

Kevin Cabrera Marrero

*Una introducción a la  
Relatividad General*

An introduction to General Relativity

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Septiembre de 2017

DIRIGIDO POR

*Domingo China Miranda*

*Domingo China Miranda*

*Departamento de Matemáticas, Es-*  
*tadística e Investigación Operativa*

*Universidad de La Laguna*

*38271 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

Quiero agradecer a Domingo Chinaa por darme la oportunidad de estudiar relatividad y por su dedicación para la elaboración de la presente memoria.

También quiero dar las gracias a mis amigos y en especial a mi familia. Su ayuda siempre ha sido un soporte fundamental para mi formación.



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*En la presente memoria exponemos una intrducción a la Teoría General de la Relatividad incluyendo una demostración del Teorema de Birkhoff. La formalización matemática de la Teoría General de la Relatividad se realiza bajo el conteato de la geometría diferencial. Por ello, introducimos algunos resultados sobre grupos de Lie, acciones de grupos de Lie, distribuciones y geometría de Riemann. Introducimos la Teoría General de la Relatividad a partir del ejemplo del disco giratorio y presentamos las ecuaciones de Einstein para el campo gravitatorio. Estudiamos las variedades de Lorentz con simetría esférica y probamos el teorema de Birkhoff. Finalmente, a partir de tal teorema, describimos el espacio-tiempo de Schwarzschild.*

**Palabras clave:** *Relatividad General – Einstein – Solución de Schwarzschild - Simetría esférica – Teorema de Birkhoff*

### *Abstract*

---

*In this essay we present a introduction to the General Theory of Relativity including a proof of Birkhoff's Theorem. Since the mathematical formulation of the General Theory of Relativity is realized in the context of differential geometry, we first introduce some results on Lie groups, action of Lie groups on a manifold, distributions and riemannian geometry. We examine the example of the rotating disk and obtain the Einstein's fields equations. We study Lorentz manifolds with spherical symmetries and prove the Birkhoff's theorem. Finally, using this theorem, we decribe the Schwarzschild space-time.*

**Keywords:** *General Relativity – Einstein – Schwarzschild's Solution – Spherically symmetry – Birkhoff's Theorem.*



---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Geometría Diferencial</b> .....	1
1.1. Grupos de Lie y acciones de grupos de Lie .....	1
1.2. Distribuciones .....	3
1.3. Variedades de Riemann .....	4
1.3.1. Conexión de Levi-Civita. ....	5
1.3.2. Geodésicas y aplicación exponencial. ....	7
1.3.3. Curvatura en una variedad de Riemann .....	8
<b>2. Introducción a la Teoría General de la Relatividad</b> .....	11
2.1. Ejemplo del disco giratorio .....	11
2.2. Teoría de gravitación. Variedades de Lorentz. ....	14
2.3. Ecuaciones de campo gravitatorio .....	16
2.3.1. Derivación heurística de las ecuaciones de campo .....	17
2.3.2. Derivación lagrangiana de las ecuaciones de campo .....	19
<b>3. Campo gravitatorio producido por una estrella. La solución de Schwarzschild</b> .....	21
3.1. Variedades de Lorentz con Simetría Esférica .....	21
3.2. Variedades de Lorentz con simetría esférica y tensor de Ricci nulo	34
3.3. El espacio-tiempo de Schwarzschild .....	40
<b>4. Conclusiones y valoraciones</b> .....	43
<b>Bibliografía</b> .....	45

**Poster** ..... 47



---

# Introducción

## Antecedentes y objetivos

La Teoría Especial de la Relatividad propuesta por A. Einstein en 1905, surgió con el objetivo de conciliar dos grandes teorías de la física clásica: la Mecánica de Newton y la Teoría Electromagnética de Maxwell y Lorentz. En su formulación no se tuvieron en cuenta los fenómenos gravitatorios y, de hecho, la teoría clásica de gravitación era claramente incompatible con los postulados de relativista. En 1908, H. Minkowski, antiguo profesor de Einstein en Zurich, propuso una formulación geométrica de la teoría de Einstein introduciendo un producto escalar  $\eta$  de signatura  $(+, +, +, -)$  en el espacio-tiempo  $\mathbb{R}^4$ . Einstein, aunque inicialmente se resistió a esta *excesiva matematización* de su teoría, con el debido tiempo se dio cuenta de que un campo gravitatorio produce una curvatura en el espacio-tiempo que debía expresarse como una variación en la métrica de Minkowski  $\eta$  y que la geometría de Riemann debía jugar un papel fundamental en su teoría. En 1915, después de un largo estudio de la geometría de Riemann, Einstein pudo llegar a la formulación completa de la Teoría General de la Relatividad, presentando la ecuación que determina el campo gravitatorio  $g$  a partir de las condiciones del medio que son dadas por el tensor de energía-momento  $T$ :

