tomamos n de forma que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y sea $\delta = \frac{1}{2^{n+2}}$.

Si $d(x, y) < \delta$, entonces del lema anterior se tiene que x e y coinciden en los primeros $n + 2$ dígitos. Por tanto $\sigma(x)$ y $\sigma(y)$ tendrán sus primeros $n + 1$ dígitos idénticos y $d(\sigma(x), \sigma(y)) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$, lo que prueba que σ es continua. \square

Teorema 3.6.4 La aplicación desplazamiento σ tiene las siguientes propiedades:

- i) El conjunto de sus puntos periódicos es denso en Σ_2 .
- ii) Existe un punto en Σ_2 cuya órbita es densa en Σ_2 .

Demostración. i) Supongamos que $x = x_0x_1x_2\dots$ es un punto periódico de σ con periodo k . Entonces $\sigma^n(\sigma^k(x)) = \sigma^n(x)$. Entonces como $\sigma^n(x)$ “olvida” los primeros n dígitos de x se tiene que:

$$\begin{aligned}\sigma^n(\sigma^k(x_0x_1x_2\dots)) &= x_{n+k}x_{n+k+1}x_{n+k+2}\dots = x_nx_{n+1}x_{n+2}\dots \\ &= \sigma^n(x_0x_1x_2\dots)\end{aligned}$$

y $x_{n+k} = x_n$ para todo n .

Esto implica que x es un punto periódico con periodo k si sólo si x es una sucesión formada por la repetición de k dígitos $x_0x_1\dots$ infinitamente.

Para probar que los puntos periódicos de σ son densos en Σ_2 debemos demostrar que, para todo punto y en Σ_2 y todo $\varepsilon > 0$, hay un punto periódico de σ contenido en la bola de centro y y radio ε , $B_\varepsilon(y)$.

Por lo anterior esto significa encontrar una sucesión en $B_\varepsilon(y)$ formada por la repetición de k dígitos infinitamente. Pero si $y = y_0y_1\dots y_n\dots$ y elegimos n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, entonces podemos tomar $x = y_0y_1\dots y_ny_0\dots y_ny_0\dots$. Como x e y coinciden en los primeros $n + 1$ dígitos, por el lema anterior esto implica que $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Así, x estará en $B_\varepsilon(y)$, y x es punto periódico por construcción.

ii) La sucesión que comienza con 0100011011 y continua incluyendo todos los posibles bloques de 0 y 1 con tres dígitos (hay 8); sigue con todos los posibles bloques de 0 y 1 con cuatro dígitos (hay 16); y así sucesivamente, se denomina sucesión de Morse y tiene órbita densa en Σ_2 .

En efecto, sea n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ y sea $x = x_0x_1x_2\dots x_n \in \Sigma_2$. Sabemos que en la sucesión de Morse existirá el bloque de n dígitos tales que coinciden con $x_0x_1x_2\dots x_n$. Luego lo único que debemos hacer es tomar la aplicación desplazamiento adecuada que nos traslade ese bloque a los primeros dígitos de la sucesión, y aplicando el lema anterior llegamos a que $d(x, y) \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. \square

Corolario 3.6.5 *La aplicación desplazamiento es Devaney caótica en Σ_2 .*

Teorema 3.6.6 *La aplicación doblante del círculo es caótica.*

Demostración. Veamos que la aplicación $T : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ dada por $z \rightarrow z^2$ es cuasiconjugada de la aplicación desplazamiento en Σ_2 , es decir, que podemos encontrar una aplicación continua de rango denso tal que

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{z^2} & \mathbb{T} \end{array}$$

En primer lugar escribimos $z = e^{2\pi i\alpha}$ con $0 \leq \alpha \leq 1$.

Podemos expresar α en forma binaria como

$$\{\alpha\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots, \quad x_n \in \{0, 1\}.$$

Con esta representación tenemos que:

$$\begin{aligned} Tz = z^2 &= (e^{2\pi i\alpha})^2 = e^{2\pi i2\alpha} = e^{2\pi i2(\frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots)} = e^{2\pi i(1 + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots)} = \\ &= e^{2\pi i x_1} e^{2\pi i(\frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots)} = e^{2\pi i(\frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{2^3} + \dots)} = e^{2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

Formalmente la aplicación $\phi : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{T}$ dada por

$(x_n)_n \rightarrow e^{2\pi i \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}}$ es la aplicación continua y de rango denso

que da la cuasiconjugación entre la aplicación desplazamiento y la duplicación del círculo. \square

Bibliografia

- D. Assaf IV. and S. Gadbois; Definition of chaos, letter on American Math Monthly 99(1992), 865.
- J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis and P. Stacey; On Devaney's definition of chaos, American Math Monthly 99(1992), 332-334.
- L.R. Devaney; An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley, 1989.
- G.R. Goodson; Lecture notes on dynamical systems, chaos and fractal geometry, http://www.issp.ac.ru/ebooks/books/open/Chaos_Fractal_Geometry.pdf.
- K-G. Grosse-Erdmann and A. Peris; Linear Chaos, Springer, 2011.
- R.A. Holmgren; A first course in discrete dynamical systems, Springer, 1996.
- S. Silverman; On maps with dense orbits and the definition of chaos, Rocky Mountain J. Math, 22(1)(1992), 353-375.
- M. Vellekoop and R. Berglund; On intervals, transitivity = chaos, American Math Monthly, 101(1994), 353-355.

