

Jorge Antonio Herrera Alonso

Sustentación aerodinámica y análisis complejo

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2017

DIRIGIDO POR
José Claudio Sabina de Lis

José Claudio Sabina de Lis
Departamento de Análisis Ma-
temático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría agradecer sinceramente a mi tutor, D. José Claudio Sabina de Lis, su esfuerzo y dedicación.

Sus conocimientos, sus orientaciones, su manera de trabajar, su paciencia y su motivación han sido fundamentales para mi formación en este último curso.

También quiero agradecer a mi familia y amigos por ser fuente de apoyo constante e incondicional durante mi etapa universitaria.

Resumen · Abstract

Resumen

Esta memoria se ocupa del estudio de la fuerza de sustentación generada por un fluido ideal, en ausencia de efectos viscosos, cuando éste atraviesa un cilindro (“el perfil de ala”). El Capítulo 1 proporciona una introducción elemental a la mecánica de fluidos. Los fluidos ideales planos se revisan en el Capítulo 2 a la luz del análisis complejo. Se emplea la teoría de aplicaciones conformes en el Capítulo 3 para estudiar los fluidos a través de una clase especial de perfiles, así como las fuerzas de presión ejercidas sobre los mismos.

Palabras clave: *Fluidos ideales, ecuaciones de Euler, aplicaciones conformes, transformación de Jukowski.*

Abstract

This memory is devoted to the study of the lift force generated by an ideal fluid past a cylinder (an “airfoil”) in absence of drag forces due to viscosity. Chapter 1 provides an introduction to fluid dynamics. Ideal plane fluids are then revisited in the language of complex analysis in Chapter 2. Conformal mapping theory is employed in Chapter 3 to study the flow past a special class of airfoils together with the pressure forces exerted on such profiles.

Keywords: *Ideal fluids, Euler equations, conformal mappings, Joukowski transformation.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Introducción a los fluidos	1
1.1. Conceptos básicos	1
1.2. Variaciones en la masa y el volumen	2
1.3. La ecuación de continuidad	4
1.4. Variación del momento lineal	5
1.5. Fuerzas sobre Ω_t . Fluidos ideales	5
1.6. Fluidos incompresibles y fluidos isentrópicos	7
1.6.1. Fluidos incompresibles	7
1.6.2. Fluidos isentrópicos	8
1.7. Teorema de Bernoulli	9
1.8. La presión en las ecuaciones: el caso incompresible	9
1.9. Vorticidad	11
1.9.1. Superficies de vorticidad, curvas de vorticidad	12
1.9.2. Fluidos planos	14
1.9.3. Tubos vorticiales	14
1.9.4. Vorticidad y fluidos ideales	15
2. Fluidos en el campo complejo	17
2.1. El campo de velocidades complejo	17
2.2. Circulación y flujo	17
2.3. Fluidos irrotacionales, fluidos solenoidales	19
2.4. La presión	20
2.5. Puntos de vorticidad, sumideros y fuentes	21

2.6. Potencial complejo, potencial de velocidades y función de corriente	21
2.7. Fluido a través de un cilindro circular	24
2.7.1. Primer ejemplo	24
2.7.2. Segundo ejemplo	26
2.7.3. Caracterización del flujo través del cilindro circular	28
2.7.4. Estudio de las líneas fluidas	29
2.7.5. Órbitas no acotadas	31
3. Cilindros con perfil de Jukowski	33
3.1. El cilindro de sección general	33
3.1.1. Flujo a través de un cilindro de sección general	34
3.2. Transformación de Jukowski	35
3.3. Algunos tipos de aerofoils	37
3.3.1. El segmento	37
3.3.2. Aerofoil simétrico	38
3.3.3. Arco de círculo	38
3.3.4. Aerofoil curvado con extremos romo y agudo	39
3.3.5. Aerofoil completamente romo	40
3.4. Condición de Jukowski	40
3.5. Teorema de Blasius	44
3.6. Teorema de sustentación	45
Bibliografía	49
Poster	51

Introducción

El objetivo de esta memoria consiste en estudiar la fuerza de sustentación ejercida por un fluido ideal, cuando éste “atraviesa” un objeto cilíndrico. La sección de dicho cilindro se denomina un “airfoil” o “aerofoil” pues dicho cilindro, o más precisamente una versión convenientemente estilizada del mismo, juega el papel del ala de una aeronave.

Para el estudio de la sustentación aerodinámica es fundamental conocer el entorno en el que se desarrolla el fenómeno, en este caso particular, el aire considerado como un fluido no viscoso con densidad constante ρ . Para ello, presentamos en el primer capítulo una introducción a los fluidos ideales y a los conceptos básicos de la mecánica de fluidos. Introducimos el campo de velocidades y la densidad, analizamos la presión y formulamos las ecuaciones de Euler. Discutimos las nociones de circulación, flujo y vorticidad así como sus correspondientes propiedades.

En el segundo capítulo ofrecemos una visión más matemática de los fluidos ideales en el plano, bajo la óptica de las funciones de una variable compleja. Sólo se consideran los fluidos incompresibles e irrotacionales en régimen estacionario. Introducimos la noción de potencial complejo y definimos qué se entiende por “flujo a través de un cilindro” que es la cuestión principal de la que trata el trabajo (ver la Sección 2.7). Caracterizamos completamente el flujo a través de un cilindro circular.

En el capítulo tercero utilizamos la teoría de transformaciones conformes para estudiar el flujo a través de cilindros de perfil general. El estudio se particulariza después para la clase de perfiles que denominamos de Jukowski, de los que extraemos los casos más significativos. La memoria concluye introduciendo la condición de Jukowski y calculando la fuerza de sustentación del flujo a través de un cilindro con un extremo agudo. Las conclusiones se recopilan en los Teoremas de Blasius y de Jukowski.

Introducción a los fluidos

Presentamos en este capítulo una introducción a los fluidos ideales. Sirve de complemento a los problemas que sobre fluidos planos consideramos en el Capítulo 2. Por razones de espacio se han omitido las demostraciones de la mayoría de los resultados.

1.1. Conceptos básicos

Un fluido es un medio continuo cuyo estado en una región $D \subset \mathbb{R}^3$ en la posición $\mathbf{x} = (x, y, z)$ y el instante de tiempo t viene descrito por su campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y su densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$.

El campo de velocidades es una función

$$\mathbf{u} : D \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t)).$$

Si se libera una *partícula fluida* en la posición x_0 e instante t_0 , ésta seguirá una trayectoria descrita por la solución de la ecuación

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

La curva γ parametrizada por la solución $\mathbf{x}(t)$ de (1.1), que es una órbita de la ecuación[8], se denomina como *trayectoria fluida* (o línea fluida).

En cuanto a la densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, la masa contenida en una región $\Omega \subset D$ (Ω un volumen fluido) en el instante t es:

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \quad (1.2)$$

En los siguientes capítulos trataremos fluidos planos. En ese caso, la región $D \subset \mathbb{R}^2$ y el campo de velocidades $\mathbf{u} : D \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$, $\mathbf{u} = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t))$. Un fluido plano se podría representar como un fluido espacial con tal que le asignamos el campo de velocidades $\mathbf{u} = (u, v, 0)$.

1.2. Variaciones en la masa y el volumen

Suponemos que $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es una aplicación al menos \mathcal{C}^1 . El problema (1.1) admitirá una única solución $\mathbf{x}(t)$ que representamos por

$$\mathbf{x} = \varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0)$$

donde para simplificar suele omitirse t_0 . Cuando $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$, la aplicación φ se llama el *flujo* de \mathbf{u} . Aquí usaremos el término aunque \mathbf{u} dependa de t . Si Ω es un volumen fluido en $t = t_0$, éste se transforma por el fluido mediante la aplicación:

$$\varphi_t : D \mapsto D, \quad y \mapsto \varphi(t, y) =: \varphi_t(y).$$

donde $t \geq t_0$. El volumen inicial Ω se transforma en

$$\Omega_t = \varphi_t(\Omega) = \{\varphi_t(y) : y \in \Omega\}.$$

Una herramienta útil es la siguiente.

Teorema 1.1. (*Liouville*) Supongamos que $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ es \mathcal{C}^1 , sea $\varphi(t, y)$ el flujo de la ecuación $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, es decir, $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{y})$ define la solución de (1.1) con $x_0 = y$. Sea $\Phi(t, \mathbf{y}) = D_y \varphi(t, \mathbf{y})$ entonces:

$$i) \Phi(t_0, \mathbf{y}) = I.$$

$$ii) \frac{d}{dt}(\Phi(t, y)) = D_x \mathbf{u}(\varphi(t, \mathbf{y}), t) \Phi(t, y).$$

$$iii) \frac{dJ}{dt}(\mathbf{y}, t) = \operatorname{div}(\mathbf{u}(\varphi(t, \mathbf{y}), t) J(\mathbf{y}, t)) \text{ donde } J(\mathbf{y}, t) = \det \Phi(t, \mathbf{y}). \text{ En particular,}$$

$$J(\mathbf{y}, t) = e^{\int_{t_0}^t \operatorname{div}(\mathbf{u}(\varphi(\tau, \mathbf{y}), \tau) d\tau}.$$

Ahora estamos en condiciones de establecer la variación del volumen Ω_t

Teorema 1.2. *En las condiciones precedentes :*

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{vol}(\Omega_t)) = \int_{\Omega_t} \operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}.$$

Estamos asimismo preparados para analizar cómo varía la masa encerrada en Ω_t cuando Ω_t varía con el fluido.

Teorema 1.3. *Sea $m(t)$ la masa encerrada en Ω_t . Entonces:*

$$\frac{dm}{dt}(t) = \dot{m}(t) = \int_{\Omega_t} (\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})) \, d\mathbf{x}.$$

Resulta natural estudiar la variación de magnitudes escalares o vectoriales definidas por una función $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ a lo largo de las trayectorias fluidas. Es decir, la variación con el tiempo de $\mathbf{h}(t) = \mathbf{F}(\varphi(t, \mathbf{y}), t)$. Al derivar:

$$\frac{d\mathbf{h}(t)}{dt} = D_x \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}. \tag{1.3}$$

Componente a componente:

$$\frac{dh_i}{dt} = \bar{\nabla} F_i \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial F_i}{\partial t} = (\mathbf{u} \cdot \bar{\nabla}) F_i + \frac{\partial F_i}{\partial t}, \tag{1.4}$$

donde para una función escalar ϕ , $(\mathbf{u} \cdot \bar{\nabla})\phi = \bar{\nabla}\phi \cdot \mathbf{u}$ es la derivada de ϕ en la dirección \mathbf{u} . Usando (1.3) y (1.4) se puede escribir

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}(x(t), t)) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \bar{\nabla})\mathbf{F}, \tag{1.5}$$

en donde el operador $(\mathbf{u} \cdot \bar{\nabla})$ se entiende que actúa sobre \mathbf{F} componente a componente.

Definición 1.4. *Se conoce (1.5) como la derivada material o derivada advectiva de la función $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ y se representa por $\frac{D\mathbf{F}}{Dt}(\mathbf{x}, t)$.*

Una consecuencia del Teorema 1.3, si reemplazamos $\rho(\mathbf{x}, t)$ por una función regular $f(\mathbf{x}, t)$ es la siguiente:

Teorema 1.5 (Teorema del Transporte de Reynolds). *Si $f(\mathbf{x}, t)$ es una función regular:*

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \cdot \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \, d\mathbf{x}.$$

El Teorema 1.2 sugiere la siguiente definición.

Definición 1.6. *Un fluido con campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se llama incompresible si*

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in D, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.7. *Supongamos que un fluido \mathbf{u} es incompresible, entonces el volumen de los elementos fluidos Ω_t se conserva:*

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{vol}(\Omega_t)) = 0,$$

mientras la variación de masa $\dot{m}(t)$ encerrada en Ω_t tiene la forma:

$$\dot{m}(t) = \int_{\Omega_t} \frac{D\rho}{Dt} \, d\mathbf{x}.$$

1.3. La ecuación de continuidad

Bajo la hipótesis de que en el fluido no se crea ni se degrada la masa, sólo se transporta mediante las trayectorias fluidas, vamos a deducir la ecuación que liga la densidad $\rho(\mathbf{x}, t)$ con el campo de velocidades.

De la conservación de la masa se tiene que para todo elemento inicial Ω :

$$\dot{m}(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \right) d\mathbf{x} = 0.$$

Es decir,

$$\int_{\Omega_t} (\rho_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}\rho)) d\mathbf{x} = 0,$$

y esto para todo $t \geq t_0$. En particular, para $t = t_0$:

$$\int_{\Omega} (\rho_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}\rho))|_{t=t_0} d\mathbf{x} = 0.$$

Como Ω y t_0 son arbitrarios en D y \mathbb{R} , concluimos que:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\mathbf{u}\rho) = 0, \quad \forall x \in D, t \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Esta es la primera de las ecuaciones implicadas el movimiento del fluido aunque refleja más bien el principio de conservación de la materia. Se denomina la *ecuación de continuidad*. Otra forma de escribirla es:

$$\frac{D\rho}{Dt} + (\operatorname{div} \mathbf{u})\rho = 0. \quad (1.7)$$

Corolario 1.8. *Si un fluido es incompresible, la densidad se conserva sobre las trayectorias fluidas, es decir:*

$$\rho(x(t), t) = \rho(x_0, t_0), \quad \forall t \geq t_0,$$

donde $x(t) = \varphi(t, x_0)$.

Un fluido se dice espacialmente homogéneo con respecto a la masa si $\rho(x, t) = \rho(t)$.

Corolario 1.9. *Si un fluido es incompresible e inicialmente homogéneo, entonces $\rho(x, t) = c$, para todo $t \geq t_0$ y $x \in D$, donde c es una constante.*

1.4. Variación del momento lineal

Para una partícula $\mathbf{x}(t)$ de masa m , la cantidad de movimiento o momento lineal se define como $m\dot{\mathbf{x}}(t) = m\mathbf{v}(t)$. La variación de la cantidad de movimiento es:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}(t)) = m\ddot{\mathbf{x}}(t) = m\mathbf{a}(t),$$

donde $\mathbf{a}(t)$ es la aceleración. La 2ª ley de Newton establece que

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{F},$$

donde \mathbf{F} es la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula $\mathbf{x}(t)$ en el instante t .

En medios continuos es costumbre seguirle la pista a un volumen fluido Ω_t en lugar de a una partícula individual. El momento lineal de Ω_t se define como:

$$\int_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x},$$

que viene a ser la suma de los momentos lineales de las partículas fluidas que forman Ω_t . Como se ve, el momento lineal es un vector. Combinando el Teorema del Transporte (Teorema 1.5) y la ecuación de continuidad (1.6) tenemos lo siguiente.

