

Iciar González Alonso

Introducción a la teoría algebraica de grafos

Introduction to algebraic graph theory

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2017

DIRIGIDO POR

María Victoria Reyes Sánchez

María Victoria Reyes Sánchez
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A M^a Victoria Reyes Sánchez,
por toda su ayuda y apoyo.

A mis padres y a mi hermano,
por el cariño y la fuerza que demuestran a diario.

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de este trabajo es aplicar los resultados del álgebra lineal y la teoría de grupos a la teoría de grafos, con el fin de poder obtener mayor información y resolver diversos problemas de grafos, con métodos algebraicos.

En primer lugar se definen determinados conceptos de los grafos que se necesitarán a lo largo del trabajo, así como se presentan grafos característicos para su estudio, y en particular el grafo de línea. A continuación, el estudio del espectro de la matriz de adyacencia y la matriz de incidencia del grafo permitirán un mayor acercamiento a estas estructuras, y junto con los autovalores se podrán precisar características de los grafos. Finalmente, a través de la acción del grupo de automorfismos de un grafo sobre su conjunto de vértices, quedan definidas distintas familias (vértice transitivos, arista transitivos). Se relacionan los grafos y los grupos mediante el grafo de Cayley y se prueba que cualquier grupo finito es isomorfo al grupo de automorfismos de un grafo.

Palabras clave: *Grafo – Matriz de adyacencia – Grupo de permutaciones – Grafo de Cayley.*

Abstract

The objective of this degree thesis is to apply the results of linear algebra and group theory to graph theory, in order to obtain more information and solve several problems about graphs, with algebraic tools.

Firstly, some graph concepts that will be needed throughout this text are defined, as well as some specific graphs, in particular, the line graph. Secondly, the study of the spectrum of the adjacency matrix and the incidence matrix will allow an approach to these structures and together with the eigenvalues it will be possible to determine more characteristics of the graph. Lastly, through the action of the automorphism group of a graph, different families of graphs are defined (vertex transitive, edge transitive). Groups and graphs are related by means of the Cayley graph and by Frucht's theorem it is proved that any finite group is isomorphic to the automorphism group of a graph.

Keywords: *Graph – Adjacency matrix – Permutation group – Cayley graph.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Grafos: nociones básicas, propiedades y ejemplos.	1
1.1. Definiciones de grafos y ejemplos	1
1.2. Algunos grafos especiales	5
1.3. Grafo de línea.....	8
2. Álgebra lineal en grafos	13
2.1. Matrices y grafos	13
2.2. El polinomio característico de un grafo	17
2.3. Autovalores de un grafo	23
3. Automorfismos de grafos	29
3.1. El grupo de automorfismos	29
3.1.1. Grafos vértice transitivos	31
3.1.2. Grafos arista transitivos	33
3.2. Grafos de Cayley	35
3.3. Teorema de Frucht	39
Bibliografía	43
Lista de Figuras	45
Poster	47

Introducción

La teoría algebraica de grafos es una rama de las matemáticas en la que se aplican métodos algebraicos para estudiar los grafos. En principio, estos dos campos, el álgebra y la teoría de grafos, parecen no estar relacionados, pero a lo largo del trabajo veremos que las herramientas que proporciona el álgebra, permiten obtener interesantes propiedades y caracterizar determinados tipos de grafos.

El origen de la teoría de grafos se remonta al siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg, el cual consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad de Königsberg, pasando una vez por cada uno de los puentes y regresando al mismo puente de inicio. Fue resuelto por Leonhard Euler en 1736, y su trabajo es considerado el primer resultado de la teoría de grafos. En matemáticas, un grafo es un conjunto de objetos llamados vértices unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que indican relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Un grafo se representa típicamente como un conjunto de puntos (vértices) unidos por líneas (aristas) o flechas (arcos). En la actualidad, casi cualquier problema se puede representar mediante un grafo, y su estudio trasciende a diversas áreas de las ciencias exactas y las ciencias sociales.

En este trabajo hemos realizado un estudio de los grafos usando dos de las principales ramas del álgebra: el álgebra lineal y la teoría de grupos. El objetivo principal ha sido presentar algunos métodos de la teoría algebraica de grafos cuyos resultados muestran la estrecha relación entre el álgebra y los grafos. Además, hemos añadido numerosos ejemplos que ayudan a entender el texto.

En el primer capítulo, definimos algunos conceptos básicos de los grafos necesarios para los próximos capítulos, presentamos algunos de ellos y centramos nuestra atención en el grafo de Petersen. El capítulo concluye con la caracteri-

zación de aquellos grafos que son isomorfos a su grafo de línea.

El segundo capítulo del trabajo está dedicado al estudio de los grafos a través del álgebra lineal. En particular introducimos la matriz de adyacencia de un grafo y su polinomio característico. Estudiamos cotas de los autovalores y algunas características de los grafos en función de estos. Concretamente, mostramos una caracterización de los grafos d -regulares.

En el tercer y último capítulo empleamos la teoría de grupos para el estudio de los grafos a través de su grupo de automorfismos. En este sentido, los grafos de Cayley forman una importante familia de grafos que son vértice transitivos, y concluimos el capítulo con el resultado del trabajo de Frucht, que establece que cualquier grupo finito es el grupo de automorfismos de un grafo.

Grafos: nociones básicas, propiedades y ejemplos.

En este capítulo introducimos algunos conceptos básicos de la teoría de grafos, esenciales para el estudio posterior de estas estructuras a través del álgebra. Hablaremos de las aplicaciones entre grafos - homomorfismos, isomorfismos y automorfismos- y presentaremos determinadas familias de grafos. Algunas de ellas volverán a aparecer en los siguientes capítulos y otras servirán como ejemplos de los conceptos que se vayan exponiendo.

1.1. Definiciones de grafos y ejemplos

Definición 1.1.1. *Un **grafo** G es un par $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto no vacío cuyos elementos denominamos **vértices** y*

$$E(G) = \{e = \{u, v\} \mid u, v \in V(G)\}$$

*es un conjunto formado por pares no ordenados de vértices cuyos elementos denominamos **aristas**. Si $u = v$, decimos que e es un **lazo**. A este tipo de grafo también se le denomina **grafo no dirigido**.*

Nota. *La representación de los grafos se hará mediante un diagrama, donde los vértices serán puntos y las aristas líneas entre los puntos.*

El orden de un grafo $G = (V(G), E(G))$ viene determinado por el cardinal del conjunto de vértices de G , que denotamos por $|V(G)|$. Diremos que un grafo G es finito si el número de vértices y de aristas es finito. En caso contrario diremos que G es infinito.

Notación. *A partir de ahora $G = (V(G), E(G))$ lo denotaremos por $G = (V, E)$.*

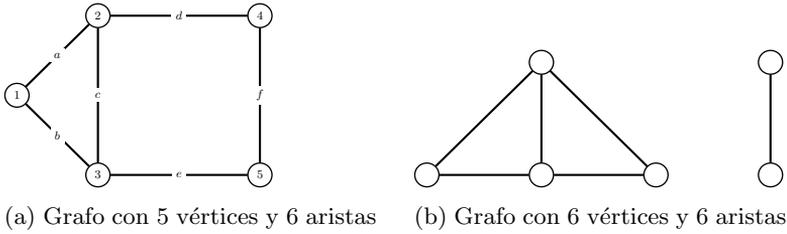


Figura 1.1: Ejemplos de grafos

Ejemplo 1.1.2. El **grafo de Petersen** es un grafo no dirigido que tiene 10 vértices y 15 aristas. Tiene varias representaciones y lo denotamos $\mathbf{GP}(5,2)$. Los vértices de este grafo los podemos ver como todos los subconjuntos de dos elementos de un conjunto de cinco elementos, esto es, $\binom{5}{2} = 10$ vértices. Habrá una arista entre dos vértices si los correspondientes subconjuntos de dos elementos son disjuntos.

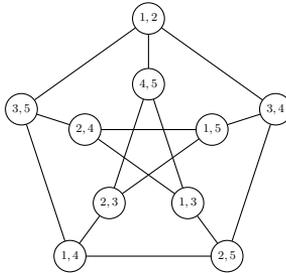


Figura 1.2: Grafo de Petersen etiquetado

Observación 1.1.3. Señalamos algunas variaciones que se pueden dar en los grafos:

- i) Hablaremos de un **multigrafo** cuando el grafo contenga aristas distintas que unan el mismo par de vértices. A estas aristas se las denomina **aristas múltiples**.
- ii) Un **pseudografo** permite lazos y aristas múltiples.

Nota. En este trabajo, el término ‘grafo’ excluye cualquiera de las variaciones especificadas y se considerará finito. Para el uso de grafos con alguna variación, ésta se determinará previamente.

Definición 1.1.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo, se define el **complemento** de G o **grafo complementario** de G al grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$, donde $\{x, y\} \in \bar{E}$ si, y solo si, $\{x, y\} \notin E$.

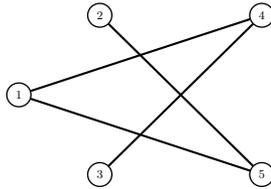


Figura 1.3: Grafo complementario del grafo 1.1a

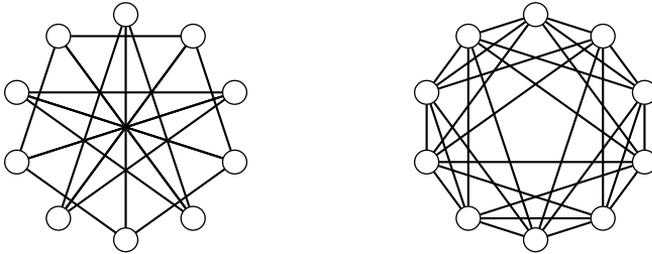


Figura 1.4: Otra representación del grafo de Petersen y su complementario

Definición 1.1.5. Un **grafo dirigido** o **digrafo** G es un grafo cuyas aristas están dirigidas. En este caso se denominan **arcos**.

$$E(G) = \{e = (u, v) : u, v \in V(G)\}$$

Si $e = (u, v)$, se denomina **origen** de e al vértice u , $o(e) = u$ y **final** al vértice v , $t(e) = v$.

Definición 1.1.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $e, e_1, e_2 \in E$, $u, v \in V$. El vértice u y la arista e son **incidentes** si $e = \{u, v\}$. En el caso de los grafos dirigidos, u y la arista e son **incidentes** si u es el origen o el final de e . Los vértices u y v son **vértices adyacentes** si tienen una arista en común. Las aristas e_1 y e_2 son **aristas adyacentes** si tienen un vértice en común.

Definición 1.1.7. Sea $G = (V, E)$ un grafo, se define el **grado de un vértice** $v \in V$, como el número de aristas que inciden en v . Lo denotaremos por $d_G(v)$. Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido, hablamos de **grado exterior** y **grado interior**:

$d_e(v) \equiv$ número de arcos que salen de v

$d_i(v) \equiv$ número de arcos que llegan a v

Observación 1.1.8. La suma de los grados de los vértices de un grafo G es igual al doble de las aristas del grafo,

$$\sum_{x \in V} \deg_G(x) = 2m,$$

siendo m el número de aristas de G . Esto se prueba fácilmente puesto que por cada arista del grafo aumenta el grado de dos vértices, por lo que la suma total de los grados será el doble del número de aristas.

Definición 1.1.9. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $G = (V, E)$ un grafo de orden n , diremos que G es **regular** o **s-regular** si para cualquier vértice v de G , $d_G(v) = s$, $s \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1.10. Vimos que en el grafo de Petersen dos vértices son adyacentes si, y solo si, los correspondientes subconjuntos de dos elementos son disjuntos. Dado que el conjunto inicial tiene cinco elementos y cada vértice representa un subconjunto de dos elementos, para cada vértice habrán $\binom{3}{2}$ subconjuntos disjuntos por lo que el grafo de Petersen es un grafo 3-regular, ya que cada vértice tiene tres aristas que inciden en él, como observamos en la figura 1.2. En un grafo s -regular se cumple que $s|V| = 2|E|$.

Definición 1.1.11. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Denominamos **subgrafo** de G a un grafo cuyo conjunto de vértices es un subconjunto de los vértices de G y cuyo conjunto de aristas está formado por las aristas de G del subconjunto de vértices.

Vamos a relacionar grafos entre sí mediante homomorfismos de grafos.

Definición 1.1.12. Dados dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, diremos que hay un **homomorfismo** entre los grafos G_1 y G_2 si existe una aplicación f ,

$$f : V_1 \longrightarrow V_2,$$

tal que si $\{u, v\} \in E_1$, entonces $\{f(u), f(v)\} \in E_2$.

Diremos que G_1 y G_2 son **isomorfos** si f es una aplicación biyectiva que preserva las adyacencias, esto es, $\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2$. La biyección envía un vértice a otro vértice con el mismo grado. De la definición se deduce que dos grafos isomorfos necesariamente tienen que tener el mismo número de vértices, de aristas y de vértices con el mismo grado.

