Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Daniel Martín Jorge

Modelos matemáticos de inventarios: Aplicación a una empresa minorista

Mathematical models for inventories: Application to a retail company

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2017

Agradecimientos

A mi familia, amigos y compañeros, que me han apoyado en este camino.

A Ana por los ánimos para la conclusión de este trabajo.

A Wilson y Bea porque sin ellos este trabajo no hubiera sido posible.

Y una especial mención a mi tutor D. Joaquín Sicilia Rodríguez, que me ha proporcionado una ayuda incalculable con la realización de esta memoria.

Resumen · Abstract

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado hemos analizado la gestión del inventario de tres artículos diferentes comercializados por una pequeña tienda de productos de alimentación.

Se dispone de los datos diarios de venta de los artículos a lo largo del año 2016, junto con las reposiciones realizadas para cada artículo. A partir de ello se estima la distribución de la demanda de los productos y se estudia la evolución del inventario de los mismos.

Se ha aplicado un modelo de inventario que se ajusta a las características del funcionamiento de la empresa, describiendo la política óptima que debería seguir para la gestión eficiente del inventario. Por último, se expone la conclusión del trabajo y se comentan posibles líneas futuras de actuación.

Palabras clave: *Sistemas de inventario, demanda aleatoria, periodo de gestión, nivel de inventario.*

Abstract

In this study, we have analyzed the inventory management of three different items marketed by a retail food store.

We have the daily data of sale of the items in the year 2016. Also we have the data of the replenishments made for each product. From this, we estimate the distribution of the demand for the products and study the evolution of the inventory of them.

We have applied an inventory model that adjusts (fit) to the characteristics of the company's operations, describing the optimal policy that should be followed for efficient inventory management. Finally, the conclusion of the work is presented and possible future lines of study are discussed.

Keywords: *Inventory systems, stochastic demand, scheduling period, stock level.*

Contenido

Introducción

Las empresas, industrias y comercios constituyen, hoy en día, pilares fundamentales y esenciales en el desarrollo económico de los países. Sin la existencia de ellos, sería imposible el avance y el progreso, ofrecen trabajo a las personas y ayudan al crecimiento económico mediante la inversión de capitales y recursos.

Los entornos dinámicos, tanto económicos, sociales, políticos y tecnológicos en los que vivimos actualmente, hace necesario que toda empresa lleve a cabo funciones de planificación, organización, ejecución y control, para así cumplir exitosamente con los objetivos que la empresa tiene trazados.

Toda organización, bien sea pública como privada, tiene como objetivo fundamental obtener el mayor rendimiento de sus operaciones con un uso adecuado de sus recursos disponibles. Por lo cual, con el objetivo de plantear una efectiva toma de decisiones, es indispensable el establecimiento de controles y evaluaciones de procedimientos, a fin de determinar la situación real de la empresa.

Una parte esencial de muchas empresas es la administración y gestión del inventario, ya que se invierte generalmente un amplio capital en un stock de artículos para cubrir la demanda de los clientes. La gestión de los mismos es importante a la hora de optimizar recursos. Por tanto, plantear un buen modelo de gestión de inventarios que se adecúe a las necesidades de la empresa debe ser un objetivo fundamental.

La Teoría de la Gestión de Inventarios recoge un conjunto de modelos matemáticos que buscan describir las características que definen los sistemas de inventario, y desarrollar las políticas adecuadas para la gestión óptima de los mismos.

El objetivo principal que se pretende en la administración de los inventarios es la reducción de los costes relacionados con los mismos, de forma que se maximicen los beneficios obtenidos con la comercialización de los productos de las empresas.

Una política adecuada de control y mantenimiento de stocks ayuda a ajustarse a la variación de la demanda de los artículos, solucionar posibles retrasos en la entrega y, en definitiva, reducir gastos o costos.

Los modelos de gestión de stocks atienden principalmente a dos cuestiones. ¿Cuándo debe reponerse el inventario? y ¿Qué cantidad debemos solicitar para la reposición?

A la primera pregunta se podría responder de la forma siguiente:

- El inventario se repone cuando la cantidad en el inventario sea menor o igual que una cierta cantidad s. A dicho valor s se denomina punto de reposición.
- El inventario se repone cada t unidades de tiempo. A ese periodo de tiempo se le conoce como periodo de gestión o ciclo del inventario.

Para la segunda pregunta podemos considerar las siguientes respuestas:

- La cantidad a reponer es siempre q unidades. Dicha cantidad q se denomina tamaño del lote.
- La cantidad a reponer debe ser una cantidad tal que al añadirla al inventario éste suba a un nivel S de unidades. Ese valor se le conoce como nivel de stock al comienzo del inventario.

Combinando ambas respuestas surgen diferentes políticas de inventario que nos ayudan en la toma eficiente de decisiones en la empresa.

1

Motivación y objetivos

Uno de las comentarios más clásicos sobre un graduado o licenciado en matemáticas es la de ser una persona algo abstraída de la realidad, pero que es capaz de detectar las principales características o variables que influyen en los problemas reales. Así podrá modelar, formular y resolver dichos problemas con el uso de las matemáticas. Si a un matemático le explicas cualquier situación en un lenguaje adecuado, él intentará dar una respuesta medianamente eficiente al problema planteado. Puede que no sea la más óptima, pero seguramente será una respuesta bastante aceptable, dentro de un tiempo razonable.

Esto hace que los matemáticos se demanden en numerosos campos. Lógicamente, una vez terminada la carrera necesitan un tiempo de adaptación, ya que cuando se graduan, no están tan ligados a los problemas de la vida cotidiana y, por supuesto, a hacer uso de los conocimientos y aptitudes en la resolución de los mismos.

De ahí que a los matemáticos se les achaque que están un poco alejados del mundo real y de las cosas cotidianas que pasan. Por esta razón, cuando encuentran modelos que pueden ser aplicados en el mundo real les llaman más la atención. Esta es la principal razón que ha motivado la elección de mi línea de trabajo. En la carrera nos imparten numerosos conceptos, lemas, proposiciones, teoremas, etc, pero pocas materias se reflejan, al menos de una manera tangible, en la vida cotidiana.

Al elegir la línea de proyecto, el siguiente paso era donde poder usar y aplicar los conocimientos adquiridos durante la carrera. Contacté con los dueños una pequeña empresa, con los cuales tengo una estrecha relación. Les pedí si me podían suministrar datos sobre la venta de sus productos y me han proporcionado todo lo necesario para estudiar la evolución del inventario de algunos de los artículos que comercializan en su tienda, dedicada a la venta de productos de alimentación.

Todo esto hace que tenga dos grandes motivaciones para realizar el presente Trabajo de Fin de Grado: emplear los conocimientos en algo aplicado e intentar aportar algún tipo de ayuda a esta empresa. Y de ahí sale la idea de realizar este proyecto.

2

Modelos de gestión de inventarios

La gestión del inventario desempeña un papel clave para el funcionamiento de cualquier empresa u organización. Constituye una herramienta fundamental de control, cuyas funciones abarcan desde fijar las entradas y salidas de materias y productos, con el fin de establecer una relación detallada y ordenada de su almacenamiento, hasta la búsqueda de la reducción de los costos, tanto de adquisición de los productos como del mantenimiento de los mismos hasta su venta.

Una empresa se considera rentable cuando la diferencia entre sus ingresos y gastos es aceptable. Para ello sus dirigentes deben tener en cuenta múltiples factores, desde los requerimientos financieros necesarios, hasta el establecimiento de las actividades a realizar, tanto en la producción como en la venta de sus productos. En relación con la distribución y comercialización de sus artículos, cobra notable importancia la gestión y el control de los inventarios. Con el fin de alcanzar la máxima rentabilidad, la empresa debe conocer cual es el sistema de inventario que más se ajusta a su tipo de negocio.

La Teoría sobre Gestión de Inventarios tiene su origen a principios del siglo veinte, cuando F. W. Harris propuso en 1915 la famosa fórmula de la cantidad económica de pedido (Economic Order Quantity, EOQ), considerada posteriormente como el primer modelo de gestión de stock. Más tarde, en 1918, Taft propuso un nuevo modelo considerando un ratio de producción finito (Economic Production Quantity, EPQ).

Fue en 1928 cuando T.C. Fry, a diferencia de Harris y Taft, que consideraban únicamente demandas deterministas, analizó un sistema de inventario en el que la demanda de los clientes no eran conocidas, sino que se consideraba una variable aleatoria. Esto dio lugar a los modelos probabilísticos de nivel de inventario. F.E. Raymond en 1931 elaboró la primera monografía sobre modelos de gestión de nivel de stocks (Quantity and Economy in Manufacturing).

Después de la Segunda Guerra Mundial el desarrollo y aplicación de nuevos modelos de gestión de stock aumentó considerablemente, apareciendo diferentes artículos en revistas especializadas de investigación operativa y nuevas monografías que recogían un conjunto de modelos de gestión de inventarios. Así podemos citar los libros de Naddor(1966) Hax y Candea (1984), Silver y otros (1998) y Zipkin (2000) En lo que sigue describiremos los conceptos basicos y las caracteristicas fundamentales que describen los sistemas de inventarios.

¿Qué es un inventario?, ¿qué características tiene? Un inventario se define como el conjunto de bienes, artículos o material de cualquier tipo, que poseen valor económico y están almacenados para su posterior venta. Ello forma parte del patrimonio de una empresa u organización. Un inventario constituye una relación detallada, ordenada y valorada de bienes ya que en él se agrupan los elementos patrimoniales de cada producto con el que trabaja la empresa.

Como ya hemos visto anteriormente, el objetivo de un sistema de inventario es la minimización del costo relacionado con la administración y gestión del mismo. Por lo tanto, explicaremos brevemente los costos a tener en cuenta en un sistema de inventario, así como la estructura de la demanda por parte de los clientes, ya que de ella depende la política de inventario que se utilice para la gestión del mismo.

