

Roberto Vega Álvarez

Variedades Cuadráticas en el Espacio Proyectivo Complejo

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2017

DIRIGIDO POR
Francisco Martín Cabrera

Francisco Martín Cabrera
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Me gustaría agradecer principalmente a mi tutor, Francisco Martín por su incondicional dedicación desde el primer momento, así como su paciencia a la hora de realizar este trabajo.

Además me gustaría agradecer a la Vicedecana María Candelaria González Dávila y al Coordinador de la asignatura David Iglesias Ponte por haberme ayudado con los asuntos burocráticos relacionados con este trabajo y con mi situación particular.

Por supuesto, mi familia es la mayor responsable de que haya podido realizar este trabajo. De su incondicional apoyo nace una parte importante de la esencia de este y de todos mis trabajos.

Por último, me gustaría agradecer también a Patricia por el apoyo prestado a lo largo del curso y, en particular, a lo largo de esta memoria.

Resumen • Abstract

Resumen

El objetivo del presente trabajo consiste en una caracterización detallada de las diferentes variedades cuadráticas que uno puede encontrarse en un espacio proyectivo complejo. Este análisis se particularizará para dimensiones 1, 2 (cónicas complejas), 3 (cuádricas complejas) y 4. Como nota adicional, tras fijar un hiperplano del infinito se realizará la clasificación afín de dichas variedades. También se exponen las posibles secciones de dichas variedades con hiperplanos. Se construyen, a modo ilustrativo, algunos ejemplos de variedad cuadrática tangente y asintótica a una variedad cuadrática dada. Particular interés tienen los resultados sobre la razón doble compleja, sobre subespacios proyectivos contenidos en variedades cuadráticas y el estudio de las secciones de dichas variedades con hiperplanos.

Palabras clave: *Variedades Cuadráticas Complejas – Espacio Proyectivo Complejo – Cónicas Complejas – Cuádricas Complejas – Razón doble.*

Abstract

The aim of the present work consists in a detailed characterization of the different quadratic manifolds living in their corresponding complex projective space. This analysis will be developed in detail for dimensions 1, 2 (complex conics), 3 (complex quadrics) and 4. As an additional note, once we have fixed a hyperplane as the ideal hyperplane, we will classify the quadratic manifolds from the affine point of view. We will also present the possible sections of the given manifolds with hyperplanes. We will construct some illustrative examples of tangent manifolds. We stress that the results about the cross-ratio, projective subspaces included in quadratic manifolds and the study of the sections of such manifolds with hyperplanes are of particular interest.

Keywords: *Complex Quadratic Manifolds – Complex Projective Space – Complex Conics – Complex Quadrics – Cross-Ratio.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	IV
Introducción	VII
1. Espacios Projectivos Complejos: preliminares	1
1.1. Espacios Projectivos Complejos	1
1.1.1. Nociones y propiedades básicas	1
1.1.2. Estructura afín del complemento de un hiperplano projectivo	4
1.1.3. El espacio afín como subconjunto del espacio projectivo ..	5
1.2. Razón doble	6
2. Variedades Cuadráticas Complejas: estudio projectivo	15
2.1. Variedades cuadráticas complejas	15
2.2. Clasificación projectiva de las variedades cuadráticas complejas .	21
2.3. Subespacios projectivos tangentes a una variedad cuadrática	25
2.3.1. Variedad cuadrática tangente desde un punto a una variedad cuadrática	27
2.3.2. Projectividad inducida por una variedad cuadrática en una recta no tangente	27
3. Variedades Cuadráticas Complejas: estudio afín	28
3.1. Estudio afín las variedades cuadráticas complejas	28
3.2. Elementos afines relativos a variedades cuadráticas	29
3.3. Clasificación afín las variedades cuadráticas complejas	32
3.4. Algunas variedades cuadráticas tangentes	39

A. Formas cuadráticas complejas	43
A.1. Formas bilineales	43
A.2. Formas cuadráticas complejas	44
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

Las variedades cuadráticas son objetos geométricos que siempre han despertado gran interés. En la Antigua Grecia, el estudio de las cónicas y de las cuádricas reales fue realizado con intensidad. Mención especial en este sentido merece Apolonio (262-190 a. C.), quien fue el primero en basar la teoría de las tres cónicas en el estudio sistemático de las secciones de un cono circular, recto u oblicuo. Con la llegada del Renacimiento, los artistas, al estudiar y desarrollar técnicas para reflejar realismo en sus obras, usaron los principios de proyección y sección de la geometría proyectiva. Esto, junto a las leyes de Kepler (1571-1630) sobre las órbitas de los planetas y las traducciones de la obra de Apolonio, dio lugar a un creciente interés por la geometría proyectiva y, en particular, por las cónicas y cuádricas. Lo que fue reflejado en las obras de Desargues (1591-1661), Pascal (1623-1662) y La Hire (1640-1718). Desarrollaron métodos de prueba y principios generales basados en herramientas genuinamente propias de la geometría proyectiva. Durante los siglos XVII y XVIII, por la introducción de coordenadas por Descartes y el desarrollo del cálculo diferencial, los métodos analíticos predominaron en el estudio de la geometría. Dichos métodos consisten en realizar dicho estudio mediante la aplicación del cálculo, del álgebra y el uso de coordenadas. En el siglo XIX, hubo un resurgir de los métodos sintéticos en la geometría realizado por Carnot, Brianchon, Poncelet, Steiner, etc., con notable éxito. Dichos métodos se basan en la fijación inicial de axiomas al modo de Euclides (325 a. C. - 265 a. C.) en sus *Elementos*. Sin embargo, otros matemáticos siguieron reivindicando los métodos analíticos. Möbius introdujo las coordenadas baricéntricas y Plücker, las coordenadas homogéneas. Estas últimas han resultado ampliamente utilizadas. Además, en la segunda mitad del siglo XIX, entra en escena el álgebra lineal, desarrollada fundamentalmente por matemáticos británicos: Hamilton, Cayley, Sylvester, etc. Esta rama de las matemáticas se utiliza en una gran variedad de campos, entre ellos la geometría. Su uso está más acorde con los métodos analíticos.

Las nociones de ángulo y perpendicularidad, aunque no son afines, tampoco son totalmente propias de la geometría euclídea, sino que están realmente incluidas en la denominada *geometría de las semejanzas*. Para ver esto, se fija una variedad cuadrática, denominada *absoluta*, $\mathcal{C}(\omega_\infty)$ ordinaria y definida positiva en el hiperplano del infinito correspondiente al espacio afín. Luego, se define el ángulo entre dos rectas en términos de la razón doble de una cuaterna de pun-

tos formada por las direcciones de las rectas y cierto par de puntos conjugados (en el sentido de los números complejos) de $\mathcal{C}(\omega_\infty)$. Resultando que dos rectas son perpendiculares si y solo si los cuatro puntos anteriores forman una cuaterna armónica. Los ángulos definidos de esta manera son comunes a un producto escalar dado y todos sus proporcionales. Esta inteligente manera de proceder fue ya ideada por matemáticos del siglo XIX. Laguerre utilizó los *puntos cíclicos* $(0, 1, i)$, $(0, 1, -i)$ para la noción de ángulo en el plano afín y Cayley generalizó el método de Laguerre mediante la fijación de la cónica absoluta y la cuádrica absoluta para el plano afín y para el espacio afín tridimensional, respectivamente [2, 5, 6, 11]. No es difícil inferir que el método de Cayley es válido para cualquier dimensión. Como se puede ver, en estos métodos se utilizan herramientas de la geometría proyectiva compleja y se consideran variedades cuadráticas cuyos puntos necesariamente tienen coordenadas complejas. Otros usos de los espacios proyectivos complejos y las variedades cuadráticas complejas se pueden encontrar en la geometría diferencial, pues ello son variedades diferenciables compactas que son Einstein-Kähler y dan lugar a ejemplos interesantes en muchos estudios. Finalmente, indicamos que las curvas elípticas sobre números complejos se usan en el estudio de sistemas dinámicos. A partir de intersecciones de ciertos pares de cuádricas complejas ordinarias, se tienen ejemplos de subconjuntos abiertos de tales curvas elípticas [3].

En esta memoria estudiamos las variedades cuadráticas complejas. Para ello utilizaremos métodos fuertemente basados en el álgebra lineal, que son aplicables en cualquier dimensión. El estudio no se limita al ámbito proyectivo, sino que además se consideran variedades cuadráticas inmersas en el espacio afín complejo. Así, uno de nuestros principales objetivos es clasificar las variedades cuadráticas complejas desde el punto de vista afín. Esto lo haremos con detalle, mostrando sus tablas correspondientes para dimensiones 1, 2 (cónicas complejas), 3 (cuádricas complejas) y 4. Como es de esperar, estas clasificaciones son obtenidas como una especialización de la clasificación proyectiva correspondiente. Hemos asignado nombres a las distintas variedades cuadráticas complejas, sugeridos por la naturaleza y propiedades de cada una en los ámbitos proyectivo y afín. Para cada tipo de variedad cuadrática también se estudia su intersección con un hiperplano cualquiera, obteniéndose las distintas posibles secciones. Es de destacar que las secciones resultantes de un cono complejo, dan lugar a todas las cónicas complejas. Esto es coincidente con el hecho descubierto por los antiguos griegos relativo a las cónicas reales y a las secciones de un cono. Finalmente, hemos mostrado cómo describir variedades cuadráticas tangentes desde puntos cualesquiera a una variedad cuadrática dada. Ello nos añade información sobre la naturaleza de dicha variedad.

Seguidamente se describe cómo está estructurado este trabajo. En el capítulo 1, en el contexto de la geometría proyectiva compleja, se recuerdan nociones y propiedades básicas que se requerirán a lo largo del texto. Se asume que el lector ya dispone de algunos conocimientos de geometría proyectiva y de

álgebra lineal. Aquí solo se mostrarán los resultados no muy conocidos y que son requeridos en el marco de este trabajo o aquellos que sean necesarios para describir la terminología que se usa. Con el objeto de que el trabajo sea lo más autocontenido posible se describe brevemente la relación entre espacio afín y espacio proyectivo. Particular mención merece la sección dedicada a la razón doble. Allí se describe su significado en términos complejos y se caracteriza cuándo una razón doble da un número real. Asimismo, se ve la perfecta coherencia de la razón doble compleja con la dada en la geometría proyectiva real, estando bien encajado el concepto de cuaterna armónica en el ámbito real con el dado en la geometría compleja. Como consecuencia de ello, la noción de punto medio coincide en las correspondientes geometrías afines (real y compleja).

En el capítulo 2, se introducen nociones y propiedades relativas a variedades cuadráticas en el ámbito de la geometría proyectiva compleja. No se muestran demostraciones explícitas de algunos resultados aquí presentados por ser considerados suficientemente descritos en las referencias. Exponemos con detalle solo aquellas que prueban resultados no muy conocidos o que son cruciales en la presente memoria. Por ejemplo, la proposición 2.1.9 que trata sobre la dimensión de un subespacio proyectivo contenido en una variedad cuadrática compleja. En dicha proposición también se incluyen otros hechos que resultan de interés. En el estudio de intersecciones de hiperplanos con variedades cuadráticas es aplicada la proposición 2.1.12. En la construcción de variedades cuadráticas tangentes, información sobre su rango se obtiene usando lo contenido en la sección 2.3.

En el capítulo 3, se recuerdan aquellos elementos afines más notables relativos a variedades cuadráticas complejas y los principios generales que rigen su clasificación desde el punto de vista afín. A continuación, particularizamos dicha clasificación para dimensiones desde 1 hasta 4. Se resume todo el análisis en sendas tablas que contienen la información más relevante. En lo relativo a las variedades cuadráticas tangentes, indicamos que aquí solo hemos descrito ciertos ejemplos seleccionados a juicio personal, pero cuyo método es generalizable para cualquier otra variedad cuadrática compleja que uno deseara. De este modo, se ha elegido una muestra de tipos que resulte ilustrativa y sirva de base para cualquier otro. Un estudio exhaustivo para todos los tipos resultaría muy extenso y repetitivo, y quedaría fuera de los límites de este trabajo.

Finalmente, se ha incluido un apéndice donde se recuerda lo relativo a formas cuadráticas complejas utilizado a lo largo del texto.

Sobre el plan de trabajo señalamos que cronológicamente se ha seguido el orden de los capítulos, trabajando sucesivamente sobre la materia contenida en ellos. En algún caso, como por ejemplo con la noción de razón doble, se ha analizado y estudiado la materia trastocando puntualmente el orden indicado. Las últimas partes elaboradas han sido la presente introducción y las conclusiones.

Espacios Projectivos Complejos: preliminares

1.1. Espacios Projectivos Complejos

1.1.1. Nociones y propiedades básicas

En este primer capítulo introduciremos algunas nociones básicas sobre geometría proyectiva compleja. Los resultados presentados en esta sección nos allanará el camino en capítulos posteriores a la hora de desarrollar los distintos conceptos y propiedades que constituyen el cuerpo de este trabajo. Para ver más detalles sobre lo expuesto en este capítulo, ver [1, 2, 11].

Definición 1.1.1 Dado un espacio vectorial V de dimensión $n+1$ sobre el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} , se llama *espacio proyectivo complejo* asociado a V , al conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1 de V . Se denota $\mathcal{P}(V)$. Es decir,

$$\mathcal{P}(V) = \{ \langle \vec{v} \rangle : \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{v} \in V \}.$$

Si $P = \langle \vec{v} \rangle$ se dice que el vector \vec{v} *define* el punto P . Los elementos de un espacio proyectivo se llamarán puntos del mismo. La *dimensión* de $\mathcal{P}(V)$ se define igual a $\dim(V) - 1 = n$.

Un conjunto de puntos $\{A_1, \dots, A_r\}$ de $\mathcal{P}(V)$ se dice que son *independientes*, si los vectores $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\}$ que definen a $\{A_1, \dots, A_r\}$, respectivamente, son linealmente independientes. Esta definición tiene sentido porque se comprueba que no depende de los vectores elegidos para definir los puntos.

Definición 1.1.2 Un conjunto de puntos $\mathcal{R}_p = \{U_0, \dots, U_n; U\}$ de $\mathcal{P}(V)$ tales que al tomar cualesquiera $n+1$ puntos se obtiene un subconjunto de puntos independientes, se denomina *referencia proyectiva* de $\mathcal{P}(V)$. Los puntos U_0, \dots, U_n se llaman *puntos base* de \mathcal{R}_p y U se denomina *punto unidad* de \mathcal{R}_p .

Definición 1.1.3 Dada una referencia proyectiva $\mathcal{R}_p = \{U_0, \dots, U_n; U\}$ de $\mathcal{P}(V)$, se llama *base normalizada* de \mathcal{R}_p , a toda base $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ de V tal que $\langle \vec{u}_i \rangle = U_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$, y $\langle \vec{u}_0 + \dots + \vec{u}_n \rangle = U$.

Definición 1.1.4 Fijada una referencia proyectiva $\mathcal{R}_p = \{U_0, \dots, U_n; U\}$ de $\mathcal{P}(V)$ y dado un punto $Z = \langle \vec{z} \rangle$, (z_0, \dots, z_n) se dice que son *coordenadas homogéneas* de Z respecto de \mathcal{R}_p , si $\vec{z} = z_0\vec{u}_0 + \dots + z_n\vec{u}_n$ donde $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base normalizada de \mathcal{R}_p . Nótese que siempre será $(z_0, \dots, z_n) \neq (0, \dots, 0)$.

Se dice que \mathcal{S} es un *subespacio proyectivo* de $\mathcal{P}(V)$, si $\mathcal{S} = \mathcal{P}(W)$, donde W es un subespacio vectorial de V . Si $\dim \mathcal{S} = 0$, se dice que \mathcal{S} es un *punto* de $\mathcal{P}(V)$. Si $\dim \mathcal{S} = 1$, se dice que \mathcal{S} es una *recta proyectiva*. Si $\dim \mathcal{S} = 2$, se dice que \mathcal{S} es un *plano proyectivo*. Si $\dim \mathcal{S} = n - 1$, se dice que \mathcal{S} es un *hiperplano proyectivo*. Finalmente, cuando $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\{\vec{0}\})$ se tiene $\mathcal{S} = \emptyset$ y $\dim \mathcal{S} = 0 - 1 = -1$. A lo largo de la exposición los términos recta, plano, hiperplano, subespacios proyectivos, etc., serán entendidos en el sentido de ser todos ellos complejos. Cuando necesitemos considerar rectas, planos, hiperplanos, subespacios proyectivos, etc., en el sentido real, lo indicaremos explícitamente.

Definición 1.1.5 Dado un espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$, se llama *espacio proyectivo complejo dual*, al espacio proyectivo $\mathcal{P}(V^*)$ asociado al espacio vectorial V^* dual de V .

Sean $\mathcal{H}(V)$ el conjunto de los hiperplanos de $\mathcal{P}(V)$ y la aplicación

$$\delta : \mathcal{H}(V) \longrightarrow \mathcal{P}(V^*),$$

dada por $\delta(\mathcal{H}) = \langle h \rangle$, donde $\mathcal{P}(\ker h) = \mathcal{H}$, se tiene que δ está bien definida y es biyectiva. Por ello, $\mathcal{H}(V)$ se identifica con $\mathcal{P}(V^*)$. Asimismo, si W es un subespacio vectorial de V , se llama *anulador* de W al conjunto W^o formado por las formas lineales que anulan a todos los vectores de W . Esto es,

$$W^o = \{h \in V^* : h(\vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in W\}.$$

Se tiene que W^o es un subespacio vectorial de V^* . Además, si $\dim V$ es finita, se satisface la igualdad $\dim W + \dim W^o = \dim V$ y $\mathcal{P}(W^o)$ está constituido por todos los hiperplanos \mathcal{H} tales que $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{H}$. Recíprocamente, si W^* es un subespacio vectorial de V^* , siempre existe un subespacio vectorial W de V tal que $W^o = W^*$. Por tanto,

$$\mathcal{P}(W^*) = \{\mathcal{H} : \mathcal{H} \text{ hiperplano} \wedge \mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{H}\}.$$

Observación 1.1.6 ([7, 9]) *Espacios proyectivos como variedades homogéneas:* Para describir de una forma somera los espacios proyectivos reales y complejos como variedades homogéneas, consideramos, en primer lugar, el espacio vectorial real \mathbb{R}^n dotado con el producto escalar euclídeo estándar $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$. A partir de este producto, surgen las nociones de longitud y ortogonalidad de vectores en \mathbb{R}^n . Asimismo, entre todas las bases de \mathbb{R}^n , podemos distinguir aquellas formadas por vectores unitarios y ortogonales entre sí. Dichas bases se denominan *ortonormales*. Fijada una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, a cada isomorfismo lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se le asocia una matriz cuadrada $A = (a_{kl})$ de orden n , definida por $f(\vec{e}_l) = \sum_{k=1}^n a_{kl} \vec{e}_k$. El conjunto de matrices A obtenidas de este modo son aquellas con determinante no nulo y constituyen $GL(n, \mathbb{R})$, que es un grupo con la multiplicación de matrices, denominado *grupo lineal general*

real. Un subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ es el *grupo ortogonal* $O(n)$, formado por aquellas matrices que están asociadas a isomorfismos lineales que preservan el producto escalar. Esto es, A asociada a f y $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_{\mathbb{R}}$. Se tiene que $O(n)$ está formado por aquellas matrices A tales que su inversa $A^{-1} = A^t$, donde A^t denota la traspuesta. A su vez, otro subgrupo notable es el *grupo ortogonal especial* $SO(n)$, que está contenido en $O(n)$ y formado por aquellas matrices ortogonales cuyo determinante es 1.