Definición 1.1.13. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se denomina **grupo de automorfismos** de G y se denota por $\text{Aut}(G)$, al conjunto de todos los automorfismos de los vértices del grafo G .

Es inmediato comprobar que el conjunto de todos los automorfismos tiene estructura de grupo. Cada uno de estos automorfismos se puede ver como una permutación de los vértices de G , por lo que $\text{Aut}(G)$ es un subgrupo de permutaciones de V y si $|V| = n$, $\text{Aut}(G) \leq S_n$, donde S_n es el grupo de permutaciones de n elementos.

1.2. Algunos grafos especiales

Vamos a definir algunos grafos estándar que son muy útiles para poner ejemplos y contraejemplos y con los que trabajaremos más adelante.

Definición 1.2.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Diremos que G es una **cadena** si es una sucesión de vértices adyacentes $\{x_0, \dots, x_l\}$. Será una **cadena simple** si no se recorre dos veces un mismo vértice y lo denotamos por P_l , siendo esta de longitud l . En caso de ser dirigido, hablaremos de **camino (simple)**.



Figura 1.5: La cadena P_3

Definición 1.2.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Diremos que G es un **ciclo** si es una cadena $\{x_0, \dots, x_n\}$ en la que $x_0 = x_n$, esto es, una cadena cerrada y se denota por C_n . En el caso de ser un grafo dirigido, se denomina **circuito**. En un grafo podemos encontrar ciclos o circuitos como subgrafos. El grafo G contiene **triángulos** si C_3 es un subgrupo de G .

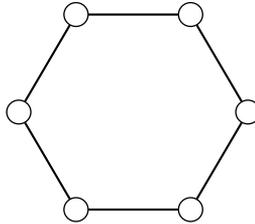


Figura 1.6: Ciclo con 6 vértices C_6

Definición 1.2.3. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Diremos que es **conexo** si para cada par de vértices $u, v \in V$, $u \neq v$ existe una cadena de extremos u y v . En caso contrario diremos que G es **disconexo**.

Proposición 1.2.4. Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo, $|V| = n$ y $|E| = m$. Entonces, $m \geq n - 1$.

Demostración. Los probamos por inducción en el número de vértices. Si $n = 1$, $m = 0$ y $0 \geq 1 - 1 = 0$.

Si $n = 2$, para que G sea conexo, $m = 1$, $1 \geq 2 - 1 = 1$.

Supongamos que para todo grafo G' con $n' \leq n - 1$ vértices, $m' \geq n' - 1$, siendo m' el número de aristas de G' . Si todos los vértices de G tienen grado mayor o igual que 2, entonces $2n \leq \sum_{x \in V} \deg_G(x) = 2m$. Así, $m + 1 > m \geq n$.

Si existe un vértice x que tiene grado menor que 2, ha de ser de grado 1 puesto que G es conexo. Sea $u = \{x, y\}$ la arista incidente con x , definimos el grafo $G' = (V', E')$ donde $V' = V - \{x\}$ y $E' = E - \{u\}$, $n' = n - 1$ y $m' = m - 1$. Dado que G' sigue siendo conexo, $m' \geq n' - 1$, esto es,

$$m - 1 \geq n - 1 - 1 \implies m \geq n - 1.$$

□

Definición 1.2.5. Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden n , diremos que G es **totalmente desconexo** o **nulo** si dados dos vértices cualesquiera de G no hay una arista que los una.

Definición 1.2.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo desconexo. Se denomina **componente conexa** de G a un subgrafo conexo maximal.

De la definición se deduce que si G es desconexo se puede definir una relación de equivalencia en los vértices de G

$$x \sim y \iff \{x = x_0, \dots, x_n = y\} \text{ es una cadena en } G.$$

Las clases de equivalencia de esta relación son las componentes conexas del grafo y por lo tanto, forman una partición del conjunto de vértices de G .

Ejemplo 1.2.7. Observamos que en el grafo 1.1b hay dos componentes conexas.

Definición 1.2.8. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $G = (V, E)$ un grafo de orden n , diremos que G es **completo** si para cualquier par de vértices, los vértices son adyacentes. Lo denotamos por K_n .

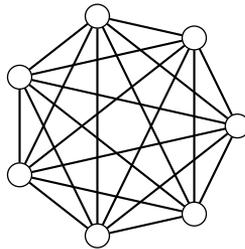


Figura 1.7: Grafo completo con 7 vértices K_7

Definición 1.2.9. Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ y $G = (V, E)$ un grafo de orden n , diremos que G es ***r-partito*** si existe una partición de V , $\{V_1, \dots, V_r\}$, tal que en cualquier conjunto de la partición no hay vértices adyacentes. En caso de que todos los pares de vértices de subconjuntos distintos sean adyacentes, G es ***r-partito completo*** y lo denotamos por $K_{|V_1|, \dots, |V_r|}$.

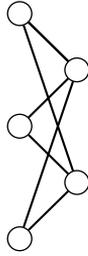


Figura 1.8: Grafo bipartito completo $K_{3,2}$

Definición 1.2.10. Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices. G es un ***árbol*** si para cualesquiera dos vértices hay una cadena que los une y tiene exactamente $n - 1$ aristas. Por tanto, un árbol es un grafo conexo sin ciclos, en el que si quitamos cualquier arista será desconexo y si añadimos una arista, se formará un ciclo.

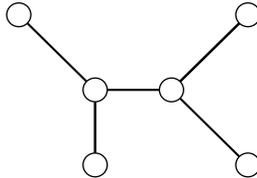


Figura 1.9: Árbol con 6 vértices

1.3. Grafo de línea

El grafo de línea de un grafo consta de un conjunto de vértices formado por las aristas del grafo inicial, siendo dos vértices adyacentes si, y solo si, sus aristas correspondientes lo son en el grafo inicial.

Definición 1.3.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se denomina **grafo de línea** de G al grafo

$$L(G) = (E, \{\{e, e'\} \mid e \cap e' \neq \emptyset, e \neq e'\}).$$

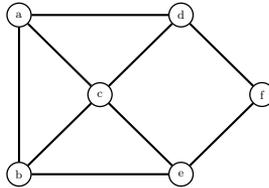


Figura 1.10: Grafo de línea del grafo 1.1a

Lema 1.3.2. $|V(L(G))| = |E|$ y $|E(L(G))| = \sum_{x \in V} \binom{deg_G(x)}{2}$.

Demostración. Por definición, es claro que $|V(L(G))| = |E|$. Por otra parte, cualesquiera dos aristas en G que sean incidentes con el vértice x de G formarán una arista en $L(G)$. Por consiguiente, habrá un total de $\sum_{x \in V} \binom{deg_G(x)}{2}$ aristas en $L(G)$. □

Ejemplo 1.3.3. El grafo de línea del grafo de Petersen es el siguiente:

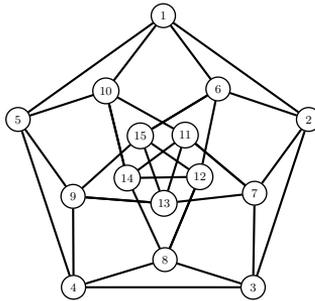


Figura 1.11: Grafo de línea del grafo de Petersen

Vemos que se verifica el lema que acabamos de probar, ya que tiene 15 vértices (tantos como aristas tiene el grafo de Petersen) y tiene 30 aristas, o lo que es lo mismo, $\sum_{x \in V} \binom{3}{2}$, siendo 3 el grado de cada vértice de $GP(5, 2)$.

El grafo de línea de un grafo dirigido se puede construir de distintas maneras y no vamos a trabajar con él.

Si K_5 es el grafo completo con 5 vértices, el grafo complementario del grafo de línea de K_5 es el grafo de Petersen:

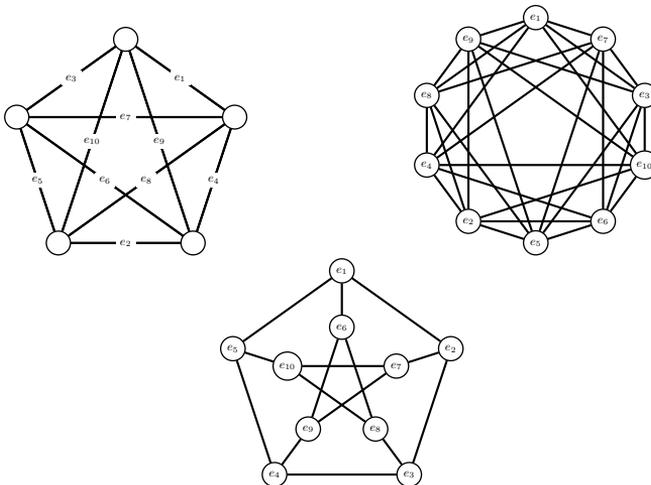


Figura 1.12: $K_5, \overline{K_5}, L(\overline{K_5})$

El siguiente lema establece una correspondencia entre las propiedades de determinadas cadenas en un grafo y en su grafo de línea.

Lema 1.3.4. *Sea $G = (V, E)$ un grafo, $x_0 \in V$ con $\deg_G(x_0) = 1$, sea la cadena simple $P_l = \{x_0, \dots, x_l\}$ tal que $\deg_G(x_1) = \dots = \deg_G(x_{l-1}) = 2$ y sea $\deg_G(x_l) = 1$ o $\deg_G(x_l) > 2$, donde $l \geq 2$. Las l aristas de esta cadena forman una cadena en $L(G)$ de longitud $l-1$, donde los últimos vértices tienen las mismas propiedades en los grados. Recíprocamente, cada cadena de este tipo y de longitud $l-1$ en $L(G)$ proviene de una cadena de longitud l en G .*

Demostración. Tal y como está definido el grafo de línea, está claro que las aristas e_1, \dots, e_l de la cadena en G son vértices de una cadena de longitud $l-1$ en $L(G)$. Cada arista e_i está definida por un par de vértices, $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$, donde $e_i \cap e_{i+1} = \{x_i\}$ y $e_i \cap e_j = \emptyset$ si $j \neq i+1$, $i < l$. Si $\deg_G(x_l) = 1$, las aristas $e_l = \{x_{l-1}, x_l\}$ y $e_{l-1} = \{x_{l-2}, x_{l-1}\}$ tiene el vértice x_{l-1} en común. En el grafo de línea, e_l es el último vértice y dado que x_{l-1} es la única arista que incide en él, $\deg_{L(G)}(e_l) = 1$. Si $\deg_G(x_l) > 2$, supongamos $\deg_G(x_l) = t$, $t > 2$, las aristas que inciden en el vértice x_l son $e_{l+1}, e_{l+2}, \dots, e_{l+t}$. Como x_l es el vértice que tienen en común e_l y las aristas $e_{l+1}, e_{l+2}, \dots, e_{l+t}$, hay t aristas incidentes en e_l , por lo que $\deg_{L(G)}(e_l) = t > 2$. Recíprocamente, supongamos que $\{e_1, \dots, e_l\}$ es una cadena de longitud $l-1$ en $L(G)$. Por la definición del grafo de línea se trata de una cadena de longitud l en G con los vértices $\{x_0, \dots, x_l\}$. Vemos que si $\deg_{L(G)}(e_l) = 1$, entonces e_l es el último vértice de la cadena en $L(G)$, luego x_l es el último vértice en la cadena en G y $\deg_G(x_l) = 1$. Si $\deg_{L(G)}(e_l) > 2$, el vértice e_l en $L(G)$ tiene más de dos aristas incidentes y por tanto, el vértice x_l tendría más de dos vértices adyacentes, $\deg_G(x_l) > 2$. Si $\deg_{L(G)}(e_l) = 2$, el vértice e_l en el grafo de línea tendría dos aristas incidentes, y esto en el grafo original se traduce en que el vértice $x_l \in G$ es de grado 2, $\deg_G(x_l) = 2$. \square

Por último, el siguiente teorema caracteriza los grafos que son isomorfos a su grafo de línea.

Teorema 1.3.5. *Un grafo conexo G es isomorfo a su grafo de línea $L(G)$ si, y solo si, es un ciclo. Esto es, $G \cong L(G) \Leftrightarrow G \cong C_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Supongamos que $G \cong L(G)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
 n &= |V| = |V(L(G))| = |E| = |E(L(G))| = \\
 &= \sum_{x \in V} \binom{\deg_G(x)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \deg_G(x)(\deg_G(x) - 1) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \deg_G^2(x) - \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \deg_G(x) \\
 &\stackrel{1.1.8}{=} \frac{1}{2} \sum_{x \in V} \deg_G^2(x) - n
 \end{aligned}$$

y por consiguiente, $4n = \sum_{x \in V} \deg_G^2(x)$.