La demanda constituye la cantidad de producto que los clientes soliciten a la empresa durante un determinado período de tiempo. Ésta puede ser determinista, si conocemos de antemano el total de producto solicitado, o aleatoria, cuando, por el contrario, no conocemos con certeza la cantidad de producto requerida por los clientes.

Como ejemplo, consideremos un taller mecánico donde se pide al proveedor un barril de aceite para los motores todos los meses, lo que supone una demanda determinista. Si en un mes concreto el número de clientes que acuden al taller solicitando un cambio de aceite aumenta notablemente, entonces el taller deberá pedir más barriles para cubrir la demanda, lo que constituye una demanda aleatoria.

Fijemos a continuación los costos a tener en cuenta a la hora de decidir la política que más se adecúe a la gestión del inventario. Obviamente, los únicos costos que deben ser considerados son los que varían según cambia la política de existencias.

Podemos agrupar estos costos en tres categorías:

- Costos de mantenimiento (C_1): Éstos engloban diferentes tipos de costos asociados con la tenencia y almacenamiento de la mercancía. como son:
  - Costes de capital: Es el componente más grande entre los costes de almacenamiento de inventario. Incluye todo lo relacionado con la inversión y el costo de oportunidad del dinero invertido en el inventario. Representan gastos directos con respecto a los intereses o tasa de la rentabilidad que podría obtenerse invirtiendo el capital dedicado al inventario en otra parte del negocio. Determinar los costos del capital puede ser más o menos complicado según la actividad comercial.
  - Gastos de espacio de almacenamiento y manipulación: Incluyen el coste del mantenimiento del establecimiento (luz, agua, aire acondicionado, limpieza, etc), alquiler, e impuestos de la propiedad. Estos costes dependen de forma significativa del tipo de almacenamiento elegido; por ejemplo, si los depósitos son propiedad de la empresa o alquilados, o bien cuando el mismo edificio se utiliza para diferentes propósitos, es preciso determinar la parte que se asocia a la recepción y al almacenamiento del inventario propiamente dicho.

    Puede darse la saturación del espacio de almacenamiento lo que puede causar el aumento de costes de forma no lineal creando toda clase de costes adicionales.
  - Costes de riesgo de inventario: cubren el riesgo de que los artículos puedan sufrir depreciaciones a lo largo del período de almacenamiento, esto es especialmente relevante en la industria minorista y los productos perecederos. Los riesgos incluyen la merma de inventario, hurto, daños en tránsito o en el almacenamiento, etc.
- Costes de rotura o desabastecimiento (C_2). Una situación de desabastecimiento surge siempre que la demanda es mayor que la oferta y el sistema no tiene stocks. Dependiendo de las circunstancias, una ruptura de stock puede llevar a alguna de las siguientes alternativas:
  - Para satisfacer la demanda, se libera una orden especial de reposición, el coste de rotura (stockout) se representa en este caso por el coste adicional de la orden especial en comparación con la operación normal.
  - La demanda se retrasa y se cubre cuando el inventario vuelve a tener stock debido a la llegada de una nueva reposición. En esta situación ocurre que la empresa no recibe el dinero de la venta del producto en el momento en el que el cliente lo solicita. Por tanto, ese dinero deja de producir un

interés bancario. Aparte en esta situación se produce cierta pérdida de las espectativas del cliente al no recibir el producto cuando él lo solicita.

- La demanda no se puede cumplir y por tanto se pierde (es el caso de ventas perdidas). Los costos de existencias tendrían que contabilizar la pérdida del margen de beneficio de las unidades que se solicitaron pero que no estaban disponibles. Además la pérdida del cliente puede ocasionar que el cliente no vuelva al establecimiento.

▪ Costos de reposición (C_3): Hacen referencia al coste derivado del pedido de nueva mercancía para mantener el nivel de inventario. Abarcan los procesos administrativos de realizar un pedido a los proveedores (procesamiento informático, llamadas telefónicas, franqueo, etc.), el transporte de los artículos ordenados, los seguros y el manejo e inspección del envío a su llegada al almacén.

En muchos sistemas de inventario un costo de reposición puede asociarse a muchos artículos diferentes. Por ejemplo, cuando un camión es enviado a traer una carga que contiene artículos diferentes, el costo de reponer los productos a veces puede ser sólo el costo del viaje. Este costo puede no depender del número de artículos diferentes en el envío o de las cantidades específicas de cada artículo.

Nótese que, si consideramos los costos de transporte, manipulación e inspección por lote, los mismos son invariantes sólo dentro de un rango limitado de tamaños de lote. Con un cambio radical en el tamaño del pedido, se podría reconsiderar el modo de transporte y el manejo de los equipos y técnicas de inspección. Por otra parte, una parte de los gastos administrativos anuales no varía si el número total de pedidos permanece dentro de ciertos límites.

Hay una amplia variedad de modelos matemáticos dedicados a la gestión de los sistemas de inventarios. Estos modelos se pueden clasificar en función de los costos generales que intervienen en el control de los inventarios. Así hablaremos de sistemas del tipo (1,2) si sólo intervienen el costo de mantenimiento y el costo de rotura. Ejemplo de esa situación son empresas que son delegaciones o franquicias de empresas matrices, de forma que los costes de reposición de sus productos no repercuten en ellas. También están los sistemas de gestión de inventario tipo (1,3), en los cuales el costo de rotura no interviene, dado que la política de la empresa es no permitir la falta de stock en el inventario. Los sistemas de inventario tipo (2,3) se ajustan a aquellas empresas que comercializan productos que no son propios, esto es, estas empresas son intermediarias y trabajan mediante pedidos por catálogo. En ese caso no hay costo de mantenimiento porque no tienen un inventario físico, pero si hay costo de rotura, dado que si no hay stock del producto que se solicita se pierde la comisión. También hay un costo de reposición dado que la empresa que fabrica el producto cobran coste de transporte a la empresa que suministra el producto al cliente.

Por último quedaría el sistema tipo (1,2,3) que serían aquellos sistemas en los que interviene los tres costos generales.

Téngase en cuenta que entre las características del sistema de inventario que se sigue en la tienda de productos alimenticios está el que no se permita roturas de los productos, ya que los responsables prefieren tener siempre stock de sus productos para satisfacer la demanda de los clientes. Por ello, en el análisis de la gestión de inventarios de la tienda de productos alimenticios, debemos aplicar modelos tipo (1,3), los cuales no interviene el coste de rotura. A continuación mostramos algunos modelos que no tienen en cuenta dicho coste.

2.1. Modelo clásico determinístico (Modelo EOQ)

El modelo EOQ (Economic Order Quantity) es el modelo básico y fundamental para el control de inventarios en el que la solución óptima es igualar los costos de mantenimiento y los costos de reposición. La principal pregunta a la que contesta este modelo es ¿qué cantidad debemos solicitar o pedir para que el costo total relacionado con la gestion del inventario sea el menor posible? A continuación mostramos las principales características:

- Se trabaja con un solo artículo.
- La tasa de demanda es r constante y conocida.
- No se permiten roturas.
- El periodo de retardo, L, es despreciable o inexistente, esto se considera $L = 0$.
- El tamaño de reposición q es constante, pero es desconocido. El tamaño del lote q sera la variable de decisión del modelo
- El momento de realizar el pedido es cuando el número de artículos en el inventario llega a 0, esto es el punto de reposición $s = 0$.
- Se denota c_1 es el coste por unidad de tiempo de mantener una unidad del producto.
- Sea c_3 el coste por pedido o reposición. Es un coste fijo e independiente del numero de artículos solicitados.

La cantidad a reponer q debe cubrir la demanda total de los clientes, esto es $q = r \cdot t$.

La función de coste es la siguiente: $C(q) = c_1 \cdot I_1 + c_3 \cdot I_3$ donde $I_1 =$ número medio de unidades en el inventario e $I_3 =$ número medio de reposiciones. I_1 y I_3 vienen determinados por

$$I_1 = \frac{q \cdot \frac{t}{2}}{t} = \frac{q}{2}$$
$$I_3 = \frac{1}{t} = \frac{r}{q}$$

Por lo que la función de coste total es una función dependiente del tamaño del lote.

$$C(q) = c_1 \cdot I_1 + c_3 \cdot I_3 = c_1 \cdot \frac{q}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q}$$

Como se busca el menor coste posible, derivamos la función $C(q)$ y la igualamos a 0.

$$C'(q) = \frac{c_1}{2} - \frac{c_3 \cdot r}{q^2} = 0$$

Así, obtenemos el tamaño de la reposición.

$$q_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}$$

Además, se tiene $C''(q) = \dfrac{2 \cdot c_2 \cdot r}{q^3} > 0$. Por tanto q_0 es un mínimo. Con esto, hemos calculado la cantidad óptima a reponer, que será también nuestro nivel máximo en el inventario.

Veamos ahora cuanto es el periodo (t_0) y el costo correspondiente $(C(q_0))$. Como $q = r \cdot t$, se tiene que el periodo óptimo es:

$$t_0 = \frac{q_0}{r} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}}}{r} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1 \cdot r^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3}{c_1 \cdot r}}$$

Ahora el coste mínimo será

$$C(q_0) = c_1 \cdot \frac{q_0}{2} + c_3 \cdot \frac{r}{q_0} = \frac{c_1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3 \cdot r}{c_1}} + c_3 \cdot \sqrt{\frac{c_1 \cdot r}{2 \cdot c_3}}$$
$$= \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_3 \cdot r}{2}} + \sqrt{\frac{c_1 \cdot r \cdot c_3}{2}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{c_1 \cdot c_3 \cdot r}{2}} = \sqrt{2 \cdot c_1 \cdot c_3 \cdot r}$$

En el siguiente sistema de gestión de stock extendemos el modelo EOQ al caso de considerar múltiples artículos en el inventario.