Teorema 1.10. *Sea $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ una función regular definida en $D \times \mathbb{R}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$ el campo de velocidades y la densidad, respectivamente, de un fluido en D . Se tiene entonces que:*

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{F} \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{F}}{Dt} \, d\mathbf{x}.$$

Una consecuencia del Teorema (1.10) es que la derivada del momento lineal vale:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x}.$$

1.5. Fuerzas sobre Ω_t . Fluidos ideales

Sobre un elemento fluido Ω_t actúan varias clases de fuerzas. Unas, clasificadas como fuerzas de *largo alcance* sobre Ω_t . Se definen a través de una densidad de fuerzas $\mathbf{b}(x, t)$ por unidad de masa en x en el instante t . Un ejemplo típico es el campo gravitatorio al nivel de la superficie terrestre:

$$\mathbf{b}(x, t) = -g \cdot \mathbf{e}_3,$$

donde $g = 9,8m \cdot s^{-2}$. La resultante \mathbf{F}_e de las fuerzas externas sobre el elemento fluido Ω_t es:

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega_t} \rho \cdot \mathbf{b} \, d\mathbf{x}.$$

La otra clase de fuerzas que perturban Ω_t son las que ejerce el fluido que rodea a Ω_t sobre Ω_t . Llamamos \mathbf{F}_i a la resultante de estas fuerzas que se denominan de *corto alcance*.

En su forma de medios continuos, la 2ª ley de Newton viene a establecer que:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \right) = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_i,$$

es decir:

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} \, d\mathbf{x} + \mathbf{F}_i.$$

Para las fuerzas de corto alcance introduciremos la hipótesis de *fluido ideal* (también *fluido no viscoso*) que se substancia en la existencia de una densidad escalar de fuerzas por unidad de superficie $p(x, t)$ tal que, el fluido circundante ejerce sobre un volumen Ω una fuerza puntual en $x_0 \in \partial\Omega$ dada por:

$$-p(x, t) \cdot \mathbf{n}(x) \, ds,$$

donde $\mathbf{n}(x)$ es la normal unitaria exterior a Ω en $x \in \partial\Omega$ y ds es el elemento de superficie*. Bajo esta hipótesis, la resultante \mathbf{F}_i de las fuerzas interiores ejercidas por el fluido sobre el volumen Ω_t es entonces:

$$\mathbf{F}_i = \int_{\partial\Omega} -p(x, t) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (1.8)$$

Para un dominio Ω de clase C^1 y una función $u \in C^1(\overline{\Omega})$, el teorema de la divergencia establece que:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \cdot n_i \, ds, \quad (1.9)$$

donde n_i es la componente i -ésima de \mathbf{n} , la normal unitaria exterior a Ω . Usando (1.8) escribimos (1.9) en la forma:

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Omega_t} -\nabla p \, d\mathbf{x}.$$

La segunda ley de Newton establece entonces que la variación del momento lineal vale:

* En algunos textos a esta noción de fluido ideal se añaden las condiciones de ser incompresible y tener densidad constante, ver [1].

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \right) = \int_{\Omega_t} (-\nabla p + \rho \mathbf{b}) \, d\mathbf{x},$$

es decir:

$$\int_{\Omega_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} (-\nabla p + \rho \mathbf{b}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.10)$$

Como Ω y t son arbitrarios, la igualdad vale para $t = t_0$ donde $\Omega_t = \Omega$. La arbitrariedad en la elección de Ω implica:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}. \quad (1.11)$$

Tanto (1.10) como (1.11) son las ecuaciones del *balance del momento lineal*. La ecuación (1.10) es la forma integral, mientras que (1.11) es la forma diferencial. Colectivamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b} \end{cases} \quad (1.12)$$

conforman las *ecuaciones de Euler* para un fluido ideal. Son cuatro ecuaciones y cinco incógnitas: ρ , p y las tres componentes de \mathbf{u} .

1.6. Fluidos incompresibles y fluidos isentrópicos

1.6.1. Fluidos incompresibles

En fluidos ideales la hipótesis incompresible (Definición 1.6) permite cerrar las ecuaciones de Euler para tener un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0; \quad \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}; \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Rememoramos ahora el teorema de las fuerzas vivas. Para una partícula $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$ sometida a un campo de fuerzas $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, la energía cinética E_K en el instante t es:

$$E_K(t) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2,$$

de donde:

$$\frac{dE_K}{dt} = m \ddot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t).$$

Si observamos que el trabajo W de \mathbf{F} a lo largo de la trayectoria entre los instantes t_0 y t es:

$$W(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(x(\tau), \tau) \dot{\mathbf{x}}(\tau) \, d\tau,$$

entonces:

$$\dot{W}(t) = \mathbf{F}(x(t), t)\dot{\mathbf{x}}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{E}_K = \dot{W}.$$

Este es el enunciado del teorema de las fuerzas vivas.

En un fluido, la energía cinética del elemento Ω_t es:

$$E_K = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}.$$

Su variación instantánea es:

$$\dot{E}_K = \int_{\Omega_t} \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} (|\mathbf{u}|^2) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} d\mathbf{x}.$$

Usando la ecuación para el momento lineal

$$\begin{aligned} \dot{E}_K &= \int_{\Omega_t} (-\nabla p \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_t} (-\operatorname{div} (p\mathbf{u}) + \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\partial\Omega_t} -p \cdot \mathbf{n} \mathbf{u} ds + \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde hemos usado el teorema de la divergencia y que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. En (1.13) \dot{E}_K se identifica con dos términos que tienen el sentido de la variación instantánea del trabajo realizado sobre Ω_t por \mathbf{F}_i y \mathbf{F}_e . Por tanto, cuando el fluido es incompresible tenemos una situación familiar al teorema de las fuerzas vivas para una partícula.

1.6.2. Fluidos isentrópicos

Un fluido ideal es isentrópico* si existe una función $w(x, t)$ (la entalpía) tal que

$$\nabla w = \frac{1}{\rho} \nabla p,$$

donde $\rho(x, t)$ es la densidad. Obsérvese que un fluido ideal donde la densidad es constante, es isentrópico. Por ejemplo, un fluido incompresible con densidad inicial constante. Por otra parte, el fluido es isentrópico si satisface una ecuación de estado del tipo:

$$p = \Phi(\rho). \quad (1.14)$$

(la presión es una función dada de la densidad). En este caso se puede tomar:

$$w = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\Phi'(z)}{z} dz, \quad (1.15)$$

* Terminología heredada de la termodinámica. Significa “misma entropía” o “entropía constante”.

en donde Φ se supone suficientemente regular. Para los gases la relación (1.14) suele tomar la forma:

$$p = A\rho^\gamma, \quad \gamma \geq 1,$$

donde $A > 0$ es una constante.

Cuando el fluido es isentrópico y se da una relación de estado como (1.14) las ecuaciones de Euler son:

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0; \quad \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla w + \mathbf{b},$$

donde al depender w de ρ eliminamos la presión gracias a (1.14) y (1.15).

1.7. Teorema de Bernouilli

Se dice que un fluido es *estacionario* o que está en régimen estacionario si su campo de velocidades \mathbf{u} no depende de t .

Teorema 1.11 (Teorema de Bernouilli). *Supongamos un fluido ideal y estacionario sometido a una densidad \mathbf{b} de fuerzas exteriores que deriva de un potencial:*

$$\mathbf{b}(x) = -\nabla V(x).$$

a) *Si el fluido es incompresible, con densidad constante ρ_0 entonces:*

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\rho_0} + V(x), \tag{1.16}$$

se conserva sobre las trayectorias fluidas.

b) *Si el fluido es isentrópico con entalpía $w(x)$ entonces:*

$$\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + w(x) + V(x),$$

se conserva sobre las trayectorias fluidas.

Nota. Si $\mathbf{u}(x, t)$ es incompresible y la densidad es inicialmente constante, $\rho(x, 0) = \rho_0$ entonces resulta que (Corolario 1.9) $\rho(x, t) = \rho_0$. Luego la hipótesis sobre ρ en a) equivale a que $\rho(x, t)$ sea inicialmente constante.

1.8. La presión en las ecuaciones: el caso incompresible

Explicamos a continuación cómo la presión p puede desacoplarse de la velocidad \mathbf{u} en el caso incompresible.

Teorema 1.12. *Sea $D \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado regular, $\mathbf{w} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ un campo dado. Entonces existen $\mathbf{u} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$, $\phi \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^N)$ únicos (p módulo una constante) tales que:*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla\phi \quad \text{en } D, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } D, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial D} = 0.$$

Demostración (Esbozo de la prueba). Tomando divergencias en la primera ecuación y usando la condición de contorno obtenemos el problema de Neumann:

$$\Delta\phi = \operatorname{div} \mathbf{w} \quad \text{en } D, \quad \nabla\phi \cdot \mathbf{n}|_{\partial D} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n},$$

que admite una única solución (omitimos los detalles) gracias a la condición de compatibilidad:

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{w} = \int_{\partial D} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}.$$

El Teorema 1.12 permite introducir la aplicación lineal

$$\begin{aligned} P: C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) &\longrightarrow X \\ \mathbf{w} &\longmapsto P\mathbf{w} = \mathbf{u} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \nabla\phi$, $X = \{\mathbf{w} : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}$. Por tanto $I - P: C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3) \rightarrow Y$, $Y = \{\nabla\phi : \phi \in C^1(\overline{\Omega})\}$, donde I es la aplicación identidad.

Consideremos entonces un fluido incompresible (con densidad constante) cumpliendo las ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \nabla V, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ entonces $\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0$, $\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{n}|_{\partial D} = 0$ y se tiene que $P\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t$. Aplicando P a las ecuaciones de Euler y notando que $P(\nabla\phi) = 0$ obtenemos la ecuación de evolución:

$$\mathbf{u}_t = -P\{(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\},$$

donde no aparece la presión. Aplicando $Q = I - P$ a las ecuaciones de Euler resulta:

$$Q\{(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \nabla V,$$

pues $Q\{\nabla\phi\} = \nabla\phi$. Calculando \mathbf{u} en la primera ecuación obtenemos la presión p de la segunda ya que $Q\{(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\} = \nabla\phi$ para alguna función ϕ .

Observación 1.13. Debe subrayarse que la discusión de la resolubilidad de la ecuación para \mathbf{u} es una de las cuestiones más delicadas de la teoría.

En el siguiente capítulo volvemos a tratar el papel de la presión en el plano.

1.9. Vorticidad

Definición 1.14. La vorticidad $\bar{\omega}$ de un fluido $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se define como:

$$\bar{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u}.$$

Se dice asimismo que \mathbf{u} es irrotacional en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ si $\bar{\omega} = 0$ en D .

Para fluidos planos $\mathbf{u} = (u, v, 0)$, $\bar{\omega} = (v_x - u_y)\mathbf{e}_3$ y se adopta el número $\omega(x, y, t) = v_x - u_y$ como vorticidad. Por tanto, para fluidos planos la vorticidad es un escalar.

A los efectos de interpretar $\bar{\omega}$ observamos que la matriz jacobiana $D\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de \mathbf{u} en (\mathbf{x}, t) se puede descomponer en la parte simétrica y antisimétrica:

$$D\mathbf{u} = \frac{1}{2}(D\mathbf{u} + D\mathbf{u}^t) + \frac{1}{2}(D\mathbf{u} - D\mathbf{u}^t) = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}A.$$

La acción de A sobre \mathbf{y} como aplicación lineal se puede escribir en la forma:

$$\frac{1}{2}Ay = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\bar{\omega} \times \mathbf{y}.$$

Sea (\mathbf{x}_0, t_0) un punto fijado, $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$. Para analizar el comportamiento de la línea fluida que pasa por dicho punto y valores próximos al mismo introducimos:

$$x(t) = y(t) - x_0.$$

que substituyendo en la ecuación nos lleva a :

$$y' = u_0 + \frac{1}{2}Sy + \frac{1}{2}Ay + o(|y|) \quad (\mathbf{x}, t) \sim (\mathbf{x}_0, t_0),$$

donde $Ay = \bar{\omega}(x_0, t_0) \times y$. Nos podemos hacer una idea del efecto de este término si analizamos por separado las soluciones de la ecuación:

$$z' = \bar{\omega}(x_0, t_0) \times z.$$

Éstas describen órbitas circulares que giran con velocidad angular $|\bar{\omega}|$ alrededor de la recta que pasa por $(0, 0, 0)$ y tiene dirección $\bar{\omega}(x_0, t_0)$. Para comprobarlo se toma una base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ donde $e_3 = \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|}$ y tal que $e_1 \times e_2 = e_3$, $e_3 \times e_1 = e_2$ y $e_2 \times e_3 = e_1$. Se escribe:

$$z = ae_1 + be_2 + ce_3,$$

y entonces las componentes a, b, c cumplen:

$$\dot{a} = -|\bar{\omega}|b \quad \dot{b} = |\bar{\omega}|a \quad \dot{c} = 0.$$

Esto prueba la afirmación.

Definición 1.15. Dada una curva cerrada \mathcal{C} , C^1 a trozos, parametrizada por $\mathbf{y}(\sigma)$, $0 \leq \sigma \leq L$, la circulación κ de $\mathbf{u}(x, t)$ alrededor de \mathcal{C} es:

$$\kappa = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{u}(y, t) \, d\mathbf{y} = \int_0^L \mathbf{u}(y(\sigma), t) y'(\sigma) \, d\sigma.$$

Nota. Es consecuencia del teorema de Stokes que la circulación κ de \mathbf{u} alrededor de cualquier curva \mathcal{C} se anula en toda región D donde la vorticidad sea idénticamente nula.

Teorema 1.16 (Teorema de Kelvin). Si $\mathbf{u}(x, t)$ es isentrópico (o incompresible con $\rho = \rho_0$), sin fuerzas exteriores o fuerzas exteriores con densidad conservativa, entonces:

$$\kappa_t = \int_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \, d\mathbf{y},$$

permanece constante en el tiempo, siendo $\mathcal{C}_t = \varphi_t(\mathcal{C})$.

La prueba se apoya en el siguiente lema.

Lema 1.17.

$$\frac{d}{dt}(\kappa_t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{C}_t} \mathbf{u} \, d\mathbf{y} \right) = \int_{\mathcal{C}_t} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{y}.$$

Definición 1.18. El flujo de un campo $\bar{\Phi}(x, t)$ a través de una superficie \mathcal{S} en la dirección de \mathbf{n} , donde \mathbf{n} es un campo normal a \mathcal{S} fijado, se define como:

$$\int_{\mathcal{S}} \bar{\Phi}(x, t) \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

donde ds es el elemento de área.