Considerando ahora el espacio vectorial complejo \mathbb{C}^n dotado con el producto unitario estándar $\langle \vec{z}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{k=1}^n z_k \bar{t}_k$, se pueden distinguir aquellas bases $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ tales que $\langle \vec{u}_k, \vec{u}_k \rangle_{\mathbb{C}} = 1$, $\langle \vec{u}_k, \vec{u}_l \rangle_{\mathbb{C}} = 0$, $k \neq l$. Tales bases se denominan *unitarias*. Si \mathbb{C}^n se considera como espacio vectorial real, entonces $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ y está dotado con el producto escalar dado por $\langle \vec{z}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{R}} = \text{Re} \langle \vec{z}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{C}}$. Con respecto a este producto, los vectores \vec{z} e $i\vec{z}$ son ortogonales. Asimismo, a partir de una base unitaria $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, se obtiene la base ortonormal $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, i\vec{u}_1, \dots, i\vec{u}_n\}$. Nótese además que $\text{Im} \langle \vec{z}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \vec{z}, i\vec{t} \rangle_{\mathbb{R}}$ es una forma bilineal antisimétrica real.

De forma similar a como se hizo anteriormente para \mathbb{R}^n , fijando una base unitaria $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, a cada isomorfismo lineal $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ se le asocia una matriz cuadrada $A = (a_{kl})$ de orden n , dada por $f(\vec{u}_l) = \sum_{k=1}^n a_{kl} \vec{u}_k$. El conjunto de las matrices A obtenidas de este modo son aquellas con determinante no nulo y constituyen el conjunto $GL(n, \mathbb{C})$, denominado *grupo lineal general complejo*. Un subgrupo de $GL(n, \mathbb{C})$ es el *grupo unitario* $U(n)$, formado por aquellas matrices que están asociadas a isomorfismos lineales que preservan el producto unitario. Esto es, A asociada a f y $\langle f(\vec{z}), f(\vec{t}) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \vec{z}, \vec{t} \rangle_{\mathbb{C}}$. Se tiene que $U(n)$ está formado por aquellas matrices A tales que su inversa $A^{-1} = A^*$, donde $A^* = \bar{A}^t$ con $\bar{A} = (\bar{a}_{kl})$. A su vez, un subgrupo de $U(n)$ es el *grupo unitario especial* $SU(n)$, formado por las matrices unitarias cuyo determinante es 1.

Como variedad diferenciable el espacio proyectivo real $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ es difeomorfo a

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \cong SO(n+1)/S(O(1) \times O(n)),$$

donde $S(O(1) \times O(n))$ consiste en las matrices de $O(1) \times O(n)$ cuyo determinante igual a 1. En particular, la recta proyectiva $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2) = SO(2)/\{I, -I\} = S^1$. Recordemos que la esfera S^n en \mathbb{R}^{n+1} es difeomorfa a $SO(n+1)/SO(n)$.

Considerando ahora el espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{n+1})$, se tiene que es difeomorfo a

$$\mathcal{P}(\mathbb{C}^{n+1}) \cong SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)),$$

donde $S(U(1) \times U(n))$ consiste en las matrices de $U(1) \times U(n)$ con determinante 1. La recta proyectiva compleja $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2)$ será difeomorfa a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbb{C}^2) &\cong SU(2)/S(U(1) \times U(1)) \cong SU(2)/\{I, -I\}/S(U(1) \times U(1))/\{I, -I\} \\ &\cong SO(3)/SO(2) \cong S^2. \end{aligned}$$

Nótese que $S(U(1) \times U(1))$ consiste en las matrices diagonales con diagonal principal $(e^{i\theta}, e^{-i\theta})$. Por lo que $S(U(1) \times U(1)) \cong U(1) \cong S^1$. El hecho de que $\mathcal{P}(\mathbb{C}^2) \cong S^2$ es de esperar, pues esto también se deduce mediante la conocida *proyección estereográfica*.

1.1.2. Estructura afín del complemento de un hiperplano proyectivo

Aquí describiremos de forma breve la relación entre espacio afín y espacio proyectivo.

Dado un espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$ y un hiperplano $\mathcal{H} = \mathcal{P}(W)$ de dicho espacio, vamos a dotar al conjunto $E = \mathcal{P}(V) - \mathcal{H}$ de estructura de espacio afín complejo (ver [4]). Para ello, fijamos una referencia proyectiva \mathcal{R}_p en $\mathcal{P}(V)$ y una base normalizada $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ de \mathcal{R}_p . Con respecto a \mathcal{R}_p , supongamos que una ecuación del hiperplano \mathcal{H} está dada por

$$\mathcal{H} \equiv a_0 z_0 + \dots + a_n z_n = 0, \quad (a_0, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0).$$

Sea $h : V \rightarrow \mathbb{C}$ la forma lineal dada por

$$h(\vec{v}) = h(v_0 \vec{u}_0 + \dots + v_n \vec{u}_n) = a_0 v_0 + \dots + a_n v_n.$$

Nótese que $W = \ker h$ y que h es una forma lineal tal que $\langle h \rangle = \mathcal{H} \in \mathcal{P}(V^*)$. Dotaremos a $E = \mathcal{P}(V) - \mathcal{H}$ de la estructura de espacio afín con dirección W mediante la aplicación $E \times E \rightarrow W$, definida por $(P, Q) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$, siendo $\langle \vec{p} \rangle = P$, $\langle \vec{q} \rangle = Q$ y $h(\vec{p}) = h(\vec{q}) = 1$. Se puede comprobar que esta aplicación está bien definida y que satisface las condiciones requeridas en la definición espacio afín. Si se dota así a E de estructura de espacio afín, a los puntos de E se les llama *puntos propios* de $\mathcal{P}(V)$ y a los puntos de \mathcal{H} se les denomina *puntos impropios* de $\mathcal{P}(V)$. Asimismo, recordamos que también se tiene la operación $P * \vec{w} = \langle \vec{p} + \vec{w} \rangle$, donde $P = \langle \vec{p} \rangle \in E$ con $h(\vec{p}) = 1$ y $\vec{w} \in W$.

Relación entre referencias afines y referencias proyectivas: Sea una referencia proyectiva $\mathcal{R}_p = \{U_0, U_1, \dots, U_n; U\}$ tal que $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{H}$. Con respecto a \mathcal{R}_p , una ecuación del hiperplano \mathcal{H} viene dada por $z_0 = 0$. En efecto, no hay mas que sustituir las coordenadas de los puntos U_1, \dots, U_n en la ecuación general de un hiperplano. Nótese que U_0 y U no pertenecen \mathcal{H} . Sea $\{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ una base normalizada de la referencia \mathcal{R}_p tal que $h(\vec{u}_0) = 1$, donde h es la forma lineal que se utilizó para construir la estructura afín, y sea la referencia afín $\mathcal{R}_a = \{U_0; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ en E . Si $Z \in E$ y (z_0, z_1, \dots, z_n) son coordenadas homogéneas de Z respecto de \mathcal{R}_p , se tiene que existe un vector \vec{z} que define Z tal que $\vec{z} = z_0 \vec{u}_0 + z_1 \vec{u}_1 + \dots + z_n \vec{u}_n$. Además, $z_0 \neq 0$ ya que $Z \in E$. Considerando $\frac{1}{z_0} \vec{z}$, resulta $h(\frac{1}{z_0} \vec{z}) = \frac{1}{z_0} z_0 = 1$. Luego $Z = U_0 * \overrightarrow{U_0 Z} = U_0 * (\frac{1}{z_0} \vec{z} - \vec{u}_0)$. De

donde $Z = U_0 * \left(\frac{z_1}{z_0} \vec{u}_1 + \dots + \frac{z_n}{z_0} \vec{u}_n \right)$. Por consiguiente, $\left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right)$ son las coordenadas afines de Z respecto de \mathcal{R}_a .

Recíprocamente, si (t_1, \dots, t_n) son las coordenadas afines de $Z \in E$ respecto de \mathcal{R}_a , entonces $Z = U_0 * (t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_n \vec{u}_n)$. Por tanto, $\overrightarrow{U_0 Z} = t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_n \vec{u}_n$. Por lo que $\vec{z} - \vec{u}_0 = t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_n \vec{u}_n$, lo que implica $\vec{z} = \vec{u}_0 + t_1 \vec{u}_1 + \dots + t_n \vec{u}_n$. A partir de lo cual podemos afirmar que $(1, t_1, \dots, t_n)$ son unas coordenadas homogéneas de Z respecto de \mathcal{R}_p .

Si ahora se tiene de partida es una referencia afín $\mathcal{R}_a = \{O; \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, se sigue fácilmente que $\mathcal{R}_p = \{O, \langle \vec{u}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{u}_n \rangle; O * (\vec{u}_1 + \dots + \vec{u}_n)\}$ es una referencia proyectiva y que $\{\vec{u}_0, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, donde $O = \langle \vec{u}_0 \rangle$ y $h(\vec{u}_0) = 1$, es una base normalizada de \mathcal{R}_p .

Si (t_1, \dots, t_n) son las coordenadas afines de $Z \in E$ con respecto a \mathcal{R}_a , se tiene que $(1, t_1, \dots, t_n)$ son unas coordenadas homogéneas de Z respecto de \mathcal{R}_p . Recíprocamente, si se tienen unas coordenadas homogéneas (z_0, z_1, \dots, z_n) de $Z \in E$ con respecto a \mathcal{R}_p , entonces $\left(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_n}{z_0} \right)$ son las coordenadas afines de Z respecto de \mathcal{R}_a . Tras todo esto, diremos que \mathcal{R}_p es la referencia proyectiva asociada a la referencia afín \mathcal{R}_a .

1.1.3. El espacio afín como subconjunto del espacio proyectivo

Veamos ahora como en general un espacio afín E , de dimensión n y con dirección un espacio vectorial complejo W , se puede extender de modo natural mediante el añadido de un conjunto de puntos que denominaremos impropios. Este espacio ampliado o proyectivizado \overline{E} , se identificará con el espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathbb{C} \times W)$. Para hacer esta identificación, fijamos un punto O de E y definimos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C} \times W) \\ Z &\longrightarrow \langle (1, \overrightarrow{OZ}) \rangle. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que es inyectiva y, si se considera el hiperplano $\mathcal{P}(\{0\} \times W)$, se tiene que el conjunto imagen de E es $\mathcal{P}(\mathbb{C} \times W) - \mathcal{P}(\{0\} \times W)$.

Ahora consideramos la forma lineal $h : \mathbb{C} \times W \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $h(\lambda, \vec{v}) = \lambda$. El núcleo de h es el hiperplano vectorial $\{0\} \times W$ de $\mathbb{C} \times W$. Utilizando la forma lineal h , dotamos a $\mathcal{P}(\mathbb{C} \times W) - \mathcal{P}(\{0\} \times W)$ con estructura de espacio afín. La dirección de este espacio afín es $\{0\} \times W$ que se identifica con W . Como la aplicación $E \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C} \times W) - \mathcal{P}(\{0\} \times W)$, $Z \longrightarrow \langle (1, \overrightarrow{OZ}) \rangle$, es afín y biyectiva, E se identifica con $\mathcal{P}(\mathbb{C} \times W) - \mathcal{P}(\{0\} \times W)$.

1.2. Razón doble

En un espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$, dados cuatro puntos A, B, C, D de una misma recta r , tales que $A \neq B$. Si $A = \langle \vec{a} \rangle$ y $B = \langle \vec{b} \rangle$, expresamos $C = \langle \vec{c} \rangle$ y $D = \langle \vec{d} \rangle$ en función de A y B . Esto es, $\vec{c} = \lambda_0 \vec{a} + \lambda_1 \vec{b}$, $\vec{d} = \mu_0 \vec{a} + \mu_1 \vec{b}$, donde $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1 \in \mathbb{C}$. Nótese que si $D \neq A$ y $C \neq B$, se tiene $\mu_1 \neq 0$ y $\lambda_0 \neq 0$.

Definición 1.2.1 Se define la *razón doble* de los puntos A, B, C, D , denotada $(ABCD)$, alineados, dados en ese orden y tales que $A \neq D$ y $B \neq C$:

- Si $A \neq B$, es la expresión dada por $(ABCD) = \frac{\mu_0}{\lambda_0} : \frac{\mu_1}{\lambda_1} = \frac{\mu_0 \lambda_1}{\lambda_0 \mu_1}$.
- Si $A = B$, se dice que $(ABCD) = 1$.

Se puede comprobar que la razón doble está bien definida, es decir, no depende de los vectores representantes $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ considerados.

En el caso particular de que $(ABCD) = -1$, se dice que los puntos A, B, C y D forman una *cuaterna armónica*.

Fijamos ahora una referencia proyectiva $\mathcal{R}_p = \{U_0, U_1; U\}$ de la recta r donde están los puntos A, B, C y D y sea $\{\vec{u}_0, \vec{u}_1\}$ una base normalizada de \mathcal{R}_p . Para dicha referencia, supongamos que (a_0, a_1) , (b_0, b_1) , (c_0, c_1) y (d_0, d_1) son coordenadas homogéneas de los puntos A, B, C y D , respectivamente. Se puede comprobar que la razón doble $(ABCD)$ viene dada por

$$(ABCD) = \frac{a_0 c_1 - a_1 c_0}{b_0 c_1 - b_1 c_0} : \frac{a_0 d_1 - a_1 d_0}{b_0 d_1 - b_1 d_0}.$$

Obsérvese que cuando $A = B$, esta última expresión también es válida.

La razón doble de cuatro puntos depende del orden en que se elijan. Como hay veinticuatro permutaciones de cuatro puntos distintos, hay veinticuatro formas en que la razón doble de cuatro puntos puede escribirse. Sin embargo, no todas las permutaciones dan lugar a distintos valores de la razón doble. En efecto, se pueden agrupar de cuatro en cuatro, dando cada grupo un único valor para la razón doble (ver detalles en [11]).

Fórmula afín de la razón doble: Supongamos que para un hiperplano $\mathcal{P}(W)$ del espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$ y con la ayuda de una forma lineal $h : V \rightarrow \mathbb{C}$, hemos dotado de estructura de espacio afín al conjunto $E = \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(W)$. Sea ahora una recta proyectiva compleja r_p no incluida en $\mathcal{P}(W)$. Si $r_p \cap \mathcal{P}(W) = \langle \vec{w} \rangle$, entonces $r_p = r_a \cup \{\langle \vec{w} \rangle\}$, donde r_a es una recta afín compleja. Si en r_a fijamos la referencia afín $\mathcal{R}_a = \{P; \vec{w}\}$, sabemos que dicha referencia lleva aparejada la referencia proyectiva $\mathcal{R}_p = \{P, \langle \vec{w} \rangle; P * \vec{w}\}$ de la recta r_p .

Dados los puntos A, B, C y D de r_a con coordenadas afines a, b, c y d respecto de \mathcal{R}_a , se tiene que $(1, a), (1, b), (1, c)$ y $(1, d)$ son coordenadas homogéneas respecto de \mathcal{R}_p de los puntos A, B, C y D . Lo que implica

$$(ABCD) = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}. \quad (1.1)$$

Definición 1.2.2 Dados tres puntos A, B, C de una recta afín compleja, se llama *razón simple* de C, A, B , con $C \neq B$, al escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$. En términos de coordenadas,

$$(CAB) = \frac{c-a}{c-b}. \quad (1.2)$$

Se tiene pues que la razón doble es un cociente de dos razones simples,

$$(ABCD) = \frac{(CAB)}{(DAB)}.$$

Con el fin de describir las nociones de razón simple y razón doble en términos de longitudes y ángulos, consideramos la dirección W del espacio afín complejo E dotado de un producto unitario. Se dice entonces que E es un espacio afín unitario. Además, E se puede considerar como espacio afín real euclídeo con dirección W como espacio vectorial real y con producto escalar euclídeo dado por la parte real del producto unitario. Así, se pueden hallar distancias entre puntos y ángulos entre vectores considerados en el espacio vectorial real.

Volviendo a considerar la recta afín compleja r_a con dirección $\langle \vec{w} \rangle$, podemos tratar ahora el subespacio vectorial complejo $\langle \vec{w} \rangle$ de dimensión 1 como un subespacio vectorial real de dimensión 2. Esto es, podemos considerar el espacio vectorial real generado por $\{\vec{w}, i\vec{w}\}$. Además, si tomamos \vec{w} unitario, $\{\vec{w}, i\vec{w}\}$ es una base ortonormal del espacio vectorial real $\langle \vec{w} \rangle$. En estas condiciones, $\overrightarrow{CA} = \|\overrightarrow{CA}\| e^{i\alpha} \vec{w}$ y $\overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CB}\| e^{i\beta} \vec{w}$, donde α, β son los ángulos que forman \vec{w} con \overrightarrow{CA} y \overrightarrow{CB} , respectivamente. Utilizando las igualdades anteriores se tiene que la razón simple (CAB) viene dada por

$$(CAB) = \frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} e^{i(\alpha-\beta)} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} e^{i\gamma}, \quad (1.3)$$

donde $\gamma = \alpha - \beta$ es el ángulo que forma \overrightarrow{CB} con \overrightarrow{CA} . Asimismo, la razón doble $(ABCD)$ viene dada por

$$(ABCD) = \frac{(CAB)}{(DAB)} = \left(\frac{\|\overrightarrow{CA}\|}{\|\overrightarrow{CB}\|} : \frac{\|\overrightarrow{DA}\|}{\|\overrightarrow{DB}\|} \right) e^{i(\gamma-\delta)}, \quad (1.4)$$

donde δ es el ángulo que forma \overrightarrow{DB} con \overrightarrow{DA} .

El siguiente resultado nos ilustra sobre el significado geométrico en el caso de que la razón simple de tres puntos sea real.

Proposición 1.2.3 Sean A, B, C tres puntos de una recta afín compleja tales que $B \neq C$. Entonces la razón simple (CAB) es real si y solo si los puntos A, B y C están alineados en el sentido real.

Demostración. Utilizando la igualdad (1.3) tenemos que la razón simple (CAB) será real si y solo si $\gamma \in \{-\pi, 0, \pi\}$. Puesto que γ es el ángulo que forma \overrightarrow{CB} con \overrightarrow{CA} , entonces se tiene que ello será equivalente a que A, B y C estén sobre la misma recta afín real. □

Observación 1.2.4 Si la razón simple (CAB) es igual a -1 , se dice que C es el *punto medio* entre los puntos A y B . Nótese que en virtud de la proposición anterior, la noción de punto medio en geometría afín compleja es coincidente con la que se considera en geometría afín real.

Veamos ahora un resultado análogo al anterior para la razón doble.

Proposición 1.2.5 (p. 315, [10]) Sean A, B, C y D cuatro puntos sobre una recta afín compleja tales que $B \neq C$ y $D \neq A$. Entonces la razón doble $(ABCD)$ es real si y solo si A, B, C y D están alineados en el sentido real o están sobre una circunferencia.

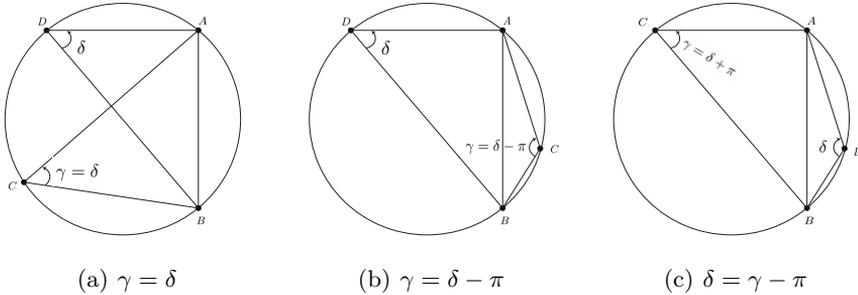
Demostración. Distinguiamos dos casos:

- i)* Los puntos A, B y C están alineados en el sentido real y, por tanto, $(CAB) \in \mathbb{R}$. En este caso, utilizando la ecuación (1.4), la razón doble $(ABCD)$ es real si y solo si (DAB) es real. Esto es, $(ABCD)$ será real si y solo si A, B, C y D están alineados en el sentido real.
- ii)* Si A, B y C no están alineados en el sentido real, entonces determinan una circunferencia y γ es el ángulo inscrito en la circunferencia con vértice C abarcando la cuerda \overline{BA} . Utilizando la ecuación (1.4), $(ABCD)$ es real si y solo si $(\gamma - \delta) \in \{-\pi, 0, \pi\}$. Esto es,

$$\delta = \gamma \vee \delta = \gamma - \pi \vee \gamma = \delta - \pi.$$

Ello implica que D está en la circunferencia determinada por los puntos A, B, C . Recíprocamente, si A, B, C y D están sobre la misma circunferencia, por consideraciones sobre los ángulos inscritos respecto de la cuerda \overline{BA} , se tiene que $(\gamma - \delta) \in \{-\pi, 0, \pi\}$ y ello implica que $(ABCD)$ es real. □

Observación 1.2.6 Por la ecuación (1.4), si $\gamma - \delta = \pm\pi$, entonces los puntos C y D están en lados distintos de la circunferencia respecto de la cuerda \overline{BA} , siendo la razón doble negativa. Sin embargo, si $\gamma - \delta = 0$, entonces ambos puntos estarían por el mismo lado y la razón doble sería positiva. Esto se ilustra en las siguientes figuras.