Si existe un vértice x_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\deg_G(x_i) > 2$, entonces,

$$4n = \sum_{x \in V} \deg_G^2(x) > 2^2n = 4n,$$

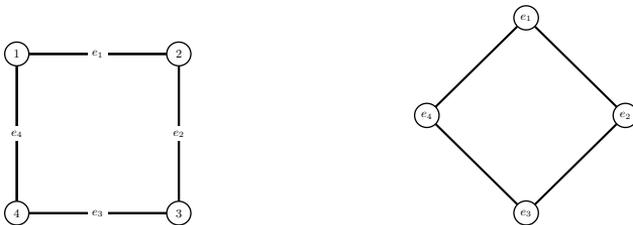
que es una contradicción, luego $\deg_G(x) \leq 2$ para cualquier vértice $x \in V$.

Por otra parte, si $\deg_G(x) = 1$ para algún $x \in G$, como G es conexo ha de existir una cadena de longitud l con las características de 1.3.4. Dado que $G \cong L(G)$, existe una cadena de longitud l en $L(G)$, que corresponde a una cadena de longitud $l + 1$ en G por el lema anterior y así sucesivamente. Por tanto, en G tendrían que existir cadenas arbitrariamente largas.

Luego concluimos que $\deg_G(x) = 2$ para cualquier $x \in V$ o lo que es lo mismo, $G \cong C_n$.

El recíproco está claro. □

Ejemplo 1.3.6. Veamos un ejemplo, donde $G = C_4$.



Álgebra lineal en grafos

En este capítulo estudiamos los grafos mediante el álgebra lineal. Algunas matrices, como la matriz de adyacencia o la matriz de incidencia, están de forma natural relacionadas con los grafos. Una de las principales cuestiones de la teoría algebraica de grafos es determinar cómo, o si, las propiedades de los grafos están reflejadas en las propiedades algebraicas de estas matrices. Además, los autovalores de un grafo nos van a proporcionar más información acerca de las características del grafo.

2.1. Matrices y grafos

En esta sección vemos las matrices de adyacencia e incidencia, que nos ayudan a investigar diversos aspectos de los grafos.

Definición 2.1.1. Sea $G = (V, E)$ un grafo, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. Se denomina **matriz de adyacencia** del grafo G a la matriz de orden n $A(G) = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$,

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } \{x_i, x_j\} \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Si G es un grafo dirigido, $a_{ij} = |\{e \in E \mid e = (x_i, x_j)\}|$.

Ejemplo 2.1.2. La matriz de adyacencia de un grafo bipartito completo $K_{p,q}$ es una matriz de orden $p + q$ de la forma

$$A(K_{p,q}) = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J^t & 0 \end{pmatrix}$$

donde J es una matriz $p \times q$ de unos, puesto que refleja las adyacencias de los p primeros vértices con los q últimos. J^t refleja las adyacencias entre los q últimos

vértices y los p primeros. El resto de la matriz son ceros por la definición de grafo bipartito.

En el caso de $K_{3,2}$ tendremos la matriz

$$A(K_{3,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad J^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.1.3. La matriz de adyacencia del grafo de Petersen es:

$$A(GP(5, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.1.4. Si $G = (V, E)$ es un grafo y $A(G)$ su matriz de adyacencia, entonces:

- i) $A(G)$ es simétrica.
- ii) $deg(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$, $x_i \in V$.

Demostración. En primer lugar, es claro que $A(G)$ es una matriz simétrica, porque el grafo es no dirigido y por lo tanto $a_{ij} = a_{ji}$, por lo que i) quedaría probado. Por otra parte, tal y como está definida la matriz de adyacencia, tanto las filas como las columnas representan las adyacencias de los vértices. En la i -ésima fila encontramos las adyacencias del vértice x_i con cada uno de los vértices del grafo, por lo que la suma de los elementos de esa fila nos dará la suma de todas las aristas incidentes en él, esto es $deg(x_i)$, probando ii). □

El siguiente teorema da la relación que existe entre las matrices de adyacencia de grafos isomorfos. Vamos a trabajar con una matriz de permutaciones, esto es, una matriz P de orden n que se obtiene de hacer permutaciones en las filas de la matriz identidad I_n . Si A es una matriz de orden n , multiplicando PA las filas de la matriz A permutan según sea la permutación en I_n y si multiplicamos AP^t , permutarán las columnas de A . Además, $PP^t = I_n$.

Teorema 2.1.5. Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos.

$$G \cong G' \iff A(G') = PA(G)P^t$$

siendo P una matriz de permutaciones.

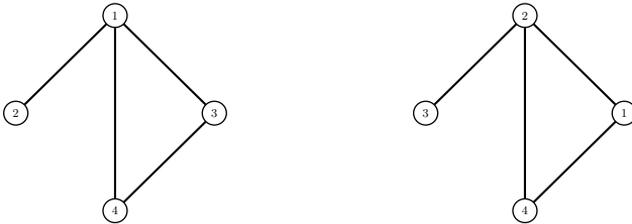
Demostración. Supongamos que $G \cong G'$, esto es, el conjunto de vértices V' en el grafo G' es una permutación de los vértices de G que preserva las adyacencias. Si P es la matriz que refleja las permutaciones de los vértices de una aplicación f , $PA(G)P^t = A(G^*)$, siendo $A(G^*)$ la matriz de adyacencia de un grafo G^* cualquiera. Supongamos que $f(x_i) = x'_k$ y $f(x_j) = x'_l$. Vemos que

$$a_{ij} = 1 \iff \{x_i, x_j\} \in E \iff \{x'_k, x'_l\} \in E' \iff a'_{kl} = 1.$$

Por tanto, $A(G^*) = A(G') = PA(G)P^t$.

Ahora, suponemos que $A(G') = PA(G)P^t$. Queremos ver si se mantienen las adyacencias del grafo G en G' . Sea $f : G \rightarrow G'$ la aplicación que permuta los vértices de G según la matriz P . f es biyectiva porque P es de rango n . Además, si $\{x_i, x_j\} \in E$, esto es, $a_{ij} = 1$, entonces, mediante las multiplicaciones de P y P^t en $A(G)$, este término pasa a ocupar el lugar $f(i)f(j)$ de la matriz $A(G')$, luego $a'_{f(i),f(j)} = 1$, por lo que $\{x_{f(i)}, x_{f(j)}\} \in E'$. \square

Ejemplo 2.1.6. Los grafos G y G' son isomorfos y la matriz P describe las permutaciones de los vértices de $A(G)$ a $A(G')$. La aplicación biyectiva viene dada por $f = (123)$ y los grafos G y G' son,



respectivamente.

Vemos que

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Así,

$$PA(G)P^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A(G').$$

Teorema 2.1.7. *El grafo G tiene k componentes conexas G_1, \dots, G_k si, y solo si, existe una matriz de permutaciones P tal que*

$$PA(G)P^t = \begin{pmatrix} A(G_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A(G_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & A(G_k) \end{pmatrix}.$$

Demostración. Si G tiene k componentes conexas y el conjunto de vértices V se descompone en la partición $\{V_1, \dots, V_k\}$, entonces estos conjuntos de vértices inducen los subgrafos conexas maximales G_1, \dots, G_k . Por lo visto en el teorema 2.1.5, podemos definir un automorfismo de G mediante permutaciones en los vértices de manera que dos vértices que pertenezcan a la misma componente estén en filas y columnas consecutivas. El resultado será una matriz en bloques, donde cada bloque s no nulo es la matriz de adyacencia de la componente G_s , para cada $s = 1, \dots, k$, esto es, $A(G_1), \dots, A(G_k)$. Recíprocamente, si $A(G)$ contiene bloques, significará que existen dos subconjuntos de vértices donde no hay adyacencias, por lo tanto, G no es conexo, y tendrá tantas componentes como bloques tenga la matriz de adyacencia. \square

Corolario 2.1.8. *Un grafo G es conexo si, y solo si, su matriz de adyacencia no es semejante a una matriz diagonal por bloques.*

A continuación vamos a presentar algunos resultados que relacionan los automorfismos de grafos y los autovalores.

Proposición 2.1.9. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea $A(G)$ la matriz de adyacencia de G , y τ una permutación en los vértices de G . Entonces, τ es un automorfismo del grafo G si, y solo si, $PA(G) = A(G)P$, siendo P la matriz permutación que representa τ .*

Demostración. Por lo visto en 2.1.5, el resultado es claro porque si τ es un automorfismo, $PA(G)P^t = A(G') = A(G)$, y dado que $P^t = P^{-1}$, se obtiene $PA(G) = A(G)P$. Recíprocamente, si $PA(G) = A(G)P$, entonces es claro que $PA(G)P^t = A(G)$, por lo que τ ha de ser un automorfismo de G . \square

Teorema 2.1.10. *Sea G un grafo con un autovalor λ simple, y sea v un autovector asociado a λ . Si P es la matriz de permutaciones que describe un automorfismo de G , entonces*

$$Pv = \pm v.$$

Si G es un grafo dirigido, $Pv = \mu v$, donde $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| = 1$.

Demostración. Como λ es un autovalor de G , existe $v \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ de forma que $A(G)v = \lambda v$, siendo v un autovector asociado a λ . Entonces,

$$A(G)Pv = PA(G)v = P\lambda v = \lambda Pv,$$

por lo que Pv también es un autovector asociado a λ . Pero como λ es un autovalor simple, $\dim_{\lambda}(G) = 1$, luego necesariamente $Pv = \mu v$, para algún $\mu \in \mathbb{C}$. Por otra parte, como P es la matriz de permutaciones de un automorfismo, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $P^r = I$, luego $|\mu| = 1$.

Si G es un grafo no dirigido, como los autovalores de una matriz con simétrica real son reales, $\mu = \pm 1$ y así, probamos que

$$Pv = \pm v.$$

\square

Teorema 2.1.11. *Sea G un grafo. Si G tiene un automorfismo $p \neq id$ tal que $p^2 \neq id$, entonces G tiene al menos un autovalor cuya multiplicidad es mayor que 1. En otras palabras, si todos los autovalores de G son simples, entonces cualquier $\sigma \in Aut(G)$, está determinado por las involuciones, $\sigma^2 = id_{Aut(G)}$.*

Demostración. Supongamos que todos los autovalores de G son simples. Entonces, para cualquier matriz permutación P representando un automorfismo σ de G , y para un autovector asociado v , por el resultado 2.1.10, $P^2v = v$, luego P^2 es la identidad y por tanto probamos que para cualquier $\sigma \in Aut(G)$, $\sigma^2 = id_{Aut(G)}$. \square

2.2. El polinomio característico de un grafo

La posibilidad de representar grafos mediante su matriz de adyacencia conduce a pensar en la posibilidad de estudiar los grafos a partir de esta matriz y, en particular, de sus autovalores. Sobre todo, teniendo en cuenta que $A(G)$ es simétrica real, el teorema espectral asegura que es diagonalizable en \mathbb{R} .

Definición 2.2.1. Sean $A(G)$ la matriz de adyacencia de un grafo G y $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . El polinomio de grado n en la indeterminada t sobre el cuerpo K

$$\text{chap}(G; t) := |tI_n - A(G)| = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0,$$

se denomina **polinomio característico** de G . Los ceros $\lambda \in K$ de $\text{chap}(G; t)$ se denominan **autovalores** de G , y denotamos por $m(\lambda)$ la **multiplicidad** del autovalor λ .

Escribiremos, por lo general, $\text{chap}(G)$.

Proposición 2.2.2. Sea $G = (V, E)$ un grafo. Los valores propios de la matriz de adyacencia $A(G)$ son reales, en particular, irracionales o enteros.

Demostración. Si $G = (V, E)$ es un grafo, la matriz $A(G)$ es simétrica y por el teorema espectral es diagonalizable en \mathbb{R} , luego sus autovalores son reales. Además, $\text{chap}(G; t) \in \mathbb{Z}[t]$ y es mónico, por lo que las posibles raíces racionales son enteras. \square

Teorema 2.2.3. Sea G un grafo y sea Δ el número de triángulos en G . Si G tiene como autovalores $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, entonces:

$$\begin{aligned} a) & \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0. \\ b) & \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2|E|. \\ c) & \sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = 6\Delta. \end{aligned}$$

Demostración. Como $A(G)$ es semejante a una matriz diagonal $D(G)$, las trazas de matrices semejantes son iguales y G es un grafo sin lazos,

$$0 = \text{tr}(A(G)) = \text{tr}(D(G)) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

b) $A(G)^2 = (a_{ij}^{(2)})_{i,j=1,\dots,n}$ donde los términos de $A(G)^2$ son de la forma $a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj}$. Así, la traza de $A(G)^2$ es

$$\text{tr}(A(G)^2) = \sum_{k=1}^n a_{ki}^{(2)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki},$$

esto es, es el número de cadenas cerradas de longitud dos, luego

$$\text{tr}(A(G)^2) = 2|E|.$$

La diagonalización de $A(G)$ implica que $A(G)^2$ es semejante a $D(G)^2$, por lo que

$$2|E| = \text{tr}(A(G)^2) = \text{tr}(D(G)^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

c) Por último, de forma análoga por inducción obtenemos que los términos de la traza de $A(G)^3$ representan el número de cadenas cerradas de longitud tres de cada vértice de G , o lo que es lo mismo, seis veces el número de triángulos ya que por cada triángulo hemos de contar seis cadenas diferentes, dos por cada vértice. Por tanto, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = \text{tr}(A(G)^3) = 6\Delta$. \square

Definición 2.2.4. Sean $\lambda_i, i=1, \dots, n$, los autovalores del polinomio característico de G , en orden natural y

$$\lambda(G) := \lambda_1 < \dots < \lambda_p =: \Lambda(G), p \leq n.$$

El **espectro** de un grafo G es el conjunto de autovalores de $A(G)$ junto con sus multiplicidades:

$$Spec(G) = \left(\begin{array}{cccccc} \lambda & \dots & \lambda_i & \dots & \Lambda \\ m(\lambda) & \dots & m(\lambda_i) & \dots & m(\Lambda) \end{array} \right).$$

El mayor autovalor Λ se denomina **radio espectral** de G .