Corolario 1.19. Dada una superficie \mathcal{S} , representamos $\mathcal{S}_t = \varphi_t(\mathcal{S})$ su transformación por el flujo φ . Si el fluido satisface las hipótesis del Teorema 1.16 entonces:

$$\int_{\mathcal{S}_t} \bar{\omega}(x, t) \cdot \mathbf{n} \, ds = c,$$

con c una constante.

1.9.1. Superficies de vorticidad, curvas de vorticidad

Definición 1.20. Se dice que una superficie \mathcal{S} es de vorticidad si $\bar{\omega}(x, t) \cdot \mathbf{n} = 0$ para cada $x \in \mathcal{S}$. Una curva \mathcal{C} es de vorticidad (línea de vorticidad) si su vector tangente en cada punto x es paralelo a $\bar{\omega}(x, t)$.

Observación 1.21. Si para t fijo consideramos la ecuación:

$$\frac{dx}{d\sigma} = \bar{\omega}(x, t),$$

las superficies de vorticidad son aquellas que son invariantes frente al flujo de esta ecuación mientras las líneas de vorticidad son sus órbitas.

Teorema 1.22. Si $\mathbf{u}(x, t)$ es isentrópico (equivalentemente, incompresible y $\rho(x, t) = \rho_0$) las superficies de vorticidad se mantienen por el flujo.

Corolario 1.23. Si γ es una curva vorticial sin puntos singulares del rotacional y $\gamma_t = \varphi_t(\gamma)$ entonces γ_t es una curva vorticial.

Demostración. Una curva $y(\sigma)$ de vorticidad en $t = t_0$ verifica:

$$\dot{y}(\sigma) = \nu(\sigma)\bar{\omega}(y(\sigma), t_0), \quad \sigma \in I.$$

Reparametrizando:

$$\dot{y}(\tau) = \bar{\omega}(y(\tau), t_0), \quad \tau \in J. \tag{1.17}$$

Luego $y(\tau)$ parametriza una órbita γ del campo $\bar{\omega}(\cdot, t_0)$. Localmente $\gamma = \{y(\tau) : \tau \in J\}$ se escribe como:

$$\begin{cases} \phi_1(y) = c_1 \\ \phi_2(y) = c_2, \end{cases}$$

donde ϕ_1, ϕ_2 son integrales primeras de (1.17) que son superficies vorticiales. Si en un entorno de γ , $\gamma = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$, entonces $\gamma_t = (\mathcal{S}_1)_t \cap (\mathcal{S}_2)_t$ que son superficies vorticiales, luego γ_t será una curva vorticial.

Ahora probamos que el flujo $\varphi(x, t)$ del fluido transporta el vector densidad de vorticidad $\bar{\omega}^* = \frac{\bar{\omega}}{\rho}$.

Proposición 1.24. Para fluidos isentrópicos bajo campos de fuerzas exteriores conservativos (o incompresibles con $\rho = cte$)

$$\frac{D\bar{\omega}^*}{Dt} - (\bar{\omega}^* \cdot \nabla)\mathbf{u} = 0,$$

y

$$\bar{\omega}^*(x, t) = D_y\varphi(t, y)\bar{\omega}^*(t_0, y) \quad x = \varphi(t, y).$$

Observación 1.25. El término $(\bar{\omega}^* \cdot \nabla)\mathbf{u}$ se lee mucho mejor en la forma $D\mathbf{u}\bar{\omega}^*$, es decir la matriz Jacobiana de \mathbf{u} actuando sobre $\bar{\omega}^*$. Así, se tiene que $\mathbf{z}(t) = \bar{\omega}^*(\mathbf{x}(t), t)$ es solución de la ecuación variacional asociada a \mathbf{u} sobre la solución $\mathbf{x}(t) = \varphi(t, \mathbf{y})$:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = D\mathbf{u}(\varphi(t, \mathbf{y}), t)\mathbf{z}.$$

1.9.2. Fluidos planos

En fluidos planos:

$$\mathbf{u} = (u, v, 0),$$

el vector vorticidad es:

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_3.$$

Bajo las condiciones de la Proposición 1.24:

$$\frac{D\bar{\omega}}{Dt} = \frac{D\omega}{Dt} \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_3.$$

Luego, en fluidos ideales planos bajo la condición incompresible y densidad constante *la vorticidad permanece constante sobre las líneas fluidas*.

1.9.3. Tubos vorticiales

Fijamos una superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$, una curva cerrada $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ y suponemos que la vorticidad ω es transversal a \mathcal{S} (podemos asumir que \mathcal{C} es el borde de \mathcal{S} y así, que \mathcal{S} es una variedad o superficie con borde). Si fijamos t_0 e integramos

$$\frac{dy}{ds} = \bar{\omega}(y, t_0) \tag{1.18}$$

obtenemos un flujo $\psi(s, x) = \psi_s(x)$.

El tubo vorticial Σ generado por \mathcal{S} es la superficie (variedad) vorticial generada por las órbitas de (1.18) a través de \mathcal{C} :

$$\Sigma = \{\psi_s(x) : x \in \mathcal{C}, s \in I_x\},$$

donde $I_x \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que podría ser finito en algunos casos. Supondremos $I_x = \mathbb{R}$ por simplicidad.

Teorema 1.26. *Sea Σ un tubo vorticial fijado en un fluido isentrópico. Sean asimismo $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ dos curvas cerradas que lo rodean y tienen la misma orientación. Entonces:*

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \kappa,$$

donde κ es una constante que sólo depende del tubo.

Observación 1.27. La constante κ es la intensidad del tubo y se preserva con las líneas fluidas.

Nota. El teorema no reporta información en el plano. La vorticidad es $\bar{\omega} = \omega \cdot \mathbf{e}_3$ y el flujo ψ asociado a $\bar{\omega}$ deja las curvas planas γ y su circulación invariantes.

1.9.4. Vorticidad y fluidos ideales

Supongamos que $D \subset \mathbb{R}^2$ es un abierto simplemente conexo y acotado. Consideremos un fluido ideal e incompresible $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, con densidad constante, definido en D que satisface la condición de contorno (de deslizamiento) en ∂D :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial D, t \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Vamos a probar que las ecuaciones de Euler (1.12) para \mathbf{u} se pueden substituir por una sola ecuación para la vorticidad ω .

Nótese en primer lugar que la vorticidad ω cumple (Sección 1.9.2):

$$\omega_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = 0. \quad (1.20)$$

El objetivo es expresar \mathbf{u} en términos de ω .

De la condición de incompresibilidad resulta la existencia de una función $\psi(\mathbf{x}, t)$ tal que:

$$u = \psi_y(\mathbf{x}, t) \quad v = -\psi_x(\mathbf{x}, t).$$

Es la que llamaremos más tarde función de corriente del fluido (Sección 2.6).

Sean $\bar{g}(s) = (g_1(s), g_2(s))$ una parametrización del borde ∂D y $t \in \mathbb{R}$ un valor fijado. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\psi(\bar{g}(s), t)) &= \psi_x(\bar{g}(s), t)g'_1(s) + \psi_y(\bar{g}(s), t)g'_2(s) \\ &= g'_2(s)u(\bar{g}(s), t) + (-g'_1(s))v(\bar{g}(s), t) = \mu \mathbf{u}(\bar{g}(s), t) \cdot \mathbf{n}(\bar{g}(s)) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $\psi(\mathbf{x}, t) = c(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $x \in \partial D$. Reemplazando $\psi(\mathbf{x}, t)$ por $\psi(\mathbf{x}, t) - c(t)$ obtenemos una nueva función de corriente ψ que se anula en ∂D . Dicha función de corriente ψ resuelve el problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta \psi = \omega & \text{en } D \\ \psi = 0 & \text{en } \partial D. \end{cases}$$

Como tal solución es conocido que:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \iint_D G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y},$$

donde G es la función de Green del problema (v. [9]). La identidad se puede escribir en la forma:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}(\omega(\cdot, t))(\mathbf{x}),$$

o más brevemente $\psi = \mathcal{G}(\omega)$, El segundo miembro hace uso de todos los valores de $\omega(\cdot, t)$ en D y por eso se llama un operador “no local” de ω .

Usando la ecuación de conservación de la vorticidad (1.20) concluimos que la vorticidad resuelve el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \omega_t + (\mathbf{u}(\omega) \cdot \nabla) \omega = 0 \\ \omega|_{t=0} = \omega_0, \end{cases}$$

en donde:

$$\mathbf{u}(\omega) = (\partial_y \mathcal{G}(\omega), -\partial_x \mathcal{G}(\omega)).$$

Dicho problema substituye al correspondiente para las ecuaciones de Euler (1.12) y constituye un problema de tipo no local. La última relación materializa el paso inverso que da \mathbf{u} en términos de la vorticidad.

Observación 1.28. Se tiene que $\omega = 0$ es una solución trivial de la ecuación. En ese caso ψ cumple $-\Delta\psi = 0$, $\psi = 0$ en ∂D con lo que $\mathbf{u} = 0$ si D es un dominio acotado. No hay movimiento y la dinámica es trivial. Esto ocurre si D es simplemente conexo e inicialmente no hay vorticidad, e. d. $\omega_0 = 0$. Si D no es simplemente conexo esto no es cierto como veremos en el siguiente capítulo.

Observación 1.29. El grupo

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = u\omega_x + v\omega_y = \psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = J(\omega, \psi),$$

es el determinante Jacobiano de la transformación (ω, ψ) . Para las soluciones estacionarias $\omega(x, y)$ de la ecuación de la vorticidad (1.20) se cumple:

$$J(\omega, \psi) = 0.$$

Esto significa que para estados estacionarios del fluido, la vorticidad ω y la función de corriente ψ dependen funcionalmente una de la otra.

Fluidos en el campo complejo

2.1. El campo de velocidades complejo

Un fluido plano y estacionario viene determinado por una función vectorial de dos variables espaciales x, y o lo que es equivalente, por una función compleja

$$w = u + iv,$$

con $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, donde $(x, y) \in G \subset \mathbb{C}$ es un dominio del plano complejo cuyo complementario $F = G^c$ es impermeable, es decir, el fluido no circula por F . Las líneas fluidas son las soluciones de:

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{y} = v, \end{cases}$$

que pueden observarse como curvas integrales de un campo en \mathbb{R}^3 sin más que añadir la ecuación $z' = 0$.

2.2. Circulación y flujo

Supongamos que

$$\lambda = \lambda(s) = x(s) + iy(s) \quad 0 \leq s \leq L$$

parametriza una curva de Jordan C^1 a trozos \mathcal{C} y orientada positivamente, en donde s es la longitud de arco. Sus vectores unitarios tangencial y normal son, respectivamente:

$$\tau(s) = \frac{d\lambda}{ds}, \quad \nu(s) = -i \frac{d\lambda}{ds},$$

es decir,

$$\tau(s) = x'(s) + iy'(s), \quad \nu(s) = y'(s) - ix'(s),$$

De hecho $\nu(s)$ es la normal unitaria exterior al dominio encerrado por \mathcal{C} .

Observamos ahora que dados dos números complejos z_1, z_2

$$\Re(\bar{z}_1 z_2) = \langle z_1, z_2 \rangle \quad (z_1, 0) \times (z_2, 0) = \Im(\bar{z}_1 z_2) \mathbf{e}_3.$$

Así, las componentes tangencial y normal de la velocidad w son:

$$w_\tau = \langle w, \tau \rangle = \Re(\bar{w}\tau) \quad w_\nu = \langle w, \nu \rangle = \Re(\bar{w}\nu).$$

Considerando nuestro fluido como tridimensional con campo de velocidades $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ y lo propio con \mathcal{C} , de la Definición 1.15 se tiene que la circulación κ de \mathbf{u} alrededor de \mathcal{C} es:

$$\kappa = \int_0^L w_\tau ds = \int_0^L \langle w, \tau \rangle ds = \int_{\mathcal{C}} u dx + v dy.$$

Por otro lado y de acuerdo a la Definición 1.18 el flujo de un campo de velocidades (N -dimensional) a través de una superficie $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^N$ en la dirección de la normal unitaria $\bar{\nu}$ es:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{u}(\cdot, t) \cdot \bar{\nu} d\sigma,$$

magnitud que coincide con el caudal a través de \mathcal{S} en el instante t . Si $g(s)$ parametriza \mathcal{S} , el flujo es;

$$\int_U \mathbf{u}(g(s), t) \cdot (g_{s_1} \times \cdots \times g_{s_{N-1}}) ds_1 \dots ds_{N-1},$$

donde $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$ es el dominio de parámetros.

Para la superficie tubular $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ de ancho α dada por $\mathcal{S} = \mathcal{C} \times (0, \alpha)$, el flujo es:

$$\int_0^\alpha \int_0^L (u, v, 0)(\nu(s), 0) ds dt = \alpha \int_0^L w_\nu ds.$$

En efecto, obsérvese que en la superficie tubular podemos tomar parámetros (s, t) , parametrizarla en la forma $\mathbf{x} = g(s, t) := (x(s), y(s), t)$ y que entonces:

$$g_s = (\tau(s), 0) \quad g_t = (\bar{0}, 1) \quad g_s \times g_t = (\nu(s), 0).$$

Por eso al factor:

$$\int_0^L w_\nu ds = \int_0^L \langle w, \nu \rangle ds = \int_{\mathcal{C}} u dy - v dx = \int_{\mathcal{C}} -v dx + u dy$$

se le llama el flujo del campo plano w a través de \mathcal{C} .

A efectos de cálculo, puede ser de interés la siguiente propiedad. Allí $\bar{w} = u - iv$ denota el complejo conjugado de w (y no w observado como vector).

Proposición 2.1. Sean α y β la circulación y el flujo, respectivamente, de un campo $w = u + iv$ alrededor de una curva \mathcal{C} con parametrización arbitraria. Entonces se tiene:

$$\alpha + i\beta = \int_{\mathcal{C}} \bar{w} dz,$$

es decir:

$$\alpha = \Re \left(\int_{\mathcal{C}} \bar{w} dz \right) \quad \beta = \Im \left(\int_{\mathcal{C}} \bar{w} dz \right).$$

2.3. Fluidos irrotacionales, fluidos solenoidales

Sea G el dominio de un fluido plano $w \in C^1(G, \mathbb{C})$. Diremos que el fluido es irrotacional en G si:

$$\int_{\mathcal{C}} w_{\tau} = \int_{\mathcal{C}} u dx + v dy = 0,$$

para toda curva de Jordan $\mathcal{C} \subset G$ con interior $\text{Int}(\mathcal{C}) \subset G$.

Diremos que el fluido es solenoidal si:

$$\int_{\mathcal{C}} w_{\nu} = \int_{\mathcal{C}} -v dx + u dy = 0,$$

para toda curva de Jordan $\mathcal{C} \subset G$ con interior $\text{Int}(\mathcal{C}) \subset G$.