2.2. Sistema determinista con varios articulos

Las características de este sistema son las siguientes:

- Supondremos que en el sistema se trabaja con N artículos diferentes.
- r_i = razón de demanda del artículo i ($i = 1, 2, ..., N$). Esas demandas son deterministas y conocidas.
- q_i = tamaño del lote del articulo i ($i = 1, 2, ..., N$). Serán las variables a determinar.
- t_i = periodo de gestión del artículo i. Como lo solicitado debe coincidir con lo demandado en el periodo de gestión, se tiene que $q_i = r_i \cdot t_i$ y por tanto, $t_i = q_i/r_i$.
- El patrón de demanda es la uniforme para todos los artículos.
- La reposición instantánea (no hay periodo de reposición).
- No hay periodo de retardo para ningún articulo.
- Se consideran los siguientes costos unitarios: c_{1i} = costo unitario del articulo i ($i = 1, 2, ...N$), cuya dimensión será [$]/[Q][T], dinero/cantidad y tiempo.

  c_3 = costo unitario de reposición. Admitimos que c_3 constante y no depende ni de las cantidades solicitadas ni del número de artículos distintos solicitados en la reposición.
- No se permiten roturas.

  Antes de continuar con el desarrollo de la ecuación de costo total general para este sistema, queremos resaltar que en una política óptima todos los períodos de programación deben ser de igual duración.

  Supongamos que no lo fueran. Designemos por t el menor periodo de programación, digamos que corresponde con el periodo del ítem k, es decir, $t = t_k$. Consideremos ahora un ítem j, para el cual $t_j > t$. Sea I_{1j} el inventario promedio de este artículo. Supongamos ahora que reducimos su período de programación a $t_j = t$. Obviamente, el inventario promedio también disminuirá y, por lo tanto, el costo de mantenimiento disminuirá. Pero ¿qué pasa con los costos de reposición? Estos costes disminuyen o se mantienen constantes, ya que, el articulo k se repone cada $t_k = t$ unidades de tiempo y ahora el producto j se va a reponer al mismo tiempo. Por lo tanto, el coste total para el ítem j disminuye si se ordena con tanta frecuencia como la del ítem k. En consecuencia, repetimos este mismo proceso para todos los productos. Y así se logrará disminuir los costes de reposición hasta que se tenga el mismo periodo de programación t para todos los productos.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene $q_i = r_i \cdot t_i = r_i \cdot t$ para $i = 1, 2, ...N$

La función de coste será la suma del coste total de mantenimiento y de reposición, esto es

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \frac{q_i}{2} + c_3 \cdot \frac{1}{t} = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \frac{r_i \cdot t}{2} + \frac{c_3}{t}$$

Derivando $C(t)$ e igualando a cero, se tiene el periodo óptimo de gestión es $t_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i}}$.

Por tanto, el tamaño del lote óptimo del producto i será:

$$q_{0i} \cdot r_i \cdot t_0 = r_i \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_1 i \cdot t_i}} \qquad \forall i = 1, ...N.$$

Sustituyendo la política optima en la funcion de coste, se obtiene el coste mínimo dado por

$$C_0 = C(t_0) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i \cdot \frac{t_0}{2} + \frac{c_3}{t_0} = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i \cdot \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i}}}{2} + \frac{c_3}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i}}}$$

$$= \frac{2 \cdot c_3}{\sqrt{\frac{2 \cdot c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i}}} = \sqrt{2 \cdot c_3 \cdot \sum_{i=1}^{N} C_{1i} \cdot r_i}$$

Nótese que este sistema generaliza el sistema clásico de tamaño de lote para un sólo artículo, ya que si $N = 1$ en las fórmulas anteriores se obtiene lo mismo que en la sección anterior.

2.3. Modelo probabilístico para varios artículos

Consideremos de nuevo un sistema de inventario en el que hay N articulos diferentes. El costo de reposición es c_3 euros por pedido y no depende del número de artículos solicitados ni de los tamaños de lote q_i, de los items $i = 1, 2, ...N$. Sea r_i la tasa constante y uniforme de demanda del articulo i, y sea c_{1i} el costo de mantener una unidad del articulo i por unidad de tiempo. Sea t_i el período de gestión del artículo i.

Expongamos las singularidades de este modelo:

- Los productos tienen demanda aleatoria x_i las cuales varían entre $x_{i,min}(t)$ y $x_{i,max}(t)$ dentro de un periodo t.
- Sea $f_i(x_i)$ la función de demanda del producto i-ésimo y $\overline{x_i}(t)$ es la demanda media en el periodo t.
- Se considera que la reposición de los artículos es conjunta y que se realiza cada t unidades de tiempo. Ese periodo es una variable de decisión y corresponderá con el periodo de gestión o ciclo del inventario.
- No se permiten roturas.
- La reposición es instantánea.
- S_i es el nivel de inventario al comienzo del periodo t para el producto i-ésimo. Como no se permiten roturas, S_i debe coincidir con la demanda máxima en el periodo t, es decir $S_i = x_{i,max}(t)$.
- Los periodos de retardo de los productos son insignificantes o nulos.
- La tasa de demanda media para el artículo i-ésimo será: $r_i = \dfrac{\overline{x}_i(t)}{t}$.

Comenzamos calculando el promedio de la cantidad del producto i-esimo en el inventario. Ello viene dada por $\dfrac{S_i \cdot t - \frac{x_i \cdot t}{2}}{t} = S_i - \dfrac{x_i}{2}$. Por tanto la cantidad media esperada sería:

$$I_{1i} = \int_{x_{i,min}}^{x_{i,max}} \left(S_i - \frac{x_i}{2}\right) f_i(x_i) dx_i = S_i - \frac{\overline{x_i}(t)}{2}$$

La función del coste total esperado es:

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot I_{1i} + c_3 \cdot I_3(t)$$

donde $I_3(t) = \frac{1}{t}$ representa las reposiciones por unidad de tiempo. Por tanto, tenemos

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \left(S_i - \frac{\overline{x_i}(t)}{2}\right) + \frac{c_3}{t}$$

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N} c_{1i}\cdot\left(x_{i,max}(t)-\frac{\overline{x_i}(t)}{2}\right)+\frac{c_3}{t}$$

Para cada producto consideramos el cociente entre la demanda máxima y la demanda media a lo largo del periodo t. A esta relación la llamaremos $A_i(t)$, esto es,

$$A_i(t)=\frac{x_{i,max}(t)}{\overline{x_i}(t)} \text{ con } i=1,2,...,N$$

Teniendo en cuenta que $\overline{x_i}(t)=r_i\cdot t$ e incorporando $A_i(t)$ se obtiene que la función de coste total esperado se reduce a:

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N} c_{1i}\left(A_i(t)-\frac{1}{2}\right)r_i\cdot t+\frac{c_3}{t}$$

.

Se puede analizar dos casos dependiendo de si $A_i(t)$ es constante o no.

2.3.1. $A_i(t)$ constante

Si tenemos que $A_i(t)=k_i$, con k_i constante. Tenemos que el coste total esperado es

$$C(t)=\sum_{i=1}^{N} c_{1i}\left(k_i-\frac{1}{2}\right)r_i\cdot t+\frac{c_3}{t}$$

.

Para llegar al mínimo derivamos e igualamos a 0.

$$C'(t)=\sum_{i=1}^{N} c_{1i}\left(k_i-\frac{1}{2}\right)r_i-\frac{c_3}{t^2}=0$$

Llegamos a que la solución óptima del sistema se caracteriza por las fórmulas siguientes,

$$t_0=\sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i}\cdot r_i(k_i-\frac{1}{2})}}$$

$$S_{0i}=x_{i,max}(t_0)=k_i\cdot r_i\cdot\sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i}\cdot r_i(k_i-\frac{1}{2})}}$$

Y el coste mínimo será

$$C(t_0) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i}\left(k_i - \frac{1}{2}\right) r_i \cdot \sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i(k_i - \frac{1}{2})}} + \frac{c_3}{\sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i(k_i - \frac{1}{2})}}}$$

Nótese que la cantidad a pedir del artículo i-ésimo q_{0i} debe ser una cantidad tal que lleve al inventario hasta el nivel S_{0i}

Con esto tendríamos determinado el periodo óptimo de gestión t_0, la cantidad S_{0i} a la que debemos llevar el inventario y el costo total que supondría.

2.3.2. $A_i(t)$ no constante

Cuando $A_i(t)$ no es constante, partiendo de los datos conocidos sobre las demandas de los productos, debemos estimar la curva que mejor describe la evolución de esos datos a lo largo del tiempo.