Ejemplo 2.2.5. El polinomio característico del grafo de Petersen es

$$(t - 3)(t - 1)^5(t + 2)^4,$$

y por tanto su espectro

$$Spec(GP(5, 2)) = \left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{array} \right).$$

Proposición 2.2.6. Sea $G = K_n$,

$$Spec(K_n) = \left(\begin{array}{cc} -1 & n - 1 \\ n - 1 & 1 \end{array} \right).$$

Demostración. La matriz de adyacencia de un grafo completo con n vértices es

$$A(K_n) = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{array} \right).$$

Calculamos su polinomio característico.

$$\begin{aligned}
 |tI_n - A(K_n)| &= \begin{vmatrix} t & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & t \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} t & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 - t & t + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 - t & 0 & \cdots & 0 & t + 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -(n-1) + t & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & t + 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t + 1 \end{vmatrix} \\
 &= (-n + 1 + t)(t + 1)^{n-1},
 \end{aligned}$$

y queda probada la afirmación. □

Teorema 2.2.7. Sea $G = K_{p,q}$,

$$\text{Spec}(K_{p,q}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{pq} & 0 & \sqrt{pq} \\ 1 & p + q - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. La matriz de adyacencia de un grafo bipartito completo $K_{p,q}$ es una matriz de orden $p + q$

$$A(K_{p,q}) = \begin{pmatrix} 0 & J \\ J^t & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz solo tiene dos filas linealmente independientes, por lo que se tiene que $rg(A) = 2 < p + q$, luego $|A| = 0$ y por tanto 0 es un autovalor cuya multiplicidad es $m(0) = n - rg(A) = p + q - 2$. Al ser A diagonalizable y $m(0) = p + q - 2$, han de existir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces, por el resultado obtenido en 2.2.3, la suma de los autovalores contando con sus multiplicidades es igual a 0, luego $2\lambda_1 = 0$ y por tanto $\lambda_1 = 0$, que contradice el hecho de que $m(0) = p + q - 2$. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y como $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, tenemos que $\lambda = \lambda_1$ y $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = -\lambda$ Nuevamente por el hecho de que $A(G)$ es diagonalizable en \mathbb{R} , $\lambda^2 + \lambda^2 = 2pq$, luego $2\lambda^2 = 2pq$, por lo que podemos concluir que $\lambda = \sqrt{pq}$ y $\lambda = -\sqrt{pq}$. El polinomio característico es:

$$\text{chap}(K_{p,q}) = (t^2 - pq)t^{p+q-2}.$$

□

Definición 2.2.8. Sea $G = (V, E)$ un grafo, siendo $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ el conjunto de vértices y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ el de las aristas. Se denomina **matriz de incidencia** del grafo G a la matriz $B(G)$ de orden $n \times m$ cuyos términos vienen dados por

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \text{ es incidente con } e_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

En caso de que $G = (V, E)$ fuese dirigido, los términos de $B(G)$ son

$$b_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = o(e_j) \\ -1 & \text{si } x_i = t(e_j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Ejemplo 2.2.9. La matriz de incidencia del grafo de Petersen es:

$$B(GP(5,2)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Veamos ahora una relación entre los autovalores de G y los autovalores su grafo de línea $L(G)$.

Proposición 2.2.10. Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices y m aristas. Sea $L(G)$ el grafo de línea de G . Entonces,

$$B^t(G)B(G) = 2I_m + A(L(G))$$

y

$$B(G)B^t(G) = C(G) + A(G),$$

siendo $C(G) := (\text{deg}(x_i)\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronecker.

Demostración. Consideramos el término (k, l) de la matriz $B^t(G)B(G)$,

$$(B^t(G)B(G))_{kl} = \sum_{i=1}^n b_{ik}b_{il},$$

que es el producto escalar de la k -ésima y la l -ésima columnas de $B(G)$. Si $k = l$, estaremos multiplicando la incidencia de cada arista, luego cada término de la diagonal será un 2. Cuando $k \neq l$, el producto será 1 si las aristas k y l son incidentes en el vértice i . Esto en el grafo de línea de G supone que dos vértices sean adyacentes, esto es, que en el término (k, l) en $A(L(G))$ haya un 1. Como G no tiene aristas múltiples esto solo ocurre una vez, por lo tanto, $B^t(G)B(G) = 2I_m + A(L(G))$.

Ahora, consideramos el término (i, j) en la matriz $B(G)B^t(G)$,

$$B(G)B^t(G)_{ij} = \sum_{l=1}^m b_{il}b_{jl}.$$

Si $i = j$, entonces $\sum_{l=1}^m b_{il}b_{il} = \text{deg}(x_i)$ ya que estamos multiplicando la fila de la matriz de incidencia, que refleja las incidencias del vértice x_i . Para $i \neq j$, tendremos un 1 si la filas i y j tienen un 1 en el mismo lugar, lo que significa que sobre los vértices x_i y x_j incide la misma arista, por lo que el término correspondiente en la matriz de adyacencia $A(G)$ es un 1. Podemos concluir que $B(G)B^t(G) = C(G) + A(G)$. \square

Teorema 2.2.11. *Si G es un grafo d -regular con n vértices y m aristas, $m \geq n$, se verifica que:*

$$\text{chap}(L(G); t) = (t + 2)^{m-n} \text{chap}(G; t + 2 - d).$$

Demostración. Consideramos dos matrices cuadradas con $n+m$ filas y columnas:

$$U := \begin{pmatrix} tI_n & -B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}; \quad V := \begin{pmatrix} I_n & B \\ B^t & tI_m \end{pmatrix}$$

donde B es la matriz de incidencia de G y B^t es su traspuesta. Hacemos los productos

$$UV = \begin{pmatrix} tI_n - BB^t & 0 \\ B^t & tI_m \end{pmatrix}; \quad VU = \begin{pmatrix} tI_n & 0 \\ tB^t & tI_m - B^tB \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$|tI_n - BB^t| |tI_m| = \det(UV) = \det(VU) = |tI_n| |tI_m - B^tB|.$$

La igualdad de los determinantes deja la ecuación

$$t^m |tI_n - B^tB| = t^n |tI_m - B^tB|$$

o equivalentemente,

$$t^{m-n} |tI_n - BB^t| \stackrel{(1)}{=} |tI_m - B^tB|.$$

Por 2.2.10, $B^t B \stackrel{(2)}{=} A(L(G)) + 2I_m$ y $BB^t \stackrel{(3)}{=} C(G) + A(G)$, y como G es d -regular, $C(G) = dI_n$,

$$\begin{aligned} \text{chap}(L(G); t) &= \det(tI_m - A(L(G))) \\ &\stackrel{(2)}{=} \det((t+2)I_m - B^t B) \\ &\stackrel{(1)}{=} (t+2)^{m-n} \det((t+2)I_n - BB^t) \\ &\stackrel{(3)}{=} (t+2)^{m-n} \det((t+2-d)I_n - A(G)) \\ &= (t+2)^{m-n} \text{chap}(G; t+2-d). \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de este resultado, en el siguiente teorema vamos a ver una condición necesaria para que un grafo G sea el grafo de línea de otro grafo G' .

Teorema 2.2.12. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $L(G)$ su grafo de línea, entonces $\lambda(L(G)) \geq -2$.*

Demostración. Sabemos que $B^t(G)B(G) = A(L(G)) + 2I_m$, $B^t(G)B(G) \in M_m(\mathbb{Z})$. Para cualquier $x \in \mathbb{R}^m$,

$$x^t B^t(G)B(G)x = (B(G)x)^t B(G)x = \|B(G)x\|^2 \geq 0,$$

luego $B^t(G)B(G)$ es una matriz simétrica y semidefinida positiva. Sea λ un autovalor de $A(L(G))$. Entonces,

$$\begin{aligned} |\lambda I_m - A(L(G))| = 0 &\implies |\lambda I_m - B^t(G)B(G) + 2I_m| = 0 \\ &\implies |(\lambda + 2)I_m - B^t(G)B(G)| = 0 \\ &\implies \lambda + 2 \text{ es un autovalor de } B^t(G)B(G). \end{aligned}$$

Como la matriz $B^t(G)B(G)$ es semidefinida positiva y diagonalizable, todos sus autovalores serán mayores o iguales que cero, luego $\lambda + 2 \geq 0$, entonces $\lambda \geq -2$, tal y como queríamos ver. □

2.3. Autovalores de un grafo

Por lo general es difícil determinar los autovalores de un grafo, por lo que siempre es útil tener cotas para ellos. Vamos a trabajar con el llamado cociente de Rayleigh de un autovector para obtener algunas cotas.

Teorema 2.3.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo con n vértices y m aristas. Entonces $\Lambda(G) \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$.*

Demostración. Para $n = 1$ está claro pues $\Lambda(K_1) = 0$.
Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en \mathbb{R}^n ,

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^k a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^k b_i^2\right).$$

Si $n \geq 2$, entonces, tomando $a_i = 1$ y $b_i = \lambda_i$ para cualquier $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $k = n-1$, se verifica que

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right)^2 \leq (n-1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2\right).$$

Como $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ por 2.2.3,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = -\lambda_n \text{ y por tanto } \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i\right)^2 = \lambda_n^2 \text{ con } \Lambda(G) = \lambda_n.$$

Consecuentemente, $\lambda_n^2 \leq (n-1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2\right)$.

Entonces, $0 \leq (n-1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2\right) - \lambda_n^2$.

Por tanto, $n\lambda_n^2 \leq (n-1) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2\right) - \lambda_n^2 + n\lambda_n^2$.

Y de aquí se deduce que $n\lambda_n^2 \leq (n-1) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) \stackrel{2.2.3}{=} (n-1)2m$. Luego concluimos que

$$\Lambda(G) \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}.$$

Definición 2.3.2. *Sea $A = (a_{ij})$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$, y $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Se denomina **cociente de Rayleigh** de v con respecto de A al cociente*

$$R(v) = \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_i v_j}{\sum_{i=1}^n v_i^2},$$

donde \langle, \rangle es el producto escalar usual en \mathbb{R}^n .

Teorema 2.3.3. *Si A es una matriz simétrica, entonces para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, se cumple que*

$$\lambda =: \lambda(A) \leq R(v) \leq \Lambda(A) := \Lambda.$$

Además,

$$\lambda = R(v) \text{ o } R(v) = \Lambda$$

si, y sólo si, v es un autovector asociado a λ o a Λ , respectivamente.

Demostración. Sea $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de autovectores de A . Escogemos un vector arbitrario $v = \sum_{i=1}^n \xi_i u_i$.

$$R(v) = \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^n \langle \xi_i u_i, A \xi_i u_i \rangle}{\sum_{i=1}^n \langle \xi_i u_i, \xi_i u_i \rangle}$$

$$\stackrel{u_i \text{ autovector}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n \langle \xi_i u_i, \lambda_i \xi_i u_i \rangle}{\sum_{i=1}^n \langle \xi_i u_i, \xi_i u_i \rangle} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}.$$

Esto implica que

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} \stackrel{\lambda \leq \lambda_i}{\leq} R(v) \stackrel{\lambda_i \leq \Lambda}{\leq} \Lambda.$$

Además, si v es un autovector asociado a λ , entonces

$$R(v) = \frac{\langle v, Av \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle v, \lambda v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \lambda \frac{\langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \lambda,$$

y de forma similar para Λ . Recíprocamente, si v no es un autovector asociado a λ ni a Λ , entonces A tiene al menos tres autovalores distintos y todas las desigualdades son estrictas, $\lambda < \mu < \Lambda$. \square

Teorema 2.3.4. *Sea A una matriz simétrica con términos no negativos y sea $v \in \mathbb{R}^n$ un autovector asociado a Λ . Si $v = (v_1, \dots, v_n)$ entonces $\tilde{v} = (|v_1|, \dots, |v_n|)$ es también un autovector asociado a Λ . Además, $|\lambda| \leq \Lambda$.*

Demostración. Dado que v es un autovector asociado al autovalor Λ , por 2.3.3 $R(v) = \Lambda$. Además, para cualquier $w \in \mathbb{R}^n$,

$$|R(w)| = \left| \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_i w_j}{\sum_{i=1}^n w_i^2} \right| = \frac{|\sum_{i,j=1}^n a_{ij} w_i w_j|}{\sum_{i=1}^n w_i^2} \leq \frac{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} |w_i| |w_j|}{\sum_{i=1}^n w_i^2} = R(\tilde{w}),$$

por lo que $|R(w)| \leq R(\tilde{w})$, o lo que es lo mismo, $-R(\tilde{w}) \leq R(w) \leq R(\tilde{w})$.