Usando la fórmula de Green tenemos:

$$\int_{\mathcal{C}} u dx + v dy = \iint_{\text{Int}(\mathcal{C})} (v_x - u_y) dx dy,$$

mientras que si $\mathbf{u} = (u, v, 0)$ se tiene:

$$\text{rot } \mathbf{u} = (v_x - u_y) \mathbf{e}_3.$$

Así, la definición de irrotacional en el caso plano es coherente con la Definición 1.14.

Por el mismo argumento:

$$\int_{\mathcal{C}} -v dx + u dy = \iint_{\text{Int}(\mathcal{C})} (u_x + v_y) dx dy,$$

Como \mathcal{C} es una curva de Jordan arbitraria, la condición solenoidal se lee:

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \mathbf{u} = (u, v, 0),$$

y se observa que la definición dada no es sino la versión plana de fluido incompresible (Definición 1.6).

Teorema 2.2. *Sea G un dominio de \mathbb{C} . La condición necesaria y suficiente para que w sea irrotacional en G es:*

$$u_y(x, y) = v_x(x, y) \quad \forall (x, y) \in G, \quad (2.1)$$

mientras que la condición necesaria y suficiente para que w sea solenoidal en G se lee:

$$u_x(x, y) = -v_y(x, y) \quad \forall (x, y) \in G. \quad (2.2)$$

Corolario 2.3. *Un fluido G es irrotacional y solenoidal (incompresible) en G si y sólo si u y $-v$ cumplen las condiciones de Cauchy–Riemann en G . Equivalentemente, si ambas son armónicas conjugadas en G o bien si $u - iv$ define una función holomorfa en G .*

2.4. La presión

Un fluido estacionario con densidad constante ρ_0 y en las condiciones de la Sección 2.3, e. d. incompresible e irrotacional, determina la presión p en términos del campo de velocidades w (véase la Sección 1.8).

En efecto, de las ecuaciones de Euler (1.12) resulta:

$$(w\nabla)w = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \nabla V,$$

en donde se ha supuesto que el fluido está sometido al campo de fuerzas $-\rho_0\nabla V$. Llamando:

$$(M, N) = (w\nabla)w,$$

y en virtud de (2.1) y (2.2) dicho campo cumple las condiciones de integrabilidad:

$$M_y = N_x.$$

Por tanto $\phi_x = M$, $\phi_y = N$. Ahora:

$$\phi_x = uu_x + vv_y = uu_x + vv_x \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \psi(y).$$

Usando la relación $\phi_y = N$ se prueba que ψ es constante y por lo tanto:

$$p = -\frac{\rho_0}{2}(u^2 + v^2) - \rho_0 V,$$

donde hemos omitido la constante. Esta relación –que concuerda con el Teorema de Bernouilli– expresa la presión en términos del campo de velocidades. Es por ello que p no estará presente en gran parte de la discusión que sigue.

2.5. Puntos de vorticidad, sumideros y fuentes

Sean $w = u + iv \in C^1(G)$ un fluido en un dominio G y z_0 una singularidad aislada de w , es decir punto $z_0 \notin G$ pero tal que $B(z_0, R) \setminus \{z_0\} \subset G$ para cierto $R > 0$.

Si el fluido es irrotacional en G entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} w_{\tau} ds = \kappa,$$

donde κ no depende de la curva \mathcal{C} con $z_0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$. Se dice en este caso que z_0 es un vórtice (o filamento de vorticidad) de intensidad κ .

Análogamente, si w es solenoidal el flujo

$$\int_{\mathcal{C}} w_{\nu} ds = m,$$

no depende de \mathcal{C} con $z_0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$. Se dice que z_0 es una fuente si $m > 0$, un sumidero si $m < 0$. En ambos casos la intensidad es $|m|$.

Tanto los vórtices como las fuentes o sumideros z_0 han de ser “singularidades” del campo de velocidades. Si por ejemplo fuese $w = O(1)$ cuando $z \rightarrow z_0$ entonces w tendría una singularidad evitable en z_0 . Esto implicaría en ambos casos que $\kappa = 0$ o $m = 0$, pues se puede hacer que la curva \mathcal{C} tienda a z_0 .

Ejemplo 2.4. Si $(u, v) = \frac{c}{2\pi}(\theta_x, \theta_y)$, $\theta = \arg z$ entonces tenemos un vórtice de intensidad c en $z = 0$. Si $(u, v) = \frac{c}{2\pi}\nabla \ln r$, entonces $z = 0$ es una fuente o sumidero, dependiendo del signo de c , de intensidad $|c|$.

2.6. Potencial complejo, potencial de velocidades y función de corriente

Teorema 2.5. *Sea $w = u + iv$ un fluido C^1 definido en un dominio $G \subset \mathbb{C}$. Supongamos que w es irrotacional y solenoidal en G y que $D \subset G$ es un dominio simplemente conexo. Entonces existe una función f holomorfa en D , que es única módulo una constante, tal que:*

$$f'(z) = u - iv = \bar{w}. \tag{2.3}$$

Llamando $f(z) = \varphi + i\psi$ entonces:

$$(u, v) = \nabla\varphi \quad (-v, u) = \nabla\psi. \tag{2.4}$$

Recíprocamente, si $f(z)$ es holomorfa en G , entonces $w = \overline{f'(z)}$ define un fluido irrotacional y solenoidal en G .

Demostración. Si fijamos $z_0 \in D$ y $\Gamma(z_0, z) \subset D$ una poligonal de z_0 a $z \in D$ de lados paralelos a los ejes, la función:

$$f(z) = \int_{\Gamma(z_0, z)} (u - iv) dz, \quad (2.5)$$

cumple las propiedades enunciadas.

Observación 2.6. La función f en (2.5) está bien definida porque D es simplemente conexo. Por otro lado en los casos del Ejemplo 2.4 se tiene que:

$$f(z) = \frac{c}{2\pi i} \ln z \quad \& \quad f(z) = \frac{c}{2\pi} \ln z,$$

respectivamente.

Definición 2.7. Toda función holomorfa $f = \varphi + i\psi$ cumpliendo (2.3) se denomina un potencial de velocidades complejo de w en D . Las funciones reales φ , ψ se denominan el potencial de velocidades (real) y la función de corriente del fluido en el dominio D .

Observación 2.8. Si w es un fluido como en el Teorema 2.5, $g = \bar{w}$ es holomorfa en G . Sin embargo, si G no es simplemente conexo, g no tiene por qué admitir una primitiva global f en G , como muestra el ejemplo $g = \frac{1}{z}$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En este caso f , tal como está definida en (2.5) es una aplicación multivaluada en G .

Observación 2.9. Las singularidades aisladas (vórtices, fuentes o sumideros) de un fluido irrotacional y solenoidal w están asociadas a singularidades aisladas o a puntos de ramificación del potencial complejo f .

En virtud de (2.4) las líneas fluidas son las soluciones de:

$$\begin{cases} x' = \varphi_x \\ y' = \varphi_y \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x' = -\psi_y \\ y' = \psi_x \end{cases} \quad \text{ó} \quad z' = \overline{f'(z)}. \quad (2.6)$$

El primero es un sistema gradiente, el segundo un sistema Hamiltoniano ([8]). En particular, las órbitas descritas por las líneas fluidas satisfacen:

$$\psi(x, y) = c,$$

con c una constante, razón por la que ψ se llama la función de corriente.

Una reformulación de la Proposición 2.1 es como sigue.

Proposición 2.10. Sea f el potencial complejo de un fluido $w = u + iv$. Entonces su circulación y flujo α y β , respectivamente, a través de una curva \mathcal{C} son:

$$\alpha + i\beta = \int_{\mathcal{C}} f'(z) dz,$$

es decir $\alpha = \Re \left(\int_{\mathcal{C}} f'(z) dz \right)$, $\beta = \Im \left(\int_{\mathcal{C}} f'(z) dz \right)$.

Objetos deslizantes en el fluido

Trataremos con fluidos w irrotacionales y solenoidales no viscosos. Los objetos deslizantes del fluido tienen la forma $F = G^c$ donde G es el dominio de w . Supondremos que w se extiende hasta ∂F . Admitiremos en ese caso que ∂F está formada por órbitas de líneas fluidas. En términos de la función de corriente esto equivale a que ψ es constante sobre cada componente de ∂F . El significado de esta hipótesis es que el fluido resbala sobre ∂F , es decir, el objeto no ejerce fuerzas de resistencia (“drag forces”) sobre el fluido.

Si una componente de ∂F es compacta cabe la posibilidad de que exista más de una órbita fluida en dicha componente. En ese caso también existirán puntos de equilibrio del campo w en ∂F .

Definición 2.11. *Un punto de remanso (“stagnation point”) $z^* \in G$ del fluido w es aquél donde $w = 0$.*

Si el fluido w es irrotacional y solenoidal y z^* es un punto de remanso tal que $f''(z^*) \neq 0$, donde f es un potencial complejo definido en $D(z^*, R)$, se dice que z^* es no degenerado. Esta definición es coherente pues f siempre está definido en un tal disco (módulo una constante). Para la noción de punto de silla de la propiedad siguiente nos remitimos a [8].

Proposición 2.12. *Los puntos de remanso no degenerados de un fluido w irrotacional y solenoidal son siempre puntos de silla.*

Demostración. Basta con observar que a la vista de (2.4) se tiene que:

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = -|\nabla u|^2 < 0 \quad z = z^*.$$

Supongamos que z^* es no degenerado. Vamos a interpretar el comportamiento de las líneas fluidas cerca de z^* . Rotamos coordenadas introduciendo $\zeta = e^{i\phi}z$ y (2.6) toma la forma:

$$\zeta' = \overline{e^{-i\phi} f'(e^{-i\phi}\zeta)} \quad \Rightarrow \quad \zeta' = \overline{\tilde{f}'(\zeta)},$$

$$\tilde{f}(\zeta) = f(e^{-i\phi}\zeta) = f(z^*) + \frac{\lambda}{2}(\zeta - \zeta^*)^2 + o(|\zeta - \zeta^*|^2),$$

cuando $\zeta \rightarrow \zeta^*$, $\zeta^* = e^{i\phi}z^*$, donde $\lambda = e^{-2\phi i} f''(z^*)$ se puede suponer positivo con tal de elegir ϕ adecuadamente. Llamando $z_1 = \zeta - \zeta^*$ y despreciando el término $o(|z_1|)$ el comportamiento de las líneas fluidas cerca de z^* viene dado aproximadamente por el comportamiento de las órbitas de:

$$z_1' = \lambda \bar{z}_1, \tag{2.7}$$

cerca de $z_1 = 0$ (recuérdese que $\lambda \in \mathbb{R}$). La ecuación simplificada (2.7) tiene potencial complejo $\frac{\lambda}{2} z_1^2$ ($z_1 = x + iy$) cuya función de corriente es:

$$\psi(x, y) = \lambda xy.$$

Las líneas de nivel (hipérbolas) describen el típico comportamiento de las órbitas en las proximidades de un punto de silla ([8]).

2.7. Fluido a través de un cilindro circular

Estudiamos ahora el siguiente problema. Dado un objeto compacto $F \subset \mathbb{C}$ se busca un fluido irrotacional y solenoidal w en $G = F^c$ (no se descarta que w se extienda de forma regular hasta ∂F y más allá) que cumpla las siguientes propiedades: i) $w(z) \rightarrow W = U + iV$ cuando $z \rightarrow \infty$, ii) w resbala sobre ∂F , es decir ∂F está formado por órbitas fluidas.

En términos de funciones holomorfas se trata de hallar $g \in H(\overline{G})$ tal que:

- i) $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \overline{W}$.
- ii) El campo $g(z)$ es tangente a ∂F incluyendo la posibilidad de que existan ceros de g en ∂F .

Para una tal g diremos que $w = \bar{g}$ es un *flujo* (o un *fluido*) a través del cilindro F .

En aerodinámica F se denomina un “aerofoil” o “airfoil” (en castellano “perfil alar”) y representa la sección del ala que es el principal elemento sustentador de una aeronave. Interpretando el fluido en \mathbb{R}^3 , F da lugar a un cilindro de sección F . En lo que resta de capítulo nos ocupamos únicamente de cilindros circulares donde $F = \overline{D(0, R)}$. Dejamos para el Capítulo 3 el análisis del caso general. Procederemos ahora presentando un ejemplo y analizaremos después el caso general de flujo a través del cilindro circular.

2.7.1. Primer ejemplo

Fijamos $W = U + iV = |W|e^{i\alpha}$ e introducimos la función de Jukowski (véase la Sección 3.2):

$$g(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

La circunferencia $|z| = 1$ se transforma mediante g en $[-1, 1]$ recorrido dos veces. Su parte imaginaria es cero sobre $|z| = 1$. Así la parte imaginaria de

$$f(z) := 2|W|Rg \left(\frac{e^{-i\alpha} z}{R} \right) = \overline{W}z + \frac{R^2 W}{z} = (U - iV)z + R^2 \frac{(U + iV)}{z},$$

es nula en $|z| = R$. Además f cumple:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = \overline{W},$$

y el fluido buscado es:

$$w = \overline{f'(z)} = W - R^2 \frac{\overline{W}}{z^2}.$$

Los puntos de remanso (donde $f'(z) = 0$) son:

$$z = \pm R e^{i\alpha}.$$

Por otro lado:

$$f(z) = Ux + Vy + i(-Vx + Uy) + \frac{R^2}{\rho^2} [Ux + Vy + i(Vx - Uy)] = \varphi + i\psi,$$

$$\varphi(x, y) = (Ux + Vy) \left(1 + \frac{R^2}{\rho^2} \right)$$

$$\psi(x, y) = (-Vx + Uy) \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right).$$

Como $U + iV = |W|e^{i\alpha}$ la curva de nivel \mathcal{C}_λ , $\psi(x, y) = \lambda$, para el caso $\alpha = 0$ es:

$$Uy \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) = \lambda.$$

Es simétrica con respecto al eje y , mientras $(x, y) \in \mathcal{C}_\lambda$ sí y sólo sí $(x, -y) \in \mathcal{C}_{-\lambda}$. Por eso nos limitamos al rango $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ en coordenadas polares:

$$\rho \left(1 - \frac{R^2}{\rho^2} \right) = \frac{\lambda}{U} \frac{1}{\text{sen } \theta}.$$

El primer miembro ($=: G(\rho)$) es creciente en $\rho > 0$, mientras $G(\rho) \sim \rho$ en el infinito. Entonces

$$\rho = G^{-1} \left(\frac{\lambda}{U} \frac{1}{\text{sen } \theta} \right) =: H(\theta),$$

es decreciente en θ con $H(\theta) \sim \frac{\lambda}{U} \frac{1}{\text{sen } \theta}$ cuando $\theta \rightarrow 0$. Así:

$$(x, y) = H(\theta)e^{i\theta} \rightarrow \infty + i0 \quad \& \quad (x, y) = H(\theta)e^{i\theta} \rightarrow iG^{-1} \left(\frac{\lambda}{U} \right),$$

cuando $\theta \rightarrow 0$ y $\theta \rightarrow \pi/2$ respectivamente. Esto describe con detalle la geometría de las líneas fluidas, cuyas órbitas son las curvas \mathcal{C}_λ , en el caso $\alpha = 0$ (Figura 2.1).