En particular, si se pudiera ajustar $A_i(t)$ a una hipérbola de la forma:

$$A_i(t) = \frac{a_i}{t} + b_i$$

entonces la función del coste total esperado sería de la forma

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot (\frac{a_i}{t} + b_i - \frac{1}{2}) r_i \cdot t + \frac{c_3}{t} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} c_{1i}(a_i \cdot r_i + (b_i - \frac{1}{2}) \cdot r_i \cdot t) + \frac{c_3}{t} = \sum c_{1i}(\alpha_i + \beta_i \cdot t) + \frac{c_3}{t}.$$

Llamando $M_i = \alpha_i + \beta_i \cdot t$, se tiene

$$C(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i}(M_i(t)) + \frac{c_3}{t}$$

En este caso, para obtener la solución óptima derivamos $C(t)$ e igualamos a cero

$$C'(t) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \beta_i - \frac{c_3}{t^2} = 0$$

El periodo de gestión óptimo es

$$t_0 = \sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \beta_i}}$$

Nótese que $a_i = \dfrac{\alpha_i}{r_i}$ y $b_i = \dfrac{\beta_i}{r_i} - \dfrac{1}{2}$.

y el nivel de inventario óptimo es para el producto i es

$$S_{0i} = x_{i,max}(t_0) = A_i(t) \cdot r_i \cdot \sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \beta_i}} = \left(\frac{a_i}{t} + b_i\right) \cdot r_i \cdot \sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \beta_i}}$$

El coste mínimo se obtiene sustituyendo la política optima en la funcion de coste. Asi, se obtiene

$$C(t_0) = \sum_{i=1}^{N} c_{1i} \left(\alpha_i + \beta_i \cdot \sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \beta_i}}\right) + \frac{c_3}{\sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \beta_i}}}$$

Por tanto, al igual que en el apartado anterior, tenemos el periodo de gestión óptima, el nivel máximo al que debe llegar el inventario y el costo mínimo que conlleva esta política de gestión

3

Descripción del problema

La empresa de alimentación que ha colaborado facilitándonos los datos se dedica a la venta de productos alimenticios, completando el inventario con una variedad de productos para cubrir la mayor parte de las necesidades básicas. Esta pequeña empresa consta de dos trabajadores, el matrimonio que dirige el negocio. El local se sitúa en una zona de mucho tránsito comercial. Esto hace que aunque la mayor parte de la clientela la formen vecinos del lugar, también entren a comprar bastantes transeúntes.

En el desarrollo de este estudio, hemos recogido una serie de datos de tres productos que comercializa esta pequeña empresa de ámbito local. Con esto intentaremos encontrar un modelo de reposición que se ajuste lo mejor posible a la demanda que existe y, así, poder maximizar el beneficio obtenido por la empresa.

Hay que destacar que la política de empresa no permite caer en la falta de existencias o roturas, para no perder clientela. Esto hace que aumenten los gastos de mantenimiento del inventario.

3.1. Datos generales de la empresa

En esta sección comentaremos los datos relevantes que hemos recopilado.

- **Superficie total del local**: 64 m^2.
- **Superficie útil para el almacenamiento de los productos**: 36 m^2.

- **Gastos de alquiler**: 800 €+ IGIC = 856 €/mes = 10236 €/ año.
- **Agua**: 20 €/mes = 240 €/año.
- **Luz**:360 €/mes = 4320 €/año.

- **Seguro**: 96 €/ (3 meses) = 384 €/año.
- **Impuestos**: 260 €/año.
- **Impuesto de basura**: 590 €/año.

Sumando todos los gastos obtenemos

- **Gastos totales**: 15770 €/año = 43,205479452 €/día.
- **Total a pagar por m^2 útil en un día**: 1,200152207 €/día y m^2.

Los cálculos se hallan en función de la superficie y no en función del volumen, ya que se apilan productos iguales y no todos los productos pueden apilarse a la misma altura.

3.2. Datos sobre los productos

Para hacer nuestro estudio hemos elegido tres productos que se venden con frecuencia en la tienda. Dichos productos son un tipo de lata de cerveza, un tetrabrik de leche y una botella de vino. Son productos de marcas determinadas pero que no citaremos para preservar la información de ventas de estos productos. Describamos a continuación los productos con los que trabajaremos:

Producto 1: cerveza

Lo primero que describiremos son sus dimensiones.

- El producto 1 es una lata de cerveza que tiene 3,75 cm de radio y 7,5 cm de altura.
- La caja está formada por 6 unidades y ocupa 15 cm de ancho, 22,5 cm de largo y 7,5 cm de altura.
- En la tienda se colocan 9 cajas en el suelo ocupando una superficie de 15 cm x 22,5 cm x 9 = 3037,5 cm^2 = 0,30375 m^2.
- Pueden colocarse 15 cajas aplicadas una encima de otra, lo que haría una altura de 7,5 cm x 15 = 112,5 cm de alto.

Por tanto el total de cajas máximo que se puede almacenar de este producto en la tienda es 135, o lo que es lo mismo, 810 unidades.

Ahora detallamos el precio de compra y venta del artículo

- El precio medio de compra por unidad es 0,26956527 €.
- El precio de venta al público por unidad es 0,50 €.

Producto 2: leche

Procedemos a comentar las dimensiones del producto 2.

- El producto 2 es un tetrabrik de leche que tiene 9,5 cm de largo, 6,4 cm de ancho y 16,5 cm de alto.
- La caja está formada por 6 unidades y ocupa 12,8 cm de ancho, 28,5 cm de largo y 16,5 cm de altura.
- En la tienda se colocan 4 cajas en el suelo ocupando una superficie de 12,8 cm x 28,5 cm x 4 = 1459,2 cm^2 = 0,14592 m^2.
- Pueden colocarse 5 cajas una encima de otra, lo que haría una altura de 16,5 cm x 5 = 82,5 cm de alto.

Por tanto el total de cajas máximo que se puede almacenar de este producto en la tienda es 20, o lo que es lo mismo, 120 unidades.

Ahora exponemos el precio de compra y venta del artículo

- El precio medio de compra por unidad es 0,72 €.
- El precio de venta al público por tetrabrik es 0,89 €.

Producto 3: vino

Pasemos a indicar sus dimensiones

- El producto 3 es una botella de vino que tiene 3,75 cm de radio y 30 cm de altura.
- La caja está formada por 12 unidades y ocupa 22,5 cm de ancho, 30 cm de largo y 30 cm de altura.
- En la tienda se colocan 3 cajas en el suelo ocupando una superficie de 22,5 cm x 30 cm x 3 = 2025 cm^2 = 0,2025 m^2.
- Pueden colocarse 4 cajas apiladas, lo que haría una altura de 30 cm x 4 = 120 cm de alto.

Por tanto el total de cajas máximo que se puede almacenar de este producto en la tienda es 12, o lo que es lo mismo, 144 unidades.

Por último veamos el precio de compra y venta del artículo

- El precio medio de compra por unidad es 0,695806794 €.
- El precio de venta al público por botella es 1,10 €.

3.3. Costos de mantenimiento y reposición

Después de lo mostrado en el apartado anterior, pasemos a recoger los datos de mantenimiento y reposición.

Para calcular el coste semanal de mantenimiento por caja para el producto i usaremos la siguiente fórmula con $i = 1, 2, 3$.

$$c_{1i} = \frac{\text{superficie total del producto } i}{\text{número máximo de cajas del producto } i} \times (\text{precio por } m^2 \text{ y semana})$$

El motivo de hallar el coste de mantenimiento por caja es que la compra de los artículos se realiza por cajas, no por unidades. A modo de resumen, mostramos los costes en la siguiente tabla.

	Coste de mantenimiento c_{1i} del producto i-esímo por semana
Producto 1	$c_{11} = 0,0189$€/ semana y caja
Producto 2	$c_{12} = 0,061292$€/ semana y caja
Producto 3	$c_{13} = 0,14371$€/ semana y caja

El coste de la reposición son 5 € por pedido, independientemente de cuanta cantidad se compre y de que artículos se soliciten. Existe un límite superior a las cantidades solicitadas, que viene determinada por la capacidad del vehículo. Si se llena el furgón sin completar la mercancía solicitada, habría que pedir un segundo medio de transporte y, por tanto, pagar otros 5 €. Como dato importante, la empresa nunca ha llegado a ocupar por completo la capacidad del medio de transporte, por lo que nunca ha necesitado más de un vehículo.

4

Estudio de las demandas de los productos

En este capítulo haremos un análisis detallado de las demandas de los tres productos considerados. Para ello establecemos dos diferentes secciones. En la primera se estudia si los datos se aproximan a alguna distribución teórica para ver su tendencia. La segunda consiste en calcular el cociente entre la demanda máxima y la demanda media $A_i(t)$ y luego hallar la recta de regresión $M_i(t)$ que mejor pueda ajustarse a cada producto i con $i = 1, 2, 3$. Para apoyarnos en esto, utilizaremos los programas StatGraphics y Excel.

4.1. Producto 1

4.1.1. Distribución de las ventas

Lo primero que necesitamos ver es como se distribuyen los datos en un histograma para, al menos, hacernos una idea de que posibles distribuciones podrían servirnos. A continuación mostramos el histograma de ventas semanales de la cerveza.

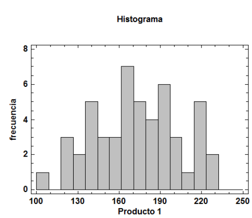


Figura 4.1. Histograma producto 1

En el StatGraphics ponemos los datos y probamos ajustar diferentes distribuciones a dichos datos. Se observa que la distribución gamma se ajusta bien a nuestros datos. Le aplicamos el ajuste de bondad Chi cuadrado (χ^2) para verificar si dicha distribución es adecuada.(Ver Quesada y otros (1992))

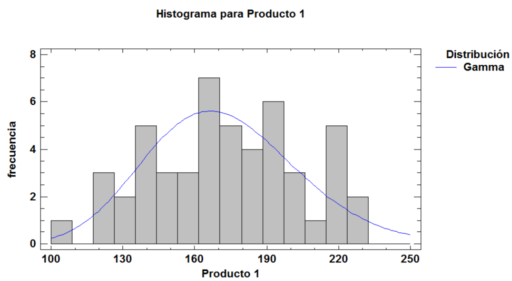


Figura 4.2. Histograma y Gamma producto 1

El programa nos devuelve que las ventas del producto 1 siguen una distribución gamma con parámetro $\lambda = 29,4013$ y $\vartheta = 0,170482$, es decir, $\Gamma(29,4013; 0,170482)$.

En la tabla siguiente se muestran los cálculos del ajuste de la Chi cuadrado que nos proporciona el programa.