Así, para el autovector v , $R(v) = \Lambda$, luego $\Lambda \leq R(\tilde{v})$ y por 2.3.3 $R(\tilde{v}) \leq \Lambda$. Entonces $R(\tilde{v}) = \Lambda$ y \tilde{v} es un autovector asociado a Λ .

Por otra parte, si $w \in \mathbb{R}^n$ es un autovector asociado al autovalor λ , entonces $-\Lambda \leq -R(\tilde{w}) \leq \lambda = R(w) \leq R(\tilde{w}) \leq \Lambda$, por lo que podemos concluir que $|\lambda| \leq \Lambda$. \square

Teorema 2.3.5. *Si G es un grafo conexo, entonces Λ es un autovalor simple y todos los autovectores asociados a Λ tienen todas sus coordenadas distintas de cero y del mismo signo.*

Demostración. Por hipótesis, como G es conexo, por 2.1.8 $A(G)$ no se puede descomponer en bloques.

En primer lugar vamos a demostrar que si $Av = \lambda v$, ninguna coordenada de v puede ser nula. Supongamos que $v = (v_1, \dots, v_s, \underbrace{v_{s+1}, \dots, v_n}_{=0})$. Entonces, por 2.3.4 $A\tilde{v} = \lambda\tilde{v}$. Esto significa que

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}|v_j| = \Lambda|v_i| = 0, \forall i = s+1, \dots, n.$$

Explícitamente esto dice que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{ss} & \cdots & a_{sn} \\ a_{(s+1)1} & \cdots & a_{(s+1)s} & \cdots & a_{(s+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_s| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} |v_1| \\ \vdots \\ |v_s| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que los términos de A son no negativos y los de \tilde{v} son positivos, el rectángulo inferior izquierdo de la matriz A estará formado íntegramente por ceros, y como A es un matriz simétrica, ocurre lo mismo para el correspondiente rectángulo superior derecho de la matriz. Pero en tal caso A se podría descomponer en bloques, lo que contradice la hipótesis de que G es conexo, luego llegamos a una contradicción de asumir que alguna coordenada de v es nula.

Ahora, vamos a probar que todas las coordenadas de v tienen el mismo signo. Si denotamos

$$N_+(v) := \{i|v_i > 0\}, N_-(v) := \{i|v_i < 0\},$$

por lo que acabamos de ver,

$$N_+(v) \cup N_-(v) = \{1, \dots, n\}. \tag{2.1}$$

Por los teoremas 2.3.3 y 2.3.4, si v es un autovector asociado al autovalor Λ , se obtiene que $\Lambda = R(v) = R(\tilde{v})$. Si $i \in N_+(v)$ y $j \in N_-(v)$ entonces

$$a_{ij}v_iv_j < 0 \vee a_{ij} = 0, a_{ij}|v_i||v_j| > 0 \vee a_{ij} = 0. \tag{2.2}$$

Para $i, j \in N_+(v)$ ó $i, j \in N_-(v)$, $a_{ij}v_iv_j = a_{ij}|v_i||v_j|$. Como, $R(v) = R(\tilde{v})$, si eliminamos los sumandos iguales quedará que existen $i_1, \dots, i_r \in N_+(v)$ y $j_1, \dots, j_s \in N_-(v)$ tales que

$$\sum_i \sum_j a_{ij}v_iv_j = \sum_i \sum_j a_{ij}|v_i||v_j| = - \sum_i \sum_j a_{ij}v_iv_j.$$

Por tanto,

$$\sum_i \sum_j a_{ij} (v_iv_j + v_iv_j) = 0.$$

Así, $2 \left(\sum_i \sum_j a_{ij}v_iv_j \right) = 0$ y como $v_i, v_j \neq 0$, entonces $a_{ij} = 0$.

Si consideramos una partición en el conjunto de vértices dada por

$$V_1 = \{x_i|i \in N_+(v)\} \text{ y } V_2 = \{x_j|j \in N_-(v)\}$$

y los reordenamos de forma que los vértices $x_i, i \in N_+(v)$ aparezcan en primer lugar y posteriormente los vértices $x_j, j \in N_-(v)$, obtenemos un grafo isomorfo a G cuya matriz de adyacencia contiene bloques, luego G sería desconexo.

Por último vemos que Λ es un autovalor simple. Como $A(G)$ es diagonalizable, la multiplicidad de un autovalor es igual a la dimensión del subespacio vectorial generado por el autovalor. En caso de que Λ no fuera simple, la dimensión del espacio generado asociado sería como mínimo 2, y podríamos encontrar una base ortogonal del subespacio formada por autovectores asociados a Λ . Si v y w son autovectores asociados a Λ , y suponemos que $N_+(v) = \emptyset$, se pueden dar dos casos: si $N_+(w) = \emptyset$, entonces $\langle v, w \rangle > 0$ y si $N_-(w) = \emptyset < 0$, luego no existe ningún autovector asociado a Λ ortogonal a v . Esto implica que Λ es un autovalor simple. \square

Teorema 2.3.6. *Sea G un grafo conexo. Sean Δ_G el mayor grado de los vértices de G y $d_G = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} \text{deg}(x)$ la media de los grados de los vértices de G . Entonces,*

$$d_G \leq \Lambda \leq \Delta_G.$$

Demostración. Para $v = (1, \dots, 1)$, $A(G)$ la matriz de adyacencia de G ,

$$\Lambda \stackrel{2.3.3}{\geq} \frac{\langle v, A(G)v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\sum_{x \in G} \text{deg}(x)}{n} = d_G.$$

Ahora, sea $v = (v_1, \dots, v_n)$ un autovector asociado al autovalor Λ , para el que asumimos que para cualquier $i = 1, \dots, n$ $v_i > 0$ y sea $v_p := \max\{v_1, \dots, v_n\}$. Como $A(G)v = \Lambda v$, para la coordenada p -ésima,

$$\Lambda v_p = \sum_{j=1}^n a_{pj} v_j \leq v_p \sum_{j=1}^n a_{pj} = v_p \text{deg}(x_p) \leq v_p \Delta_G. \quad \square$$

Si un grafo es d -regular y conexo, entonces $d_G = \Delta_G$, luego $\Lambda = d_G$. Este es el caso del grafo de Petersen, que es 3-regular y cuyo espectro es:

$$\text{Spec}(GP(5, 2)) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Además, si $v = (1, \dots, 1)^t$, vemos que

$$A(GP(5, 2))v = \Lambda(GP(5, 2))v,$$

es decir, v es un autovector asociado a Λ .

Se verifica también que $m(3) = 1$ y el grafo de Petersen es un grafo conexo.

Veamos a continuación el teorema que generaliza esta característica para grafos regulares y caracteriza la d -regularidad y la conectividad de un grafo en función de sus autovalores.

Teorema 2.3.7. *Para un grafo G conexo, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) G es d -regular.*
- ii) $\Lambda = d_G$, la media de los grados de los vértices.*
- iii) $v = (1, \dots, 1)^t$ es un autovector asociado al autovalor Λ .*

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Dada la d -regularidad de G y por el teorema 2.3.6, $d = d_G \leq \Lambda \leq \Delta_G = d$. Luego $d_G = \Lambda$.

(ii) \Rightarrow (iii). Sea $v := (1, \dots, 1)^t$. Entonces,

$$\Lambda \stackrel{hip}{=} d_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} = R(v).$$

Por el teorema 2.3.3, v es un autovector asociado al autovalor $\Lambda(G) = d_G$.

(iii) \Rightarrow (i). Por hipótesis, $Av = \Lambda v$. Como $v := (1, \dots, 1)^t$ es un autovector asociado a Λ , para cada fila se tiene que $\sum_{j=1}^n a_{ij} = \Lambda$. Por tanto, todos los vértices son de grado Λ , luego el grafo es Λ -regular. \square

Como consecuencia de los teoremas 2.2.11, 2.3.5 y 2.3.7, obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 2.3.8. *Sea G un grafo d -regular y conexo con n vértices, m aristas y p autovalores, $m \geq n \geq p$ y espectro*

$$Spec(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{p-1} & d \\ m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_{p-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$Spec(L(G)) = \begin{pmatrix} -2 & \lambda_1 + d - 2 & \cdots & \lambda_{p-1} + d - 2 & 2d - 2 \\ m - n & m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_{p-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Si $chap(G; t) = (t - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \cdots (t - \lambda_{p-1})^{m(\lambda_{p-1})} (t - d)$, entonces $chap(G; t + 2 - d) = (t + 2 - d - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \cdots (t + 2 - d - \lambda_{p-1})^{m(\lambda_{p-1})} (t + 2 - 2d)$. Por el teorema 2.2.11,

$$chap(L(G); t) = (t + 2)^{m-n} (t + 2 - d - \lambda_1)^{m(\lambda_1)} \cdots (t + 2 - d - \lambda_{p-1})^{m(\lambda_{p-1})} (t + 2 - 2d)$$

y por tanto,

$$Spec(L(G)) = \begin{pmatrix} -2 & \lambda_1 + d - 2 & \cdots & \lambda_{p-1} + d - 2 & 2d - 2 \\ m - n & m(\lambda_1) & \cdots & m(\lambda_{p-1}) & 1 \end{pmatrix}.$$

\square

Automorfismos de grafos

La teoría de grupos es una rama del álgebra que nos permite estudiar simetrías en diversos objetos con la ayuda de sus automorfismos. El grupo de automorfismos de un grafo se puede ver de forma natural como permutaciones en sus vértices. A continuación expondremos diversos resultados en relación a la interacción entre los grupos y los grafos, entre los que se incluyen los grafos de Cayley y el teorema de Frucht.

3.1. El grupo de automorfismos

El conjunto de todas las permutaciones de un conjunto Ω se denota por S_Ω o S_n si Ω es finito y $|\Omega| = n$. Diremos que un grupo Γ es un *grupo de permutaciones de Ω* si Γ es un subgrupo de S_Ω . Vamos a definir algunos conceptos de grupos que necesitaremos para trabajar con el grupo de automorfismos de un grafo.

Definición 3.1.1. *Sea Γ un grupo, y Ω un conjunto. Se define una **acción de Γ sobre Ω** :*

$$\begin{aligned}\Gamma \times \Omega &\longrightarrow \Omega \\ (\sigma, x) &\longmapsto x^\sigma,\end{aligned}$$

verificando esta aplicación que

- i) $x^e = x$
- ii) $(x^\sigma)^\tau = x^{\sigma\tau}$

$\sigma, \tau, e \in \Gamma$, y decimos que Γ actúa sobre Ω .

En particular, para un grafo $G = (V, E)$, dado que podemos ver los automorfismos de $\text{Aut}(G)$ como permutaciones en los vértices de G , decimos que $\text{Aut}(G)$ actúa sobre V .

Definición 3.1.2. Sea Γ un grupo y Ω un conjunto. Una acción es **transitiva** si para cualesquiera dos elementos $x, y \in \Omega$, existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $x^\sigma = y$.

Definición 3.1.3. Sean Γ un grupo y un conjunto Ω . Para cada $x \in \Omega$, se denomina **órbita de x por la acción de Γ** al conjunto

$$x^\Gamma := \{x^\sigma \mid \sigma \in \Gamma\}.$$

En particular, $|x^\Gamma| = |\Omega|$.

Es decir, la órbita de cada elemento $x \in \Omega$ es su clase de equivalencia en la relación definida en Ω a través de la acción de Γ tal que para cualesquiera $x, y \in \Omega$,

$$x \sim y \iff \exists \sigma \in \Gamma : y = x^\sigma,$$

y el conjunto $\{x^\Gamma \mid x \in \Omega\}$ forma una partición de Ω .

Definición 3.1.4. Sean Γ un grupo y Ω un conjunto, $x \in \Omega$, el **estabilizador de x en Γ** es el conjunto

$$\Gamma_x = \{\sigma \mid x^\sigma = x\}.$$

Es claro que Γ_x es un subgrupo de Γ .

Proposición 3.1.5. Sean Γ un grupo y un conjunto Ω , $x \in \Omega$. Entonces

$$|\Gamma| = |x^\Gamma| |\Gamma_x|.$$

Demostración. Esta igualdad es consecuencia del resultado general para acciones de un grupo Γ sobre un conjunto, $[\Gamma : \Gamma_x] = |x^\Gamma|$.

Sea $\bar{\Gamma} = \Gamma / \sim \Gamma_x = \{\Gamma_x \sigma \mid \sigma \in \Gamma\}$. Probemos que

$$\begin{aligned} \varphi : \bar{\Gamma} &\longrightarrow x^\Gamma \\ \Gamma_x \sigma &\longmapsto x^\sigma \end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva.