Nótese que la línea de nivel cero contiene más de una órbita (entre ellas los puntos de remanso y la curva $|z| = R$).

Para el caso general $\alpha \neq 0$ se observa que el potencial $f(z) = \varphi(z) + i\psi(z) = f_0(e^{-i\alpha}z)$, donde $f_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ es el correspondiente a $\alpha = 0$. Como $\psi(z) = \psi_0(e^{-i\alpha}z)$ se tiene:

$$z \in \{\psi = \lambda\} \quad \Leftrightarrow \quad z \in e^{i\alpha}\{\psi_0 = \lambda\},$$

y las líneas fluidas del caso general se deducen rotando un ángulo α las del caso $\alpha = 0$.

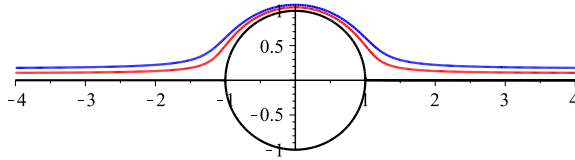


Figura 2.1. Líneas fluidas entorno al cilindro

2.7.2. Segundo ejemplo

Admitimos ahora que existe $g \in H(\overline{G})$, $G = \overline{D}^c$ donde $D = D(0, R)$, tal que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \overline{W} = U - iV$ y $g(z)$ es tangente a ∂D . Basados en este supuesto vamos a encontrar un segundo ejemplo de flujo a través del cilindro $F = \overline{D}$.

De las hipótesis de holomorfía en el infinito que deriva de que $g(z) \rightarrow \overline{W}$, cuando $z \rightarrow \infty$, deducimos que

$$g(z) = \overline{W} + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots, \tag{2.8}$$

donde la serie converge absoluta y uniformemente en principio para $|z| \geq \rho > 0$ y después, por prolongación analítica, en $|z| \geq R$.

Tomaremos $\ln z$ la rama principal del logaritmo con dominio $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. De (2.8) se deduce que una primitiva $f(z)$ ha de cumplir (módulo una constante):

$$f(z) = \overline{W}z + a_1 \ln z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-a_n}{(n-1)} \frac{1}{z^{n-1}} = \overline{W}z + a_1 \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{nz^n}.$$

La hipótesis de que w sea tangente a \mathcal{C} la expresamos de la forma:

$$\psi = \Im f = c \quad \partial D, \tag{2.9}$$

con c una constante real. Esta última condición nos va a permitir no sólo encontrar un candidato, sino caracterizar el potencial de velocidades para todos los flujos a través del cilindro circular.

Usando coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, coeficientes $a_n = A_n + iB_n$ y que la serie converge absoluta y uniformemente hasta $|z| = R$, tenemos:

$$\psi(r, \theta) = r(-V \cos \theta + U \sin \theta) + (A_1 \theta + B_1 \ln r) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{nr^n} \cos n\theta - \frac{A_{n+1}}{nr^n} \sin n\theta.$$

Para que $\psi(R, \theta) = c$, c constante basta con tomar $a_n = 0$ para $n \geq 3$, $A_1 = 0$ (de lo contrario, $\psi(R, \theta)$ no es 2π -periódica en θ) y $a_2 = -R^2(U + iV) = -R^2W$.

Así, un candidato a potencial de velocidades en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ es:

$$f(z) = \overline{W}z + iB_1 \ln z + \frac{R^2W}{z}.$$

Tenemos por tanto una familia uniparamétrica de potenciales de velocidades y sus correspondientes campos

$$w = \overline{f'(z)} = W + i\frac{B_1}{z} - R^2\frac{\overline{W}}{z^2}. \tag{2.10}$$

Si notamos que

$$\int_{\mathcal{C}} f'(z) dz = -2\pi B_1,$$

resulta que $\overline{f'(z)}$ tiene circulación

$$\kappa = \Re\left(\int_{\mathcal{C}} f'\right) = -2\pi B_1.$$

El campo se puede entonces parametrizar por su circulación κ a lo largo de cualquier curva de Jordan C^1 a trozos γ cumpliendo $\partial D \subset \text{Int}(\gamma)$, en la forma siguiente:

$$f(z) = \overline{W}z + \frac{\kappa}{2\pi i} \ln z + R^2\frac{W}{z}, \tag{2.11}$$

o en términos de su derivada:

$$g(z) = \overline{W} + \frac{\kappa}{2\pi iz} - R^2\frac{W}{z^2}. \tag{2.12}$$

2.7.3. Caracterización del flujo través del cilindro circular

Teorema 2.13. *El único flujo a través del cilindro \bar{D} con circulación κ alrededor de ∂D viene dado, módulo una constante, por el potencial complejo:*

$$f(z) = \bar{W}z + \frac{\kappa}{2\pi i} \ln z + R^2 \frac{W}{z}. \quad (2.13)$$

Demostración. Sea f_1 el potencial de velocidades en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ de un flujo a través de \bar{D} . Entonces, por analiticidad en el infinito:

$$f'(z) - f_1'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z^k},$$

donde la serie converge absoluta y uniformemente en $|z| \geq R$. En particular, la función

$$h(z) = - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)z^{k-1}}$$

es holomorfa en $\{|z| \geq R\} \cup \{\infty\}$, de hecho con valor cero en el infinito y por tanto acotada.

Por otro lado, como f_1' tiene circulación κ alrededor de ∂D resulta:

$$\Re \left(\int_{\partial D} f' - f_1' \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Im(c_1) = 0 \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Escribimos ahora:

$$f - f_1 = c_0 + c_1 \ln z + h(z) = \varphi + i\psi.$$

En coordenadas polares:

$$\psi(r, \theta) = \Im(f - f_1) = \Im(c_0) + c_1 \theta + \Im(h(z)). \quad (2.14)$$

Como el campo $\overline{f_1'(z)}$ también es tangente a ∂D la función $\psi(R, \theta)$ ha de ser constante y en particular 2π -periódica en θ . Luego $c_1 = 0$.

Por otro lado ψ es armónica en $|z| > R$, constante en $|z| = R$ y acotada en $|z| \geq R$. Por el principio del máximo para el operador de Laplace en su versión de dominios no acotados (ver [6]) resulta que ψ es constante en $|z| \geq R$.

Como $\psi = \Im(f - f_1)$, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann llegamos a que $f - f_1$ es constante en $|z| \geq R$.

Esto prueba la afirmación.

2.7.4. Estudio de las líneas fluidas

Vamos a estudiar la estructura general de las líneas fluidas a través del cilindro circular. Es decir las órbitas del campo plano $w = \overline{f'(z)}$ donde:

$$f'(z) = \overline{W} + \frac{\kappa}{2\pi iz} - R^2 \frac{W}{z^2}.$$

Como observamos en la Sección 2.7.1 basta con estudiar el caso en que $\alpha = 0$ en $W = |W|e^{i\alpha}$; las órbitas del caso $\alpha \neq 0$ se deducen entonces rotando α radianes las del caso $\alpha = 0$.

Por su interés en las aplicaciones nos ocupamos del caso de circulación negativa $\kappa \leq 0$ (v. Capítulo 3). Nótese que el caso $\kappa = 0$ ya fue considerado en la Sección 2.7.1.

Puntos de remanso

Comenzamos con los los puntos de remanso del fluido. Escribiendo $U = |W| > 0$ el potencial complejo es:

$$f(z) = \frac{\kappa}{2\pi i} \ln z + Uz + \frac{UR^2}{z} = \varphi + i\psi,$$

$$\varphi = \frac{\kappa}{2\pi} \arg z + Ux \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \quad \psi = -\frac{\kappa}{2\pi} \ln r + Uy \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right),$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Los puntos de remanso satisfacen:

$$f'(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z^2 + \frac{\kappa}{2\pi U i} z - R^2 = 0.$$

Las soluciones son:

$$z = \frac{|\kappa|}{4\pi U} \left\{ -i \pm \sqrt{\left(\frac{4\pi RU}{\kappa}\right)^2 - 1} \right\}.$$

Por tanto:

1. Si $|\kappa| < 4\pi UR$ hay dos puntos de remanso en $|z| = R$ que son simétricos con respecto al eje imaginario.
2. Si $|\kappa| = 4\pi UR$ lo dos puntos de remanso colapsan en $z = -Ri$.
3. Si $|\kappa| > 4\pi UR$ hay dos puntos de remanso

$$z_1 = -\frac{|\kappa|}{4\pi U} \left\{ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi RU}{\kappa}\right)^2} \right\} i,$$

exterior a $|z| = R$ y $z_2 = -R^2/z_1$ que es interior a $|z| = R$.

Como en los casos 1) y 3) los puntos z_i son no degenerados, tales puntos son de tipo silla (Proposición 2.12).

Para discutir la forma de las órbitas fluidas observamos que la ecuación de las líneas fluidas:

$$\begin{cases} x' = \psi_y \\ y' = -\psi_x \end{cases} \quad (2.15)$$

puede escribirse en coordenadas polares (r, θ) para dar:

$$\begin{cases} r' = \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ r\theta' = \frac{\kappa}{2\pi r} - U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right). \end{cases}$$

Se deduce de aquí que $|z| = R$ es invariante. La dinámica sobre esta curva la describe la ecuación:

$$R\theta' = \frac{\kappa}{2\pi R} - 2U \sin \theta.$$

En el rango 1) tiene dos equilibrios $\pi < \theta_1 < \frac{3\pi}{2} < \theta_2 < 2\pi$ correspondientes a los puntos de remanso. La circunferencia $|z| = R$ contiene dos órbitas heteroclínicas que los conectan. La superior girando en sentido horario, la inferior en sentido positivo. En el caso 2) la órbita superior da lugar a una homoclínica que conecta el único punto de remanso consigo mismo en sentido negativo. En el rango 3) la circunferencia constituye una órbita periódica girando en sentido negativo.

Órbitas cerradas

En el rango 3) el dato inicial $(x_0, y_0) = (0, -R)$ da lugar a una órbita cerrada de (2.15); por dependencia continua lo mismo sucede con todos los datos iniciales $(x_0, y_0) = (0, y_0)$ donde $-R - \varepsilon < y_0 < -R$. El ínfimo de estos valores y_0 es el punto de remanso z_2 exterior a $|z| = R$. Esto prueba que en ese rango tenemos una familia de órbitas cerradas cuyo límite está contenido en la línea de nivel por z_2 . Dicha curva constituye una órbita homoclínica que conecta asintóticamente z_2 consigo mismo. Se puede dar una prueba alternativa de estas afirmaciones, sin apelar a razonamientos sobre ecuaciones diferenciales, estudiando con detalle las curvas de nivel de la función de corriente (véase la sección sobre órbitas no acotadas). Las Figuras 2.2 y 2.3 recogen los casos 1), 2) y 3) respectivamente*. Se han tomado $R = U = 1$, $\kappa < 0$ y $m = -\kappa/2\pi$ como parámetro. Se han trazado los casos $m = 1,8$, $m = 2$ y $m = 2,4$ que se corresponden con los casos señalados.

* Agradecemos al Prof. M. Jiménez Paiz la confección de las Figuras 2.2 y 2.3.

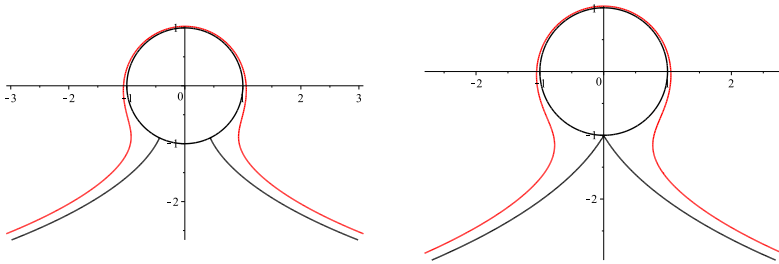


Figura 2.2. Líneas fluidas en los casos 1) y 2).

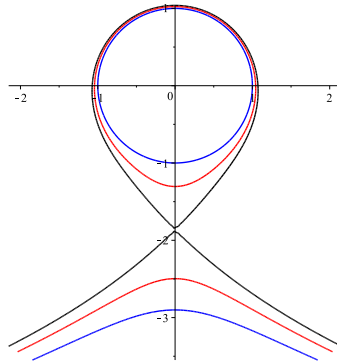


Figura 2.3. Líneas fluidas en el caso 3).

2.7.5. Órbitas no acotadas

Lás órbitas son las componentes conexas de $\mathcal{C}_\lambda := \{\psi_0(x, y) = \lambda\}$ donde:

$$\psi_0 = -\frac{\kappa}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + Uy\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

Nos ocupamos sólomente de la región $r > R$.

En los casos 1) y 2) se observa que $\psi_0(0, y) > 0$ si $y > R$, $\psi_0(0, y) < 0$ si $y < -R$, luego para $\lambda > 0$ ninguna componente de \mathcal{C}_λ con $\lambda > 0$ (respectivamente, $\lambda < 0$) corta el semieje $y < 0$ ($y > 0$).

En el caso 3), $\psi_0(0, y) > 0$ si $y > R$ mientras existe $y(\kappa) < z_2 < -R$ tal que $\psi_0(0, y) > 0$ si $y(\kappa) < y < -R$ mientras $\psi_0(0, y) < 0$ si $y < y(\kappa)$.

De hecho $\psi_0(0, y)$ tiene un máximo en $y = z_2$. Las órbitas cerradas discutidas anteriormente son componentes acotadas de $\psi_0(x, y) = \psi_0(0, y_0)$ con $z_2 < y_0 < -R$.

Probamos ahora que todo conjunto de nivel $\{\psi_0(x, y) = \lambda\}$ contiene una rama no acotada. En efecto tales puntos cumplen:

$$y = \frac{r^2}{r^2 - R^2} \left(\lambda - \frac{|\kappa|}{2\pi U} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right) \Leftrightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{r}{r^2 - R^2} \left(\lambda - \frac{|\kappa|}{2\pi U} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right).$$

La función $G(r)$ del segundo miembro de la última igualdad cumple: $G(r) \rightarrow \operatorname{signo}(\lambda) \cdot \infty$ cuando $r \rightarrow R+$ y $\lambda \neq 0$. Si $\lambda = 0$:

$$\lim_{r \rightarrow R+} G(r) = -\frac{|\kappa|}{4\pi R U}.$$

Por otro lado $G(r) < 0$ para $r > r_1 > R$ mientras $G(r) \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$. Parametrizando la curva de nivel en polares y tomando r como parámetro se tiene:

- Si $\lambda < 0$ la curva \mathcal{C}_λ satisface $\mathcal{C}_\lambda \subset \{y < 0\}$.
- Si $\lambda > 0$ existe $r_\lambda > R$ tal que $\mathcal{C}_\lambda \subset \{y < 0\}$ para $r > r_\lambda$.
- Si $\lambda = 0$, la línea de nivel $\psi_0 = 0$ es no acotada como en los casos anteriores con una componente no acotada separada de $r = R$ en el caso 3).