Además, se observa que la razón doble de cuatro puntos alineados en el sentido real respecto de la geometría proyectiva compleja coincide con la noción de razón doble considerada en geometría proyectiva real. Lo mismo ocurre con la noción de cuaterna armónica cuando está situada sobre una recta real.

Finalmente, si se toman como A, B y C tres puntos propios de la recta r_p y $D = \langle \vec{w} \rangle$ el punto impropio de r_p , entonces $(0, 1)$ son coordenadas homogéneas de D respecto de \mathcal{R}_p y la razón doble resulta

$$(ABCD) = (CAB),$$

donde (CAB) es la razón simple de los puntos C, A y B .

A continuación daremos una expresión para la razón doble de cuatro puntos situados en una circunferencia. Dicha expresión la utilizaremos para describir el significado de cuaterna armónica formada por cuatro puntos concirculares. Sea entonces \mathcal{C} una circunferencia de radio ρ y de centro O_1 , entonces

$$\mathcal{C} = \{X : \overrightarrow{O_1 X} = \rho e^{i\theta} \vec{w}\}$$

con respecto a la referencia afín unitaria $\{O; \vec{w}\}$. Asimismo, consideraremos cuatro puntos A, B, C y D situados sobre \mathcal{C} tales que $\overrightarrow{O_1 A} = \rho e^{i\alpha} \vec{w}$, $\overrightarrow{O_1 B} = \rho e^{i\beta} \vec{w}$, $\overrightarrow{O_1 C} = \rho e^{i\gamma} \vec{w}$ y $\overrightarrow{O_1 D} = \rho e^{i\delta} \vec{w}$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ pertenecen al intervalo $[0, 2\pi)$. En estas condiciones se tiene el resultado siguiente.

Proposición 1.2.7 La razón doble $(ABCD)$ está dada por la siguiente igualdad

$$(ABCD) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)}.$$

Además, A, B, C y D forman una cuaterna armónica si y solo si se cumple la relación

$$\tan\left(\frac{2\delta - (\alpha + \beta)}{4}\right) \tan\left(\frac{2\gamma - (\alpha - \beta)}{4}\right) = \left[\tan\left(\frac{\alpha - \beta}{4}\right)\right]^2.$$

Demostración. En las condiciones antes indicadas se tiene que $\overrightarrow{CB} = \rho(e^{i\beta} - e^{i\gamma})\vec{w}$ y $\overrightarrow{CA} = \rho(e^{i\alpha} - e^{i\gamma})\vec{w}$. Por lo que

$$(CAB) = \frac{e^{i\gamma} - e^{i\alpha}}{e^{i\gamma} - e^{i\beta}}.$$

Ahora bien, usando la igualdad $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, se deduce que

$$2i \operatorname{sen} \frac{\gamma - \alpha}{2} = e^{i\frac{\gamma-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\gamma-\alpha}{2}} = \frac{e^{i\gamma} - e^{i\alpha}}{e^{i\frac{\gamma+\alpha}{2}}}.$$

De lo que se obtiene

$$e^{i\gamma} - e^{i\alpha} = 2i \operatorname{sen} \frac{\gamma - \alpha}{2} e^{i\frac{\gamma+\alpha}{2}}.$$

Así, la razón simple (CAB) estará dada por la expresión

$$(CAB) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Utilizando esta igualdad, se sigue que la razón doble $(ABCD)$ viene dada por

$$(ABCD) = \frac{(CAB)}{(DAB)} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\beta}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)}.$$

Supongamos ahora que los puntos A, B, C y D forman una cuaterna armónica. Es decir, $(ABCD) = -1$ y se tiene la siguiente identidad

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\beta}{2}\right)}.$$

Sumando y restando $\beta/2$ en los ángulos de los numeradores y $\alpha/2$ en los ángulos de los denominadores, resulta la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}-\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}+\frac{\alpha-\beta}{4}\right)} = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}-\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}+\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}.$$

Utilizando en cada caso la correspondiente identidad trigonométrica se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right) - \cos\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)} = \\ & = -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right) - \cos\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right) + \cos\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Como $A \neq B$, necesariamente $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right) \neq 0$. Supongamos ahora que $\cos\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right) \neq 0$ y $\cos\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right) \neq 0$. Dividiendo por $\cos\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right)$ y $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)$ en el numerador y en el denominador del primer miembro y por $\cos\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right)$ y $\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)$ en el numerador y denominador del segundo miembro se sigue que

$$\frac{\tan\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right) - \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\tan\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right) + \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)} = -\frac{\tan\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right) - \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}{\tan\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right) + \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)}.$$

Finalmente, multiplicando en cruz y eliminando los términos iguales en ambos lados, se obtiene la segunda igualdad requerida en la proposición.

Si fuese $\cos\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right) = 0$, a partir de la ecuación (1.5) se llega a que $\operatorname{sen}\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right) = 0$. Por tanto,

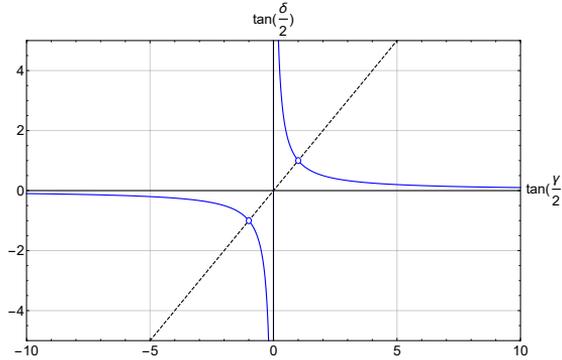
$$\tan\left(\frac{2\gamma-(\alpha+\beta)}{4}\right)\tan\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right) = \infty \cdot 0 = \left[\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{4}\right)\right]^2.$$

Por lo que también se verificaría la ecuación. Por otro lado, si fuese $\cos\left(\frac{2\delta-(\alpha+\beta)}{4}\right) = 0$, por un razonamiento análogo, llegaríamos a que la ecuación también se satisfaría. Luego la ecuación es válida en todos los casos. \square

Observación 1.2.8 En particular, si $\beta = 2\pi - \alpha$ (\vec{w} es la dirección de la mediatriz de la cuerda \overline{BA}), se tiene la identidad

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2,$$

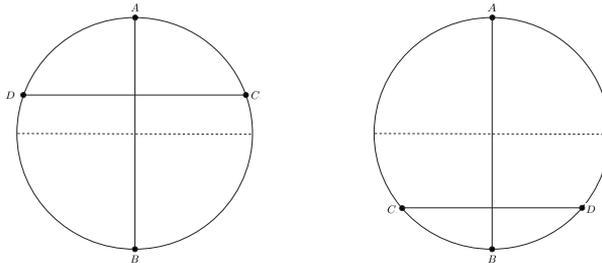
que nos resulta más simple y geoméricamente más ilustrativa. Esto es, la relación entre $\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)$ y $\tan\left(\frac{\delta}{2}\right)$ está regulada por la hipérbola equilátera $xy = \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2$ como se indica en la figura, donde hemos quitado los puntos de la hipérbola que estén en la bisectriz $y = x$. Pues tales puntos no se corresponden con ninguna cuaterna armónica $(ABCD) = -1$.



Por ejemplo, si $0 < \alpha < \pi/2$, y $0 \leq \gamma < \alpha$, entonces $\alpha < \delta \leq \pi$ y la cuerda \overline{BA} forma un ángulo con la cuerda \overline{CD} igual a $\frac{\gamma+\delta}{2}$. En particular si $\gamma = 0$ se tiene que $\delta = \pi$. Esto es, en este caso el cuarto armónico de C es su antipodal, siendo las cuerdas \overline{BA} y \overline{CD} perpendiculares. Otro caso particular interesante se da cuando $\alpha = \pi/2$ y $\beta = 3\pi/2$. En esta situación la ecuación sería

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) = 1.$$

Por lo que $\sin(\delta/2) = \cos(\gamma/2)$ y $\cos(\delta/2) = \sin(\gamma/2)$ o $\sin(\delta/2) = -\cos(\gamma/2)$ y $\cos(\delta/2) = -\sin(\gamma/2)$. De ahí que $\delta = \pi - \gamma$ o $\delta = 3\pi - \gamma$ y el ángulo formado por las cuerdas \overline{BA} y \overline{CD} sería $\frac{\gamma+\delta}{2} = \pi/2$ en ambos casos. En las figuras siguientes se ilustra esta última situación.



A continuación, describiremos cómo construir el cuarto armónico de un punto C respecto de los puntos A y B , no estando A , B y C alineados en el sentido real. Para ello, consideraremos un punto P situado sobre la circunferencia \mathcal{C} determinada por los puntos A , B y C con centro O_1 y radio ρ y una recta real r que no pase por P contenida en nuestra recta proyectiva compleja. Sea la aplicación $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow r$ dada por $\varphi(X) = X'$ de modo que P , X y X' estén alineados en el sentido real. En estas condiciones se tiene lo siguiente.

Proposición 1.2.9 *Si A , B , C y D son puntos de \mathcal{C} , entonces*

$$(ABCD) = (\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)) = (A'B'C'D').$$

Esto es, la aplicación φ preserva la razón doble.

Demostración. Consideramos en primer lugar la recta r_o tangente a \mathcal{C} con punto de tangencia el punto antipodal P_o de P y la aplicación $\varphi_o : \mathcal{C} \rightarrow r_o$ definida de forma análoga a φ . Si referimos los ángulos con respecto al vector unitario \vec{w}_o que determina la dirección del diámetro $\overline{PP_o}$, se tiene que las coordenadas de los puntos $\varphi_o(A)$, $\varphi_o(B)$, $\varphi_o(C)$, $\varphi_o(D)$ respecto de $\{O_1; \vec{w}_o, i\vec{w}_o\}$ serán

$$\begin{aligned}\varphi_o(A) &= (\rho, 2\rho \tan(\alpha_o/2)), \\ \varphi_o(B) &= (\rho, 2\rho \tan(\beta_o/2)), \\ \varphi_o(C) &= (\rho, 2\rho \tan(\gamma_o/2)), \\ \varphi_o(D) &= (\rho, 2\rho \tan(\delta_o/2)).\end{aligned}$$

Con estas coordenadas obtenemos las razones simples

$$\begin{aligned}(\varphi_o(C)\varphi_o(A)\varphi_o(B)) &= \frac{\tan(\gamma_o/2) - \tan(\alpha_o/2)}{\tan(\gamma_o/2) - \tan(\beta_o/2)} = \frac{\text{sen}\left(\frac{\gamma_o - \alpha_o}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\gamma_o - \beta_o}{2}\right)}, \\ (\varphi_o(D)\varphi_o(A)\varphi_o(B)) &= \frac{\text{sen}\left(\frac{\delta_o - \alpha_o}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\delta_o - \beta_o}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Así, de estos resultados se sigue la razón doble

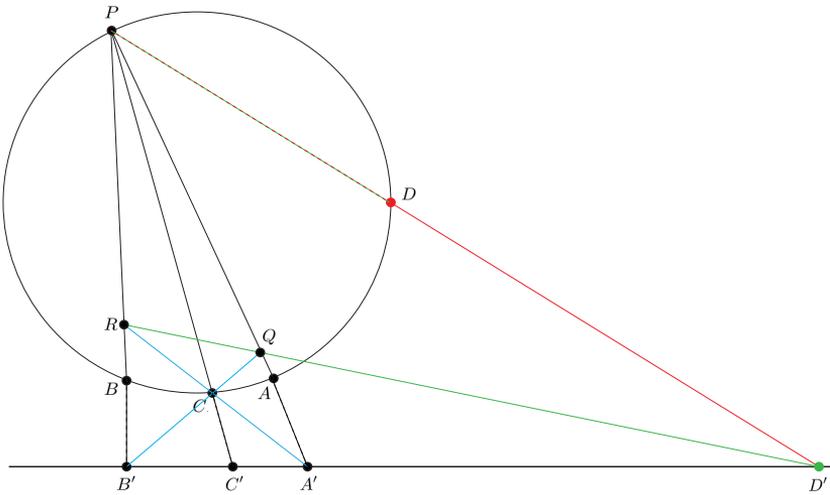
$$(\varphi_o(A)\varphi_o(B)\varphi_o(C)\varphi_o(D)) = \frac{\text{sen}\left(\frac{\gamma_o - \alpha_o}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\delta_o - \beta_o}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\gamma_o - \beta_o}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\delta_o - \alpha_o}{2}\right)} = (ABCD).$$

Por tanto, hemos probado que φ_o preserva la razón doble.

Sea ahora la perspectividad $\phi : r_o \rightarrow r$ con centro en P , se tiene que $\varphi = \phi \circ \varphi_o$. Como toda perspectividad preserva la razón doble, se obtiene que φ conserva también la razón doble. \square

Observación 1.2.10 Para construir gráficamente el cuarto armónico de un punto C respecto de los puntos A y B , podemos disponer los puntos en una circunferencia como en la proposición anterior y construir sobre la recta el cuarto armónico D' de C' respecto de A' y B' . Ahora, simplemente considerando D el punto correspondiente a D' sobre la circunferencia, tendremos que D es el cuarto armónico buscado.

Como se observa en la figura, A' y B' son vértices del cuadrilátero PQ , QC , CR y RP y $r = A'B'$ es una recta diagonal de dicho cuadrilátero. Además, se tiene que D' y C' son puntos diagonales y, por tanto, se tiene que $(ABCD) = (A'B'C'D') = -1$ (ver detalles en [11]).



Variedades Cuadráticas Complejas: estudio proyectivo

En este capítulo presentaremos, desde el punto de vista proyectivo, algunas nociones y propiedades relativas a las variedades cuadráticas. En el desarrollo de este trabajo se ha asumido que el lector ya cuenta con conocimientos básicos de geometría proyectiva no explícitamente presentados en el capítulo anterior. De no ser así o de desearse un mayor detalle, consultar las referencias [1, 2, 8, 11]. Además, se incluirán únicamente demostraciones para resultados que, a nuestro juicio, no sean generalmente conocidos o sean de particular interés en el contexto de nuestro trabajo.

2.1. Variedades cuadráticas complejas

Veamos en primer lugar la noción de variedad cuadrática.

Definición 2.1.1 Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión mayor que 1 y sea el espacio vectorial $\mathcal{Q}(V)$ de las formas cuadráticas sobre V . Se denomina *variedad cuadrática compleja* en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, a todo punto $\langle \omega \rangle$ del espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(V))$. Los *ceros* de la variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ es el subconjunto de $\mathcal{P}(V)$ dado por

$$\mathcal{C}(\omega) = \{ \langle \vec{z} \rangle \in \mathcal{P}(V) / \omega(\vec{z}) = 0 \}.$$

Si $\dim \mathcal{P}(V) = 2$, la variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ se llama *cónica compleja*.

Si $\dim \mathcal{P}(V) = 3$, la variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ se llama *cuádrica compleja*.

Si $\dim \mathcal{P}(V) > 3$, la variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ se llama *hipercuádrica compleja*.

Observación 2.1.2 En general, es diferente hablar de una variedad cuadrática $\langle \omega \rangle$ que considerar sus ceros $\mathcal{C}(\omega)$. Sin embargo, en lo sucesivo, diremos $\mathcal{C}(\omega)$ para referirnos a una variedad cuadrática. Esto es lo habitual en referencias, pues de ello resulta un lenguaje más intuitivo y familiar. Realmente, en el caso de la geometría proyectiva compleja, esto no es problema. Pues el hecho de que $\mathcal{C}(\omega_1) = \mathcal{C}(\omega_2)$ implica que $\langle \omega_1 \rangle = \langle \omega_2 \rangle$ ([2, Theorem 7.3.3, p.269]).

Al considerar variedades cuadráticas, la proyectividad descrita en la siguiente definición juega un papel importante.

Definición 2.1.3 La *polaridad* de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es la proyectividad $\tilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ que se deduce de la aplicación lineal de polaridad $\hat{f} : V \rightarrow V^*$ de la forma cuadrática no nula ω (ver apéndice A). Para un punto $Z = \langle \vec{z} \rangle \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, se dice que $\tilde{f}(Z) = \langle \hat{f}(\vec{z}) \rangle$ es el *hiperplano polar* de Z y que Z es un *polo* de $\tilde{f}(Z)$.

Definición 2.1.4 Sea $\tilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \rightarrow \mathcal{P}(V^*)$ una polaridad definida a partir de la forma cuadrática ω con forma polar f . Dos puntos $Z = \langle \vec{z} \rangle$ y $T = \langle \vec{t} \rangle$ de $\mathcal{P}(V)$ se dice que son *conjugados*, si $f(\vec{z}, \vec{t}) = 0$. Un punto $Z = \langle \vec{z} \rangle \in \mathcal{P}(V)$ se dice que es *singular* respecto de $\mathcal{C}(\omega)$, si es conjugado a todos los puntos de $\mathcal{P}(V)$, esto es, si $\vec{z} \in \ker \hat{f}$. El conjunto de los puntos singulares es $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ y s denotará su dimensión.

Si f es la forma polar de una forma cuadrática no nula ω , entonces para $T = \langle \vec{t} \rangle \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ se tiene

$$\tilde{f}(T) = \{ \langle \vec{z} \rangle \in \mathcal{P}(V) \mid 0 = \hat{f}(\vec{t})(\vec{z}) = f(\vec{t}, \vec{z}) \}.$$

Esto es, el hiperplano polar $\tilde{f}(T)$ de T está formado por los puntos Z que son conjugados a T .

Fijamos una referencia $\mathcal{R}_p = \{U_0, \dots, U_n; U\}$ de $\mathcal{P}(V)$ y la referencia dual $\mathcal{R}_p^* = \{U_0^*, \dots, U_n^*; U^*\}$ de $\mathcal{P}(V^*)$ y tomamos bases normalizadas de dichas referencias $\mathcal{U} = \{\vec{u}_0, \dots, \vec{u}_n\}$ y su dual $\mathcal{U}^* = \{\vec{u}_0^*, \dots, \vec{u}_n^*\}$. Para una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ se tiene una matriz $A = (a_{ij})$ asociada a ω respecto de \mathcal{U} . Pues bien, para $Z \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$ con coordenadas homogéneas (z_0, \dots, z_n) , si $\tilde{f}(Z)$ tiene coordenadas homogéneas (u_0, \dots, u_n) , entonces la ecuación matricial de la polaridad es

$$\rho \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Observación 2.1.5 La variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ está constituida por todos aquellos puntos Z que son conjugados consigo mismos, esto es, son autoconjugados. También se puede decir que $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por los puntos singulares y por aquellos puntos no singulares que pertenecen a su hiperplano polar.

Nótese que si $\dim \mathcal{P}(V) = n$ y el rango de ω es r , entonces $\dim(\ker \hat{f}) + r = n + 1$. Por lo que $s = \dim \mathcal{P}(\ker \hat{f}) = n - r$. A continuación se describe el conjunto imagen de la polaridad de \tilde{f} .