En primer lugar, veamos que está bien definida.

Sea $\Gamma_x \sigma = \bar{\sigma} \in \bar{\Gamma}$, se tiene que $\sigma \in \Gamma \iff x^\sigma \in x^\Gamma$. Además,

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}' \iff \sigma' \in \bar{\sigma} = \Gamma_x \sigma \iff \sigma' \sigma^{-1} \in \Gamma_x \iff x^{\sigma' \sigma^{-1}} = x \iff x^{\sigma'} = x^\sigma,$$

por lo que también queda probado que es inyectiva.

Tal y como estamos definiendo la aplicación, para cada $x^\sigma \in x^\Gamma$ existe $\sigma \in \Gamma$ de manera que $\varphi(\Gamma_x \sigma) = x^\sigma$, por lo que la aplicación es sobreyectiva.

Por tanto, $|\bar{\Gamma}| = |x^\Gamma|$ y así, obtenemos el resultado

$$|\Gamma| = |x^\Gamma| |\Gamma_x|.$$

□

Proposición 3.1.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo y \bar{G} su grafo complementario. $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\bar{G})$.

Demostración. Se prueba fácilmente ya que el automorfismo de un grupo preserva las adyacencias y por lo tanto, a la vez preserva las no adyacencias.

Siendo $\sigma \in \text{Aut}(G)$, $u, v \in V$,

$$\{u, v\} \in \bar{E} \iff \{u, v\} \notin E \iff \{\sigma(u), \sigma(v)\} \notin E \iff \{\sigma(u), \sigma(v)\} \in \bar{E}.$$

□

A continuación, vamos a estudiar acciones transitivas en grafos y veremos cómo los diversos conceptos de acciones transitivas en un grupo imponen condiciones de simetría en éste.

3.1.1. Grafos vértice transitivos

Definición 3.1.7. Sea $G = (V, E)$ un grafo, diremos que G es **vértice transitivo** o simplemente **transitivo** si su grupo automorfismo $\text{Aut}(G)$ actúa de forma transitiva en V . Esto es, para cualesquiera $x, y \in V$, existe $\sigma \in \text{Aut}(G)$ tal que $\sigma(x) = y$.

G será **distancia transitivo** si para cualesquiera $u, v, x, y \in V$, siendo la distancia de u a v igual a la distancia de x a y , existe $\sigma \in \text{Aut}(G)$ de manera que $\sigma(u) = x$ y $\sigma(v) = y$.

Diremos que G es **distancia regular** o **s-transitivo** si para cualesquiera $u, v, x, y \in V$, siendo $d(u, v) = d(x, y) = s$, existe $\sigma \in \text{Aut}(G)$ de manera que $\sigma(u) = x$ y $\sigma(v) = y$.

Si $G = (V, E)$ es un grafo vértice transitivo, $|\text{Aut}(G)| = |V|$. Además, como los automorfismos conservan las adyacencias, han de conservar el número de aristas que inciden en cada vértice, por lo tanto si para cualquier par de vértices $x, y \in V$ existe $\sigma \in \text{Aut}(G)$ tal que $\sigma(x) = y$, todos los vértices tienen que tener el mismo número de aristas incidentes, luego todos los grafos vértice transitivos son regulares.

Una familia interesante de grafos vértice transitivos son los k -cubos Q_k . El conjunto de vértices de Q_k es el conjunto de todas las k -uplas binarias y tiene 2^k elementos, siendo dos adyacentes si se diferencian exactamente en una coordenada, por lo que el grafo Q_k tendrá $2^{k-1}k$ aristas.

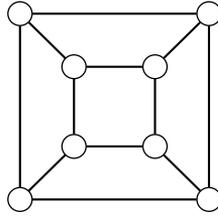


Figura 3.1: Grafo \$Q_3\$

Proposición 3.1.8. *El \$k\$-cubo \$Q_k\$ es vértice transitivo.*

Demostración. Si \$v\$ es un \$k\$-upla fija pero arbitraria, \$x \in V\$, entonces la aplicación

$$\rho_v : x \mapsto x + v$$

donde la suma es componente a componente en \$\mathbb{Z}_2\$, es una permutación de los vértices de \$Q_k\$. Esta aplicación es un automorfismo ya que las \$k\$-uplas \$x\$ e \$y\$ difieren exactamente en una coordenada si, y solo si, \$x + v\$ e \$y + v\$ difieren exactamente en una coordenada. El conjunto de todas estas permutaciones forman un subgrupo \$H\$ de \$Aut(Q_k)\$ de orden \$2^k\$. Este subgrupo actúa de forma transitiva en el conjunto de vértices de \$Q_k\$ ya que para cualesquiera dos vértices \$x\$ e \$y\$ siempre vamos a tener el automorfismo \$\rho_{y-x}\$ que lleva \$x\$ a \$y\$. \$\square\$

El grupo de permutaciones de 3.1.8 no es el grupo completo de automorfismos del grafo \$Q_k\$. Cualquier permutación de las coordenadas de las \$k\$ posiciones es un automorfismo del grafo \$Q_k\$ y el conjunto de todas estas permutaciones forma un subgrupo \$K\$ de \$Aut(Q_k)\$. Si \$K = \{\sigma : V(Q_k) \to V(Q_k) \mid \sigma \in S_k\}\$. Entonces, como \$H\$ y \$K\$ son subgrupos de \$Aut(Q_k)\$, \$HK \subseteq Aut(Q_k)\$. Además,

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}.$$

Vemos que \$H \cap K = \{Id\}\$. Si \$\sigma \in H \cap K\$, entonces,

$$\begin{aligned} \sigma \in K &\implies \sigma(x) = \sigma(x_1, \dots, x_k) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \\ \sigma \in H &\implies \sigma(x) = \sigma_v(x) = \sigma(x_1 + v_1, \dots, x_k + v_k) \end{aligned}$$

Así, \$\sigma = Id = \sigma_0\$. Si \$v \neq 0\$, entonces existe \$i \in \{1, \dots, k\}\$ tal que \$v_i \neq 0\$. Supongamos sin pérdida de generalidad que \$i = 1\$. Entonces, para \$x = (1, 0, \dots, 0)\$, \$\sigma_v(x) = (0, \dots, 0) \neq \sigma(x)\$, para cualquier \$\sigma \in K\$.

Por tanto, \$|Aut(Q_k)| \geq |HK| = 2^k k!\$.

Teorema 3.1.9. *Sea \$G = (V, E)\$ un grafo conexo, \$d\$-regular y cuyo grupo de automorfismos \$Aut(G)\$ es vértice transitivo. Sea \$\lambda\$ un autovalor simple. Si \$|V|\$ es par, entonces \$\lambda \in \{2\alpha - d \mid \alpha \in \{0, \dots, d\}\}\$. Si \$|V|\$ es impar, entonces \$\lambda = d\$.*

Demostración. Sea P la matriz de permutaciones que representa el automorfismo σ del grafo G y sea v un autovector asociado al autovalor simple λ . Por el teorema 2.1.10, $Pv = \pm v$.

Sean $x_i, x_j \in V$. Como $Aut(G)$ es vértice transitivo, existe un automorfismo σ de manera que $\sigma(x_i) = x_j$. Por lo tanto, $(Pv)_i = v_j = \pm v_i$.

En primer lugar, estudiamos el caso en que $|V| = n$ es impar. El teorema 2.3.7 implica que $u = (1, \dots, 1)^t$ es un autovector asociado al autovalor d . Si $\lambda \neq d$, $\langle u, v \rangle = 0$, para v un autovector asociado a λ , porque los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales, luego $\sum_{i=1}^n v_i = 0$. Como $v_j = \pm v_i$, si $i = 1$, $v = (v_1, \pm v_1, \dots, \pm v_1)$. Separamos la suma en términos positivos y negativos, siendo ahora ambos lados de la igualdad positivos.

$$v_{i_1} + \dots + v_{i_r} = v_{j_1} + \dots + v_{j_s}, \quad r + s = 2k + 1.$$

Como $r + s = 2k + 1$, uno de los dos lados contiene más términos que el otro, luego llegamos a una contradicción porque necesariamente $v \neq 0$. Por tanto, $\lambda = d$.

Ahora, estudiamos el caso en que $|V| = n$ es par. Como G es un grafo d -regular, $d_G(x_i) = d$, para cualquier vértice x_i de G . Teniendo esto en cuenta, definimos los conjuntos

$$\alpha := |\{x_j \in N_G(x_i) | v_j = v_i\}|; \quad d - \alpha := |\{x_j \in N_G(x_i) | v_j = -v_i\}|,$$

siendo $N_G(x_i)$ el conjunto de vértices adyacentes a x_i .

Si v es el autovector asociado a λ , como $A(G)v = \lambda v$, entonces $(A(G)v)_i = \lambda v_i$. Así, vemos que

$$(A(G)v)_i = \alpha v_i - (d - \alpha) v_i = (2\alpha - d) v_i = \lambda v_i.$$

Por tanto, concluimos que

$$\lambda \in \{2\alpha - d | \alpha \in \{0, \dots, d\}\}.$$

□

3.1.2. Grafos arista transitivos

Definición 3.1.10. Sea $G = (V, E)$ un grafo, diremos que G es **arista transitivo** si su grupo automorfismo $Aut(G)$ actúa de forma transitiva en E . Esto es, para cualesquiera $\{u, v\}, \{x, y\} \in E$, existe $\sigma \in Aut(G)$ tal que $\{\sigma(u), \sigma(v)\} = \{x, y\}$.

Ejemplo 3.1.11. El grafo prisma triangular es un grafo vértice transitivo pero no arista transitivo, porque si fuera arista transitivo se podrían enviar las aristas de C_4 a las de C_3 .

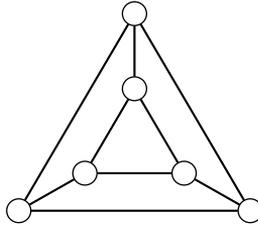


Figura 3.2: Grafo vértice transitivo pero no arista transitivo

El grafo completo bipartito $K_{m,n}$ es un grafo arista transitivo, pero no es vértice transitivo a menos que $m = n$, ya que ningún automorfismo puede enviar un vértice de grado m a otro de grado n , dado que los automorfismos conservan las adyacencias y, por tanto, el número de aristas que inciden en cada vértice. El lema que vamos a ver a continuación muestra que todos los grafos que son arista transitivos pero no vértice transitivos son bipartitos.

Proposición 3.1.12. *Sea $G = (V, E)$ un grafo arista transitivo conexo. Si G no es vértice transitivo, entonces $\text{Aut}(G)$ tiene exactamente dos órbitas y estas dos órbitas son una partición de G .*

Demostración. Fijamos una arista $\{x, y\} \in E$. Si $w \in V$, entonces como G no tiene vértices aislados w es el extremo de alguna arista, y dado que G es arista transitivo, existe $\sigma \in \text{Aut}(G)$ que envía la arista a la que pertenece w a $\{x, y\}$. Por tanto, cualquier vértice de G está en la órbita $x^{\text{Aut}(G)}$ o en la órbita $y^{\text{Aut}(G)}$. Esto prueba que $\text{Aut}(G)$ tiene exactamente dos órbitas.

Además, una arista que une dos vértices que están en la misma órbita no puede ser enviada mediante ningún automorfismo a una arista que contenga un vértice en la otra órbita. Como G es arista transitivo y conexo, no puede haber una arista entre dos vértices que estén en la misma órbita. Si $v, w \in x^{\text{Aut}(G)}$, $\{v, w\} \in E$, entonces para cualquier $\sigma \in \text{Aut}(G)$, $\sigma(v), \sigma(w) \in x^{\text{Aut}(G)}$, luego $\sigma(v), \sigma(w) \notin y^{\text{Aut}(G)}$, por lo que $\{\sigma(v), \sigma(w)\} \neq \{x, y\}$.

Por tanto, G es un grafo bipartito y las órbitas son las particiones de los vértices. \square

Definición 3.1.13. *Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **simétrico** si para cualesquiera $u, v, x, y \in V$, siendo u, v y x, y vértices adyacentes respectivamente, existe un automorfismo $\sigma \in \text{Aut}(G)$ tal que $\sigma(u) = x$ y $\sigma(v) = y$. En concreto, si G es conexo, si G es simétrico, es vértice y arista transitivo.*

3.2. Grafos de Cayley

A continuación, estudiamos los grafos de Cayley. Vamos a trabajar con grupos no triviales finitos, por lo que cuando se introduzca un grupo, tendrá estas características, y en caso contrario se especificará. Mostraremos algunas propiedades y resultados relacionados con estos grafos y en particular probaremos ciertos teoremas que nos ayudarán a proporcionar una breve demostración del teorema de Frucht, que relaciona los grupos y los automorfismos de grafos.