Pruebas de Bondad-de-Ajuste para Producto 1
Prueba Chi-Cuadrada

	Límite Inferior	*Límite Superior*	*Frecuencia Observada*	*Frecuencia Esperada*	*Chi-Cuadrada*
menor o igual		126,471	4	3,11	0,25
	126,471	135,294	2	2,62	0,15
	135,294	144,118	5	3,70	0,46
	144,118	152,941	3	4,68	0,60
	152,941	161,765	3	5,35	1,03
	161,765	170,588	7	5,59	0,35
	170,588	179,412	5	5,41	0,03
	179,412	188,235	4	4,86	0,15
	188,235	197,059	6	4,09	0,89
	197,059	205,882	3	3,25	0,02
	205,882	214,706	1	2,44	0,85
mayor	214,706		7	4,90	0,90

Chi-Cuadrada = 5,68287 con 9 g.l. Valor-P = 0,77119

Figura 4.3. Ajuste de los datos de venta a una gamma

Después de ver esto, sabemos que la distribución Gamma $\Gamma(29,4013; 0,170482)$ se puede aceptar como ajuste a nuestros datos, ya que el valor del $\chi^2 = 5,68287$ es menor que el esperado.

Al comprobar que las ventas semanales de la cerveza (producto 1) puede corresponderse con una distribución Gamma, podemos considerar que la media semanal $\overline{x_i}(t)$, con $t = 1$, coincide con la media de la Gamma, esto es $\overline{x_i}(1) = \frac{\lambda}{\vartheta} = 172,4598491336328761$. Ahora si consideramos el periodo de tiempo de t semanas, su media $\overline{x_i}(t)$ debe coincidir con la media de la distribución de ventas en t semanas, esto es $E(Y_i) = E(t \cdot X_i)$. Como sabemos que $X_i \sim \Gamma(\lambda, \vartheta)$ entonces $Y_i = t \cdot X \sim \Gamma(\lambda, \frac{\vartheta}{t})$, tendríamos que $E(Y_i) = t \cdot E(X_i) = t \cdot \frac{\lambda}{\vartheta}$. En consecuencia se tiene $\overline{x_i}(t) = E(Y_i) = t \cdot \frac{\lambda}{\vartheta} = 172,4598491336328761 \cdot t$.

Por tanto,

$$A_1(t) = \frac{x_{1max(t)}}{\overline{x_1}(t)} = \frac{230 \cdot t}{172,4598491336328761 \cdot t} = 1,33364375$$

En consecuencia, si se admite que el comportamiento de las ventas es similar por semana, entonces podemos trabajar como si la demanda siguiera la $\Gamma(29,4013; 0,170482)$ y el $A_1(t)$ sería constante.

En tal caso, la política óptima debe deducirse del punto 2.3.1. Eso se mostrará en el siguiente capítulo.

A continuación, vamos a suponer que el comportamiento de la demanda varía de semana en semana.

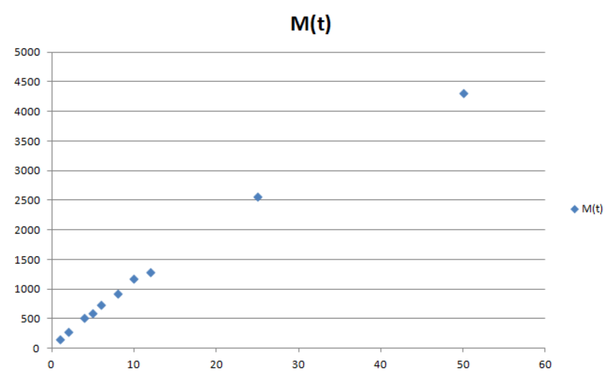
A partir de los datos de ventas semanales obtenido del 2016 podemos calcular $A_1(t)$ y $M_1(t)$

4.1.2. Cálculo $M_1(t)$ y $A_1(t)$

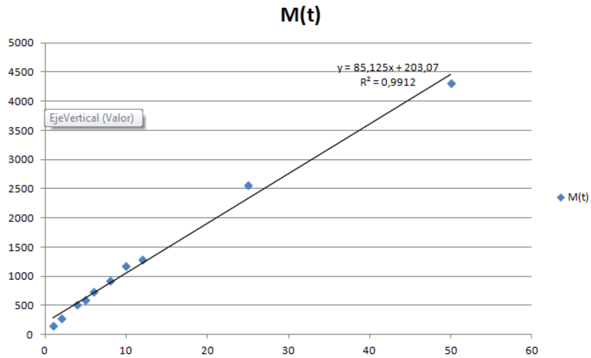
Para poder calcular el $M_1(t)$ necesitamos agrupar los datos de venta del 2016 en semanas consecutivas no solapadas. El tiempo t representa el número de semanas consecutivas usadas para calcular la demanda media $\overline{x_1}(t)$ y la demanda máxima $x_{1,max}(t)$

t	$\overline{x_1}(t)$	$x_{1max}(t)$	$A_1(t)$	$M_1(t) = x_{1max}(t) - \frac{\overline{x_1}}{2}$
1	172,3958333	230	1,334138973	143,802083
2	344,84	444	1,287553648	271,58
4	692,916667	853	1,23102826	506,541667
5	862,1	1020	1,183157406	588,95
6	1039,75	1261	1,2132291	741,3125
8	1385,83333	1608	1,16031269	915,083333
10	1724,2	2033	1,179097552	1170,9
12	2079,75	2330	1,1208659	1290,625
25	4310,5	4717	1,094304605	2561,75
50	8621	8621	1	4310,5

Se dispone de los datos de venta del tipo de cerveza analizado (producto 1) en el año 2016, correspondientes a 50 semanas, que fue el periodo cuando estuvo abierta al público la tienda. Por ello, al tener los datos recogidos de 50 semanas en el año 2016, usamos los divisores de 50 (1,2,5,10,25,50), pero al parecernos pocos datos para calcular la función de regresión a la que se ajusta, decidimos añadir $t = 4$, $t = 6$, $t = 8$ y $t = 12$, que al ser divisores de 48, decidimos prescindir del primer dato y del último para estos t. En la gráfica siguiente se muestran los datos de ventas así obtenidos.



Del gráfico anterior vemos que los puntos se ajustan a una recta $M_1(t) = \alpha_1 + \beta_1 \cdot t$. Para ver que el ajuste es correcta debe determinarse el coeficiente de correlación o bien, el coeficiente de determinación. Haciendo uso del Statgraphics, el programa nos devuelve la recta de regresión $M_1(t) = 203,066593 + 85,1250297 \cdot t$, con $R_1^2 = 0,9911780455$. Lo que confirma que es un muy buen ajuste.



4.2. Producto 2

4.2.1. Distribución de las ventas

Introducimos los datos en el programa auxiliar y no nos rechaza la distribución Gamma como distribución de los datos para la venta semanal de la leche.

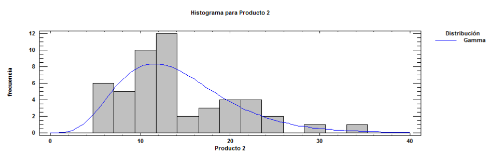


Figura 4.4. Histograma y Gamma producto 2

La función Gamma mostrada tiene como parámetros $\lambda = 5,4387$ y $\vartheta = 0,38277$, o sea, $\Gamma(5,4387; 0,38277)$.

Presentamos los cálculos de la prueba de bondad χ^2.
Como observamos el valor $\chi^2 = 8,39658$ es menor que el esperado. Por lo que aceptamos la distribución Gamma $\Gamma(5,4387; 0,38277)$ como distribución de ajuste a nuestros datos.

Ya sólo nos queda calcular $A_2(t)$, y dado que nuestra demanda media para t semanas será $\overline{x_2}(t) = \lambda \cdot \frac{1}{\vartheta} \cdot t = 13,8125 \cdot t$, el cociente entre la demanda máxima y la demanda media es

Pruebas de Bondad-de-Ajuste para Producto 2
Prueba Chi-Cuadrada

	Limite Inferior	*Limite Superior*	*Frecuencia Observada*	*Frecuencia Esperada*	*Chi-Cuadrada*
menor o igual		7,05882	6	4,78	0,31
	7,05882	9,41176	5	6,60	0,39
	9,41176	11,7647	10	8,17	0,41
	11,7647	14,1176	12	8,10	1,88
	14,1176	16,4706	2	6,92	3,50
	16,4706	18,8235	3	5,31	1,01
	18,8235	21,1765	4	3,77	0,01
	21,1765	23,5294	4	2,51	0,89
mayor	23,5294		4	3,84	0,01

Chi-Cuadrada = 8,39658 con 6 g.l. Valor-P = 0,210465

Figura 4.5. Ajuste de los datos de venta a una gamma

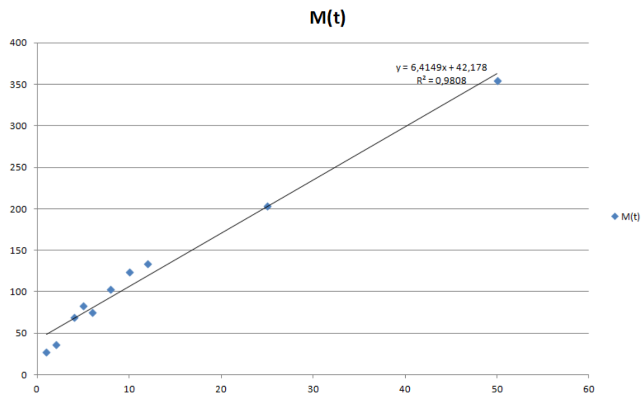
$$A_2(t) = \frac{x_{2max(t)}}{\overline{x_2}(t)} = \frac{34 \cdot t}{13,8125 \cdot t} = 2,4615$$

4.2.2. Cálculo $A_2(t)$ y $M_2(t)$

Al igual que con el producto 1, calculamos el $M_2(t)$ que más se ajuste a los datos semanales de la misma manera que en la sección anterior.

t	$\overline{x_2}(t)$	$x_{2max}(t)$	$A_2(t)$	$M_2(t) = x_{2max}(t) - \frac{\overline{x_2}}{2}$
1	13,8125	34	2,46153846	27,09375
2	28,36	51	1,79830748	36,82
4	56	97	1,73214286	69
5	70,9	119	1,67842031	83,55
6	84	117	1,39285714	75
8	112	159	1,41964286	103
10	141,8	195	1,3751763	124,1
12	168	218	1,29761905	134
25	354,5	381	1,07475317	203,75
50	709	709	1	354,5

Los datos se corresponden también a una recta de la forma $M_2(t) = \alpha_2 + \beta_2 \cdot t$. Usando el Statgraphics obtenemos la recta $M_2(t) = 42,17839169 + 6,414876692 \cdot t$, con el coeficiente de determinación $R_2^2 = 0,9808116431$.