Lema 2.1.6 Para $\mathcal{P}(V)$ con dimensión finita, el conjunto imagen de la polaridad \tilde{f} está formado por aquellos hiperplanos que contienen los puntos singulares. Esto es, $\text{Im } \tilde{f} = \mathcal{P}((\ker \hat{f})^\circ)$, donde $(\ker \hat{f})^\circ$ es el anulador de $\ker \hat{f}$.

Definición 2.1.7 Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, una referencia proyectiva $\mathcal{R}_p = \{U_0, \dots, U_n; U\}$, se dice que es *autoconjugada respecto de $\mathcal{C}(\omega)$* , si sus puntos básicos U_0, \dots, U_n son conjugados dos a dos respecto de $\mathcal{C}(\omega)$. Esto es, $f(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$, para todo $i, j = 0, 1, \dots, n$, con $i \neq j$.

El siguiente resultado justifica la noción de referencia autoconjugada.

Lema 2.1.8 Una referencia proyectiva $\mathcal{R}_p = \{U_0, \dots, U_n; U\}$ es autoconjugada respecto de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y solo si una ecuación de $\mathcal{C}(\omega)$ respecto de \mathcal{R}_p viene dada por

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv \lambda_0 z_0^2 + \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2 = 0,$$

la cual se denomina *ecuación diagonal de $\mathcal{C}(\omega)$* .

A partir de una referencia autoconjugada $\mathcal{R}_p = \{U_0, \dots, U_n; U\}$, podemos elegir vectores \vec{u}_i que definan U_i tales que $\omega(\vec{u}_i) = 1$ ó 0 . En efecto, si $\omega(\vec{u}'_i) = \lambda_i \neq 0$, tomamos $\vec{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \vec{u}'_i$ como representante de U_i . La referencia proyectiva $\{U_0, \dots, U_n; \langle \vec{u}_0 + \dots + \vec{u}_n \rangle\}$ es también autoconjugada. Para esta referencia la ecuación de la variedad cuadrática es

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv \xi_0 z_0^2 + \dots + \xi_n z_n^2 = 0,$$

donde $\xi_i = 1$ ó 0 . Se denomina *ecuación canónica* de la variedad cuadrática.

Para proceder a clasificar las variedades cuadráticas desde el punto vista proyectivo, previamente desarrollaremos unos resultados que nos darán información sobre la naturaleza de los distintos tipos de variedades cuadráticas.

Proposición 2.1.9 Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática en un espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión n con rango $\text{rang}(\omega) = r$, y tal que el subespacio proyectivo \mathcal{S} de sus puntos singulares es de dimensión s . Para dicha variedad cuadrática se verifica:

- (i) Si un subespacio proyectivo \mathcal{A} está contenido en $\mathcal{C}(\omega)$ y es de dimensión a , entonces $a \leq \left[\frac{r}{2} \right] + s$, donde el corchete significa parte entera.
- (ii) Si P es un punto de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces siempre existe un subespacio proyectivo \mathcal{A} de dimensión $\left[\frac{r}{2} \right] + s$ tal que $P \in \mathcal{A}$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. En particular, si P es un punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$, también se tiene que $P \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$, donde \mathcal{H} es el hiperplano polar de P .
- (iii) La intersección de todos los subespacios proyectivos \mathcal{A} contenidos en $\mathcal{C}(\omega)$ y de dimensión $\left[\frac{r}{2} \right] + s$ es \mathcal{S} .
- (iv) Si un subespacio proyectivo \mathcal{B} es disjunto con $\mathcal{C}(\omega)$, entonces su dimensión b es necesariamente 0 ó -1 . Esto es, \mathcal{B} es un único punto o es vacío.

Demostración. En primer lugar, si r es par, $r = 2m$, (es impar, $r = 2m + 1$), para una cierta referencia, $\mathcal{C}(\omega)$ viene dada por su expresión canónica

$$\mathcal{C}(\omega) \equiv z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_m^2 + z_{m+1}^2 + \dots + z_{2m}^2 (+z_{2m+1}^2) = 0. \quad (2.1)$$

Veamos (i), procediendo por reducción al absurdo, asumimos que $\left[\frac{r}{2}\right] + s = m + s < a$. El subespacio proyectivo \mathcal{T} determinado por la intersección de los hiperplanos $z_{m+1} = 0, z_{m+2} = 0, \dots, z_{2m} = 0$ es de dimensión $n - m = m + s$ ($n - m = m + 1 + s$). Considerando el subespacio suma $\mathcal{T} + \mathcal{A}$, se tiene

$$n \geq \dim(\mathcal{T} + \mathcal{A}) = m + s + a - x > m + s + m + s - x = n + s - x$$

$$\left(n \geq \dim(\mathcal{T} + \mathcal{A}) = m + 1 + s + a - x > m + 1 + s + m + s - x = n + s - x \right),$$

donde x es la dimensión de $\mathcal{T} \cap \mathcal{A}$. Ello implica $0 > s - x$ en ambos casos. Por tanto, $x > s \geq -1$. De esto se sigue $x \geq 0$, luego $\mathcal{T} \cap \mathcal{A}$ es no vacío. Pero si $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, utilizando la expresión canónica y las ecuaciones de \mathcal{T} , se obtiene que X tiene como coordenadas $(0, \dots, 0, z_0, \dots, z_s)$. Por tanto, X es un punto singular. Esto es, $\mathcal{T} \cap \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ y $x \leq s$. Pero esto contradice el hecho $x > s$ antes probado. Esta contradicción viene de suponer $\left[\frac{r}{2}\right] + s < a$.

Para ver (ii), mostremos primero que existe un subespacio proyectivo \mathcal{A}_0 de dimensión $\left[\frac{r}{2}\right] + s = m + s$ tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Para ello, consideramos de nuevo la referencia proyectiva para la que se obtiene la expresión canónica (2.1). Sea el subespacio \mathcal{A}_0 determinado por la intersección de los hiperplanos

$$\mathcal{H}_1 \equiv z_1 + iz_{m+1}, \mathcal{H}_2 \equiv z_2 + iz_{m+2}, \dots, \mathcal{H}_m \equiv z_m + iz_{2m}, (\mathcal{H}_{m+1} \equiv z_{2m+1}).$$

La dimensión de $\mathcal{A}_0 = \mathcal{H}_1 \cap \dots \cap \mathcal{H}_m (\cap \mathcal{H}_{m+1})$ es $n - m = m + s$ ($n - m - 1 = m + s$). Además, es inmediato que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Nótese que los puntos singulares $(0, \dots, 0, z_0, \dots, z_s)$ satisfacen las ecuaciones de los hiperplanos considerados.

Concluimos la demostración de (ii). Se tienen dos alternativas:

(a) Si P es un punto singular, tomamos $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$. Se tiene $P \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, (ii) se verifica.

(b) Si P no es un punto singular, consideramos su hiperplano polar $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$. Se tiene que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_0$ y las siguientes dos posibilidades:

- $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{H}$: esto implica $P \in \mathcal{A}_0$. Puesto que si $P \notin \mathcal{A}_0$, entonces $\dim(\{P\} + \mathcal{A}_0) = 0 + m + s - (-1) > m + s$. Lo cual no es posible, pues $\{P\} + \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, en esta situación se tiene $P \in \mathcal{A}_0$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Lo que implica que (ii) se verifica.

- $\mathcal{A}_0 \not\subseteq \mathcal{H}$: esto implica $P \notin \mathcal{A}_0$. Puesto que si $P \in \mathcal{A}_0$, entonces $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{H}$. Por tanto, en este caso el subespacio $\{P\} + \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{H}$ es de dimensión $0 + m + s - 1 - (-1) = m + s$ y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} = \{P\} + \mathcal{A}_0 \cap \mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

Nótese que para todo P en $\mathcal{C}(\omega)$ no singular, si se tiene que $P \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \tilde{f}(P) = \mathcal{H}$. Pues para todo $X \in \mathcal{A}$, la recta PX está contenida en $\mathcal{C}(\omega)$. Lo que implica que P y X son conjugados. Esto es, $X \in \mathcal{H}$.

Veamos ahora (iii). Si $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{H}^2$ es un hiperplano doble, la propiedad se verifica trivialmente. Por otro lado, si $\mathcal{C}(\omega)$ no fuese un hiperplano doble, es sabido que \mathcal{S} está contenido en cualquier subespacio proyectivo \mathcal{A} contenido en la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y que sea de dimensión $k = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s$. Por otro lado, si P_0 pertenece a todos los \mathcal{A} y no fuera punto singular, su hiperplano polar $\tilde{f}(P_0) = \mathcal{H}$ contendría a todos los \mathcal{A} . Por tanto, $\mathcal{C}(\omega) \subseteq \mathcal{H}$. Como veremos más adelante en la proposición 2.3.4, esto implica $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{H}^2 = \mathcal{S}^2$, contradicción.

Por último demostremos ahora (iv). En efecto, por reducción al absurdo, si \mathcal{B} no fuera de dimensión 0 ó -1, entonces \mathcal{B} contendría a una recta r . Ahora bien, al hacer la intersección de r con la variedad cuadrática, daría lugar a una ecuación de segundo grado. Dicha ecuación siempre tiene solución en los complejos. Por tanto, pueden haber dos soluciones o una única solución o $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Finalmente, como $r \subseteq \mathcal{B}$, \mathcal{B} no sería disjunto con la variedad cuadrática. \square

A continuación se describen las variedades cuadráticas que contienen hiperplanos.

Corolario 2.1.10 *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática de rango r en un espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión n , y tal que el subespacio proyectivo \mathcal{S} de sus puntos singulares es de dimensión s , entonces son equivalentes:*

- (i) *Existe un hiperplano $\mathcal{H} = \mathcal{P}(W)$ tal que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.*
- (ii) *$\text{rang}(\omega) = 2$ ó 1 .*
- (iii) *Es nula la restricción $\omega|_W$ de la forma cuadrática ω al subespacio vectorial W , que determina un hiperplano \mathcal{H} .*

Demostración. Se tiene que $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces $n - 1 = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s$. De ello se sigue que si r es par (impar), $2 \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s - 1 = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s$ ($2 \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + 1 + s - 1 = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s$). Es decir, $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = 1$, ($\lfloor \frac{r}{2} \rfloor = 0$). Por tanto, $r = 2$, ($r = 1$). En ambos casos, $\mathcal{C}(\omega)$ contiene hiperplanos. La equivalencia de (iii) es trivial. \square

Corolario 2.1.11 *Todos los puntos de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ son singulares si y solo si el rango de $\mathcal{C}(\omega)$ es 1. Esto es, $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano doble.*

Demostración. Si todos los puntos de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ son singulares, entonces $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Usando el corolario anterior, si $\text{rang}(\omega) = r$, se tiene que $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s = s$. Por tanto, $r = 1$. \square

Estudiamos ahora la intersección de un hiperplano con una variedad cuadrática.

Proposición 2.1.12 *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática con rango $\text{rang}(\omega) = r$ en un espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión n y tal que el subespacio proyectivo \mathcal{S} de sus puntos singulares es de dimensión s , y sea $\mathcal{H} = \mathcal{P}(W)$ un hiperplano no contenido en $\mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H} = \mathcal{C}(\omega|_W)$. Esto es, $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$ es una variedad cuadrática en \mathcal{H} determinada por la forma cuadrática no nula $\omega|_W$. Con respecto al rango y a los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$, se tiene lo siguiente:*

- (i) $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{H}$ si y solo si $\text{rang}(\omega|_W) = r$. En este caso, $\mathcal{S} \cap \mathcal{H}$ son los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$.
- (ii) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ y \mathcal{H} contiene algún punto P tal que $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ si y solo si $\text{rang}(\omega|_W) = r - 2$. En este caso, $\{P\} + \mathcal{S}$ son los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$.
- (iii) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ y \mathcal{H} no contiene ningún punto P tal que $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ si y solo si $\text{rang}(\omega|_W) = r - 1$. En este caso, \mathcal{S} son los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$.

Demostración. (i) " \Rightarrow " Supongamos $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{H}$. Es evidente que $\mathcal{S} \cap \mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, donde $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ denota el conjunto de los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$. Por otro lado, si $Q \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ y no fuera punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, entonces \mathcal{H} sería el hiperplano polar de Q . Contradicción, pues \mathcal{H} , al no contener a \mathcal{S} , no está en el conjunto imagen de la polaridad. Luego $Q \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}$.

Si el rango de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$ es $\text{rang}(\omega|_W) = r_1$, entonces $n - 1 = r_1 + s - 1 = r + s - 1$. Por lo que $r_1 = r$.

" \Leftarrow " Si $\text{rang}(\omega|_W) = r$ y $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = s_1$, entonces se tiene que $n - 1 = r + s_1 = r + s - 1$. De ahí que $s_1 = s - 1$. Si fuese $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$, ello implicaría $s \leq s_1$, contradicción.

(ii) " \Rightarrow " Sea ahora $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ y un punto $P \in \mathcal{H}$ tal que $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$. En este caso, es evidente que $\{P\} + \mathcal{S}$ está contenido en el conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$. Por otro lado, si $Q \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ y $Q \notin \mathcal{S}$, entonces $\tilde{f}(Q) = \mathcal{H} = \tilde{f}(P)$. De esto se tiene que $\langle \hat{f}(\vec{q}) \rangle = \langle \hat{f}(\vec{p}) \rangle$. Ello implica que $\vec{q} - \lambda \vec{p} \in \ker(\hat{f})$. Si $\vec{q} - \lambda \vec{p} = \vec{0}$, entonces $Q = P$. Si $\vec{q} - \lambda \vec{p} \neq \vec{0}$, entonces $Q = \langle \lambda \vec{p} + \vec{s} \rangle$, donde $\langle \vec{s} \rangle \in \mathcal{S}$. Por lo que se tiene $Q \in \{P\} + \mathcal{S}$.

Siguiendo las mismas notaciones que en los apartado anteriores, se satisface $n - 1 = r_1 + s_1 = r_1 + s + 1 = r + s - 1$. De ahí que $r_1 = r - 2$.

" \Leftarrow " Sea $r_1 = r - 2$. Ahora se tiene la igualdad $n - 1 = r - 2 + s_1 = r + s - 1$. Por tanto, $s_1 = s + 1$. Por otro lado, $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{H}$ implicaría $s_1 = s - 1$, contradicción. Por lo que se tiene $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}$ y existe un $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ tal que $P \notin \mathcal{S}$. Esto conlleva que $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ y $P \in \mathcal{H}$.

(iii) " \Rightarrow " Finalmente, si existiera algún Q que fuera punto singular de $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H}$ y no estuviera en \mathcal{S} , entonces $\tilde{f}(Q) = \mathcal{H}$ y $Q \in \mathcal{H}$, contradicción. En este caso tenemos $n - 1 = r_1 + s_1 = r_1 + s = r + s - 1$, con lo que se concluye que $\text{rang}(\omega|_W) = r_1 = r - 1$.

" \Leftarrow " Si $r_1 = r - 1$, tenemos $n - 1 = r - 1 + s_1 = r + s - 1$. Por lo que $s_1 = s$. Por tanto, se tiene $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ y teniendo la misma dimensión se obtiene $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. Además, si existiese un $P \in \mathcal{H}$ tal que $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$, entonces $P \notin \mathcal{S}$. Ello implica $P \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathcal{S}$, contradicción. Por tanto, $P \notin \mathcal{H}$. \square

2.2. Clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas complejas

En este apartado daremos una clasificación, desde el punto de vista proyectivo, de las variedades cuadráticas en un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ de dimensión n . Asimismo, estudiaremos las posibles intersecciones de un hiperplano con cada tipo de variedad cuadrática. Para ello, haremos un uso constante de la proposición 2.1.12. Con el fin de hacer la lectura de este trabajo más amena, esta proposición se utilizará sin mencionarla explícitamente. Por su interés, particularizaremos este estudio general a los casos $n = 1$, $n = 2$ (cónicas complejas), $n = 3$ (cuádras complejas) y $n = 4$.

Clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas en dimensión n . Aquí mostraremos, desde el punto de vista proyectivo, las distintas posibilidades de variedades cuadráticas existentes. Para comprender cómo está constituida cada tipo de variedad cuadrática tendremos en mente la proposición 2.1.9 y los corolarios 2.1.10 y 2.1.11. Sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en un espacio proyectivo complejo de dimensión n , con rango $\text{rang}(\omega) = r$ y \mathcal{S} el subespacio proyectivo de sus puntos singulares con dimensión s . Para $\mathcal{C}(\omega)$ se tienen las siguientes posibilidades:

- i) Si $r = n + 1$, entonces $\mathcal{C}(\omega)$ es *ordinaria*. En este caso, $\mathcal{C}(\omega)$ no tiene puntos singulares y está formada por espacios de dimensión $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Como $\mathcal{S} = \emptyset$, para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango $n - 1$ ó n . Será $n - 1$ cuando el polo P de \mathcal{H} pertenezca a $\mathcal{C}(\omega)$ y será n cuando dicho polo no pertenezca. Por tanto, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática con un único punto singular P o una variedad cuadrática ordinaria en \mathcal{H} .

Observación 2.2.1 Como variedad diferenciable, una variedad cuadrática ordinaria \mathcal{C}_{n-1} en un espacio proyectivo complejo de dimensión n es difeomorfa a la variedad homogénea

$$\mathcal{C}_{n-1} \cong SO(n+1)/SO(2) \times SO(n-1)$$

que es un modo de expresar el espacio de todos los planos vectoriales orientados de \mathbb{R}^{n+1} . En particular, si $n = 2$ la cónica \mathcal{C}_1 es difeomorfa a la esfera $SO(3)/SO(2) \cong S^2$. Si $n = 3$, la cuádras \mathcal{C}_2 es difeomorfa a $SO(4)/SO(2) \times SO(2) \cong SU(2) \times SU(2)/\{I, -I\}/U(1) \times U(1)/\{I, -I\} \cong SO(3)/SO(2) \times SO(3)/SO(2) \cong S^2 \times S^2$ (ver [7, p. 278, Vol II]).

Si $\text{rang}(\omega) = r < n + 1$, se dice que $\mathcal{C}(\omega)$ es *degenerada*.

- ii) Si fuese $2 < r < n + 1$, entonces $\mathcal{C}(\omega)$ tiene un conjunto de puntos singulares $\mathcal{S} \neq \emptyset$. La variedad $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por espacios de dimensión $\lfloor r/2 \rfloor + s$

tales que su intersección es \mathcal{S} .

En general, para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango r , $r - 1$ ó $r - 2$. El rango es r cuando $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{H}$ y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática de rango r en \mathcal{H} . El rango es $r - 1$ cuando $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática en \mathcal{H} cuyo conjunto de puntos singulares es \mathcal{S} . Finalmente, el rango es $r - 2 \neq 0$ cuando $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \in \mathcal{C}(\omega)$.

iii) *Producto de dos hiperplanos*: si ω tiene rango 2, $\mathcal{C}(\omega)$ son dos hiperplanos distintos cuya intersección es el conjunto \mathcal{S} de los puntos singulares de dimensión $s = n - 2$. Una expresión canónica estaría dada por $\mathcal{C}(\omega) \equiv z_0^2 + z_1^2 = 0$. De ahí que, $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2$, donde $\mathcal{H}_1 \equiv z_0 + iz_1 = 0$ y $\mathcal{H}_2 \equiv z_0 - iz_1 = 0$. En general, para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0. El rango es 2 cuando $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{H}$ y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_1) \cdot (\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_2)$ es el producto de dos hiperplanos distintos de \mathcal{H} . El rango es 1 cuando $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}^2$ es un hiperplano doble de \mathcal{H} . Finalmente, el rango es 0 cuando $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ es igual a \mathcal{H}_1 o a \mathcal{H}_2 .

iv) *Hiperplano doble*: si el rango de ω es 1, $\mathcal{C}(\omega)$ está formada únicamente por sus puntos singulares, que constituyen un subespacio proyectivo de dimensión $n - 1$. Es decir, $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}^2$ es el hiperplano \mathcal{S} doble. Una expresión canónica estaría dada por $\mathcal{C}(\omega) \equiv z_0^2 = 0$.