Definición 3.2.1. Sean Γ un grupo y $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ un subconjunto de Γ . Se denomina **grafo de Cayley** de Γ asociado a C y se denota por $X(\Gamma, C)$ al grafo dirigido que tiene por vértices los elementos de Γ y cuyos arcos son

$$E(X(\Gamma, C)) = \{(g, h) \mid hg^{-1} \in C\} = \{(g, cg) \mid c \in C\}.$$

Cada generador c se identifica con un color, y diremos que para dos vértices g_1, g_2 existe un arco (g_1, g_2) coloreado c en $X(\Gamma, C)$ si, y solo si, $g_2 = cg_1$. Cuando un grafo de Cayley $X(\Gamma, C)$ contiene los arcos (g_1, g_2) y (g_2, g_1) coloreados con c y c^{-1} respectivamente, $c^{-1} \in C$, entonces se representa con la arista $\{g_1, g_2\}$. Por tanto, si $C = C^{-1}$, el grafo de Cayley será no dirigido.

Veamos el grafo de Cayley para el grupo simétrico S_3 de las permutaciones en el conjunto $\{1, 2, 3\}$ y sea $C = \{a, b\}$, siendo $a = (123)$, $b = (12)$. El grafo de Cayley dirigido $X(S_3, C)$ es

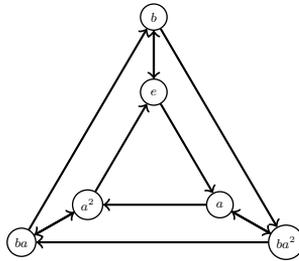


Figura 3.3: $X(S_3, \{(123), (12)\})$

Los grafos de Cayley $X(\mathbb{Z}_3, C)$ siendo $C = \{2\}$ y $C = \{1, 2\}$ son:



Figura 3.4: Grafos de Cayley dirigido y no dirigido

A continuación, veamos algunas propiedades relacionadas con el grafo de Cayley para el caso particular en que $C = C^{-1}$ y $e \in C$.

Teorema 3.2.2. *Sea Γ un grupo finito y C un subconjunto de Γ , $C = C^{-1}$, $e \in C$. El grafo de Cayley $X(\Gamma, C)$ es vértice transitivo.*

Demostración. Para cada $g \in \Gamma$, la aplicación

$$\rho_g : x \mapsto xg$$

es una permutación de los elementos de Γ . Es un automorfismo de $X(\Gamma, C)$ ya que hemos visto que las aristas de este grafo son $\{\{g, h\} \mid hg^{-1} \in C\}$. Para cualquier par de vértices $x, y \in \Gamma$,

$$xg \sim yg \iff (yg)(xg)^{-1} \in C \iff yx^{-1} \in C \iff x \sim y.$$

Las permutaciones ρ_g forman un subgrupo del grupo de automorfismos de $X(\Gamma, C)$ isomorfo a Γ y para cualquier par de vértices g, h de $X(\Gamma, C)$, el automorfismo $\rho_{g^{-1}h}$ envía g a h . Por lo tanto, $X(\Gamma, C)$ es vértice transitivo. \square

Para los siguientes resultados vamos a necesitar algunos términos acerca de los grupos. Un grupo Γ actúa de forma **semirregular** en un conjunto Ω si ningún elemento de Γ distinto de la identidad fija un punto de Ω . En ese caso, $\Gamma_x = \{Id\}$, para cualquier elemento $x \in \Omega$, luego, por 3.1.5 todas las órbitas son de orden $|\Gamma|$. Diremos que Γ es **regular** si es semirregular y transitivo. Si Γ es regular, entonces $|\Gamma| = |\Omega|$, 3.1.2.

Teorema 3.2.3. *Sean $G = (V, E)$ un grafo y Γ un grupo finito. Γ es un subgrupo del grupo de los automorfismos de G que actúa regularmente en los vértices de G si, y solo si, existe C un subconjunto de Γ , $C = C^{-1}$, $e \in C$ tal que $G \cong X(\Gamma, C)$.*

Demostración. Sea G un grafo, veamos que si existe $C \subseteq \Gamma$, $C = C^{-1}$, $e \in C$ de manera que $G \cong X(\Gamma, C)$, entonces Γ es un subgrupo de $Aut(G)$ que actúa regularmente en G . Sabemos por 3.2.2 que

$$H = \{\rho_g \mid g \in \Gamma\} \leq Aut(X(\Gamma, C)),$$

$C \subseteq \Gamma$, $C = C^{-1}$, $e \notin C$, y la acción de H en $X(\Gamma, C)$ es transitiva. Además, la acción es semirregular ya que para cualquier $x \in \Gamma$, $\rho_g \in H$,

$$\rho_g(x) = x \iff xg = x \iff g = e.$$

Luego H actúa reguarmente en $X(\Gamma, C)$.

Además, vemos que la aplicación

$$\begin{aligned} \Gamma &\xrightarrow{\phi_\rho} H \\ g &\longmapsto \rho_g \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

La aplicación está bien definida pues si para $g, g' \in \Gamma$, $g = g'$, entonces $\rho_g(x) = xg = xg' = \rho_{g'}(x)$, y para cualquier $g \in \Gamma$, $\rho_g \in H$. Es biyectiva pues si $\rho_g = \rho_{g'}$, $xg = xg'$ para cualquier $x \in \Gamma$, luego $g = g'$ y por definición, para cualquier $\rho_g \in H$ existe $g \in \Gamma$ de forma que $\phi_\rho(g) = \rho_g$. Finalmente, se tien que $\rho_{gg'}(x) = x(gg') = (xg)g' = \rho_{g'}(xg) = (\rho_{g'} \circ \rho_g)(x)$, por tanto, se trata de un isomorfismo, luego

$$\Gamma \cong \text{Im}\phi_\rho = H \leq \text{Aut}(X(\Gamma, C)),$$

que actúa de forma regular en el conjunto de vértices de G .

Recíprocamente, veamos que si G es un grafo y Γ un subgrupo de los automorfismos de G que actúa regularmente en el grafo, entonces $G \cong X(\Gamma, C)$ para algún $C \subseteq \Gamma$, $C = C^{-1}$ y $e \notin C$.

En particular, fijamos un vértice del grafo $u \in V$. Dado que la acción de Γ sobre V es transitiva, si $v \in V$, existe $\sigma \in \Gamma$ tal que $u^\sigma = v$. Además, la acción es, en particular, semirregular, por lo tanto este automorfismo es único:

$$u^\sigma = u^\tau \implies u^{\sigma\tau^{-1}} = u \implies \sigma\tau^{-1} \in \Gamma_u = \{Id\} \implies \sigma\tau^{-1} = Id \implies \sigma = \tau.$$

Podemos definir una biyección entre

$$\begin{aligned} V(G) &\xrightarrow{\varphi} \Gamma \\ x &\longmapsto \sigma_x. \end{aligned}$$

φ está bien definida pues para cualquier $x \in V$, existe un único $\sigma_x \in \Gamma$ y es biyectiva ya que si $\sigma_x = \sigma_y$, entonces $u^{\sigma_x} = u^{\sigma_y}$ y $x = y$, y para $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(u) = x \in V$, por lo que $\sigma = \sigma_x$.

De esta forma podemos formar un conjunto

$$C = \{\sigma_x | \{u, x\} \in E\} \subseteq \Gamma.$$

Como G no contiene lazos, $Id \notin C$. Además, siendo $\Gamma \leq \text{Aut}(G)$ se cumple que para cualquier $\sigma \in \Gamma$,

$$\{x, y\} \in E \iff \{x^\sigma, y^\sigma\} \in E.$$

En particular,

$$\sigma_x \in C \implies \{u, x\} \in E \implies \{u^{\sigma_x^{-1}}, x^{\sigma_x^{-1}}\} = \{\sigma_x^{-1}(u), u\} \in E.$$

Y dado que G es un grafo no dirigido, $\{\sigma_x^{-1}(u), u\} = \{u, \sigma_x^{-1}(u)\}$, $\sigma_x^{-1} \in C$, por lo que $C = C^{-1}$.

Por último, si $x, y \in V$, $\{x, y\} \in E \iff \{x^{\sigma_x^{-1}}, y^{\sigma_x^{-1}}\} \in E$. Entonces, dado que $x = \sigma_x(u)$, $y = \sigma_y(u)$, se tiene que $x^{\sigma_x^{-1}} = u$, $y^{\sigma_x^{-1}} = u^{\sigma_y \sigma_x^{-1}}$.

Por tanto, $\{x, y\} \in E \iff \{u, u^{\sigma_y \sigma_x^{-1}}\} \in E \iff \sigma_y \sigma_x^{-1} \in C$ y podemos concluir que la aplicación φ define un isomorfismo entre

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow X(\Gamma, C) \\ x &\longmapsto \sigma_x \end{aligned}$$

de forma que $\{x, y\} \in E \iff \sigma_y \sigma_x^{-1} \in C \iff \{\sigma_x, \sigma_y\} \in E(X(\Gamma, C))$. □

Proposición 3.2.4. *Sea Γ un grupo. Si θ es un automorfismo del grupo finito Γ , $C = C^{-1}$ y $e \notin C$, entonces los grafos de Cayley $X(\Gamma, C)$ y $X(\Gamma, \theta(C))$ son isomorfos.*

Demostración. Sean x, y dos vértices de $X(\Gamma, C)$. Se verifica que

$$\theta(yx^{-1}) = \theta(y)\theta(x^{-1}) = \theta(y)\theta(x)^{-1},$$

por lo que $\theta(y)\theta(x)^{-1} \in \theta(C)$ si, y solo si, $yx^{-1} \in C$. Por tanto, θ es un isomorfismo entre $X(\Gamma, C)$ y $X(\Gamma, \theta(C))$. □

Lema 3.2.5. *Sea Γ un grupo finito, $C = C^{-1}$ y $e \notin C$, el grafo de Cayley $X(\Gamma, C)$ es conexo si, y solo si, C es un conjunto generador de Γ .*

Demostración. En primer lugar, supongamos que $X(\Gamma, C)$ es conexo, por lo que entre cualquier par de vértices del grafo existe una cadena. En particular, sean $g \in \Gamma$, $c \in C$ dos vértices de $X(\Gamma, C)$, siendo $\{c, a_1, \dots, a_{n-1}, g\}$, $a_1, \dots, a_{n-1} \in \Gamma$ la cadena que los une y $\{c, a_1\}, \{a_1, a_2\}, \dots, \{a_{n-1}, g\}$ las aristas de la cadena. Por definición del grafo de Cayley, esto significa que existen en C los elementos c_1, \dots, c_n , siendo $c_1 = a_1 c^{-1}, c_2 = a_2 a_1^{-1}, \dots, c_{n-1} = a_{n-1} a_{n-2}^{-1}, c_n = g a_{n-1}^{-1}$. Así, vemos que $c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 = g c^{-1}$ y llegamos a que

$$g = c_n c_{n-1} \dots c_2 c_1 c,$$

y dado que c, c_1, \dots, c_n pertenecen al conjunto C , podemos concluir que cualquier elemento de Γ se puede escribir como producto de elementos de C , por lo que $\langle C \rangle = \Gamma$.

Recíprocamente, como C es un conjunto generador de Γ , para $g, h \in \Gamma$ escribimos $g = c_1 \dots c_r$ y $h = c'_1 \dots c'_s$, siendo $c_1, \dots, c_r, c'_1, \dots, c'_s \in C$.

$$g = c_1 \dots c_r = c_1 \dots c_r c'_s{}^{-1} \dots c'_1{}^{-1} \underbrace{c'_1 \dots c'_s}_h$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{a_n}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{a_1}$$

Esto significa que existe una cadena $\{g, a_1, \dots, a_n, h\}$ entre los vértices g y h , $a_1, \dots, a_n \in \Gamma$, luego el grafo de Cayley $X(\Gamma, C)$ es conexo. \square

3.3. Teorema de Frucht

En esta sección vamos a trabajar con los grafos color de Cayley y su grupo de automorfismos, y obtendremos una serie de resultados que nos ayudarán a desarrollar el procedimiento a seguir para probar el teorema de Frucht, que afirma que cualquier grupo finito es isomorfo al grupo de automorfismos de un grafo.

Seguimos trabajando con grupos finitos no triviales, y ahora los conjuntos generadores no van a tener la característica de contener a los inversos. Si Γ es un grupo y C un conjunto que lo genera, se dice que un elemento $\alpha \in \text{Aut}(X(\Gamma, C))$ preserva la dirección o el color si para cada arco (g_1, g_2) de $X(\Gamma, C)$, los arcos (g_1, g_2) y $(\alpha(g_1), \alpha(g_2))$ tienen el mismo color. Es evidente que el conjunto de todos automorfismos de $X(\Gamma, C)$ que preservan el color forman un subgrupo de $\text{Aut}(X(\Gamma, C))$ y lo denotamos por $\text{Aut}_{\text{col}}(X(\Gamma, C))$.