4.3. Producto 3

4.3.1. Distribución de las ventas

A continuación buscamos la distribución Gamma que más se ajusta a los datos de venta de las botellas de vino.

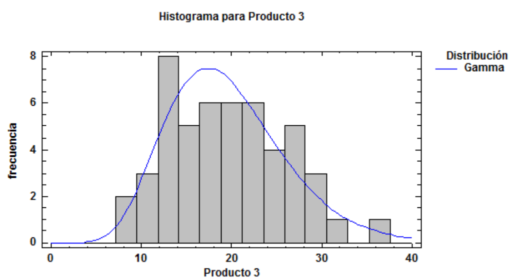


Figura 4.6. Histograma y Gamma producto 3

Esta distribución considera los parámetros $\lambda = 8,87157$ y $\vartheta = 0,453557$, lo que nos lleva a ajustar las ventas de vino a una Gamma $\Gamma(8,87157; 0,453557)$.

Realizamos el análisis de bondad con los datos que tenemos para ver si la distribución se rechaza o no para los datos que tenemos.

Se comprueba que no se rechaza dado que el valor $\chi^2 = 4,24973$ es menor que el esperado.

Pruebas de Bondad-de-Ajuste para Producto 3
Prueba Chi-Cuadrada

	Limite Inferior	*Limite Superior*	*Frecuencia Observada*	*Frecuencia Esperada*	*Chi-Cuadrada*
menor o igual		11,7647	5	5,02	0,00
	11,7647	14,1176	8	5,49	1,15
	14,1176	16,4706	5	7,02	0,58
	16,4706	18,8235	6	7,46	0,28
	18,8235	21,1765	6	6,88	0,11
	21,1765	23,5294	6	5,70	0,02
	23,5294	25,8824	4	4,32	0,02
	25,8824	28,2353	5	3,05	1,25
	28,2353	30,5882	3	2,03	0,47
mayor	30,5882		2	3,05	0,36

Chi-Cuadrada = 4,24973 con 7 g.l. Valor-P = 0,750606

Figura 4.7. Ajuste de los datos de venta a una gamma

Al comprobar que puede corresponderse con una distribución Gamma, sabemos que nuestra demanda media para t semanas será $\overline{x_3}(t) = \lambda \cdot \frac{1}{\vartheta} \cdot t = 19,8541667 \cdot t$.

Por tanto la relación entre la demanda máxima y la demanda media de este producto es,

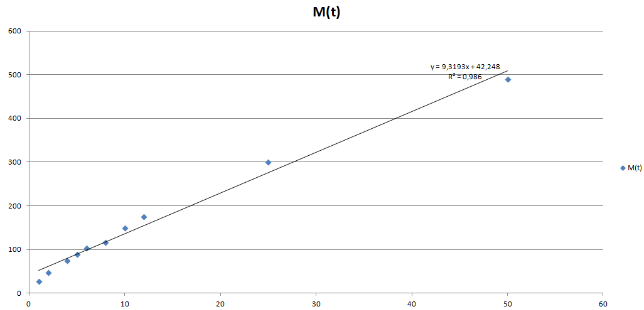
$$A_3(t) = \frac{x_{3max(t)}}{\overline{x_3}(t)} = \frac{37 \cdot t}{19,8541667 \cdot t} = 1,86358867$$

4.3.2. Cálculo de $A_3(t)$ y $M_3(T)$

Procedemos de idéntica manera que anteriormente, y hallamos la recta de regresión $M_3(t)$ que mejor se ajusta a los datos de venta semanales de botellas de vino.

t	$\overline{x_3}(t)$	$x_{3max}(t)$	$A_3(t)$	$M_3(t) = x_{3max}(t) - \frac{\overline{x_3}}{2}$
1	19,8541667	37	1,86358867	27,0729167
2	39,12	66	1,68711656	46,44
4	79,0833333	114	1,44151739	74,4583333
5	97,8	138	1,41104294	89,1
6	118,625	162	1,36564805	102,6875
8	158,166667	195	1,23287671	115,916667
10	195,6	247	1,26278119	149,2
12	237,25	293	1,23498419	174,375
25	489	545	1,11451943	300,5
50	978	978	1	489

Con el uso del Statgraphics la recta de regresión es $M_3(t) = 42,24799619 + 9,319271993 \cdot t$, con $R_3^2 = 0,9860241478$. En el diagrama siguiente se muestran los puntos que representan las ventas de vino semanales y la recta de regresión obtenida.



5

Resolución del problema

En los capítulos anteriores hemos desarrollado los modelos de gestión que mejor se adaptan al problema de inventario que tenemos, y hemos analizado la evolución de las ventas de los productos. Con todo ello, nos queda determinar la política óptima a seguir en la gestión del inventario. Por tanto, se debe determinar el periodo de gestión, el nivel de inventario que tenemos que alcanzar y el costo que nos generará. Dicha política óptima depende de si se considera que la relación $A_i(t)$ entre la demanda máxima y la demanda media es constante o no. Describimos a continuación las políticas óptimas de inventario para cada caso.

5.1. Política óptima para $A_i(t)$ constante

Lo primero es hallar el ciclo del inventario óptimo t_0. Para ello usaremos el modelo 2.3.1 descrito en el capítulo dos. Ahora tenemos que $A_1(t) = k_1 = 1,334138993$ y $r_1 = \frac{\lambda_1}{\vartheta_1}$, $A_2(t) = k_2 = 2,46153846$ y $r_2 = \frac{\lambda_2}{\vartheta_2}$ y $A_3(t) = k_3 = 1,86358867$ y $r_3 = \frac{\lambda_3}{\vartheta_3}$. Sustituyendo estos valores en el ciclo óptimo del inventario se tiene

$$t_0 = \sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot r_i(k - \frac{1}{2})}} = 0,82339 \text{ semanas} = 5{,}763733 \text{ días} \sim 6 \text{ días}.$$

Ese periodo de gestión nos llevaría a tener que hacer 61 reposiciones al año. Ahora calculemos hasta que cantidad debemos reponer el inventario de cada producto y cuanto gasto nos generaría. Los niveles óptimos de stock al comienzo del ciclo de inventario son:

$$S_{01} = x_{1max} \cdot t_0 = 230 \cdot 0,82339043 = 189,379798 \text{ unidades} \sim 32 \text{ cajas}.$$

$$S_{02} = x_{2max} \cdot t_0 = 34 \cdot 0,82339043 = 27,9952745 \text{ unidades} \sim 5 \text{ cajas}.$$

$S_{03} = x_{3max} \cdot t_0 = 37 \cdot 0,82339043 = 30,4654458$ unidades $\sim$ 3 cajas.

Estas cantidades representan hasta donde debemos elevar el inventario en cada reposición.

En este caso el costo anual será

$C = C_1 + C_3,$

$$C_1 = 52 \cdot \sum_{i=1}^{3} c_{1i}(S_{0i} - \frac{\overline{x_i}}{2}) = 382,49678 \qquad \text{y} \qquad C_3 = 5 \cdot 61 = 305$$

Sumados ambos costes, se obtiene un coste total esperado de 687,49678 € al año.

5.2. Política óptima para $A_i(t)$ no constante

Para determinar la estrategia óptima que debemos considerar en la gestión del inventario cuando la relación $A_i(t)$ no es constante debemos seguir el modelo propuesto en el punto 2.3.2 del segundo capítulo. En este caso tendremos que las rectas de regresión para los tres productos considerados serán

$$M_1(t) = 203,066593 + 85,1250297 \cdot t,$$

$$M_2(t) = 42,17839169 + 6,414876692 \cdot t,$$

$$M_3(t) = 42,24799619 + 9,319271993 \cdot t$$

. Entonces se tiene que las pendientes de esas rectas son

$$\beta_1 = 85,1250297 \qquad \beta_2 = 6,414876692 \qquad \beta_3 = 9,319271993$$

Ahora podemos determinar el ciclo de inventario óptimo cuando $A_i(t)$ no es constante usando la fórmula correspondiente. Así se tiene

$$t_0 = \sqrt{\frac{c_3}{\sum_{i=1}^{N} c_{1i} \cdot \beta_i}} = 1,26667827 \text{ semanas} = 8,86674788 \text{ días.}$$

Los niveles óptimos de stock al comienzo del periodo para cada artículo son

$S_{01} = x_{1,max} \cdot t_0 = 230 \cdot 1,26667827 = 291,336002$ unidades $\sim$ 49 cajas.

$S_{02} = x_{2,max} \cdot t_0 = 34 \cdot 1,26667827 = 43,0670611$ unidades $\sim$ 8 cajas.

$S_{03} = x_{3,max} \cdot t_0 = 37 \cdot 1,26667827 = 46,8670959$ unidades $\sim$ 4 cajas.