Para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. El rango es 1 cuando $\mathcal{H} \neq \mathcal{S}$ y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = (\mathcal{H} \cap \mathcal{S})^2$. El rango es 0 cuando $\mathcal{H} = \mathcal{S}$.

Clasificación proyectiva de las variedades cuadráticas complejas en dimensión 1.

Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en la recta proyectiva compleja $\mathcal{P}(V)$, desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

- i) Si $\text{rang } \omega = 2$, $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria y está constituida por *dos puntos*.
- ii) Si $\text{rang } \omega = 1$, $\mathcal{C}(\omega)$ es *un punto doble*. Dicho punto es singular.

Clasificación proyectiva de las cónicas complejas. Dada una cónica $\mathcal{C}(\omega)$ en el plano proyectivo complejo, desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

- i) Si $\text{rang } \omega = 3$, la cónica es ordinaria y no tiene puntos singulares. Como $[r/2] + s = 0$, la cónica está formada por puntos y no puede contener rectas. En general, para cualquier recta r , se tiene que $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1. El rango de $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 2 (1) cuando el polo de r no pertenece (pertenece) a $\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos puntos o un único punto doble.
- ii) Si $\text{rang } \omega = 2$, la cónica es degenerada y tiene un único punto singular Q . Como $[r/2] + s = 1$, $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por rectas que pasan por el punto Q . En efecto, considerando su ecuación canónica $z_0^2 + z_1^2 = 0$, se tiene que

$\mathcal{C}(\omega) = r_1 \cdot r_2$, donde $r_1 \equiv z_0 + iz_1 = 0$; $r_2 \equiv z_0 - iz_1 = 0$. Esto es, la cónica es el *producto de dos rectas*, cuya intersección es Q .

Para cualquier recta r se tiene que $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0. El rango es 2 cuando $Q \notin r$ y se tiene que $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos puntos. El rango es 1 cuando $Q \in r$ y $r = \tilde{f}(P)$ con $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un punto doble. Finalmente, el rango es 0 cuando $Q \in r$ y $r = \tilde{f}(P)$ con $P \in \mathcal{C}(\omega)$. En este caso la $r \cap \mathcal{C}(\omega) = r = PQ \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

iii) Si $\text{rang } \omega = 1$, la cónica tiene una recta de puntos singulares s . Como $[r/2] + s = 1$, $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por rectas. En efecto, su ecuación canónica es $z_0^2 = 0$, por lo que $\mathcal{C}(\omega)$ es la *recta doble* $z_0 = 0$. Esto es, $\mathcal{C}(\omega) = s^2$.

Para cualquier recta r se tiene que $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. El rango es 1 cuando $r \neq s$. En este caso $r \cap \mathcal{C}(\omega) = r \cap s$ es un punto. El rango es 0 cuando $r = s$. Esto es, $r \cap \mathcal{C}(\omega) = r \cap s = s$.

Clasificación proyectiva de las cuádricas complejas. Dada una cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$ en el espacio proyectivo complejo tridimensional, desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

i) Si $\text{rang } \omega = 4$, la cuádrica es ordinaria y no tiene puntos singulares. Como $[r/2] + s = 1$, la cuádrica está formada por rectas y no contiene planos. Para cualquier plano π se tiene que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3 ó 2. El rango es 3 (2) cuando el polo de π no pertenece (pertenece) a $\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una cónica compleja ordinaria o el producto de dos rectas que se intersecan en el polo de π .

ii) Si $\text{rang } \omega = 3$, entonces $\mathcal{C}(\omega)$ tiene un único punto singular Q . Como $[r/2] + s = 1$, $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por rectas cuya intersección es Q .

Para cualquier plano π se tiene que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3, 2 ó 1. El rango es 3 cuando $Q \notin \pi$. Se tiene que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una cónica compleja ordinaria. El rango es 2 cuando $Q \in \pi$ y $\pi = \tilde{f}(P)$ con $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el producto de dos rectas que se cortan en Q . Finalmente, el rango es 1 cuando $Q \in \pi$ y $\pi = \tilde{f}(P)$ con $P \in \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una recta doble.

iii) Si $\text{rang } \omega = 2$, el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ es una recta s . Nótese que $[r/2] + s = 2$ y $\mathcal{C}(\omega)$ es *dos planos* cuya recta común es s .

Para cualquier plano π se tiene que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0. El rango es 2 cuando $s \not\subseteq \pi$ y se tiene que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el producto de dos rectas. El rango es 1 cuando $s \subseteq \pi$ y $\pi = \tilde{f}(P)$ con $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega) = s^2$ es la recta s doble. El rango es 0 cuando $s \subseteq \pi$ y $\pi = \tilde{f}(P)$ con $P \in \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, π es uno de los dos planos que forman la cuádrica $\mathcal{C}(\omega)$.

iv) Si $\text{rang } \omega = 1$, el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ es un plano S . Como $[r/2] + s = 2$, $\mathcal{C}(\omega) = S^2$ es *un plano doble*.

Para cualquier plano π se tiene que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. El rango es 1 cuando $\pi \neq S$ y entonces $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es la recta $\pi \cap S$ doble. El rango es 0 cuando $\pi = S \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

Clasificación proyectiva de las hipercuádricas complejas en dimensión 4. Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en el espacio proyectivo complejo de dimensión 4, desde el punto de vista proyectivo, se tienen las siguientes alternativas:

- i) Si $\text{rang } \omega = 5$, la hipercuádrica es ordinaria y no tiene puntos singulares. Como $[r/2] + s = 1$, $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por rectas y no contiene planos. Para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 4 ó 3. El rango es 4 (3) cuando el polo P de \mathcal{H} no pertenece (pertenece) a $\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una cuádrica compleja ordinaria o una cuádrica compleja con un único punto singular P .
- ii) Si $\text{rang } \omega = 4$, $\mathcal{C}(\omega)$ tiene un único punto singular Q . Como $[r/2] + s = 2$, $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por planos tales que la intersección de ellos es Q . Para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 4, 3 ó 2. El rango es 4 cuando $Q \notin \mathcal{H}$. Se obtiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una cuádrica compleja ordinaria. El rango es 3 cuando $Q \in \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una cuádrica con un único punto singular Q . Finalmente, el rango es 2 cuando $Q \in \mathcal{H}$ con $P \neq Q$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \in \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = \pi \cdot \tau$ es dos planos que se intersecan en la recta $PQ = \pi \cap \tau$.
- iii) Si $\text{rang } \omega = 3$, el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ es una recta s . Como $[r/2] + s = 2$, entonces $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por una familia de planos cuya intersección es s . Para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3, 2 ó 1. El rango es 3 cuando $s \not\subseteq \mathcal{H}$ y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ está formada por rectas que pasan por el punto $s \cap \mathcal{H}$. El rango es 2 cuando $s \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos que se intersecan en s . Finalmente, el rango es 1 cuando $s \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \in \mathcal{C}(\omega)$, $P \notin s$. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = S^2$ es un plano doble, siendo $S = \{P\} + s$.
- iv) Si $\text{rang } \omega = 2$, el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ es un plano S . Como $[r/2] + s = 3$, $\mathcal{C}(\omega)$ está formada por *dos hiperplanos* cuya intersección es S . Para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0. El rango es 2 cuando $S \not\subseteq \mathcal{H}$ y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos. El rango es 1 cuando $S \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \notin \mathcal{C}(\omega)$. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = S^2$ es un plano doble. El rango es 0 cuando $S \subseteq \mathcal{H}$ y $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ con $P \in \mathcal{C}(\omega)$, $P \notin \mathcal{H}$. En este caso, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ es uno de los dos hiperplanos que forman la hipercuádrica.
- v) Si $\text{rang } \omega = 1$, el conjunto de puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano \mathcal{S} . En este caso, $[r/2] + s = 3$, $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{S}^2$ es un *hiperplano doble*. Para cualquier hiperplano \mathcal{H} se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. El rango es 1 cuando $\mathcal{S} \neq \mathcal{H}$ y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = (\mathcal{H} \cap \mathcal{S})^2$ es un plano doble. El rango es 0 cuando $\mathcal{S} = \mathcal{H}$.

2.3. Subespacios proyectivos tangentes a una variedad cuadrática

En esta sección se verán algunas propiedades de las variedades cuadráticas en general, muchas de ellas relativas a la noción de tangencia.

Veamos en primer lugar la incidencia de una recta y una variedad cuadrática. Dada la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y la recta PQ que une los puntos $P = \langle \vec{p} \rangle$ y $Q = \langle \vec{q} \rangle$. La intersección de la variedad cuadrática y la recta estará formada por los puntos $Z = \langle \lambda \vec{p} + \mu \vec{q} \rangle$ que satisfagan la ecuación $\omega(\lambda \vec{p} + \mu \vec{q}) = 0$, es decir,

$$\lambda^2 \omega(\vec{p}) + 2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) + \mu^2 \omega(\vec{q}) = 0,$$

recordemos que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

- a) Si $\omega(\vec{p}) \neq 0$, entonces toda solución (λ, μ) de la ecuación verifica que $\mu \neq 0$. En este caso, podemos dividir por μ^2 y se tiene

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \omega(\vec{p}) + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) f(\vec{p}, \vec{q}) + \omega(\vec{q}) = 0.$$

Cuyas soluciones dependen de $\Delta = (f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q})$. Como estamos en espacios proyectivos complejos, solo se tendrán los siguientes casos:

- (i) si $\Delta \neq 0$, la variedad cuadrática y la recta tienen dos puntos comunes.
 - (ii) si $\Delta = 0$, la variedad cuadrática y la recta tienen un único punto en común.
- b) Si $\omega(\vec{q}) \neq 0$, el proceso es análogo usando $\lambda \neq 0$.
 - c) Si $\omega(\vec{p}) = 0$ y $\omega(\vec{q}) = 0$, entonces se tiene la ecuación $2\lambda\mu f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$. En esta situación tenemos dos alternativas:
 - (i) Si $f(\vec{p}, \vec{q}) \neq 0$, $\Delta \neq 0$, entonces $\mu = 0$ ó $\lambda = 0$. Por tanto, P y Q son los únicos puntos de la recta r que están en $\mathcal{C}(\omega)$.
 - (ii) Si $f(\vec{p}, \vec{q}) = 0$, $\Delta = 0$, entonces cualquier (λ, μ) satisface la ecuación. Por tanto, todos los puntos de la recta r están en $\mathcal{C}(\omega)$, i. e., $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

A partir de todo lo anterior, resulta natural lo siguiente.

Definición 2.3.1 Una recta se dice que es *tangente* a una variedad cuadrática, si interseca a dicha variedad en un punto o bien la recta está totalmente contenida en la variedad cuadrática.

Proposición 2.3.2 Una recta PQ es tangente a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y sólo si $(f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) = 0$, donde $P = \langle \vec{p} \rangle$ y $Q = \langle \vec{q} \rangle$.

Corolario 2.3.3 Si Q es un punto singular de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y P es un punto distinto de Q , entonces la recta PQ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. En particular, si $P \in \mathcal{C}(\omega)$, la recta PQ está contenida en la variedad cuadrática.

Demostración. En efecto, se tiene $(f(\vec{p}, \vec{q}))^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{q}) = 0$. Si $P \in \mathcal{C}(\omega)$ además se tendrá $\omega(\vec{p}) = 0$ y $\omega(\vec{q}) = 0$. Ello implica $PQ \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. \square

En este punto estamos en condiciones de probar una propiedad ya utilizada en la demostración de la proposición 2.1.9 (iii).

Proposición 2.3.4 *Si $\mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática en el espacio proyectivo complejo $\mathcal{P}(V)$ de modo que $\mathcal{C}(\omega) \subseteq \mathcal{H}$, donde \mathcal{H} es un hiperplano en $\mathcal{P}(V)$, entonces $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{H}^2$. Esto es, $\mathcal{C}(\omega)$ es el hiperplano \mathcal{H} doble.*

Demostración. Se tiene que \mathcal{H} es el hiperplano polar de algún punto P_0 . Si P_0 estuviese en \mathcal{H} , para cualquier punto $P \notin \mathcal{H}$, la recta PP_0 sería tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $0 = f(\vec{p}, \vec{p}_0)^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{p}_0) = f(\vec{p}, \vec{p}_0)^2$. Por lo que P_0 sería un punto singular, contradicción. Por tanto, $P_0 \notin \mathcal{H}$. Ahora bien, para cualquier punto $P \in \mathcal{H}$, la recta PP_0 sería tangente a $\mathcal{C}(\omega)$, ya que $\emptyset \neq PP_0 \cap \mathcal{C}(\omega) \subseteq PP_0 \cap \mathcal{H} = \{P\}$. De ahí que $P \in \mathcal{C}(\omega)$ y $\mathcal{C}(\omega) = \mathcal{H}^2$. \square

El resultado siguiente nos dice cómo puede ser la intersección de un subespacio proyectivo con una variedad cuadrática.

Proposición 2.3.5 *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 de $\mathcal{P}(V)$ y una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en $\mathcal{P}(V)$, entonces $\mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{P}(W)$ es una variedad cuadrática en el espacio $\mathcal{P}(W)$ o $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.*

Veamos ahora la noción de subespacio proyectivo tangente.

Definición 2.3.6 Se dice que el subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 es *tangente* a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si existe un punto $P \in \mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ tal que para todo $Z \in \mathcal{P}(W) - \{P\}$, la recta PZ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

Los dos resultados siguientes caracterizan el hecho de que un subespacio proyectivo sea tangente a una variedad cuadrática.

Proposición 2.3.7 *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 . Entonces $\mathcal{P}(W)$ es tangente a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y solo si existe un punto $\langle \vec{p} \rangle = P \in \mathcal{P}(W)$ tal que para todo $\langle \vec{z} \rangle = Z \in \mathcal{P}(W)$, se tiene $f(\vec{p}, \vec{z}) = 0$. Un tal punto P se denomina punto de tangencia del subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$.*

Proposición 2.3.8 *Dado un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ de dimensión ≥ 1 . Entonces $\mathcal{P}(W)$ es tangente a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y solo si $\mathcal{P}(W) \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una variedad cuadrática degenerada en el espacio $\mathcal{P}(W)$ o $\mathcal{P}(W) \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.*

A continuación, se analiza la situación en el caso de que el subespacio proyectivo sea un hiperplano.

Proposición 2.3.9 *Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática de un espacio proyectivo de dimensión n mayor que 1, entonces:*

- (i) Si $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria, un hiperplano es tangente si y solo si $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ y $P \in \mathcal{H}$. En este caso, el rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es $n - 1$.
- (ii) Si $\mathcal{C}(\omega)$ es degenerada, un hiperplano es tangente si y solo si el hiperplano contiene algún punto singular.

2.3.1. Variedad cuadrática tangente desde un punto a una variedad cuadrática

En un espacio proyectivo de dimensión mayor que 1, sea una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ que no sea hiperplano doble y sea P un punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Es sabido que si consideramos el conjunto de rectas que pasen por P y sean tangentes a $\mathcal{C}(\omega)$, dicho conjunto constituye una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega_P)$, que se denomina *variedad cuadrática tangente* a $\mathcal{C}(\omega)$ desde P . Recordemos que la forma cuadrática ω_P viene dada por $\omega_P(\vec{z}) = f(\vec{p}, \vec{z})^2 - \omega(\vec{p})\omega(\vec{z})$ y que su correspondiente forma polar es $\omega_P(\vec{z}, \vec{t}) = f(\vec{p}, \vec{z})f(\vec{p}, \vec{t}) - f(\vec{z}, \vec{t})\omega(\vec{p})$.

Si $P \in \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hiperplano doble coincidente con el hiperplano polar de P . En cambio, si $P \notin \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\{P\} + \mathcal{S}$ son los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$, donde \mathcal{S} son los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega)$. En este segundo caso, el rango de ω_P es $r - 1$, coincidente con el rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$. En efecto, si el rango de ω_P es r_1 , se tiene $n = r_1 + s + 1 = r + s$. Por lo que $r_1 = r - 1$.

2.3.2. Proyectividad inducida por una variedad cuadrática en una recta no tangente

Sea r una recta de $\mathcal{P}(V)$ no tangente a la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Dicha recta no puede contener un punto singular, pues en tal caso verificaría la condición de tangencia. Por tanto, $r \subseteq \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, donde \hat{f} es la aplicación de polaridad de ω . Si $Z \in r$, entonces tiene sentido considerar su hiperplano polar $\tilde{f}(Z)$. Además, $r \not\subseteq \tilde{f}(Z)$. Pues, en caso contrario, para todo $T \in r$, se tendría $f(\vec{z}, \vec{t}) = 0$. Por consiguiente, $f(\vec{z}, \vec{t})^2 - \omega(\vec{z})\omega(\vec{t}) = 0$, resultando r tangente, contradicción. Del hecho $r \not\subseteq \tilde{f}(Z)$, se tiene que $r \cap \tilde{f}(Z)$ es un punto.

Proposición 2.3.10 *Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ y una recta r no tangente a ella. La aplicación $\varphi : r \rightarrow r$ dada por $\varphi(Z) = r \cap \tilde{f}(Z)$, donde \tilde{f} es la polaridad de $\mathcal{C}(\omega)$, es una proyectividad biyectiva, denominada *proyectividad inducida por $\mathcal{C}(\omega)$ en r* . Los puntos dobles de φ son $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{\text{dos puntos}\}$.*

Proposición 2.3.11 *La proyectividad φ inducida por una variedad cuadrática sobre una recta r no tangente es una involución, $\varphi^2 = 1$. Además, si $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{A, B\}$ y $\varphi(Z) = Z'$, con $Z \neq Z'$, entonces $(ABZZ') = -1$.*

Variedades Cuadráticas Complejas: estudio afín

Abordaremos ahora el estudio afín de la variedades cuadráticas. Para ello, supondremos siempre que estamos trabajando con referencias proyectivas asociadas a referencias afines en la forma que hemos indicado en la sección 1.1.2.

3.1. Estudio afín las variedades cuadráticas complejas

En el espacio proyectivo complejo n -dimensional $\mathcal{P}(V)$ consideramos el hiperplano $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{P}(W)$ y damos a $E = \mathcal{P}(V) - \mathcal{H}_\infty$ una estructura de espacio afín utilizando una forma lineal h definida sobre V tal que $\ker h = W$.

Si $\mathcal{R}_a = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es una referencia afín de E , entonces $\mathcal{R}_p = \{O = \langle \vec{e}_0 \rangle, \langle \vec{e}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{e}_n \rangle; U = \langle \vec{e}_0 + \dots + \vec{e}_n \rangle\}$, donde $h(\vec{e}_0) = 1$, es una referencia proyectiva de $\mathcal{P}(V)$ asociada a dicha referencia afín. Otro modo de expresar el punto unidad es $U = O * (\vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n)$. A \mathcal{H}_∞ se le denomina *hiperplano impropio o del infinito*. Una ecuación de \mathcal{H}_∞ con respecto a \mathcal{R}_p es $z_0 = 0$. Una referencia proyectiva de \mathcal{H}_∞ es $\mathcal{R}_\infty = \{\langle \vec{e}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{e}_n \rangle; \langle \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n \rangle\}$.

A continuación, consideraremos variedades cuadráticas en el espacio afín E . Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si $\mathcal{H}_\infty \not\subseteq \mathcal{C}(\omega)$, entonces $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{C}(\omega|_W) = \mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ será su *variedad cuadrática en el infinito*. Supongamos que A es una matriz asociada a $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a la referencia \mathcal{R}_p . Si denotamos por α_{00} al menor complementario del elemento 00 de A y A_{00} es el adjunto de dicho elemento, entonces α_{00} es una matriz asociada a \mathcal{C}_∞ con respecto a \mathcal{R}_∞ . Nótese que $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ si y solo si α_{00} es la matriz cero.