Teorema 3.3.1. *Sea Γ un grupo generado por un conjunto C y sea α una permutación de los vértices de $X(\Gamma, C)$. Entonces α es un automorfismo de $X(\Gamma, C)$ que preserva el color si, y solo si,*

$$\alpha(CG) = C(\alpha G)$$

para cualquier $g \in \Gamma$ y cualquier $c \in C$.

Demostración. Si (g, g') es un arco del grafo $X(\Gamma, C)$, $c \in C$, vemos que

$$g' = cg \iff \alpha(g') = \alpha(CG) \iff \alpha(CG) = C(\alpha G),$$

por lo que $\alpha \in \text{Aut}_{\text{col}}(X(\Gamma, C))$ si, y solo si, $\alpha(CG) = C(\alpha G)$. \square

Teorema 3.3.2. *Sea Γ un grupo y C un conjunto generador de Γ . Entonces el grupo de automorfismos de $X(\Gamma, C)$ que preservan el color es isomorfo a Γ .*

Demostración. Sea $\Gamma = \{g_1, \dots, g_n\}$. Para $i = 1, \dots, n$ definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \rho_{g_i} : V(X(\Gamma, C)) &\longrightarrow V(X(\Gamma, C)) \\ g_s &\longmapsto \rho_{g_i}(g_s) := g_s g_i, \quad 1 \leq s \leq n. \end{aligned}$$

Como Γ es un grupo, la aplicación es biyectiva.

Sea $c \in C$, para cualquier i , $1 \leq i \leq n$ y cualquier s , $1 \leq s \leq n$, vemos que

$$\rho_{g_i}(cg_s) = (cg_s)g_i = c(g_s g_i) = c(\rho_{g_i}(g_s)),$$

luego por el teorema 3.3.1 ρ_{g_i} es un automorfismo que preserva el color en $X(\Gamma, C)$. Ahora, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_{g_i} : \Gamma &\longrightarrow \text{Aut}_{\text{col}}(X(\Gamma, C)), \quad 1 \leq i \leq n. \\ g_i &\longmapsto \phi_{g_i}(g_i) := \rho_{g_i} \end{aligned}$$

Por 3.2.3 ya sabemos que ϕ_{g_i} está bien definida y es un homomorfismo inyectivo. Probemos que ϕ_{g_i} es sobreyectiva. Sea ρ un automorfismo de $X(\Gamma, C)$ que preserva el color. Vamos a ver que $\rho = \rho_{g_i}$ para algún $g_i \in \Gamma$, $1 \leq i \leq n$. Supongamos que $\rho e = g_r$, e la identidad de Γ , $1 \leq r \leq n$. Sea $g_s \in \Gamma$, entonces g_s se puede expresar como producto de generadores,

$$g_s = c_1 \cdots c_t,$$

donde $c_j \in C$, $1 \leq j \leq t$. Por tanto,

$$\rho(g_s) = \rho(g_s e) = \rho(c_1 \cdots c_t e).$$

Aplicando sucesivamente el teorema 3.3.1,

$$\rho(g_s) = c_1 \cdots c_t(\rho e) = g_s(\rho e) = g_s g_r = \rho_{g_r}(g_s).$$

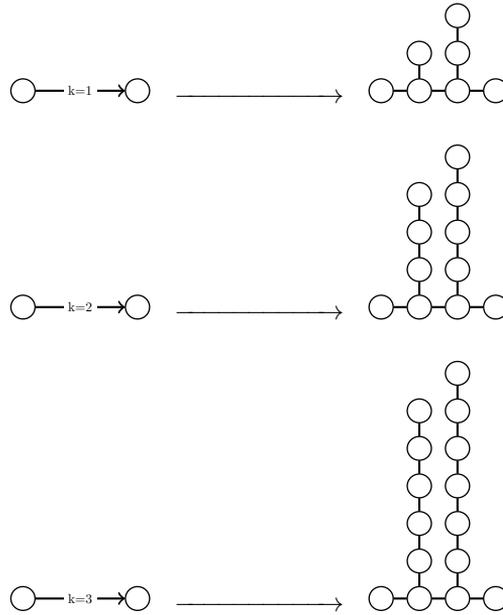
Por tanto, concluimos que $\rho = \rho_{g_r}$, luego ϕ_{g_i} es sobreyectiva, tal y como queríamos ver, y el teorema queda probado. \square

En 1936 se publicó el primer libro de teoría de grafos. En este libro el autor, D. König, propuso el problema de determinar todos los grupos finitos Γ para los que existía un grafo G de manera que $\text{Aut}(G) \cong \Gamma$. El problema fue resuelto en 1938 por Frucht, quien provó que cada grupo finito tiene esta propiedad. A continuación vamos a proporcionar el procedimiento a seguir para demostrar este resultado.

Teorema 3.3.3. *Para cada grupo finito Γ existe un grafo G tal que $\text{Aut}(G) \cong \Gamma$.*

Demostración. Si Γ es el grupo trivial, entonces $\text{Aut}(G) \cong \Gamma$ para $G = K_1$. Por tanto, sea $\Gamma = \{g_1, \dots, g_n\}$ un grupo finito, $n \geq 2$, y sea $C = \{c_1, \dots, c_t\}$ un conjunto generador de Γ , $1 \leq t \leq n$. En primer lugar, construimos el grafo color de Cayley $X(\Gamma, C)$ de Γ respecto de C , que es un grafo dirigido. Por el teorema 3.3.2 sabemos que el grupo de automorfismos de $X(\Gamma, C)$ que preservan el color es isomorfo a Γ . Vamos a transformar el grafo dirigido $X(\Gamma, C)$ en un grafo G mediante la siguiente técnica. Sea (g_i, g_j) un arco de $X(\Gamma, C)$ coloreado por c_k . Eliminamos este arco y lo reemplazamos por el grafo cadena $\{g_i, u_{ij}, u'_{ij}, g_j\}$. En el nuevo vértice u_{ij} construimos una cadena de longitud $2k - 1$ y en u'_{ij} una de longitud $2k$. Hacemos esto en todos los arcos de $X(\Gamma, C)$.

Por ejemplo, con tres generadores los arcos pasarían a ser los siguientes subgrafos:



La adición de estas cadenas en G es, de alguna manera, equivalente a la dirección y el color de los arcos en la construcción de $X(\Gamma, C)$, y pasamos de tener un grafo dirigido a construir uno no dirigido. Por último, se puede ver que cada automorfismo de $X(\Gamma, C)$ que preserva el color induce un automorfismo en G y que los únicos automorfismos de G son esos, luego

$$\text{Aut}(G) \cong \text{Aut}_{\text{col}}(X(\Gamma, C))$$

y aplicando el resultado de 3.3.2,

$$\text{Aut}(G) \cong \Gamma$$

por lo que quedaría probado el teorema de Frucht. □

Bibliografía

- [1] KNAUER, U. *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices*. De Gruyter, 2011.
- [2] GODSIL, C. Y ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*. Springer, 2001.
- [3] BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [4] CHARTRAND G. Y LESNIAK L. *Graphs and Digraphs*. Chapman & Hall, 1996.
- [5] WHITE, A.T. *Graphs, Groups and Surfaces*. Elsevier, 1973
- [6] MATTHES, A. *AlterMundus: tkz-graph ctan v1.00 c.* <http://osl.ugr.es/CTAN/macros/latex/contrib/tkz/tkz-graph/doc/tkz-graph-screen.pdf>

Lista de Figuras

1.1. Ejemplos de grafos	2
1.2. Grafo de Petersen etiquetado	2
1.3. Grafo complementario del grafo 1.1a	3
1.4. Otra representación del grafo de Petersen y su complementario ...	3
1.5. La cadena P_3	5
1.6. Ciclo con 6 vértices C_6	5
1.7. Grafo completo con 7 vértices K_7	6
1.8. Grafo bipartito completo $K_{3,2}$	7
1.9. Árbol con 6 vértices	7
1.10. Grafo de línea del grafo 1.1a	8
1.11. Grafo de línea del grafo de Petersen	9
1.12. $K_5, \overline{K_5}, L(\overline{K_5})$	9
3.1. Grafo Q_3	32
3.2. Grafo vértice transitivo pero no arista transitivo	34
3.3. $X(S_3, \{(123), (12)\})$	35
3.4. Grafos de Cayley dirigido y no dirigido	36

Introduction to algebraic graph theory



Universidad de La Laguna

Iciar González Alonso
 Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
 Universidad de La Laguna
 alu0100821871@ull.edu.es



Abstract

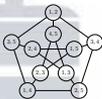
The objective of this degree thesis is to apply the results of linear algebra and group theory to graph theory, in order to obtain more information and solve several problems about graphs, with algebraic tools.

Firstly, some graph concepts that will be needed throughout this text are defined, as well as some specific graphs, in particular, the line graph. Secondly, the study of the spectrum of the adjacency matrix and the incidence matrix will allow an approach to these structures and together with the eigenvalues it will be possible to determine more characteristics of the graph. Lastly, through the action of the automorphism group of a graph, different families of graphs are defined (vertex transitive, edge transitive). Groups and graphs are related by means of the Cayley graph and by Frucht's theorem it is proved that any finite group is isomorphic to the automorphism group of a graph.

1. Introduction to graphs

A **graph** is a pair $G = (V, E)$ consisting of a vertex set V and an edge set E .

Example. The Petersen Graph has 10 vertices and 15 edges and every vertex can represent all the subsets of two out of five elements. Disjoint subsets are incident.



The **complement graph** of a graph $G = (V, E)$ is $\bar{G} = (V, \bar{E})$, with $\{x, y\} \in \bar{E} \Leftrightarrow \{x, y\} \notin E$.

Example. The Petersen complement graph can be represented by:



The **line graph** of a graph $G = (V, E)$ is $L(G) = (E, \{\{e, e'\} | e \cap e' \neq \emptyset, e \neq e'\})$.

Example. The Petersen line graph is:



Two graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$ are **isomorphic** if there is a bijective map

$$f: V_1 \rightarrow V_2$$

such that

$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

The set of all automorphisms of G forms a group, the **automorphism group** of G , $Aut(G)$, and

$$Aut(G) \leq S_{|V|}.$$

2. Linear Algebra in Graphs

The **adjacency matrix** $A(G)$ of the graph $G = (V, E)$ is the symmetric matrix with rows and columns indexed by the vertices of G , such that

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } \{x_i, x_j\} \in E \\ 0 & \text{in other case} \end{cases}$$

for $x_i, x_j \in V$. The number of vertices incident with x_i is $deg(x_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$.

Theorem. Let G and G' be two graphs and P a permutation matrix. Then,

$$G \cong G' \Leftrightarrow A(G') = PA(G)P^t.$$

The **characteristic polynomial** of $A(G)$ is $chap(G; t) := |tI_n - A(G)|$.

Theorem. Let G be a graph whose eigenvalues are $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. Then, if Δ is the number of triangles in G ,

- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2|E|$.
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i^3 = 6\Delta$.

Theorem. Let G be a d -regular graph with n vertices and m edges, then

$$chap(L(G); t) = (t+2)^{m-n} chap(G; t+2-d)$$

and if λ is an eigenvalue of $L(G)$, $\lambda \geq -2$.

Theorem. Let G be a connected graph. The following statements are equivalent:

- G is d -regular.
- $\Lambda = d_G$, mean of the vertices degrees.
- $v = (1, \dots, 1)^t$ eigenvector for Λ .

3. Graphs automorphisms

A graph $G = (V, E)$ is **vertex transitive** if for any two distinct vertices of G there is an automorphism mapping one to the other. A vertex transitive graph is necessarily regular.

Let Γ be a group and let C be a subset of Γ . The **Cayley graph** $X(\Gamma, C)$ is the graph with vertex set Γ and arc set

$$E(X(\Gamma, C)) = \{(g, hg^{-1}) \in C\}.$$

Cayley graphs form an important family of vertex transitive graphs.

Example. $X(S_3, \{a, b\})$, with $a=(123)$ and $b=(12)$ is:



Theorem. $X(\Gamma, C)$ is connected $\Leftrightarrow \Gamma = \langle C \rangle$.

Theorem. Let $G = (V, E)$ be a graph and let Γ be a group. Γ is a subgroup of $Aut(G)$ which acts regularly on V if, and only if, there is a set $C \subseteq \Gamma$, $C = C^{-1}$, $e \notin C$ such that $G \cong X(\Gamma, C)$.

Frucht's theorem. For every finite group Γ exists a graph G such that

$$Aut(G) \cong \Gamma.$$

References

- [1] KNAUER, U. *Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices*. De Gruyter, 2011.
- [2] GODSIL, C. Y ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*. Springer, 2001.
- [3] BIGGS, N. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [4] CHARTRAND G. Y LESNIAK L. *Graphs and Digraphs*. Chapman & Hall, 1996.
- [5] WHITE, A.T. *Graphs, Groups and Surfaces*. Elsevier, 1973
- [6] MATTHES, A. *AlterMundus: tkz-graph ctan v1.00 c*. <http://osl.ugr.es/CTAN/macros/latex/contrib/tkz/tkz-graph/doc/tkz-graph-screen.pdf>