Estas cantidades representan hasta donde debemos elevar el inventario de cada producto cuando se realiza una reposición de los stocks.

Nuestro costo anual será la suma del coste de mantenimiento y el costo de reposición, esto es

$C = C_1 + C_3$, donde

$$C_1 = \sum_{i=1}^{3} c_{1i} \cdot (\alpha_i + \beta_i \cdot 52) = 173,08 \qquad C_3 = 5 \cdot 40 = 200$$

Lo cual hace un coste total esperado de 373,08 € al año.

Nótese que, este coste es menor que el coste obtenido con la política anterior. Esto tiene lógica ya que sabemos como fueron las ventas del año 2016 y esta política lo que hace es tomar decisiones sobre las reposiciones de los productos en base al mejor ajuste posible de los datos. Ahora bien, Â¿qué pasaría si no tuviéramos esos datos? Tendremos que trabajar con la distribución teórica Gamma y seguir entonces, la política óptima anterior.

5.3. Previsión de futuro

Ahora queremos plantear una previsión de futuro para el siguiente año. Evidentemente las ventas de los productos pueden aumentar, disminuir o mantenerse estable. Ello llevarÃa a tener que trabajar con diferentes escenarios segÃºn fuera el comportamiento de la demanda. Para estudiar ello vamos a suponer que la demanda futura es igual a la demanda actual multiplicada por un factor o escalar positivo que puede ser mayor, menor o igual que uno. De esa manera se podrÃan recoger o aglutinar las distintas alternativas.

Si admitimos que la variable aleatoria X_i que representa las ventas del producto i, al multiplicar dicha variable por un escalar, sabemos que la demanda máxima y la demanda media tambiÃ©n se verán multiplicadas por el mismo escalar m_i, como explicamos en el apéndice.

$$X \hookrightarrow \Gamma(\lambda, \vartheta)$$

$$mX \hookrightarrow \Gamma(\lambda, \frac{\vartheta}{m})$$

Por consiguiente el cociente entre demanda máxima y demanda media $A_i(t)$ no varía, ni tampoco nuestro ciclo de inventario t_0. Lo que conlleva a que el número de reposiciones sigue siendo el mismo.

Sin embargo, sí que cambiarÃa el nivel de inventario y los costes generados por su mantenimiento. AsÃ, tendrÃamos que el nuevo nivel de inventario para el producto i serÃa

$$S_{0i}^{*} = A_i(t) \cdot \frac{\lambda_i \cdot m_i}{\vartheta_i} \cdot t_0 = S_{0i} \cdot m_i$$

Por tanto, el nivel de inventario quedarÃa multiplicado por el escalar.

Por Ãºltimo el coste total esperadoes vendría dados de la siguiente manera:

$C = C_1 + C_3$ donde el coste de mantenimiento serÃa

$$C_1 = 52 \cdot \sum_{i=1}^{3} c_{1i}(S_{0i} \cdot m_i - \frac{\overline{x_i} \cdot m_i}{2}) =$$

$$= 164,883469 \cdot m_1 + 100,596962 \cdot m_2 + 118,016349 \cdot m_3$$

y el coste de reposición sería
$C_3 = 5 \cdot 61 = 305$ €

Como consecuencia el costo total esperado nos quedaría de la forma siguiente

$$C = 164,883469 \cdot m_1 + 100,596962 \cdot m_2 + 118,016349 \cdot m_3 + 305 \text{ €}.$$

Con esto los responsables de la gestión del inventario sólo tendrían que sustituir el valor de cada uno de los escalares m_i que configuran las nuevas demandas de los productos, y ver hasta donde llevar el nivel de stock de su inventario para cada uno de los tres productos estudiados. Ello permitiría determinar el gasto total esperado que generaría la gestión del inventario en ese año.

6

Conclusiones y posibles futuras líneas de trabajo

En este trabajo hemos estudiado algunos modelos de gestión de inventarios y posteriormente se han aplicado los mismos para analizar el comportamiento de los stocks de algunos productos que comercializa una pequeña empresa. Estos modelos han sido seleccionados de acuerdo a las características e hipótesis que determinan el sistema de gestión del inventario de la empresa, con el fin de encontrar el modelo que mejor se adapte a sus necesidades.

Hemos propuesto dos modelos estocásticos de gestión de stocks, para estudiar el comportamiento del inventario de tres productos (una lata de cerveza, un tetrabrik de leche y una botella de cristal de vino).

El primero se fundamenta en detectar que las ventas semanales de los productos se ajusta de acuerdo a una distribución teórica tipo Gamma. Teniendo en cuenta eso, se determina la política óptima que debe seguirse en la gestión del inventario.

El segundo de los modelos de gestión utilizado tiene en cuenta la información disponible de las ventas semanales de los productos, para ajustar rectas de regresión a los costes de mantenimiento esperado de los productos.

Así, se obtiene el periodo de gestión óptimo, los niveles de stocks al comienzo del periodo y el coste mínimo total esperado.

Lógicamente, al ajustarse mejor a los datos esta segunda política de gestión de stocks genera menor coste que la anterior.

Después de este estudio, queda patente la necesidad de mantener un control en la gestión de inventarios por parte de las empresas, con el fin de optimizar sus recursos y aumentar sus beneficios o disminuir los costes. Este estudio se ha centrado en sólo tres productos. Esto hace que si este análisis lo ampliáramos a más productos o, incluso, a todos los productos que se comercializa en la tienda podrÃa obtenerse una enorme diferencia en los resultados del negocio. Por tanto, proponemos ampliar el número de productos a estudiar como posible línea de un futuro trabajo. Esto supondría que quizás habría que plantear nuevos modelos y ver si las restricciones de capacidad en el medio de transporte y la del almacén influyen en la política óptima de reposición de productos. Si pedimos todos los artículos de la tienda a la vez, está claro que necesitaríamos mas medios de transporte y por tanto aumentaría los costos de reposición. También, puede que se necesite una mayor capacidad de almacenaje y, por consiguiente, puede que no se pudiera llevar a efecto la política de gestión del inventario por la restricción del espacio de la empresa.

También, hemos de destacar que la política de empresa no permite el coste de rotura, esto es, siempre tiene que haber stocks de los artículos. Este factor determinó nuestra elección de los modelos a estudiar y aplicar. Propusimos a la empresa el cambio de política, pero en su momento no quedaron convencidos. Esto podría cambiar si se le mostrase un estudio aplicado a su compañía en el que si se permita la existencia de roturas. Esto sería otra posible línea de trabajo a proponer.

Por último, la colaboración de la empresa ha sido manifiesta, y desde aquí agradecemos profundamente su magnífica predisposición para facilitarnos los datos solicitados. Hemos correspondido con este estudio sobre la gestión del inventario de algunos de sus productos y esperamos que el mismo pueda serle de utilidad.

Bibliografía

[1] Zipkin P.H. (2000) *Foundations of Inventory Management. McGraw Hill*

[2] Hax, A. and Candea D. (1984) *Production and Inventory Management, Prentice-Hill*

[3] Silver, E. A.; Pyke, D. F. and Peterson, R. (1998) *Inventory Management and Production Planning and Scheduling, John Wiley and sons*

[4] Quesada, V.; Isidoro, A. and López, L. A. (1992) *Curso y ejercicios de Estadística, Alhambra Universidad*

[5] Naddor E. (1966) *Inventory Systems.John Wiley and sons*

[6] Harris F.W.(1913) *How many parts to make at once. Factory, The magazine of Management.*

[7] Raymon R.(1931) *Quantity and Economy in Manufacture, McGraw Hill*

[8] Fry T.(1928) *Probability and its Engineering, Van Nostrand London*

[9] Taft T.(1918) *The most economical production lot, Iron Age 101.18*

A

Apéndice

A.1. Datos facilitados por la empresa

A.1.1. Unidades vendidas semanalmente

Los datos originales suministrados por la empresa son los datos de venta diarios, pero como se hace inviable mostrar los datos aquí para no excedernos en el número de páginas, se han agrupado por semanas.

Procedemos a mostrar los datos de unidades vendidas durante el año 2016 agrupados por semanas.

semana	unidades vendidas Producto 1	unidades vendidas Producto 2	unidades vendidas Producto 3
04/01-10/01	137	14	17
11/01-17/01	145	10	12
18/01-24/01	171	8	15
25/01-31/01	159	19	28
01/02-07/02	154	25	21
08/02-14/02	121	21	19
15/02-21/02	163	34	12
22/02-28/02	162	13	18

semana	unidades vendidas Producto 1	unidades vendidas Producto 2	unidades vendidas Producto 3
29/02-06/03	165	29	29
07/03-13/03	166	22	22
14/03-20/03	154	17	17
21/03-27/03	126	7	20
28/03-03/04	138	13	22
04/04-10/04	143	25	21
11/04-17/04	118	10	29
18/04-24/04	129	11	37
25/04-01/05	180	6	27
02/05-08/05	107	10	26
09/05-15/05	194	7	22
16/05-22/05	148	20	26
23/05-29/05	187	13	25
30/05-05/06	167	17	22
06/06-12/06	191	13	21
13/06-19/06	176	9	14
20/06-26/06	193	8	23
27/06-03/07	209	7	18
04/07-10/07	202	12	14
11/07-17/07	138	10	15
01/08-07/08	140	16	15

semana	unidades vendidas Producto 1	unidades vendidas Producto 2	unidades vendidas Producto 3
08/08-14/08	230	8	29
15/08-21/08	180	13	24
22/08-28/08	223	12	31
29/08-04/09	220	14	24
05/09-11/09	222	18	15
12/09-18/09	175	5	8
19/09-25/09	194	11	9
26/09-02/09	227	11	25
03/10-09/10	217	10	21
10/10-16/10	181	16	10
17/10-23/10	194	10	23
24/10-30/10	198	13	17
31/10-06/10	166	7	14
07/11-13/11	221	21	14
14/11-20/11	197	10	16
21/11-27/11	207	12	27
28/11-04/11	171	14	17
05/12-11/12	121	9	11
12/12-18/12	169	23	11
19/12-25/12	177	23	13
26/12-01/01	169	23	12