Para el comportamiento asintótico de las ramas no acotadas usamos la parametrización en polares:

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} \quad y = rG(r),$$

y se tiene que:

$$y = \lambda - \frac{|\kappa|}{2\pi} \ln \left(\frac{r}{R} \right) + O \left(\frac{\ln r}{r^2} \right),$$

mientras:

$$\ln x = \ln r + \ln \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y^2}{r^2} \right) = \ln r + O \left(\frac{\ln r}{r} \right)^2.$$

Como $x \sim r$ cuando $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{\ln r}{r} = O \left(\frac{\ln x}{x} \right) \quad x \rightarrow \infty,$$

y se tiene que:

$$y = \lambda - \frac{|\kappa|}{2\pi} \ln \left(\frac{x}{R} \right) + O \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \quad x \rightarrow \infty.$$

Cilindros con perfil de Jukowski

3.1. El cilindro de sección general

Sea G_0 un dominio simplemente conexo y acotado tal que $\mathcal{C}_0 = \partial G_0$ es una curva de Jordan, que para nuestros cálculos será C^1 a trozos. Un tal G_0 se denomina un dominio de Jordan. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in G_0$.

El teorema de la aplicación de Riemann garantiza la existencia de una función holomorfa y biyectiva $\tilde{g} : G_0 \rightarrow D(0, 1)$ que es la llamada aplicación de Riemann ([7]). Empleando un automorfismo de $D(0, 1)$ ([7]) podemos conseguir que $\tilde{g}(0) = 0$. Como $\tilde{g}' \neq 0$ en G_0 se tiene en particular que $\tilde{g}'(0) \neq 0$. Cambiando \tilde{g} por $e^{i\phi}\tilde{g}$ formamos otra función que cumple las mismas condiciones pero con $\tilde{g}'(0) > 0$. Basta con seleccionar ϕ adecuadamente, para garantizar $e^{i\phi}\tilde{g}'(0) > 0$.

En el siguiente teorema se establecen las condiciones de existencia y unicidad de una transformación conforme (inyectiva y holomorfa) de G_0 sobre $D(0, 1)$. La condición de unicidad se sigue de la positividad de la derivada en $z = 0$ empleando el lema de Schwarz ([7], [5]).

Teorema 3.1. *Existe una única $\tilde{g} \in H(G_0)$ inyectiva con $\tilde{g}(G_0) = D(0, 1)$ tal que $\tilde{g}(0) = 0$ y $\tilde{g}'(0) > 0$.*

A los efectos de tratar en lo que sigue con el punto del infinito introducimos la transformación:

$$J(z) = \frac{1}{z}.$$

Conviene recordar las siguientes definiciones.

Definición 3.2. *Una función g definida y holomorfa en $|z| > R$, es holomorfa en $z = \infty$ si $g \circ J$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, es decir, se extiende a una función holomorfa en $D(0, \frac{1}{R})$. Una función g definida y holomorfa en $|z| > R$ tiene un polo de orden m en $z = \infty$ si $g \circ J$ tiene un correspondiente polo en $z = 0$.*

Observación 3.3. Supongamos que g tiene un polo de orden m en el infinito. Entonces:

$$g \circ J(\zeta) = \frac{a_m}{\zeta^m} + \cdots + \frac{a_1}{\zeta} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^n,$$

luego:

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n},$$

en donde la serie converge para $|z| > R$. De hecho ella y todas sus derivadas tienen límite cero en el infinito. Por tanto, para funciones holomorfas cumpliendo $\lim_{z \rightarrow \infty} g = \infty$, es decir con un polo en el infinito, la condición $\lim_{z \rightarrow \infty} g' = a_1 \neq \infty$ es equivalente a que g tenga un polo simple ($m = 1$) en el infinito.

Conjugando la \tilde{g} obtenida en el Teorema 3.1 con J obtenemos:

$$g(z) := J \circ \tilde{g} \circ J(z), \quad (3.1)$$

que es una transformación conforme de $G = J(G_0)$ sobre $\overline{D(0,1)^c}$ con la propiedad de que $g(\infty) = \infty$. Asimismo, g cumple:

$$g \circ J(\zeta) = J \circ \tilde{g} \circ J^2(\zeta) = \frac{1}{\tilde{g}(\zeta)},$$

que tiene un polo simple en $\zeta = 0$, pues es la inversa de una función con un cero simple en $\zeta = 0$.

Estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *Sea Q un dominio acotado de Jordan, con $F = \overline{Q}$ y $\partial Q = \mathcal{C}$, donde \mathcal{C} es una curva de Jordan. Entonces existe una única función holomorfa $g \in H(G)$, con $G = F^c$ cumpliendo:*

i) $g : G \rightarrow D(0,1)^c$ es biyectiva.

ii) $g(\infty) = \infty$, $\lim_{z \rightarrow \infty} g' = a_1 > 0$.

iii) g se extiende a un homomorfismo de \overline{G} sobre $D(0,1)^c$.

Las propiedades i) y ii) del teorema son consecuencia directa de la discusión previa. Sin embargo iii) se sigue de una delicada mejora del teorema de la aplicación de Riemann ([7], [5]). Aquí juega un importante papel el que ∂Q sea una curva de Jordan.

3.1.1. Flujo a través de un cilindro de sección general

Sea Q un dominio acotado como en el Teorema 3.4 y consideremos el cilindro general que tiene a $F = \overline{Q}$ por sección. Para hallar el flujo a través de

dicho cilindro que tiene circulación κ nos servimos del correspondiente flujo a través del cilindro circular, junto con el Teorema 3.4. En efecto basta con tomar:

$$f(z) = f_0(g(z)),$$

donde:

$$f_0(z) = \frac{\kappa}{2\pi i} \ln z + \overline{W}_0 z + \frac{W_0}{z},$$

es el potencial del flujo a través del cilindro circular.

Nótese que si $f = \varphi + i\psi$, $f_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ entonces:

$$\psi(z) = \psi_0(g(z)),$$

por lo que ψ se mantiene constante sobre ∂F . Asimismo:

$$f'(z) = f'_0(g(z)) \cdot g'(z)$$

y

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f'(z) = a_1 \overline{W}_0.$$

Comprobamos finalmente que si \mathcal{C} es una curva de Jordan C^1 a trozos con $F \subset \text{Int}(\mathcal{C})$ entonces la circulación de $f'(z)$ alrededor de \mathcal{C} vale κ . En efecto $\tilde{\mathcal{C}} := g^{-1}(\mathcal{C})$ es una curva de Jordan C^1 a trozos con $\overline{D}(0,1) \subset \text{Int}(\tilde{\mathcal{C}})$. Si $\phi(t)$ parametriza \mathcal{C} , $\zeta(t) := g^{-1}(\phi(t))$ parametriza $\tilde{\mathcal{C}}$. Así:

$$\int_{\mathcal{C}} f'(z) dz = \int f'(\phi(t))\phi'(t) dt = \int f'_0(\zeta(t))\zeta'(t) dt = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} f'_0(\zeta) d\zeta,$$

ya que $f(\phi(t)) = f_0(\zeta(t))$. Esto prueba la afirmación pues:

$$\Re \left(\int_{\mathcal{C}} f'(z) dz \right) = \Re \left(\int_{\tilde{\mathcal{C}}} f'_0(\zeta) d\zeta \right) = \kappa.$$

Observación 3.5. En las aplicaciones que siguen cambiaremos la terminología y llamaremos g^{-1} a lo que hemos venido denominando g en la presente sección.

3.2. Transformación de Jukowski

Se define mediante la función:

$$g(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \tag{3.2}$$

Las siguientes propiedades de simetría son inmediatas.

Proposición 3.6.

i) $g\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{g(z)}$ y $g(\pm 1) = \pm 1$.

ii) $g(\bar{z}) = \overline{g(z)}$ y $g(z^*) = (g(z))^*$ donde $z^* = -\bar{z}$ (simetría con respecto a $\Re z = 0$).

La transformación de Jukowski es el resultado de conjugar la función cuadrado $h(z) = z^2$ con la transformación de Möbius:

$$T(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

es decir:

$$g(z) = T^{-1}(h(T(z))) = T^{-1} \circ h \circ T(z).$$

Se debe resaltar que las transformaciones de Möbius son los automorfismos del plano complejo completado $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sobre sí mismo. Son transformaciones conformes que a circunferencias de $\overline{\mathbb{C}}$ (es decir, rectas y circunferencias) hacen corresponder circunferencias de $\overline{\mathbb{C}}$.

En lo que sigue usaremos la notación $\mathcal{U} = \{\Im z > 0\}$, $\mathcal{L} = \{\Im z < 0\}$. La demostración de las propiedades que siguen es consecuencia de las observaciones precedentes.

Proposición 3.7. Sean $\mathcal{C} = \partial D(0, 1) = \{|z| = 1\}$ y $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Entonces:

i) $T(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $T(\mathcal{C}) = i\mathbb{R}$, $T(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ y $T(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

ii) $T([\infty, -1]) = [1, \infty]$.

iii) $T(D(0, 1)) = \{\Re z < 0\}$.

Proposición 3.8. La transformación $T^{-1}(z) = -\frac{z+1}{z-1}$ satisface:

i) $T^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ y $T^{-1}(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

ii) $T^{-1}([\infty, 0]) = [-1, 1]$, $T^{-1}([0, 1]) = [1, \infty]$ y $T^{-1}([1, \infty]) = [\infty, -1]$.

En todos los segmentos involucrados \mathbb{R} se recorre en sentido creciente (∞ juega el papel de $-\infty$ si está al comienzo de un intervalo).

Proposición 3.9. La transformación (3.2) define un homeomorfismo entre $\text{Ext}(\mathcal{C}) = \overline{D(0, 1)}^c$ y $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Lo mismo es cierto entre $\text{Int}(\mathcal{C}) = D(0, 1)$ y $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Demostración. Basta con analizar el caso $g : \overline{D(0, 1)}^c \rightarrow \mathbb{C}$. Como g es holomorfa en $\overline{D(0, 1)}^c$ es abierta. Verificamos que es biyectiva sobre su imagen.

Para $\rho \neq 1$, g transforma el círculo $z = \rho e^{i\theta}$ en la elipse:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

$\xi = a \cos \theta$, $\eta = b \sin \theta$ con $a = \frac{1}{2}(\rho + \frac{1}{\rho})$, $b = \frac{1}{2}(\rho - \frac{1}{\rho})$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Se tiene que $0 < b < a$, mientras $a \rightarrow 1$ y $b \rightarrow 0$, si $\rho \rightarrow 1$; $a, b \rightarrow \infty$, si $\rho \rightarrow \infty$.

Por otro lado el rayo $z = te^{i\alpha}$, $t > 0$, se trasforma en la rama de la hipérbola:

$$\frac{\xi^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{\eta^2}{\sin^2 \alpha} = 1,$$

parametrizada por $\xi = a \cos \alpha$, $\eta = b \sin \alpha$ con $a = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$, $b = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{t})$. El segmento $\{t > 1\}$ se transforma en el trozo de hipérbola localizado en el cuadrante al que pertenece $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ y que empieza en $(\cos \alpha, 0)$. Para $\cos \alpha = 0$ o $\sin \alpha = 0$ se obtiene el correspondiente semieje.

Las imágenes de circunferencias $|z| = \rho$, $\rho > 1$ y rayos $(1, \infty)e^{i\alpha}$ forman un sistema de curvas coordenadas en $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ lo que prueba la afirmación de biyectividad.

3.3. Algunos tipos de aerofoils

Calcularemos ahora el flujo a través de un cilindro de sección $F \subset \mathbb{C}$ para una cierta clase de aerofoils $F = F_j$ de perfil ∂F_j . Para ello describiremos la correspondiente transformación conforme $z = g_j(\zeta)$ que aplica $\partial D(0, 1)$ en ∂F_j . Entonces el potencial complejo f del flujo en $G = F^c$ resulta ser:

$$f(z) = f_0(g_j^{-1}(z)), \tag{3.3}$$

donde f_0 es el potencial del flujo a través de cilindro circular (2.11) con velocidad W_0 en el infinito y circulación κ . La velocidad del flujo a través de F_j en el infinito es entonces:

$$W = W_0 \cdot \overline{(g_j^{-1})'(\infty)}.$$

3.3.1. El segmento

Es la clase más primitiva de aerofoil, a saber el intervalo $F_1 = [-1, 1]$. La propia transformación de Jukowski $g_1 = g$ aplica $\mathcal{C} = \partial D(0, 1)$ en $F_1 = \partial F_1$, recorriéndolo dos veces en sentidos contrarios. El dominio del fluido es $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ mientras:

$$g_1^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1} \quad (g_1^{-1})'(\infty) = 2.$$

Por tanto hay que elegir $W_0 = W/2$. Como además $(g_1^{-1})'(\pm 1) = \infty$ el campo de velocidades $\overline{f'(z)}$ presenta en principio singularidades en en los puntos $z = \pm 1$, que son los bordes de ataque (“leading edge”) y de salida (“trailing edge”) del aerofoil.

3.3.2. Aerofoil simétrico

Tomamos \mathcal{C} la circunferencia que pasa por $z = 1$ y $z = z_0 < -1$ con centro en \mathbb{R} y por tanto ortogonal al eje real. El aerofoil simétrico es $\partial F_2 = g(\mathcal{C})$, es decir $F_2 = \text{Int}(g(\mathcal{C}))$. Para determinar la forma de F_2 analizamos las curvas $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$, $\mathcal{C}'' = h(\mathcal{C}')$ y $\mathcal{C}''' = \partial F_2 = T^{-1}(\mathcal{C}'')$.

En primer lugar \mathcal{C}' es una circunferencia con diámetro $[0, z'_0]$, $z'_0 = T(z_0) > 1$ y $T(\text{Ext}(\mathcal{C})) = \text{Int}(\mathcal{C}')$ (Proposición 3.7).