Definición 3.1.1 Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ definida en un espacio afín E de dimensión $n > 1$, diremos que es:

- (i) de *tipo parabólico*, si $\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ o, cuando $\mathcal{H}_\infty \not\subseteq \mathcal{C}(\omega)$, \mathcal{C}_∞ es degenerada. Esto es, cuando \mathcal{H}_∞ es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.
- (ii) de *tipo hiperbólico*, cuando $\mathcal{H}_\infty \not\subseteq \mathcal{C}(\omega)$ y \mathcal{C}_∞ es ordinaria. Esto es, cuando \mathcal{H}_∞ no es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$.

En lo sucesivo denotaremos $r = \text{rang } \omega$, $r_\infty = \text{rang } \omega|_W$ o, equivalentemente, $r = \text{rang } A$, $r_\infty = \text{rang } \alpha_{00}$.

Para clasificar las variedades cuadráticas desde el punto de vista afín, se parte de la clasificación desde el punto vista proyectivo. En dicha clasificación,

considerando los posibles valores para el rango r de ω , se obtienen los distintos tipos proyectivos de variedades cuadráticas. La clasificación afín se puede considerar como una especialización de la clasificación proyectiva. A partir de un determinado tipo proyectivo r , se consideran las distintas posibilidades para r_∞ . Usando la proposición 2.1.12 y el corolario 2.1.10, se obtienen que dichas posibilidades son a lo sumo r , $r - 1$ o $r - 2$. Atendiendo a esto se obtendrá la clasificación afín de las variedades cuadráticas en el espacio afín de dimensión n . Por su interés, escribiremos con detalle dicha clasificación afín para $n = 1, 2, 3, 4$. Todo ello se mostrará en las correspondientes tablas, donde también incluiremos información sobre algunas de las propiedades afines de las variables cuadráticas. Para obtener dicha información, se usarán las proposiciones 3.2.2, 3.2.12 y 3.2.7. El estudio de dichas propiedades se realizará en la siguiente sección.

3.2. Elementos afines relativos a variedades cuadráticas

Centro de una variedad cuadrática:

Definición 3.2.1 Se llama *centro* de una variedad cuadrática a un polo del hiperplano del infinito, en caso de que exista y sea propio.

A continuación vemos algunas condiciones necesarias y suficientes para que una variedad cuadrática tenga centro.

Proposición 3.2.2 Sean el hiperplano impropio $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{P}(W)$, una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, la aplicación lineal de polaridad \hat{f} , la restricción $\omega|_W$ de ω restringida a W y su aplicación lineal de polaridad $\hat{f}|_W$. Entonces son equivalentes:

- (i) $\mathcal{C}(\omega)$ tiene centro.
- (ii) $\mathcal{P}(\ker \hat{f}) = \mathcal{P}(\ker \hat{f}|_W)$.
- (iii) $\text{rang}(\omega|_W) = \text{rang}(\omega) - 1$.

Demostración. La equivalencia entre (i), (ii) y (iii) es una mera consecuencia de la proposición 2.1.12(ii)(a). □

Seguidamente se ven otras nociones relacionadas con el concepto de centro.

Definición 3.2.3 Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro. Se llama *variedad cuadrática asintótica* de $\mathcal{C}(\omega)$, a la variedad cuadrática tangente a la variedad cuadrática desde un centro.

Si $\mathcal{C}(\omega)$ es ordinaria, entonces el centro C es el único punto singular de la variedad cuadrática asintótica $\mathcal{C}(\omega_C)$. El rango de ω_C es n .

Definición 3.2.4 Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ con centro. Un *diámetro* de $\mathcal{C}(\omega)$, es toda recta que contiene un centro y solo uno.

La noción de centro de una variedad cuadrática se justifica seguidamente.

Proposición 3.2.5 *Sea C un centro de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$. Si d es un diámetro secante por C , entonces C es el punto medio de $\{P, Q\} = \mathcal{C}(\omega) \cap d$.*

Demostración. Si D_∞ es el punto del infinito del diámetro d , por la proposición 2.3.11, $(CPQ) = (PQCD_\infty) = -1$. Por lo que C es el punto medio de PQ . \square

Asíntotas:

Definición 3.2.6 Se dice que una recta propia r es *asíntota* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, si es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ y hay un punto no singular $P_\infty = \langle \vec{p} \rangle$ de $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ contenido en el hiperplano impropio \mathcal{H}_∞ . Nótese que para todo $Z = \langle \vec{z} \rangle$ de una asíntota r se tiene $f(\vec{p}, \vec{z}) = 0$. Esto es, P_∞ es un punto de tangencia no singular de r .

El siguiente resultado nos dice cuando una variedad cuadrática tiene asíntotas.

Proposición 3.2.7 *Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ en un espacio afín E de dimensión n . Si el rango de $\omega|_W$ es r_∞ , donde W es el espacio vectorial dirección de E , entonces son equivalentes:*

- (i) $\mathcal{C}(\omega)$ tiene asíntotas.
- (ii) $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega) = \mathcal{C}(\omega|_W)$ es una variedad cuadrática que tiene algún punto no singular. Esto es, $\omega|_W \neq 0$ y $\mathcal{C}(\omega|_W)$ no es un hiperplano doble en \mathcal{H}_∞ .
- (iii) $r_\infty > 1$.
- (iv) $\mathcal{C}(\omega)$ es de tipo hiperbólico o de tipo parabólico con $\mathcal{H}_\infty \not\subseteq \mathcal{C}(\omega)$ y \mathcal{C}_∞ no es un hiperplano doble de \mathcal{H}_∞ .

Demostración. Supongamos que $\mathcal{C}(\omega)$ tiene asíntotas. Entonces $\mathcal{C}(\omega|_W)$ tiene algún punto P_∞ en el infinito no singular determinado por la dirección de una asíntota r . Si P_∞ fuese punto singular de $\mathcal{C}(\omega|_W)$ en \mathcal{H}_∞ , sería conjugado a todos los puntos impropios y ya se tiene que P_∞ es conjugado a todos los puntos de r , por su condición de tangente. Por tanto, P_∞ sería punto singular de $\mathcal{C}(\omega)$, contradicción. Lo que implica (ii).

Veamos (ii) implica (i). Si la variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega|_W)$ en \mathcal{H}_∞ contiene algún punto P_∞ no singular, entonces será también punto no singular de $\mathcal{C}(\omega)$. Esto implica que el hiperplano polar \mathcal{H} de P_∞ es propio (distinto de \mathcal{H}_∞). Una asíntota se obtiene tomando una recta propia r contenida en H con dirección P_∞ .

La equivalencia entre (ii) y (iii) es inmediata. Lo mismo que entre (iii) y (iv). \square

Corolario 3.2.8 *En un espacio afín complejo E de dimensión n , si una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ de rango r no tiene asíntotas, entonces se da uno de los siguientes casos:*

- (i) $n = 1$. Es decir, E es la recta afín compleja.
- (ii) $r = 1$. Es decir, $\mathcal{C}(\omega)$ es un hiperplano doble.
- (iii) $\mathcal{C}(\omega)$ es dos hiperplanos propios paralelos o el producto del hiperplano impropio por un hiperplano propio.
- (iv) Cuando $r = 3$ y $n = 2$, $\mathcal{C}(\omega)$ es una cónica compleja ordinaria de tipo parabólico. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es una parábola compleja.
- (v) Cuando $r = 3$ y $n > 2$, el hiperplano impropio tiene polos y son impropios. En particular, si $\mathcal{C}(\omega)$ es una cuádrlica, $n = 3$, entonces hay un único punto singular que es impropio y cualquier polo del plano impropio es impropio. En tal situación particular, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un cilindro complejo parabólico.

Observación 3.2.9 Sea una variedad cuadrática con centros y asíntotas. Una asíntota se obtiene considerando una recta r que pase por un centro C y por un punto no singular P_∞ de \mathcal{C}_∞ . Dicha r es tal que $r \cap \mathcal{C}(\omega) = \{P_\infty\}$ y está contenida en la variedad cuadrática asíntótica $\mathcal{C}(\omega_C)$. Nótese que estas asíntotas son también diámetros, por lo que se denominan *diámetros asíntóticos*. Los diámetros asíntóticos que pasan por el mismo centro C junto con el conjunto $\{C\} + \mathcal{S}$, formado por los centros y los puntos singulares, constituyen $\mathcal{C}(\omega_C)$.

Por otro lado, sea una variedad cuadrática con asíntotas y algún punto singular propio Q . Una asíntota se obtiene considerando una recta r que pase por Q y por un punto no singular P_∞ de \mathcal{C}_∞ . Dicha recta es tal que $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.

Ecuación diagonal afín de una variedad cuadrática: Veamos cuando una variedad cuadrática afín se expresa por una ecuación que únicamente tenga términos cuadráticos.

Definición 3.2.10 Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ se dice que es *autoconjugada* con respecto a una variedad cuadrática, si los puntos básicos de la referencia proyectiva asociada $\{O, \langle \vec{e}_1 \rangle, \dots, \langle \vec{e}_n \rangle; O * (\vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n)\}$ son conjugados dos a dos.

Proposición 3.2.11 Una referencia afín $\mathcal{R}_a = \{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ se dice que es *autoconjugada* con respecto a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ si y solo si la ecuación, denominada *diagonal afín*, de $\mathcal{C}(\omega)$ con respecto a \mathcal{R}_a toma la forma

$$a_0 + a_1 t_1^2 + \dots + a_n t_n^2 = 0,$$

donde (t_1, \dots, t_n) denotan las coordenadas afines de un punto.

Proposición 3.2.12 Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una variedad cuadrática. Una referencia afín $\{O; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ es *autoconjugada* con respecto $\mathcal{C}(\omega)$ si y solo si O es un centro o un punto singular propio y $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ son direcciones conjugadas dos a dos. Además, en dicho caso, la ecuación diagonal afín correspondiente,

$$a_0 + a_1t_1^2 + a_2t_2^2 + \dots + a_nt_n^2 = 0,$$

es tal que $a_0 = \omega(\vec{c})$, donde $\langle \vec{c} \rangle = O$ y $\langle \vec{c} + \vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n \rangle = O * (\vec{e}_1 + \dots + \vec{e}_n)$. Se tiene que $a_0 \neq 0$ cuando O es centro y $a_0 = 0$ cuando O es punto singular propio.

3.3. Clasificación afín las variedades cuadráticas complejas

Siguiendo las líneas indicadas en la sección 3.1 y considerando los resultados de la sección 3.2, procederemos a clasificar las variedades cuadráticas desde el punto de vista afín.

Clasificación afín de las variedades cuadráticas complejas en dimensión 1. Desde el punto de vista afín se tienen los siguientes casos:

- i) Si $\text{rang } \omega = 2$, se tienen dos posibilidades:
 - a) Si $r_\infty = 1, P_\infty \notin \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega)$ es *dos puntos propios*. Tiene centro, el punto medio de los dos puntos, y tiene ecuación diagonal afín.
 - b) Si $r_\infty = 0, P_\infty \in \mathcal{C}(\omega)$. Por lo que $\mathcal{C}(\omega)$ es *el punto impropio y un punto propio*. No tiene centro, ni ecuación diagonal afín.
- ii) Si $\text{rang } \omega = 1$, se diferencian dos posibilidades:
 - a) Si $r_\infty = 1, P_\infty \notin \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega)$ es un *punto propio doble*. No tiene centro, pero sí tiene ecuación diagonal afín.
 - b) Si $r_\infty = 0, P_\infty \in \mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega)$ es el *punto impropio doble*. Tiene centro y ecuación diagonal afín.

Recordamos que en dimensión 1 las variedades cuadráticas no tienen asíntotas.

nombre	r	r_∞	centro	asíntotas	ec. diag. afín $\left[\frac{r}{2}\right] + s$	s
dos puntos propios	2	1	sí	no	sí	0
el punto impropio y un punto propio	2	0	no	no	no	0
un punto propio doble	1	1	no	no	sí	0
el punto impropio doble	1	0	sí	no	sí	0

Tabla 3.1. Clasificación afín de las variedades cuadráticas complejas en dimensión 1.

Clasificación afín de las cónicas complejas. Sea r_∞ la recta del infinito y r una recta propia, desde el punto de vista afín se tienen los siguientes casos:

- i) Si $\text{rang } \omega = 3$, se tienen las siguientes posibilidades:

- a) Si $r_\infty = 2$, \mathcal{C}_∞ es dos puntos. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es una *hipérbola compleja*. Tiene centro, asíntotas y ecuación diagonal afín. Su variedad cuadrática asintótica está formada por dos diámetros asintóticos.
 Se tiene que r es secante o tangente. En el primer caso, $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ puede ser dos puntos propios o un punto propio por un punto impropio. En esta última situación la recta secante es paralela a una de las dos asíntotas. Si r es tangente, entonces $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un único punto, que será propio o impropio. Si se da esta segunda posibilidad, la recta tangente coincide con una de las asíntotas.
- b) Si $r_\infty = 1$, \mathcal{C}_∞ es un punto doble. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es una *parábola compleja*. No tiene centro, ni asíntotas ni ecuación diagonal afín.
 Se tiene que r es secante o tangente. Cuando sea secante $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos puntos propios o un punto propio y el punto impropio. En este segundo caso la recta r tiene la dirección de la parábola. Si r es tangente entonces $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un punto que necesariamente debe ser propio.
- (ii) Si $\text{rang } \omega = 2$, entonces la cónica tiene un único punto singular Q . Los tipos posibles son:
- a) Si $r_\infty = 2$, $Q \notin r_\infty$. Por tanto, la cónica es el producto de *dos rectas propias no paralelas*. Su intersección es el punto singular Q . No tiene centro, pero tiene asíntotas y ecuación diagonal afín.
 Se tiene que r es secante o es tangente. Si es secante, entonces $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos puntos propios o un punto propio y un punto impropio. En esta segunda situación, r es paralela a una de las dos rectas que forma $\mathcal{C}(\omega)$. Si es tangente, entonces $r \cap \mathcal{C}(\omega) = Q$ o $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ es una de las dos rectas que la forman.
- b) Si $r_\infty = 1$, $Q \in r_\infty \not\subseteq \mathcal{C}(\omega)$. La cónica es *dos rectas propias paralelas* según la dirección de Q . Tiene centro, no tiene asíntotas y tiene ecuación diagonal afín.
 Se tiene que r es secante o es tangente. Si es secante, $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos puntos propios. Si es tangente, $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ o $r \cap \mathcal{C}(\omega) = Q$. Por lo que r sería paralela a las dos rectas que forman $\mathcal{C}(\omega)$, siendo coincidente con una de ellas cuando $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.
- c) Si $r_\infty = 0$, $r_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. La cónica es el producto de la *recta impropia por una recta propia*. No tiene centro, ni asíntotas, ni ecuación diagonal afín.
 Se tiene que r es secante o es tangente. Si es secante, $r \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un punto propio y un punto impropio no singular. Si es tangente, $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ o $r \cap \mathcal{C}(\omega) = Q$. Por lo que r sería paralela a la recta propia de $\mathcal{C}(\omega)$, siendo coincidente con ella cuando $r \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.
- iii) Si $\text{rang } \omega = 1$, hay dos posibilidades:
- a) Si $r_\infty = 1$, $\mathcal{C}(\omega) = s^2$ es una *recta propia doble*. No tiene centro, ni asíntotas, pero tiene ecuación diagonal afín.

Se tiene que r es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. Por tanto, $r \cap \mathcal{C}(\omega) = r \cap s = Q$ un punto propio o $r \cap \mathcal{C}(\omega) = Q_\infty$ (r es paralela a s) o $r = s$.

- b) Si $r_\infty = 0$, la cónica es la *recta impropia doble*. Tiene centro y ecuación diagonal afín, pero no tiene asíntotas.
Si r es una recta propia $r \cap \mathcal{C}(\omega) = Q_\infty$ la dirección de r .

nombre	r	r_∞	centro	asíntotas	ec. diag. afín	$\left[\frac{r}{2}\right] + s$
hipérbola compleja	3	2	sí	sí	sí	0
parábola compleja	3	1	no	no	no	0
dos rectas propias no paralelas	2	2	no	sí	sí	1
dos rectas propias paralelas	2	1	sí	no	sí	1
recta impropia por una recta propia	2	0	no	no	no	1
recta propia doble	1	1	no	no	sí	1
recta impropia doble	1	0	sí	no	sí	1

Tabla 3.2. Clasificación afín de las cónicas complejas.

Clasificación afín de las cuádricas complejas. A lo largo de la exposición que sigue, π_∞ denotará el plano impropio y π será un plano propio. Desde el punto de vista afín, se tienen las siguientes posibilidades:

- i) Si $\text{rang } \omega = 4$, las alternativas son las que siguen:
 - a) Si $r_\infty = 3$, \mathcal{C}_∞ es ordinaria y diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperboloide complejo*. Tiene centro, asíntotas (hay diámetros asíntóticos y asíntotas contenidas en $\mathcal{C}(\omega)$) y tiene ecuación diagonal afín.
El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3 ó 2. Si es 3, $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1, por lo que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hipérbola compleja o una parábola compleja. Si es 2, entonces el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 2 ó 1. Por tanto, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos rectas propias no paralelas o dos rectas propias paralelas.
 - b) Si $r_\infty = 2$, \mathcal{C}_∞ es degenerada. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *paraboloide complejo*. No tiene centro, ni ecuación diagonal afín, pero tiene asíntotas.
El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3 ó 2. Si es 3, $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1, por lo que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hipérbola compleja o una parábola compleja. Si es 2, entonces π es tangente a $\mathcal{C}(\omega)$ y $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0. En el primer caso, es dos rectas propias que se cortan, en el segundo caso, es dos rectas propias paralelas y, en el tercero, es el producto de una recta propia por la recta impropia $\pi \cap \pi_\infty$.
- ii) Si $\text{rang } \omega = 3$, la cuádrlica tiene un solo punto singular Q . Desde el punto de vista afín se pueden dar las posibilidades:
 - a) Si $r_\infty = 3$, $Q \notin \pi_\infty$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cono complejo*. No tiene centro, tiene asíntotas contenidas en $\mathcal{C}(\omega)$ y ecuación diagonal afín.

El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3, 2 ó 1. Si es 3, $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1. De estas dos posibilidades resulta que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hipérbola compleja o una parábola compleja, respectivamente. Si es 2, entonces $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente de rango 2 ó 1. De ahí que sea dos rectas propias no paralelas o dos rectas propias paralelas. Finalmente, si es 1, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ necesariamente es una recta propia doble.

Observación 3.3.1 Apolonio fue el primero en basar el estudio sistemático de las cónicas (reales) en secciones de un mismo cono circular, recto u oblicuo [6, Cap. 4, Vol. I]. De ahí viene el nombre de cónica. Obsérvese que en el párrafo anterior, hemos obtenido todas las cónicas complejas como distintas secciones de un mismo cono complejo, lo que resulta en concordancia con lo obtenido por Apolonio.