A.2. Reposición de los productos

Procedemos a mostrar los datos de unidades repuestas durante el año 2016.

fecha	unidades repuestas Producto 1	unidades repuestas Producto 2	unidades repuestas Producto 3
11/01		12	
20/01	192		
26/01	192	18	48
30/01	144	24	
04/02	192	18	
10/02	144		
12/02			60
13/06		12	
16/02	168	18	
19/02		12	
22/02		12	
23/02	120	6	
25/02		6	
26/02		18	
29/02	144		
02/03			24
08/03	144	12	
09/03		18	

fecha	unidades repuestas Producto 1	unidades repuestas Producto 2	unidades repuestas Producto 3
14/03	120		48
18/03		24	
22/03	144		
30/03	96		
31/03		48	
02/04			24
06/04	72		
13/04			72
15/04	120		
21/04		24	
23/04	72		
27/04	144		72
30/04	72		
07/05	192		
11/05	144		
14/05	168		48
18/05		12	
21/05	120	12	
25/05	144	36	48
03/06	120		
09/06	192	42	

fecha	unidades repuestas Producto 1	unidades repuestas Producto 2	unidades repuestas Producto 3
16/06	144		
22/06	192		
29/06	192		
07/07	240		
13/07		6	
01/08		18	
03/08	144		
05/08			60
08/08	240		
10/08			48
12/08	240	12	
18/08	240	12	
25/08		12	
29/08		24	
31/08	168		36
07/09	216	18	
15/09	240		
20/09	96		
23/09			72
26/09	240	24	
04/10	192		

fecha	unidades repuestas Producto 1	unidades repuestas Producto 2	unidades repuestas Producto 3
08/10		18	
11/10	144		
14/10	240		
19/10		12	48
21/10	240	12	
28/10	240	6	
03/11	288	12	
09/11		12	72
12/11	144		
18/11	144	12	
23/11		6	
24/11	244	12	
26/11			36
30/11	144	12	
05/12		18	
13/12	192	30	
19/12		12	
22/12	144		
26/12		6	
28/12			24

B

Distribución Gamma

Una de las distribuciones teóricas más utilizadas para las variables continuas es la distribución Gamma. Existen tres diferentes parametrizaciones de la presentación de la Gamma:

1. Con un parámetro de forma k y un parámetro de escala θ.
2. Con un parámetro de forma $\lambda = k$ y un parámetro de escala inversa $\vartheta = 1/\theta$, llamado parámetro de velocidad.
3. Con un parámetro de forma k y un parámetro medio $\nu = k/\beta$

En cada una de estas tres formas, ambos parámetros son números reales positivos.

Nosotros usaremos la segunda por comodidad, ya que es la que usa nuestro programa auxiliar.

Una variable aleatoria X que sigue una distribución Gamma con parámetro de forma α y parámetro de escala inversa de ϑ se denota de la siguiente manera:

$$X \sim \Gamma(\lambda;\vartheta) \equiv Gamma(\lambda;\vartheta)$$

donde la función de densidad de probabilidad en esta parametrización es

$$f(x) = \frac{\vartheta^{\lambda} \cdot x^{\lambda-1} \cdot e^{-\vartheta \cdot x}}{\Gamma\lambda}$$

para $x > 0$ y $\lambda, \vartheta > 0$ y con $\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} \cdot e^{-t} \cdot dt$

Algunas propiedades sencillas de la distribución Gamma que usaremos son:

- $Media = E(X) = \dfrac{\lambda}{\vartheta}$.

- Si $X \sim Gamma(\lambda;\vartheta)$ y dado un escalar $c > 0$, entonces $Y = cX \sim Gamma(\lambda;\frac{\vartheta}{c})$. Por lo que su Media es $E(Y) = \dfrac{\lambda}{\frac{\vartheta}{c}} = \dfrac{\lambda \cdot c}{\vartheta}$.

C

Prueba Chi cuadrado (χ^2) de Pearson

La prueba de ajuste de bondad de χ^2 busca determinar si los datos de una variable aleatoria se corresponden a una cierta distribución de probabilidad conocida.

Para empezar, debemos dividir la distribución en un número finito de intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$ para luego separar los datos observados, que los llamaremos $O_1, O_2, ..., O_n$, de los esperados $E_1, E_2, ..., E_n$, los cuales serían las frecuencias teóricas de cada uno de los intervalos $I_1, I_2, ..., I_n$. Esto hará que tengamos una tabla de frecuencias en la que colocaremos los datos que tenemos y los datos esperados:

	Datos observados	Datos esperados
I_1	O_1	E_1
I_2	O_2	E_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
I_n	O_n	E_n

Tanto la suma de los datos observados como la suma de los datos esperados debe ser lo mismo.

Nos falta decidir si estos datos se ajustan o no a la distribución teórica propuesta. Esto se hace calculando el estadístico $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$.

Cuanto menor sea el estadístico calculado mayor semejanza habrá entre los datos y la distribución con la cual hemos comparado. Nos falta saber cual es el valor crítico para saber si debe rechazar o no la hipótesis de que los datos se ajusten a la distribución considerada. Este valor crítico se hallará usando la tabla de la distribución Chi cuadrado $\chi^2_{\alpha,k}$ donde α es el nivel de significación y

k los grados de libertad, que dependen del tamaño de la muestra y del número de parámetros que caracteriza a la distribución. Nótese que el tamaño de la muestra debería ser mayor de 30 y que los datos esperados $E_i \geq 5$.

Grados de libertad	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,025$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,005$
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	9,24	11,07	12,83	15,09	16,76
6	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	14,48	16,92	19,02	21,67	23,59
10	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19

Si el estadístico calculado es mayor que el valor que buscamos en la tabla anterior, rechazamos la hipótesis de que los datos se aproximan a la distribución teórica propuesta. Por el contrario, si es menor, no rechazamos la hipótesis por tanto aceptaremos que los datos se ajustan a la distribución teórica considerada.

Poster

Blanca Nieves y los Siete Enanitos

ULL Universidad de La Laguna

Elena Nito del Bosque

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

elena.nito@bosque.disney

FACULTAD DE CIENCIAS

Abstract

Hello, here is some text without a meaning. This text should show what a printed text will look like at this place. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\beta)=1$. If you read this text, you will get no information $E=mc^2$. Really? Is there no information? Is there a difference between this text and some nonsense like "Huardest gefburn"? Kjift – not at all! A blind text like this gives you information about the selected font, how the letters are written and an impression of the look. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. This text should contain all letters of the alphabet and it should be written in of the original language. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. There is no need for special content, but the length of words should match the language. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$.

1. Introduction

Hello, here is some text without a meaning. This text should show what a printed text will look like at this place. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\beta)=1$. If you read this text, you will get no information $E=mc^2$. Really? Is there no information? Is there a difference between this text and some nonsense like "Huardest gefburn"? Kjift – not at all! A blind text like this gives you information about the selected font, how the letters are written and an impression of the look. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. This text should contain all letters of the alphabet and it should be written in of the original language. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. There is no need for special content, but the length of words should match the language. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$.

2. Outline of the first Chapter

Hello, here is some text without a meaning. $d\Omega=\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. This text should show what a printed text will look like at this place. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$. If you read this text, you will get no information. $d\Omega=\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. Really? Is there no information? Is there a difference between this text and some nonsense like "Huardest gefburn"? Kjift – not at all! A blind text like this gives you information about the selected font, how the letters are written and an impression of the look. This text should contain all letters of the alphabet and it should be written in of the original language. There is no need for special content, but the length of words should match the language. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\beta)=1$. Hello, here is some text without a meaning $E=mc^2$. This text should show what a printed text will look like at this place. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. If you read this text, you will get no information. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Really? Is there no information? Is there a difference between this text and some nonsense like "Huardest gefburn"? Kjift – not at all! A blind text like this gives you information about the selected font, how the letters are written and an impression of the look. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$. This text should contain all letters of the alphabet and it should be written in of the original language. $d\Omega=\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. There is no need for special content, but the length of words should match the language.

3. Outline of the second chapter

Hello, here is some text without a meaning. This text should show what a printed text will look like at this place. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\beta)=1$. If you read this text, you will get no information $E=mc^2$. Really? Is there no information? Is there a difference between this text and some nonsense like "Huardest gefburn"? Kjift – not at all! A blind text like this gives you information about the selected font, how the letters are written and an impression of the look. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\beta)=1$. This text should contain all letters of the alphabet and it should be written in of the original language $E=mc^2$. There is no need for special content, but the length of words should match the language. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$.

4. Outline of the third chapter

Hello, here is some text without a meaning. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. This text should show what a printed text will look like at this place. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$. If you read this text, you will get no information. $d\Omega=\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. Really? Is there no information? Is there a difference between this text and some nonsense like "Huardest gefburn"? Kjift – not at all! A blind text like this gives you information about the selected font, how the letters are written and an impression of the look. This text should contain all letters of the alphabet and it should be written in of the original language. There is no need for special content, but the length of words should match the language. $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\beta)=1$. Hello, here is some text without a meaning $E=mc^2$. This text should show what a printed text will look like at this place. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$. If you read this text, you will get no information. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. Really? Is there no information? Is there a difference between this text and some nonsense like "Huardest gefburn"? Kjift – not at all! A blind text like this gives you information about the selected font, how the letters are written and an impression of the look. $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$. This text should contain all letters of the alphabet and it should be written in of the original language. $d\Omega=\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$. There is no need for special content, but the length of words should match the language.