Por otro lado $\mathcal{C}'' = h(\mathcal{C}')$ es una curva de Jordan simétrica con respecto a los dos ejes. Para ello nótese que h es un homomorfismo sobre $\{\Re z > 0\}$. Además, como $h'(0) = 0$, h dobla los ángulos de incidencia de curvas en $z = 0$. Por ello \mathcal{C}'' tiene una cúspide entrante en $z = 0$ y en la dirección del eje real. Además \mathcal{C}'' corta a $[0, \infty)$ en $z''_0 = h(z'_0) > 1$. Finalmente, $h(\text{Int}(\mathcal{C}')) = \text{Int}(\mathcal{C}'')$.

Para concluir $\mathcal{C}''' = T^{-1}(\mathcal{C}'')$ y es una curva de Jordan con una cúspide exterior en $T^{-1}(0) = 1$, tangente al eje real, simétrica con respecto al eje real, con $\mathcal{C}''' \cap (\infty, 0) = z'''_0 < -1$ (Proposición 3.8), mientras $T^{-1}(\text{Int}(\mathcal{C}'')) = \text{Ext}(\mathcal{C}''')$ pues nótese que $1 \in \text{Int}(\mathcal{C}'')$. Véase la Figura 3.1.

Como $\mathcal{C} = \partial D(a, l)$ donde $l = \frac{1-z_0}{2}$, $a = \frac{1+z_0}{2}$, la transformación g_2^{-1} es:

$$g_2^{-1}(z) = \frac{1}{l} \left\{ z - a + \sqrt{z^2 - 1} \right\} \quad (g_2^{-1})'(\infty) = \frac{2}{l}. \quad (3.4)$$

Para una velocidad W en el infinito hay que tomar $W_0 = \frac{lW}{2}$.

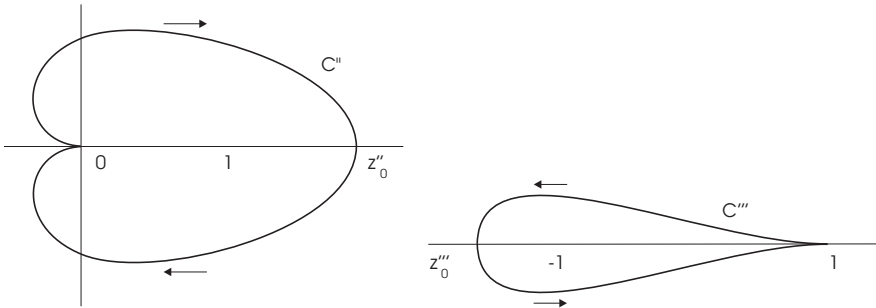


Figura 3.1. Aerofoil simétrico

3.3.3. Arco de círculo

Tomamos la circunferencia \mathcal{C} que pasa por $z = \pm 1$ y forma ángulo $\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}$. El aerofoil es $F_3 = g(\mathcal{C})$ que en el caso presente se reduce a un arco de

círculo. En efecto, $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$ es la recta r_β que pasa por cero y forma ángulo β con \mathbb{R} mientras $T(\text{Ext}(\mathcal{C})) = \mathcal{L}_\beta$, el semiplano inferior abierto determinado por r_β . En segundo lugar, $\mathcal{C}'' = h(\mathcal{C}')$ es la semirrecta que empieza en $z = 0$ forma ángulo 2β con \mathbb{R} y es recorrida dos veces en sentidos opuestos. Además $h(\mathcal{L}_\beta) = \mathbb{C} \setminus \{[0, \infty] \cdot e^{2\beta i}\}$. Finalmente $\mathcal{C}''' = T^{-1}(\mathcal{C}'')$ es el arco de círculo que pasa por $z = \pm 1$ y forma ángulo 2β con \mathbb{R} en $z = 1$. Véase la Figura 3.2.

La expresión para g_3^{-1} viene dada por (3.4) donde a, l son el centro y radio de la presente circunferencia \mathcal{C} . Siendo $a = \cot \beta i$, $l = 1/\sin \beta$ se tiene:

$$g_3^{-1}(z) = \sin \beta \left\{ z - \cot \beta i + \sqrt{z^2 - 1} \right\}.$$

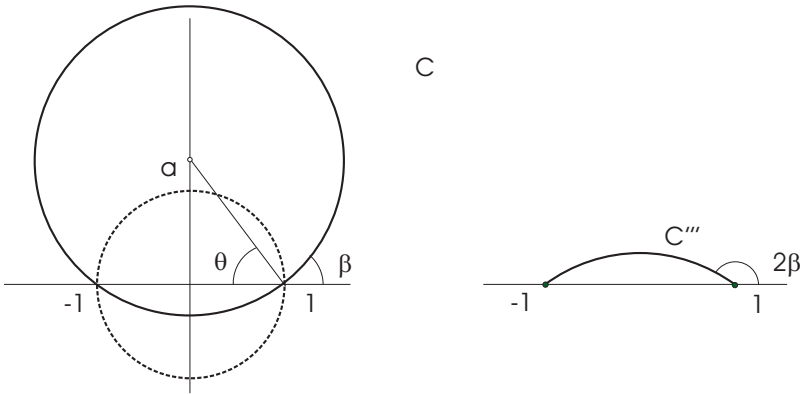


Figura 3.2. Aerofoil en forma de arco circular

3.3.4. Aerofoil curvado con extremos romo y agudo

Consideramos una circunferencia $\mathcal{C} = \partial D(a, l)$ (centro a , radio l) tangente en el punto $z = 1$ a la circunferencia \mathcal{C}_0 de la Sección 3.3.3 y tal que $\mathcal{C}_0 \subset \overline{D(a, l)}$. Nótese que \mathcal{C} forma un ángulo β con el eje real (Figura 3.3). Su imagen $\mathcal{C}' = T(\mathcal{C})$ es una circunferencia contenida en el semiplano \mathcal{L}_β y tangente a r_β en $z = 0$. Si designamos $c = \mathcal{C} \cap (\infty, 0)$, $b = \mathcal{C} \cap \partial D(0, 1)$ con $b \neq 1$ entonces $c' = T(c)$ y $b' = T(b)$ cumplen $0 < 1 < c'$ mientras $b' \in \mathcal{C}' \cap i(\infty, 0)$.

Razonando como en la Sección 3.3.3, $\mathcal{C}'' = h(\mathcal{C}')$ es una curva de Jordan (la restricción de h a \mathcal{L}_β es un homeomorfismo) tangente a $\mathbb{R}e^{2\beta i}$ en $z = 0$ con una cúspide entrante en $z = 0$. De hecho \mathcal{C}'' se deduce de la cardioide de la Figura 3.1 tras una rotación de magnitud -2β con respecto al origen. Al aplicar finalmente T^{-1} obtenemos una curva de Jordan $\mathcal{C}''' = \partial F_4$ que contiene

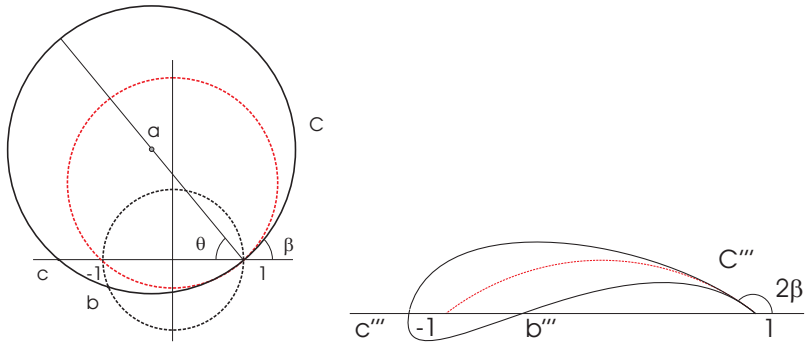


Figura 3.3. Aerofoil con borde de ataque regular y borde de salida agudo

al arco de la Sección 3.3.3 en su interior, es tangente a éste en $z = 1$ y forma una cúspide entrante en dicho punto (Figura 3.3). Nótese por otra parte que $g(\text{Ext}(\mathcal{C})) = \text{Ext}(\mathcal{C}''')$.

La expresión para g_4^{-1} viene dada por (3.4) en donde $a = 1 + le^{i\beta}i$ y donde $l > 1/\text{sen } \beta$.

3.3.5. Aerofoil completamente romo

Se probó en la Proposición 3.9 que la circunferencia $\mathcal{C} = \{|z| = \rho\}$, $\rho > 1$, se transforma mediante g en la una elipse ∂F_5 , cuyo interior F_5 puede observarse como un aerofoil con los dos extremos romos. Es más, dicha elipse se aproxima tanto como se quiera al segmento $[-1, 1]$ con tal que $\rho \rightarrow 1$. En este caso:

$$g_5^{-1}(z) = \frac{1}{\rho}g^{-1}(z) = \frac{1}{\rho} \left\{ z + \sqrt{z^2 - 1} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad g_5(\zeta) = g(\rho\zeta).$$

Como veremos en la Sección 3.4 un perfil como F_5 carece de interés aerodinámico precisamente por no poseer puntos angulosos.

3.4. Condición de Jukowski

En los aerofoils ∂F_j de la Sección 3.3 correspondientes a $j = 1, \dots, 4$, el punto $z = 1$ se denomina el borde de salida (“trailing edge”). El conjugado $f'_j(z)$ de la velocidad del flujo en el borde de salida vale:

$$f'_j(z) = f'_0(g_j^{-1}(z)) \frac{1}{g'_j(g_j^{-1}(z))|_{z=1}} = f'_0(\zeta_0) \frac{1}{g'_j(\zeta_0)}, \quad (3.5)$$

donde ζ_0 es el punto de la circunferencia unidad tal que:

$$1 = a + l\zeta_0,$$

y para $j = 1, \dots, 4$, a y l son el centro y radio de la circunferencia \mathcal{C} que se aplicó sobre ∂F_j mediante la transformación de Jukowski g (Sección 3.2). En todos los casos:

$$g_j(\zeta) = g(a + l\zeta) \quad \Rightarrow \quad g'_j(\zeta_0) = lg'(1) = 0.$$

Por tanto la velocidad $\overline{f'_j(z)}$ del flujo es singular en $z = 1$. Más aún, en los casos $j = 1$ y $j = 3$ también es singular en el borde de ataque $z = -1$. De hecho, y en estos casos:

$$g'_j(-\bar{\zeta}_0) = lg'(-1) = 0.$$

Observación 3.10. Nótese que en el caso del aerofilo como F_5 , $g'_5(1) = \rho g'(\rho)$ con $\rho > 1$ y la velocidad siempre es finita.

Observamos ahora que la circulación κ en f_0 puede considerarse como un parámetro y utilizarse para conseguir que la velocidad f'_j sea finita en el borde de salida $z = 1$. Supongamos entonces que f_j es el flujo a través de F_j , $1 \leq j \leq 4$, con velocidad $W = |W|e^{i\alpha}$ en el infinito. Tomamos por consiguiente:

$$W_0 = \frac{l}{2}W$$

en f_0 . Una condición necesaria para que f'_j se haga finita en $z = 1$ es que:

$$f'_0(\zeta_0) = 0. \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que $\zeta_0 = e^{-i\theta}$ donde $\pi - \theta = \beta + \frac{\pi}{2}$, (3.6) se cumple sí y sólo sí

$$\kappa = -2\pi|W|\operatorname{sen}(\theta + \alpha). \quad (3.7)$$

En efecto (3.6) se lee:

$$\frac{k}{2\pi i} \frac{1}{\zeta_0} + \overline{W}_0 - \frac{W_0}{\zeta_0^2} = 0,$$

de donde.

$$-\frac{\kappa}{4\pi} = \Im(W_0 e^{i\theta}) \quad \Leftrightarrow \quad -\kappa = 2\pi|W|\operatorname{sen}(\theta + \alpha).$$

La relación (3.7) se conoce como la condición de Jukowski.

Proposición 3.11. *La condición (3.7) es suficiente para que exista el límite:*

$$\lim_{z \rightarrow 1} f'_j(z) \quad j = 1, \dots, 4,$$

y por tanto la velocidad del flujo a través de F_j se mantiene finita cerca de $z = 1$.

Demostración. Consideramos la función:

$$f_0(\zeta) = \frac{\kappa}{2\pi i} \ln(\zeta) + \overline{W}_0 \zeta + \frac{W_0}{\zeta},$$

cuya derivada es:

$$f'_0(\zeta) = \frac{\kappa}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + \overline{W}_0 - \frac{W_0}{\zeta^2}$$

y la transformación de referencia:

$$g_j^{-1}(z) = \frac{1}{l} \left(z - a + \sqrt{z^2 - 1} \right).$$

Para que la velocidad sea W en el infinito se impone:

$$\overline{W}_0 = \frac{l}{2} W.$$

De este modo (suprimimos el índice j en f),

$$f(z) = f_0(g_j^{-1}(z)) = \frac{\kappa}{2\pi i} \ln(g_j^{-1}(z)) + \frac{l\overline{W}}{2} g_j^{-1}(z) + \frac{lW}{2} \frac{1}{g_j^{-1}(z)},$$

cuya derivada es:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{l} \left\{ \frac{\kappa}{2\pi i} \frac{1}{g_j^{-1}(z)} + \frac{l\overline{W}}{2} - \frac{lW}{2} \frac{1}{(g_j^{-1}(z))^2} \right\} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right) \\ &= \left\{ \frac{\kappa}{2\pi i} \frac{1}{(z - a + \sqrt{z^2 - 1})} + \frac{\overline{W}}{2} - \frac{l^2 W}{2} \frac{1}{(z - a + \sqrt{z^2 - 1})^2} \right\} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

La expresión:

$$\frac{1}{z - a + \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{1}{(1 - a)} \frac{1}{1 + \frac{z - 1 + \sqrt{z^2 - 1}}{1 - a}} = \frac{1}{1 - a} (1 - v + v^2 - v^3 + \dots),$$

donde $v = \frac{z - 1 + \sqrt{z^2 - 1}}{1 - a}$. La serie converge absolutamente cuando z está próximo a uno. De hecho,

$$v = \sqrt{z - 1} \left(\frac{\sqrt{z - 1} + \sqrt{z + 1}}{1 - a} \right) = \zeta \left(\frac{\zeta + \sqrt{z + 1}}{1 - a} \right) =$$

$$= \zeta \left(\frac{\zeta + \sqrt{2} + O(\zeta^2)}{1-a} \right) = \frac{\sqrt{2}}{1-a} \zeta + O(\zeta^2) \quad \zeta \rightarrow 0,$$

en donde $\zeta = \sqrt{z-1}$ y se ha usado que:

$$\sqrt{z+1} = \sqrt{2 + \zeta^2} = (2 + \zeta^2)^{1/2} = \sqrt{2} (1 + O(\zeta^2)) \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\frac{1}{z-a + \sqrt{z^2-1}} = \frac{1}{1-a} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{1-a} \zeta + O(\zeta^2) \right\} \quad \zeta \rightarrow 0.$$