Discrete Dynamical Systems and Chaos



Universidad de La Laguna

Leticia Álvarez Hernández
 Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
 Universidad de La Laguna
 alu0100488814@ull.edu.es

FACULTAD DE CIENCIAS

Abstract

The aim of this notes is to study the logistic map and the chaos definition.

1. Orbits of unidimensional map

Definition 1 For a function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a point $c \in \mathbb{R}$ for which $f(c) = c$ is called a fixed point of f .

Definition 2 Let $f: X \rightarrow X$ with $f(c) = c$.

1. c is a stable fixed point if for all $\epsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ such that if $x \in X$ and $|x - c| < \delta$, then $|f^n(x) - c| < \epsilon$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$.

If this does not hold, c will be called unstable.

2. c is said to be attracting if there is a real number $\eta > 0$ such that

$$|x - c| < \eta \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(c) = c.$$

3. c is asymptotically stable if it is both stable and attracting.

Definition 3 A fixed point c of f is hyperbolic if $|f'(c)| \neq 1$.

If $|f'(c)| = 1$ it is non-hyperbolic.

Theorem 1.1 Let $f: X \rightarrow X$ be a differentiable function with continuous first derivative (we say that f is of class C^1).

- If a is a fixed point for $f(x)$ with $|f'(a)| < 1$, then a is asymptotically stable. The iterates of points close to a , converge to a geometrically (i.e., there is a constant $0 < \lambda < 1$ for which $|f^n(x) - a| < \lambda^n |x - a|$ for all $n \in \mathbb{Z}^+$ and for all $x \in X$ sufficiently close to a).

- If a is a fixed point for $f(x)$ for which $|f'(a)| > 1$, then a is a repelling fixed point for f .

2. Bifurcations and Logistic map

The logistic map can be expressed mathematically by

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

where the μ is a parameter.

This lineal equation shows two effects:

- The exponential growth of the population (this is more visible in a small population).
- The additional mortality that increases when the population increases. This is caused by the struggle of the population in order to assure to survival. Mathematically this is expressed by a negative quadratic term.

We can see the following behaviors depending of the value of μ .

- If $0 < \mu \leq 1$ the population will end up disappearing regardless of the initial population.



Figure 1: Tenth iteration for $\mu = 1$.

- If $1 < \mu \leq 2$ the population will rapidly get to value $\frac{\mu-1}{\mu}$ independently of the initial population.



Figure 2: Tenth iteration for $\mu = 2$.

- If $2 < \mu \leq 3$ the population will stabilize at value $\frac{\mu-1}{\mu}$, but first it will fluctuate near this value.

- If $3 < \mu \leq 1 + \sqrt{6}$ (almost 3,45), in almost every cases the population fluctuates always between the initial conditions. It will get closer to permanent oscillations between two values.



Figure 3: Tenth iteration for $\mu = 3.3$.

- With μ between 3,45 y 3,54 (approximately), the population will present permanent oscillations getting closer to four values.



Figure 4: Tenth iteration for $\mu = 3.45$.

- If μ is slightly bigger than 3,54, the population will oscillate between 8 values (then 16, then 32, ...).

- Near of 3,57 is the beginning of chaos, but there are still some isolated ranks of μ that shows an unchaotic behavior, the so called stability islands.



Figure 5: Tenth iteration for $\mu = 3.6$.

- Therefore if $\mu > 4$ the values leave the interval $[0,1]$ and diverge for almost every initial value.

3. Dynamical system and chaos

To define chaos we need to know three concepts, highly sensitive to initial conditions, topological transitivity and periodic points.

- The highly sensitive to initial conditions summarize the so called butterfly effect: small changes in initial conditions of a system can lead, after some time, big changes on the behavior of the system.
- the topological transitivity shows the irreducibility of the dynamic system.
- the existence of periodical points imply that the system must have a lot of regular orbits; specifically, it must exist a dense set of periodic orbits.

Based on this three conditions that it appears in the definition of Chaos of Devaney, given in 1986. By this definition a dynamic system is chaotic if shows a sensible dependency of the initial conditions, its topologically transitive and has a dense set of periodic points.

Further in 1992 Banks, Brooks, Cairns, Davis and Stacey proved that in a metric space without isolated points, the sensibility dependency of the initial conditions is obtained from the two remaining conditions. A dynamical system defined on a metric space is chaotic if it is topologically transitive and have a dense set of period points.

A simple system such as the logistic map with $\mu = 4$ is chaotic.

4. Bibliography

- J. Banks, J.Brooks, G. Cairns, G. Davis and P.Stacey; On Devaney's definition of chaos, American Math Monthly 99(1992), 332-334.
- L.R. Devaney; An introduction to chaotic dynamical systems, Addison-Wesley, 1989.
- G.R. Goodson; Lecture notes on dynamical systems, chaos and fractal geometry, www.issp.ac.ru/ebooks/books/open/Chaos_Fractal_Geometry.pdf.
- K-G. Grosse-Erdmann and A. Peris; Linear Chaos, Springer, 2011.
- R.A. Holmgren; A first course in discrete dynamical systems, Springer, 1996.