- b) Si $r_\infty = 2$, $Q \in \pi_\infty$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cilindro hiperbólico complejo*. Tiene centro, asíntotas (diámetros asíntóticos) y ecuación diagonal afín. El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3, 2 ó 1. Si es 3, $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1. De esto resulta que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hipérbola compleja o una parábola compleja, respectivamente. Si es 2, entonces $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0 resultando dos rectas propias no paralelas, dos rectas propias paralelas o el producto de una recta propia por la recta impropia $\pi \cap \pi_\infty$. Finalmente, si es 1, entonces el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 ó 0, resultando una recta propia doble o la recta impropia doble $(\pi \cap \pi_\infty)^2$.
 - c) Si $r_\infty = 1$, $Q \in \pi_\infty$. Diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cilindro parabólico complejo*. No tiene centro, ni asíntotas, ni ecuación diagonal afín. El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3, 2 ó 1. Si es 3, el rango de $(\pi_\infty \cap \pi) \cap (\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega))$ es 1 ó 0 y, por otro lado, el rango de $(\pi_\infty \cap \pi) \cap (\pi \cap \mathcal{C}(\omega))$ es 3, 2 ó 1. Por lo que necesariamente el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 (este tipo de argumento se usará más adelante sin mencionarlo explícitamente). Por lo que $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una parábola compleja. Si es 2, entonces $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente de rango 1 ó 0. Por tanto, se trata de dos rectas propias paralelas o el producto de una recta propia por la recta impropia $\pi \cap \pi_\infty$, respectivamente. Finalmente, si es 1, entonces el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 ó 0. De ahí que resulte una recta propia doble o la recta impropia doble $(\pi \cap \pi_\infty)^2$.
- iii) Si $\text{rang } \omega = 2$, entonces $\mathcal{C}(\omega)$ es dos planos que se cortan en la recta de puntos singulares s . Se pueden dar las posibilidades:
- a) Si $r_\infty = 2$, $s \not\subseteq \pi_\infty$. Por lo que $\mathcal{C}(\omega)$ es *dos planos propios no paralelos*. No tiene centro, pero sí tiene asíntotas y ecuación diagonal afín. El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 2, 1 ó 0. Si es 2, el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 2, 1 ó 0. Por tanto, $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es o dos rectas propias no paralelas, o dos rectas propias paralelas o el producto de una recta propia por la recta impropia $\pi \cap \pi_\infty$. Si es 1, entonces $s \subseteq \pi$ y π es un tercer plano propio

que contiene a s y no coincidente con los que forman $\mathcal{C}(\omega)$. Finalmente, si es 0, entonces π es uno de los dos planos que constituyen $\mathcal{C}(\omega)$.

- b) Si $r_\infty = 1$, $s \subseteq \pi_\infty$. Por lo que $\mathcal{C}(\omega)$ es *dos planos paralelos*. Tiene centro y ecuación diagonal afín, pero no tiene asíntotas.

El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 2, 1 ó 0. Si es 2, el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 ó 0 y $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos rectas propias paralelas o el producto de una recta propia por la recta impropia $\pi_\infty \cap \pi$. Si es 1, el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 ó 0. Por lo que π es un plano propio paralelo a los planos que forman $\mathcal{C}(\omega)$ o π es el plano impropio. Finalmente, si es 0, π es uno de los dos planos que constituyen $\mathcal{C}(\omega)$.

- c) Si $r_\infty = 0$, $\pi_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ y $\mathcal{C}(\omega)$ es el producto del *plano impropio por un plano propio*. No tiene centro, ni asíntotas, ni ecuación diagonal afín.

El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 2, 1 ó 0. Si es 2, el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 0 y $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una recta propia por una recta impropia. Si es 1, π es un plano paralelo y distinto al plano propio que forma $\mathcal{C}(\omega)$ y $\pi \cap \mathcal{C}(\omega) = s^2$. Finalmente, si es 0, π es el plano propio que constituye $\mathcal{C}(\omega)$.

- iv) Si $\text{rang } \omega = 1$, $\mathcal{C}(\omega) = S^2$ es un plano doble de puntos singulares S . Se tienen dos posibilidades:

- a) Si $r_\infty = 1$, $\pi_\infty \not\subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Por lo que $\mathcal{C}(\omega)$ es *un plano propio doble*. No tiene centro, ni asíntotas, pero tiene ecuación diagonal afín.

El rango de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 1 ó 0. Si es 1, el rango de $\pi_\infty \cap \pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 ó 0 y $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ es una recta propia doble o una recta impropia doble, respectivamente. Si es 0, $\pi = S$.

- b) Si $r_\infty = 0$, $\pi_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega)$. Por lo que $\mathcal{C}(\omega)$ es el *plano impropio doble*. Tiene centro y ecuación diagonal afín, pero no tiene asíntotas.

La intersección $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$ siempre es una recta impropia doble.

nombre	r	r_∞	centro	asíntotas	ec. diag. afín	$[\frac{r}{2}] + s$
hiperboloide complejo	4	3	sí	sí	sí	1
paraboloide complejo	4	2	no	sí	no	1
cono complejo	3	3	no	sí	sí	1
cilindro hiperbólico complejo	3	2	sí	sí	sí	1
cilindro parabólico complejo	3	1	no	no	no	1
dos planos propios no paralelos	2	2	no	sí	sí	2
dos planos propios paralelos	2	1	sí	no	sí	2
plano impropio por un plano propio	2	0	no	no	no	2
plano propio doble	1	1	no	no	sí	2
plano impropio doble	1	0	sí	no	sí	2

Tabla 3.3. Clasificación afín de las cuádricas.

Clasificación afín de las hipercuádricas complejas en dimensión 4. A lo largo de la exposición que sigue \mathcal{H}_∞ denotará el hiperplano impropio y \mathcal{H} será un hiperplano propio. Se tienen los siguientes casos:

- i) Si $\text{rang } \omega = 5$, se dan las siguientes alternativas:
 - a) Si $r_\infty = 4$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperhiperboloide complejo*. Tiene centro, asíntotas y ecuación diagonal afín. El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 4 ó 3. Si es 4, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3 ó 2. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide complejo o un paraboloides complejo, respectivamente. Si es 3, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3 ó 2, resultando un cono complejo o un cilindro hiperbólico complejo.
 - b) Si $r_\infty = 3$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperparaboloides complejo*. No tiene centro, ni ecuación diagonal afín, pero sí tiene asíntotas. El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 4 ó 3. Si es 4, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3 ó 2. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide complejo o un paraboloides complejo, respectivamente. Si es 3, entonces $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3, 2 ó 1. De lo que resulta un cono complejo, un cilindro hiperbólico complejo o un cilindro parabólico complejo.
- ii) Si $\text{rang } \omega = 4$, entonces la hipercuádrica tiene un único punto singular Q y se tienen las siguientes posibilidades:
 - a) Si $r_\infty = 4$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercono complejo*. No tiene centro, pero sí tiene asíntotas y ecuación diagonal afín. El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 4, 3 ó 2. Si es 4, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3 ó 2. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide complejo o un paraboloides complejo, respectivamente. Si es 3, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3 ó 2. De lo que resulta un cono complejo o un cilindro hiperbólico complejo. Si es 2, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente de rango 2 y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos propios no paralelos.
 - b) Si $r_\infty = 3$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro hiperbólico complejo*. Tiene centro, asíntotas y ecuación diagonal afín. El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 4, 3 ó 2. Si es 4, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3 ó 2. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un hiperboloide complejo o un paraboloides complejo, respectivamente. Si es 3, entonces $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3, 2 ó 1. De lo que resulta un cono complejo, un cilindro hiperbólico complejo o un cilindro parabólico complejo. Si es 2, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1, resultando $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ dos planos propios no paralelos o dos planos propios paralelos.
 - c) Si $r_\infty = 2$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hipercilindro parabólico complejo*. No tiene centro, ni ecuación diagonal afín, pero sí tiene asíntotas. El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 4, 3 ó 2. Si es 4, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente de rango 2. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un paraboloides complejo. Si es 3, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1, resultando un cilindro hiperbólico complejo o un cilindro parabólico complejo, respectivamente.

Si es 2, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0 y resulta que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos propios no paralelos, dos planos propios paralelos o el producto de un plano propio por el plano impropio $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_\infty$.

iii) Si $\text{rang } \omega = 3$, los puntos singulares constituyen una recta s y se tienen tres alternativas:

a) Si $r_\infty = 3$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *conoide complejo*. No tiene centro, pero sí tiene asíntotas y ecuación diagonal afín.

El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3, 2 ó 1. Si es 3, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 3, 2 ó 1. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cono complejo, un cilindro hiperbólico o un cilindro parabólico. Si es 2, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1 y resulta que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es dos planos propios no paralelos o dos planos propios paralelos. Si es 1, entonces $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente de rango 1. En este caso, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un plano propio doble.

b) Si $r_\infty = 2$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cilindroide hiperbólico complejo*. Tiene centro, asíntotas y ecuación diagonal afín.

El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3, 2 ó 1. Si es 3, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2 ó 1. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será cilindro hiperbólico o un cilindro parabólico, respectivamente. Si es 2, entonces el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 ó 0. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos propios paralelos o el producto de un plano propio por el plano impropio $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H}$. Si es 1, entonces $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. Esto es, $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un plano propio doble o el plano impropio doble $(\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H})^2$.

c) Si $r_\infty = 1$, diremos que $\mathcal{C}(\omega)$ es un *cilindroide parabólico complejo*. No tiene centro, ni asíntotas, ni ecuación diagonal afín.

El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 3, 2 ó 1. Si es 3, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente de rango 1. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un cilindro parabólico. Si es 2, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. De lo que resulta dos planos propios paralelos o el producto de un plano propio por el plano impropio $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H}$, respectivamente. Si es 1, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. De ello resulta que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es un plano propio doble con dirección $s \subset \pi_\infty$ o el plano impropio doble $(\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H})^2$.

iv) Si $\text{rang } \omega = 2$, los puntos singulares constituyen un plano S y se tienen tres posibilidades:

a) Si $r_\infty = 2$, $\mathcal{C}(\omega)$ es *dos hiperplanos propios no paralelos*. No tiene centro, pero sí asíntotas y ecuación diagonal afín.

El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 2, 1 ó 0. Si es 2, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 2, 1 ó 0. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos propios no paralelos, dos planos propios paralelos o el producto de un plano propio por el plano impropio $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H}$, respectivamente. Si es 1, entonces el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 ó 0. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un plano propio doble o el plano impropio doble $(\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H})^2$. Si es 0, entonces $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ es uno de los dos hiperplanos que forman la hipercuádrlica.

- b) Si $r_\infty = 1$, $\mathcal{C}(\omega)$ es *dos hiperplanos propios paralelos*. Tiene centro y ecuación diagonal afín, pero no tiene asíntotas .
El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 2, 1 ó 0. Si es 2, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será dos planos propios paralelos o el producto de un plano propio por el plano impropio $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H}$, respectivamente. Si es 1, el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es necesariamente 0. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será el plano impropio doble $(\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H})^2$. Si es 0, $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ es uno de los dos hiperplanos que forman la hipercuádrica.
- c) Si $r_\infty = 0$, $\mathcal{C}(\omega)$ es el producto del *hiperplano impropio por un hiperplano propio*. No tiene centro, ni asíntotas, ni ecuación diagonal afín.
El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 2, 1 ó 0 y se tendrá, respectivamente, que es el producto de un plano propio por el plano impropio $\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_\infty$ o el plano impropio doble $(\mathcal{H} \cap \mathcal{H}_\infty)^2$ o $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ es el hiperplano propio que forma la hipercuádrica.
- v) Si $\text{rang } \omega = 1$, se trata de un hiperplano doble de puntos singulares. En este caso hay dos posibilidades:
- a) Si $r_\infty = 1$, $\mathcal{C}(\omega)$ es un *hiperplano propio doble*. No tiene centro, ni asíntotas, pero sí ecuación diagonal afín.
El rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ podrá ser 1 ó 0. Si es 1, $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es de rango 1 ó 0. Por lo que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ será un plano propio doble o el plano impropio doble $(\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H})^2$, respectivamente. Si es 0, entonces $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$ es el hiperplano que forma la hipercuádrica.
- b) Si $r_\infty = 0$, $\mathcal{C}(\omega)$ es el *hiperplano impropio doble*. Tiene centro y ecuación diagonal afín, pero no tiene asíntotas.
Al ser \mathcal{H} propio necesariamente el rango de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es 1 y se tiene que $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$ es el plano impropio doble $(\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{H})^2$.

3.4. Algunas variedades cuadráticas tangentes

Para conocer aún mejor la naturaleza geométrica de las distintas variedades cuadráticas que surgen en las clasificaciones anteriormente expuestas, procedemos a describir la variedad cuadrática tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ a una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ desde un punto P .

Por razones de espacio y no ser demasiado reiterativos, no haremos una exposición exhaustiva para todos los tipos de variedades cuadráticas que surgen en las clasificaciones descritas en la sección anterior. Únicamente veremos variedades cuadráticas tangentes para ciertas variedades cuadráticas que consideramos representativas y cuyo estudio resulte ilustrativo. A partir de ellas, el lector podrá describir la situación para otra variedad cuadrática cualquiera.

nombre	r	r_∞	centro	asíntotas	ec. diag. $\left[\frac{r}{2}\right] + s$ afín	
hiperhiperboloide complejo	5	4	sí	sí	sí	1
hiperparaboloide complejo	5	3	no	sí	no	1
hipercono complejo	4	4	no	sí	sí	2
hipercilindro hiperbólico complejo	4	3	sí	sí	sí	2
hipercilindro parabólico complejo	4	2	no	sí	no	2
conoide complejos	3	3	no	sí	sí	2
cilindroide hiperbólico complejo	3	2	sí	sí	sí	2
cilindroide parabólico complejo	3	1	no	no	no	2
dos hiperplanos propios no paralelos	2	2	no	sí	sí	3
dos hiperplanos propios paralelos	2	1	sí	no	sí	3
hiperplano impropio por un hiperplano propio	2	0	no	no	no	3
hiperplano propio doble	1	1	no	no	sí	3
hiperplano impropio doble	1	0	sí	no	sí	3

Tabla 3.4. Clasificación afín de las hipercuádricas en dimensión 4.

1.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ una hipérbola compleja, P un punto no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$ y $r = \tilde{f}(P)$ su recta polar. Se tiene que el rango de la cónica tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al de $r \cap \mathcal{C}(\omega)$, que es 2. Por tanto, $\mathcal{C}(\omega_P)$ es el producto de dos rectas.

Si P es propio, se observa que el conjunto de los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $\{P\} \not\subseteq r_\infty$. Por lo que el rango de $r_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 2. De ahí que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es el producto de dos rectas propias cuya intersección es P . En el caso de que P sea el centro de $\mathcal{C}(\omega)$, $\mathcal{C}(\omega_P)$ es la cónica asíntótica de la hipérbola compleja.

Si P es impropio, se tiene que el rango de $r_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 1 ó 0. Si fuese 0, entonces $r_\infty \subseteq \mathcal{C}(\omega_P)$. Por tanto, r_∞ sería tangente a $\mathcal{C}(\omega)$. Contradicción, pues r_∞ es secante. Al ser el rango de $r_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$ igual a 1, se tiene que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es el producto de dos rectas propias paralelas con dirección P .

2.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un hiperboloide complejo, P un punto cualquiera no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$ y $\tilde{f}(P) = \pi$ su plano polar. Se tiene que el rango de la cuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$, que es 3.

Si P es propio, como el conjunto de los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $\{P\} \not\subseteq \pi_\infty$, el rango de $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 3. De ahí que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un cono complejo cuyo vértice es P . En el caso de que P sea el centro de $\mathcal{C}(\omega)$, $\mathcal{C}(\omega_P)$ es la cuádrica asíntótica del hiperboloide complejo.

Si P es impropio, al ser $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ la cónica tangente desde P (en π_∞) a $\mathcal{C}_\infty = \pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$, el rango de $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 2. Por lo que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un cilindro hiperbólico.

3.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un paraboloido complejo, P un punto no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$ y $\tilde{f}(P) = \pi$ su plano polar. Se tiene que el rango de la cuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al de $\pi \cap \mathcal{C}(\omega)$, que es 3.

Si P es propio, como el conjunto de los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $\{P\} \not\subseteq \pi_\infty$, el rango de $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 3. De ahí que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un cono complejo cuyo vértice es P .

Si P es impropio, al ser $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ la cónica tangente desde P (en π_∞) a $\mathcal{C}_\infty = \pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$, que recordamos su rango es 2. Por tanto, el rango de $\pi_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 1 y $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un cilindro parabólico.

4.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un hiperhiperboloide complejo, P un punto no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$ y $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ su hiperplano polar. Se tiene que el rango de la hipercuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$, que es 4.

Si P es propio, como el conjunto de los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $\{P\} \not\subseteq \mathcal{H}_\infty$, el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 4. De ahí que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercono complejo cuyo vértice es P . En el caso de que P sea el centro de $\mathcal{C}(\omega)$, $\mathcal{C}(\omega_P)$ es la hipercuádrica asintótica del hiperhiperboloide complejo.

Si P es impropio, al ser $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ la hipercuádrica tangente desde P (en \mathcal{H}_∞) a $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$, el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 3. Por lo que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un hipercilindro hiperbólico.

5.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un hipercilindro parabólico complejo cuyo único punto singular es Q_∞ , P un punto no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$ y $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ su hiperplano polar. Se tiene que el rango de la hipercuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$, que es 3.

Si P es propio, como el conjunto de los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $PQ_\infty \not\subseteq \mathcal{H}_\infty$, el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 3. De ahí que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un conoide complejo.

Si P es impropio, al ser $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ la hipercuádrica tangente desde P (en \mathcal{H}_∞) a $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$, el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 1. Por lo que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es un cilindroide parabólico.

6.- Sea $\mathcal{C}(\omega)$ un conoide complejo cuya recta de puntos singulares es $s \not\subseteq \mathcal{H}_\infty$ con dirección Q_∞ , P un punto no perteneciente a $\mathcal{C}(\omega)$ y $\tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ su hiperplano polar. Se tiene que el rango de la hipercuádrica tangente $\mathcal{C}(\omega_P)$ es igual al de $\mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega)$, que es 2.

Si P es propio, como el conjunto de los puntos singulares de $\mathcal{C}(\omega_P)$ es $\{P\} + s \not\subseteq \mathcal{H}_\infty$, el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 2. De ahí que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos propios no paralelos que se intersecan en un plano propio.

Si P es impropio, al ser $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ la hipercuádrica tangente desde P (en \mathcal{H}_∞) a $\mathcal{C}_\infty = \mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega)$, el rango de $\mathcal{H}_\infty \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ es 2 y sus puntos singulares constituyen la recta PQ_∞ . Por lo que $\mathcal{C}(\omega_P)$ es dos hiperplanos propios no paralelos cuya intersección es el plano propio $\{P\} + s$ con dirección la recta impropia PQ_∞ .

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos descrito y presentado diversos resultados de la geometría proyectiva compleja. En primera instancia, hemos presentado un análisis de las nociones de razón doble y razón simple en dicha geometría. Para ello, hemos necesitado considerar el subespacio vectorial complejo de dimensión 1 como un subespacio vectorial real de dimensión 2.

En segundo lugar, hemos presentado y demostrado dos proposiciones que son cruciales en el resto del trabajo. Nos referimos a las proposiciones [2.1.9](#), [2.1.12](#), donde se presentan resultados relativos a subespacios proyectivos contenidos en una variedad cuadrática y a la incidencia de un hiperplano con una variedad cuadrática.

Posteriormente, tras describir los principios generales que deben regir las clasificaciones proyectiva y afín de las variedades cuadráticas en cualquier dimensión, hemos dado detalladamente dichas clasificaciones para variedades cuadráticas complejas en las dimensiones 1, 2, 3 y 4. A lo largo del trabajo, ha sido objetivo principal tratar de caracterizar y estudiar la naturaleza de las variedades cuadráticas complejas con el máximo detalle posible y, de este modo, obtener el mayor conocimiento posible sobre su estructura geométrica. A su vez, hemos presentado propuestas de nombres para las distintas variedades cuadráticas complejas, sugeridos principalmente por las propiedades proyectivas y afines que se satisfacen en cada caso, resultando unas denominaciones que consideramos acordes con ellas.

Como comentario general, se han analizado con detalle ciertas propiedades de las variedades cuadráticas enmarcadas en un ámbito general de dimensión n . Esto se ha realizado para los contextos afín y proyectivo. En particular, cabe mencionar además de los resultados contenidos en las proposiciones anteriormente referidas, los de la incidencia de una variedad con el hiperplano del infinito; las descripciones explícitas de algunas variedades cuadráticas tangentes; y, por supuesto, el análisis de los elementos afines de una variedad cuadrática, como son las asíntotas, centro, etc. Aunque los métodos sean aplicados con detalle solo a dimensiones bajas, ello sería aplicable a cualquier otra dimensión.

Un estudio que se podría realizar y que entraría en el marco de este trabajo sería el análisis de las variedades cuadráticas desde el punto de vista unitario. Desafortunadamente, esto extendería excesivamente la presente memoria, pudiendo ser materia para un estudio posterior.