De igual manera,

$$\left(\frac{1}{z-a + \sqrt{z^2-1}} \right)^2 = \frac{1}{(1-a)^2} \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{2}}{1-a} \zeta + O(\zeta^2) \right\} \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Sustituyendo estas relaciones en la de la derivada:

$$f'(z) = \left[\frac{\kappa}{2\pi i} \frac{1}{1-a} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{1-a} \zeta + O(\zeta^2) \right\} + \frac{\bar{W}}{2} - \frac{Wl^2}{2} \frac{1}{(1-a)^2} \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{2}}{1-a} \zeta + O(\zeta^2) \right\} \right] \times \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z+1}} \frac{1}{\zeta} \right).$$

Ahora:

$$\frac{z}{\sqrt{z+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + A(z-1) + O((z-1)^2) = \frac{1}{\sqrt{2}} + A\zeta^2 + O(\zeta^4) \quad \zeta \rightarrow 0,$$

pues la serie en z converge absolutamente en un entorno de $z = 1$. De esta manera la expresión para $f'(z)$ toma la forma:

$$f'(z) = \left[\frac{\kappa}{2\pi i} \frac{1}{1-a} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{2}}{1-a} \zeta + O(\zeta^2) \right\} + \frac{\bar{W}}{2} - \frac{Wl^2}{2} \frac{1}{(1-a)^2} \left\{ 1 - \frac{2\sqrt{2}}{1-a} \zeta + O(\zeta^2) \right\} \right] \times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}\zeta} + A\zeta + O(\zeta^3) \right) \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Agrupando los términos en potencias de ζ :

$$f'(z) = (a_0 + a_1\zeta + O(\zeta^2)) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}\zeta} + O(\zeta) \right) \quad \zeta \rightarrow 0,$$

en donde:

$$a_0 = \frac{\kappa}{2\pi i} \frac{1}{1-a} + \frac{\overline{W}}{2} - \frac{Wl^2}{2} \frac{1}{(1-a)^2},$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}}{(1-a)^2} \left(-\frac{\kappa}{2\pi i} + \frac{Wl^2}{1-a} \right).$$

Nótese que para que no haya singularidad en $z = 1$ ($\zeta = 0$), se tiene que anular el coeficiente a_0 . Es decir, se ha de satisfacer la condición de Jukowski (3.7). En ese caso:

$$\lim_{z \rightarrow 1} f'_j(z) = \frac{a_1}{\sqrt{2}}.$$

Observación 3.12. La importancia de la presencia de un extremo agudo en el borde de salida de los aerofoils F_j , $j = 1, \dots, 4$, estriba en que, vía la condición de Jukowski, se puede seleccionar un campo específico de velocidades.

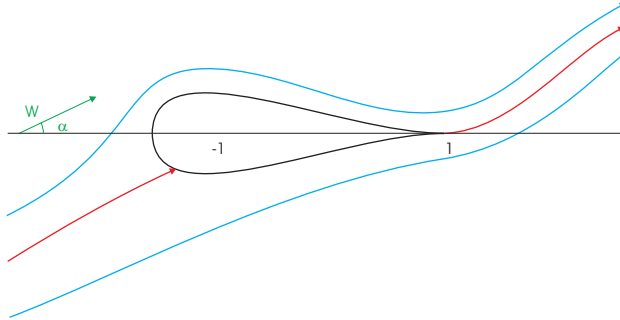


Figura 3.4. Flujo a través del aerofilo simétrico bajo la condición de Jukowski.

3.5. Teorema de Blasius

Consideramos un objeto $F \subset \mathbb{C}$ sumergido en un fluido ideal, incompresible y solenoidal, con densidad constante ρ . Admitimos que la frontera ∂F de F está definida por una curva de Jordan positiva y que el fluido desliza sobre F . Entonces el fluido, que está en régimen estacionario, ejerce una fuerza neta \mathbf{X} sobre F como consecuencia de la presión. El siguiente resultado calcula dicha fuerza \mathbf{X} en términos del potencial complejo f así como el momento neto \mathbf{M} de las fuerzas de presión sobre F .

Teorema 3.13 (Teorema de Blasius). *El conjugado de la fuerza neta \mathbf{X} ejercida por el fluido sobre F viene dado por:*

$$\bar{\mathbf{X}} = i \frac{\rho}{2} \int_{\partial F} f'(z)^2 dz.$$

Asimismo el momento neto \mathbf{M} con respecto al origen de las fuerzas ejercidas sobre F por el fluido vale $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_3$ donde:

$$M = -\Re \left(\frac{\rho}{2} \int_{\partial F} z f'(z)^2 dz \right).$$

Demostración. La fuerza ejercida por el fluido sobre un elemento ds de arco de $C = \partial F$ vale:

$$d\mathbf{X} = i\rho\nu(s) ds = i\rho z' dt,$$

pues $i\nu(s)$ es la normal unitaria interior a F en el punto $z(s) \in \partial F$ (suponemos que el parámetro de ∂F es la longitud de arco s), mientras $ds = |z'(t)|dt$ (t es un parámetro arbitrario en la representación de ∂F).

El Teorema de Bernoulli (Teorema 1.11) nos asegura que

$$p = -\frac{\rho}{2}|w|^2 + c,$$

donde w es el campo de velocidades y c una constante. Por otro lado que el fluido desliza sobre ∂F se traduce en que $z'(t) = w(z(t))$ sobre ∂F . Por consiguiente:

$$d\bar{\mathbf{X}} = -i \left(-\frac{\rho}{2}|w|^2 + c \right) \bar{w} dt.$$

Al integrar:

$$\bar{\mathbf{X}} = \int_{\partial D} d\bar{\mathbf{X}} = i \frac{\rho}{2} \int_0^T |w|^2 \bar{w} dt = i \frac{\rho}{2} \int_{\partial F} f'(z)^2 dz,$$

pues $dz = w dt$.

El cálculo del momento se efectúa con el mismo argumento.

3.6. Teorema de sustentación

Precisamos del siguiente resultado.

Teorema 3.14. Sean $G \supset D(0, R)^c$, $R > 0$, un dominio de \mathbb{C} y $g \in H(G)$ una función holomorfa que tiene un polo en $z = \infty$, con desarrollo de Laurent:

$$g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n} \quad z \rightarrow \infty.$$

Sea asimismo $C \subset G$ una curva de Jordan positiva y C^1 a trozos. Entonces:

$$\int_C g(z) dz = 2\pi i a_{-1}.$$

Demostración. Si $\phi(t)$ parametriza \mathcal{C} , $J(\phi(t))$ parametriza una curva de Jordan negativa $\tilde{\mathcal{C}}$ que contiene a 0 en su interior. Haciendo el cambio $z = J(\zeta)$ en la integral:

$$\int_{\mathcal{C}} g(z) dz = - \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \frac{g(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = \int_{-\tilde{\mathcal{C}}} \frac{g(\zeta)}{\zeta^2} d\zeta = 2\pi i a_{-1}.$$

En el siguiente resultado calculamos la fuerza de sustentación sobre los aerofoils F_j , $j = 1, \dots, 4$, estudiados en la Sección 3.3.

Teorema 3.15 (Teorema de Jukowski). *Consideremos un fluido ideal a través del dominio F_j , con potencial complejo f_j , $j = 1, \dots, 4$. Entonces la fuerza neta \mathbf{X} ejercida por fluido sobre F_j vale:*

$$\mathbf{X} = -i\kappa\rho W, \tag{3.9}$$

en donde ρ es la densidad del fluido, κ su circulación alrededor de ∂F y W es la velocidad en el infinito.

Demostración. Usaremos la expresión (3.8) de $f'_j(z)$ para calcular su desarrollo en el infinito. En primer lugar:

$$1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 2 + \frac{1}{2}\zeta^2 + O(\zeta^4) \quad \zeta \rightarrow 0,$$

en donde $\zeta = 1/z$ y se ha empleado el desarrollo binomial. Asimismo:

$$\frac{1}{z - a + \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\zeta}{2} \frac{1}{1 - u} = \frac{\zeta}{2} (1 + u + O(u^2)) \quad \zeta \rightarrow 0,$$

en donde $u = (1 + a\zeta - \sqrt{1 - \zeta^2})/2$. Ahora:

$$u = \frac{2a + 1}{4}\zeta + O(\zeta^2),$$

por tanto:

$$1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\zeta}{2} + O(\zeta^2) \quad \zeta \rightarrow 0.$$

De ahí:

$$f'(z) = (2 + O(\zeta^2)) \left(\frac{\bar{W}}{2} + \frac{\kappa}{4\pi i} \zeta + O(\zeta^2) \right) = \bar{W} + \frac{\kappa}{2\pi i} \zeta + O(\zeta^2) \quad \Rightarrow$$

$$f'(z)^2 = \bar{W}^2 + \frac{\kappa \bar{W}}{\pi i} \zeta + O(\zeta^2).$$

Esto significa que:

$$\int_{\partial F} f'(z)^2 dz = 2\kappa \bar{W} \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{X}} = i\rho\kappa \bar{W} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = -i\rho\kappa \bar{W}.$$

Esto prueba el teorema.

Corolario 3.16. Si el fluido cumple la condición de Jukowski (3.7) entonces \mathbf{X} es una “fuerza de sustentación” en el sentido de que se dirige en la dirección obtenida rotando $\pi/2$ la de la velocidad en el infinito W (Figura 3.4). Dicha fuerza es además proporcional a la circulación κ siendo su magnitud:

$$|\mathbf{X}| = -\rho\kappa|W| = 2\pi\rho|W|^2 \text{sen}(\alpha + \theta).$$

Observación 3.17. En el caso del aerfoil simétrico con ángulo de ataque α (Figura 3.5) el módulo de la fuerza de sustentación vale:

$$|\mathbf{X}| = 2\pi\rho|W|^2 \text{sen } \alpha.$$

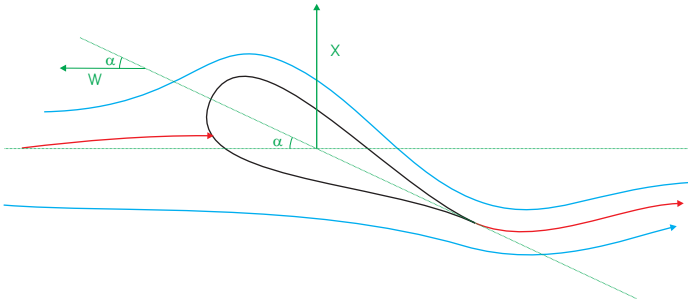


Figura 3.5. El aerfoil simétrico en configuración de vuelo.

Bibliografía

- [1] D.J. ACHESON, *Elementary Fluid Dynamics*. Claredon Press, Oxford, 1990.
- [2] A. J. CHORIN , J. E. MARDSEN, *Mathematical Introduction to Fluid Dynamics*. Springer, NY, 1979.
- [3] B. FERNÁNANDEZ LARRAÑAGA, *Introducción a la mecánica de fluidos*. Alfaomega, México, 1999.
- [4] A.I. MARKUSEVICH, *Theory of Function of a Complex Variable. Vol. II*. Prentice–Hall, NJ, 1965.
- [5] A.I. MARKUSEVICH, *Theory of Function of a Complex Variable. Vol. III*. Prentice–Hall, NJ, 1965.
- [6] M. PROTTER, H. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*. Springer, New York, 1984.
- [7] W. RUDIN, *Real and complex analysis*. McGraw–Hill, NY, 1970.
- [8] J.C. SABINA, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Curso de Introducción*. BULL & <https://josabina.webs.ull.es>.
- [9] H. WEINBERGER, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Reverté, Barcelona, 1970.

Aerodynamic lift and complex analysis



Universidad de La Laguna

Jorge Antonio Herrera Alonso
 Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
 Universidad de La Laguna
 alu0100824278@ull.edu.es



Abstract

Aerodynamic lift on a cylinder (an "aerofoil") is generated when a flow collides and pass through such object. By neglecting viscosity, this memory studies and computes the lift force for a certain kind of profiles. The contents of its three chapters is next reviewed.

1. Introduction to fluids

This chapter introduces the basic concepts of fluid dynamics. We address the Euler's equations, which relate the pressure p and the density ρ of an ideal fluid with its velocity field \mathbf{u}

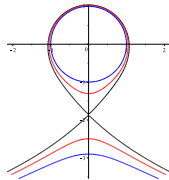
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}. \end{cases}$$

Bernoulli's theorem, asserting –for incompressible fluids– the conservation through trajectories of a suitable grouping of pressure and the kinetic energy, is stated. The concepts of circulation, flux and vorticity and its corresponding properties are discussed. Particular attention is put on plane fluids.

2. Fluids in the complex field

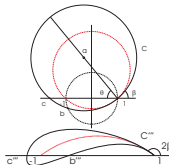
In this chapter, we follow a complex variable approach by expressing the velocity field in the form $w = u + iv$. Irrotational and solenoidal stationary fluids are expressed by holomorphic functions through the notion of "complex potential". The key prob-

lem of characterizing the "flow past a circular cylinder" is addressed. We also provide an analysis of the structure of the associated fluid paths and the "stagnation points".

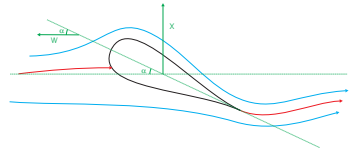


3. Cylinders with a Joukowski profile

We now analyze the flow past a cylinder in full generality. The Joukowski transformation is introduced in order to build a kind of special cylinders that we term "Joukowski" profiles.



Joukowski's condition, fixing the flow circulation κ for those aerofoils exhibiting a sharp "trailing edge", is studied. Finally, we conclude the memory by proving Blasius's theorem in order to compute the lift force exerted on a Joukowski profile.



References

- [1] D.J. ACHESON, *Elementary Fluid Dynamics*. Clarendon Press, Oxford, 1990.
- [2] A. J. CHORIN , J. E. MARDSEN, *Mathematical Introduction to Fluid Dynamics*. Springer, NY, 1979.
- [3] B. FERNÁNDEZ LARRAÑAGA, *Introducción a la mecánica de fluidos*. Alfaomega, México, 1999.
- [4] A.I. MARKUSEVICH, *Theory of Function of a Complex Variable. Vol. II*. Prentice-Hall, NJ, 1965.
- [5] A.I. MARKUSEVICH, *Theory of Function of a Complex Variable. Vol. III*. Prentice-Hall, NJ, 1965.
- [6] M. PROTTER, H. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*. Springer, New York, 1984.
- [7] W. RUDIN, *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, NY, 1970.
- [8] J.C. SABINA, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Curso de Introducción*. BULL & <https://josabina.webs.ull.es>.
- [9] H. WEINBERGER, *Ecuaciones en Derivadas Parciales*. Reverté, Barcelona, 1970.