A

Formas cuadráticas complejas

Aquí se exponen las nociones y propiedades relativas a las formas cuadráticas complejas que se utilizan a lo largo del trabajo. Este material se incluye con el ánimo de que el presente texto sea lo más autocontenido posible.

A.1. Formas bilineales

Definición A.1.1 Sea V un espacio vectorial complejo, una aplicación $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, se dice que es una *forma bilineal* sobre V , si satisface las siguientes condiciones:

$$(i) \quad f(\lambda\vec{z} + \mu\vec{z}', \vec{t}) = \lambda f(\vec{z}, \vec{t}) + \mu f(\vec{z}', \vec{t}), \quad (ii) \quad f(\vec{z}, \lambda\vec{t} + \mu\vec{t}') = \lambda f(\vec{z}, \vec{t}) + \mu f(\vec{z}, \vec{t}'),$$

para todo $\vec{z}, \vec{z}', \vec{t}, \vec{t}' \in V$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

El conjunto de las formas bilineales sobre V , denotado por $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{C})$, tiene estructura de espacio vectorial sobre \mathbb{C} con las operaciones:

$$(f + g)(\vec{z}, \vec{t}) = f(\vec{z}, \vec{t}) + g(\vec{z}, \vec{t}), \quad (\lambda f)(\vec{z}, \vec{t}) = \lambda f(\vec{z}, \vec{t}).$$

- Una forma bilineal f sobre V , se dice que es *simétrica*, si $f(\vec{z}, \vec{t}) = f(\vec{t}, \vec{z})$, para todo $\vec{z}, \vec{t} \in V$. El conjunto de las formas bilineales simétricas S^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{C})$.

- Una forma bilineal f sobre V , se dice que es *antisimétrica*, si $f(\vec{z}, \vec{t}) = -f(\vec{t}, \vec{z})$, para todo $\vec{z}, \vec{t} \in V$. El conjunto de las formas bilineales antisimétricas A^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{C})$.

El espacio $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{C})$ es suma directa de los subespacios S^2V^* y A^2V^* . Esto es, $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{C}) = S^2V^* \oplus A^2V^*$. Para $f \in \mathcal{L}^2(V, \mathbb{C})$, se tiene que $f = f_{\mathbf{s}} + f_{\mathbf{a}}$, donde

$$f_{\mathbf{s}}(\vec{z}, \vec{t}) = \frac{1}{2}(f(\vec{z}, \vec{t}) + f(\vec{t}, \vec{z})), \quad f_{\mathbf{a}}(\vec{z}, \vec{t}) = \frac{1}{2}(f(\vec{z}, \vec{t}) - f(\vec{t}, \vec{z})).$$

Teniéndose $f_{\mathbf{s}} \in S^2V^*$ y $f_{\mathbf{a}} \in A^2V^*$.

Supongamos que $\dim V = n$, y sea $\mathcal{U} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V . Si f es una forma bilineal sobre V , entonces

$$f(\vec{z}, \vec{t}) = f\left(\sum_{i=1}^n z_i \vec{u}_i, \sum_{j=1}^n t_j \vec{u}_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i t_j f(\vec{u}_i, \vec{u}_j).$$

Si consideramos la matriz $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = f(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$, obtenemos, por un lado, que la expresión de f está dada por $f(\vec{z}, \vec{t}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} z_i t_j$, y, por otro, que f se expresa matricialmente por

$$f(\vec{z}, \vec{t}) = (z_1, \dots, z_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} = Z^t A T.$$

Se dice que A es la matriz *asociada* a f respecto de \mathcal{U} .

Una matriz A es *simétrica*, si todo elemento a_{ij} de ella es tal que $a_{ij} = a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es simétrica si y sólo si $A^t = A$, donde A^t denota la traspuesta de A . Una forma bilineal sobre V es simétrica si y sólo si está asociada a una matriz simétrica.

Cambios de base. Matrices congruentes: Sean $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ una forma bilineal y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$, $\{\vec{u}'_1, \dots, \vec{u}'_n\}$ bases de V . Supongamos A y B son las matrices asociadas a f con respecto de las bases dadas. Es decir, $A = (a_{ij}) = (f(\vec{u}_i, \vec{u}_j))$ y $B = (b_{ij}) = (f(\vec{u}'_i, \vec{u}'_j))$. Veamos como están relacionadas las matrices A y B . Para ello, supongamos que la segunda base viene dada en función de la primera. Esto es, para $j = 1, \dots, n$, se tiene $\vec{u}'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} \vec{u}_i$. Denotemos por $P = (p_{ij})$ la matriz cuya columna j está formada por las componentes de \vec{u}'_j respecto de la primera base. Entonces sabemos que el cambio de componentes viene dado por $Z = PZ'$. Así, tenemos que

$$f(\vec{z}, \vec{t}) = Z^t A T = (PZ')^t A (PT') = Z'^t P^t A P T' = Z'^t B T'.$$

Como $Z'^t P^t A P T' = Z'^t B T'$, para todo Z', T' , se tiene que $B = P^t A P$.

Definición A.1.2 Dos matrices cuadradas A y B de orden n son *congruentes*, si existe una matriz cuadrada regular P de orden n tal que $B = P^t A P$.

Proposición A.1.3 *Dos matrices están asociadas a una misma forma bilineal si y sólo si son congruentes.*

A.2. Formas cuadráticas complejas

Definición A.2.1 Dada $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ una forma bilineal simétrica. Se llama *forma cuadrática* asociada a f , a la aplicación $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\omega(\vec{z}) = f(\vec{z}, \vec{z})$. En este caso, la forma bilineal simétrica f se denomina *forma polar* de ω .

Las siguientes propiedades son consecuencias de la definición anterior.

Proposición A.2.2 Si ω es una forma cuadrática sobre V con forma polar f , entonces para todo $\vec{z}, \vec{t} \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se satisfacen:

$$(i) \omega(\lambda\vec{z}) = \lambda^2\omega(\vec{z}), \quad (ii) \omega(\vec{0}) = 0, \quad (iii) \omega(\vec{z} + \vec{t}) = \omega(\vec{z}) + \omega(\vec{t}) + 2f(\vec{z}, \vec{t}).$$

De la propiedad (iii) se deduce que $f(\vec{z}, \vec{t}) = \frac{1}{2}(\omega(\vec{z} + \vec{t}) - \omega(\vec{z}) - \omega(\vec{t}))$. Ello permite calcular la forma polar a partir de la forma cuadrática. Por consiguiente, si dos formas bilineales simétricas definen la misma forma cuadrática, entonces son iguales. Así, podemos afirmar que existe una correspondencia biyectiva entre formas cuadráticas y formas bilineales simétricas de modo que a cada forma cuadrática ω se le hace corresponder su forma polar. Asimismo, se comprueba sin dificultad que el conjunto $\mathcal{Q}(V, \mathbb{C})$ de las formas cuadráticas sobre V tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones

$$(\omega + \omega')(\vec{z}) = \omega(\vec{z}) + \omega'(\vec{z}), \quad (\lambda\omega)(\vec{z}) = \lambda\omega(\vec{z}).$$

Definición A.2.3 Sea $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ una forma cuadrática, $f : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ su forma polar y V^* el espacio vectorial dual de V . La *aplicación lineal de polaridad* de ω es la aplicación $\hat{f} : V \rightarrow V^*$ tal que $\hat{f}(\vec{v})$ es la forma lineal dada por $\hat{f}(\vec{v})(\vec{z}) = f(\vec{z}, \vec{v})$.

Sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V y $\{\vec{u}_1^*, \dots, \vec{u}_n^*\}$ su base dual. Denotemos por $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a la aplicación lineal \hat{f} con respecto a dichas bases. Es decir, la matriz tal que $\hat{f}(\vec{u}_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}\vec{u}_i^*$. Entonces se tiene que $a_{ij} = \hat{f}(\vec{u}_j)(\vec{u}_i) = f(\vec{u}_i, \vec{u}_j)$, por lo que la matrices asociadas a la forma polar y a la aplicación lineal de polaridad coinciden.

Definición A.2.4 Se llama *rango* de una forma cuadrática, al rango de su aplicación lineal de polaridad, o lo que es lo mismo, al rango de una matriz asociada a la forma polar.

Una forma cuadrática se dice que es *ordinaria*, si su rango es igual a la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Es decir, si su matriz asociada es regular.

Una forma cuadrática se dice que es *degenerada*, si su rango es menor que la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Esto es, si su matriz asociada es singular.

Sea $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V y sea $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base de V . Para todo $\vec{z} \in V$, se tiene

$$\omega(\vec{z}) = \sum_{i,j=1}^n z_i z_j f(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = Z^t A Z = \sum_{i=1}^n a_{ii} z_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} z_i z_j.$$

Por tanto, una forma cuadrática se expresa por un polinomio homogéneo de segundo grado $\omega(\vec{z}) = \sum_{i=1}^n a_{ii}z_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij}z_i z_j$, o bien, en forma matricial, por $\omega(\vec{z}) = Z^t A Z$.

Para toda forma cuadrática se puede buscar una base de modo que, respecto de la cual, la forma cuadrática se expresa como suma de únicamente términos cuadráticos. Un resultado básico para ello es el siguiente.

Proposición A.2.5 *Sea $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ una forma cuadrática con forma polar f y sea $\vec{z} \in V$ tal que $\omega(\vec{z}) \neq 0$, entonces el conjunto $\{\vec{z}\}^f = \{\vec{t} \in V \mid f(\vec{z}, \vec{t}) = 0\}$ es un subespacio vectorial de V tal que $V = \langle \vec{z} \rangle \oplus \{\vec{z}\}^f$.*

Usando de forma reiterada lo afirmado en la proposición anterior, se prueba lo siguiente.

Proposición A.2.6 *Dada una forma cuadrática $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$, $\dim V = n$, siempre existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.*

Sea $\omega : V \rightarrow \mathbb{C}$ una forma cuadrática de rango r y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base tal que la matriz asociada a ω sea diagonal. Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

y ω se expresa por

$$\omega(\vec{z}) = d_1 z_1^2 + d_2 z_2^2 + \cdots + d_r z_r^2,$$

donde $d_i \neq 0$, $i = 1, \dots, r$. La igualdad anterior es una *expresión diagonal* de ω .

Si tomamos la base, $\vec{u}'_1 = \frac{\vec{u}_1}{\sqrt{d_1}}, \dots, \vec{u}'_r = \frac{\vec{u}_r}{\sqrt{d_r}}, \vec{u}'_{r+1} = \vec{u}_{r+1}, \dots, \vec{u}'_n = \vec{u}_n$, entonces $\omega(\vec{u}'_i) = \frac{\omega(\vec{u}_i)}{d_i} = \frac{d_i}{d_i} = 1$, para $i = 1, \dots, r$. Por tanto, respecto de esta nueva base, se obtiene la *expresión canónica* de ω que estará dada por

$$\omega(\vec{z}) = z'^2_1 + \cdots + z'^2_r.$$

Bibliografía

- [1] J. de Burgos, *Curso de Algebra y Geometría*, Alhambra (1987).
- [2] E. Casas-Alvero, *Analytic Projective Geometry*, EMS Textbooks in Mathematics (2014).
- [3] Y. Fëdorov. Curso *Abelian varieties in algebraic integrable systems*, Semirario de Geometría y Topología, Noviembre 2016.
<http://digeme.webs.ull.es/?q=node/762>
- [4] J. Frenkel, *Géométrie pour l'élève-professeur*, Hermann (1973).
- [5] J. Gallier, *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*, Springer (2001).
- [6] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Volúmenes I, II y III, Alianza Universidad, (1992).
- [7] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol I-II, Interscience (1969).
- [8] F. Martín Cabrera, *Variedades cuadráticas*, Open Course Ware ULL (2013): <https://campusvirtual.ull.es/ocw/course/view.php?id=87>
- [9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*, Academic Press (1983).
- [10] J. Ritsher-Gebert, *Perspectives on Projective Geometry*, Springer-Verlag (2011).
- [11] L.A. Santaló, *Geometría Proyectiva*, Eudeba (1966).

Quadratic Manifolds in the Complex

Projective Space

Roberto Vega Álvarez

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100722406@ull.edu.es

Abstract

The aim of the present work consists in a detailed characterization of the different quadratic manifolds living in their corresponding complex projective space. This analysis will be developed in detail for dimensions 1, 2 (complex conics), 3 (complex quadrics) and 4. As an additional note, once we have fixed a hyperplane as the ideal hyperplane, we will classify the quadratic manifolds from the affine point of view. We will also present the possible sections of the given manifolds with hyperplanes. We will construct some illustrative examples of tangent manifolds. We stress that the results about the cross-ratio, projective subspaces included in quadratic manifolds and the study of the sections of such manifolds with hyperplanes are of particular interest.

Complex Projective Spaces. Preliminars

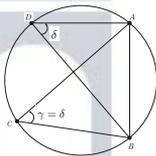
$(ABCD)$:= cross-ratio of four points A, B, C, D in a complex projective line. (CAB) := ratio of three points A, B, C in a complex affine line.

$$(CAB) = \frac{\|\overline{CA}\|}{\|\overline{CB}\|} e^{i\gamma},$$

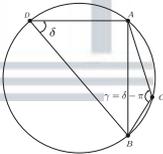
$$(ABCD) = \frac{(CAB)}{(DAB)} = \left(\frac{\|\overline{CA}\|}{\|\overline{CB}\|} : \frac{\|\overline{DA}\|}{\|\overline{DB}\|} \right) e^{i(\gamma-\delta)},$$

where $\gamma := \angle BCA$, $\delta := \angle BDA$.

Proposition 1 $(ABCD)$ is real if and only if A, B, C and D are aligned in the real sense or they are concircular.

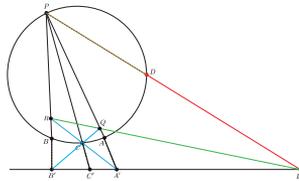


(a) $\gamma = \delta$. Positive cross-ratio



(b) $\gamma = \delta - \pi$. Negative cross-ratio

Construction of the projective harmonic conjugate



Complex Quadratic Manifolds: Projective and Affine Studies

$\mathcal{C}(\omega)$:= a quadratic manifold in $\mathcal{P}(V) \cong \mathbb{C}P^n$, $\text{rang}(\omega) = r$, \mathcal{S} := singular points, $\dim \mathcal{S} = s$, \mathcal{A} := projective subspace of $\mathcal{P}(V)$, $\dim \mathcal{A} = a$.

Proposition 2. For the quadratic manifold presented above one has:

- (i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\omega) \implies a \leq \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s$.
- (ii) $\forall P \in \mathcal{C}(\omega) \implies \exists \mathcal{A} : \dim \mathcal{A} = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s$, with $P \in \mathcal{A}$ and $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\omega)$.
- (iii)

$$\mathcal{S} = \bigcap_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(\omega)} \mathcal{A}.$$

$$\dim \mathcal{S} = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + s$$

Proposition 3 If $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(W) \not\subseteq \mathcal{C}(\omega)$ is a hyperplane $\implies \mathcal{C}(\omega) \cap \mathcal{H} = \mathcal{C}(\omega|_W)$ is a quadratic manifold in \mathcal{H} with singular points $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$. Moreover:

- (i) $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{H} \iff \text{rang}(\omega|_W) = r$. Then $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}$.
- (ii) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H} \wedge \tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ with $P \in \mathcal{H} \iff \text{rang}(\omega|_W) = r - 2$. Then $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{P\} + \mathcal{S}$.
- (iii) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{H} \wedge \tilde{f}(P) = \mathcal{H}$ with $P \notin \mathcal{H} \iff \text{rang}(\omega|_W) = r - 1$. Then $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \mathcal{S}$.

name	r	r _∞	centre	asymptotes	diag. aff. ec.	[5] + s
two proper points	2	1	yes	no	yes	0
ideal point and a proper point	2	0	no	no	no	0
a double proper point	1	1	no	no	yes	0
double ideal point	1	0	yes	no	yes	0

Affine classification of complex quadratic manifolds in dimension 1.

name	r	r _∞	centre	asymptotes	diag. aff. ec.	[5] + s
complex hyperbola	3	2	yes	yes	yes	0
complex parabola	3	1	no	no	no	0
two proper non-parallel lines	2	2	no	yes	yes	1
two proper parallel lines	2	1	yes	no	yes	1
ideal line and a proper line	2	0	no	no	no	1
double proper line	1	1	no	no	yes	1
double ideal line	1	0	yes	no	yes	1

Affine classification of complex conics.

name	r	r _∞	centre	asymptotes	diag. aff. ec.	[5] + s
complex hyperboloid	4	3	yes	yes	yes	1
complex paraboloid	4	2	no	yes	no	1
complex cone	3	3	no	yes	yes	1
complex hyperbolic cylinder	3	2	yes	yes	yes	1
complex parabolic cylinder	3	1	no	no	no	1
two proper non-parallel planes	2	2	no	yes	yes	2
two proper parallel planes	2	1	yes	no	yes	2
ideal plane and a proper plane	2	0	no	no	no	2
double proper plane	1	1	no	no	yes	2
double ideal plane	1	0	yes	no	yes	2

Affine classification of complex quadrics.

name	r	r _∞	centre	asymptote	diag. aff. ec.	[5] + s
complex hyperhyperboloid	5	4	yes	yes	yes	1
complex hyperparaboloid	5	3	no	yes	no	1
complex hypercone	4	4	no	yes	yes	2
complex hyperbolic hypercylinder	4	3	yes	yes	yes	2
complex parabolic cylinder	4	2	no	yes	no	2
Complex conoid	3	3	no	yes	yes	2
complex hyperbolic cylindroid	3	2	yes	yes	yes	2
complex parabolic cylindroid	3	1	no	no	no	2
two proper non-parallel hyperplanes	2	2	no	yes	yes	3
two proper parallel hyperplanes	2	1	yes	no	yes	3
ideal hyperplane and a proper hyperplane	2	0	no	no	no	3
double proper hyperplane	1	1	no	no	yes	3
double ideal hyperplane	1	0	yes	no	yes	3

Affine classification of complex quadratic manifolds in dimension 4.

Example of tangent quadratic manifold from a point P to C(omega)

$\mathcal{C}(\omega)$:= a complex hyperhyperboloid, $P \notin \mathcal{C}(\omega)$ and $\mathcal{H} = \tilde{f}(P)$ its polar hyperplane. $\mathcal{C}(\omega_P)$:= tangent hyperquadric, $\text{rang} \mathcal{C}(\omega_P) = \text{rang} \mathcal{H} \cap \mathcal{C}(\omega) = 4$ and its unique singular point is P .

If P is proper, $\text{rang} \mathcal{H}_{\infty} \cap \mathcal{C}(\omega_P) = 4$. This implies that $\mathcal{C}(\omega_P)$ is a complex hypercone, whose vertex is P . If P is the centre of $\mathcal{C}(\omega)$, $\mathcal{C}(\omega_P)$ is the asymptotic hyperquadric of $\mathcal{C}(\omega)$.

If P is ideal, since $\mathcal{H}_{\infty} \cap \mathcal{C}(\omega_P)$ is the tangent manifold from P to $\mathcal{C}_{\infty} = \mathcal{H}_{\infty} \cap \mathcal{C}(\omega)$ (in \mathcal{H}_{∞}), then $\text{rang} \mathcal{H}_{\infty} \cap \mathcal{C}(\omega_P) = 3$. Therefore, $\mathcal{C}(\omega_P)$ is a hyperbolic hypercylinder.

References

- [1] E. Casas-Alvero, *Analytic Projective Geometry*, EMS Textbooks in Mathematics (2014).
- [2] J. Gallier, *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*, Springer (2001)
- [3] M. Kline, *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Volúmenes I, II y III, Alianza Universidad, Madrid (1992).
- [4] E. Martín Cabrera, *Varietades cuadráticas*, Open Course Ware ULL (2013)
- [5] J. Richter-Gebert, *Perspectives on Projective Geometry*, Springer-Verlag (2011).
- [6] L.A. Santaló, *Geometría Projectiva*, Eudeba (1966).