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = \kappa T$$

La ecuación de Einstein es una relación entre tensores de orden 2 que, teniendo en cuenta simetrías, en coordenadas se sustituye por 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales en las componentes de la métrica. Pese a la dificultad de estas ecuaciones, pocos meses después de que Einstein presentara sus ecuaciones, K. Schwarzschild obtuvo una solución exacta simplificando el problema utilizando simetrías. Tal solución modeliza el campo gravitatorio exterior a una estrella con distribución de masa uniforme e independiente del tiempo. La solución de Schwarzschild tiene una enorme importancia debido, entre otras

razones, a que permite estudiar las trayectorias de los cuerpos dejados en libertad en los alrededores de una estrella con las características anteriores. Si bien esto ya se hacía con la Ley de Gravitación Universal propuesta por I. Newton en el siglo XVII, habían algunos fenómenos gravitatorios en la naturaleza, como el avance del perihelio de Mercurio, que la Teoría Clásica de Gravitación no explicaba. En 1923, G. D. Birkhoff estableció que las únicas soluciones de la Ecuación de Einstein con simetría esférica en el vacío venía dada por la solución de Schwarzschild.

## Objetivos y plan de trabajo

El principal objetivo del presente Trabajo de Fin de Grado es dar una formalización geométrica de la Teoría General de la Relatividad incluyendo la obtención de la ecuación de Einstein para un campo gravitatorio, la demostración del Teorema de Birkhoff y su aplicación para obtener la solución de Schwarzschild.

En plan de trabajo ha consistido en tres etapas. En la primera etapa hemos recordado y estudiado conceptos, resultados y propiedades de la geometría diferencial indispensables para llevar a cabo nuestro objetivo. A continuación, como segunda etapa, hemos adquirido los conocimientos físicos necesarios para comprender la necesidad de uso de tales herramientas matemáticas para la formalización geométrica de la relatividad general. Finalmente en la tercera etapa hemos aplicado los conocimientos matemáticos para la obtención del objetivo planteado en el desarrollo del Trabajo de Fin de Grado.

## Contenido y discusión de resultados

La memoria consta de: esta introducción, tres capítulos en los que se desarrollan los contenidos del trabajo de Fin de Grado y las conclusiones.

En el capítulo I damos algunos conceptos y resultados sobre Grupos de Lie, acciones de Grupos de Lie y de Geometría de Riemann necesarios para el estudio que pretendemos realizar. Comenzamos el capítulo II con el ejemplo del disco giratorio, el cual motivará la idea de Einstein de que los problemas físicos bajo la presencia de un campo gravitatorio se deben formalizar y resolver en el contexto de la geometría diferencial, considerando en el espacio-tiempo métricas más generales que la métrica de Minkowski.

Una vez que se ha identificado un campo gravitatorio como una métrica de Lorentz, encontramos la ecuación que debe verificar dicha métrica a partir de las condiciones físicas del medio (Ecuación de Einstein). En primer lugar, proponemos una derivación heurística, análoga a la que plantea Einstein en 1915. Para la su obtención nos apoyamos en la *Ecuación de Poisson*:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho,$$

que determina el potencial gravitatorio  $\Phi$  a partir de la distribución de materia  $\rho$ . La idea de Einstein era encontrar una ecuación que sustituyera a la ecuación de Poisson y que relacionara la métrica, que representa el campo gravitatorio, con un tensor denominado *tensor de energía-impulso*, que en el contexto de la relatividad especial, contiene toda la información sobre la materia. Dicha ecuación se le conoce como *Ecuación de Einstein*:

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = \kappa T,$$

siendo  $g$  la métrica que representa el campo gravitatorio,  $T$  el tensor de energía-impulso asociado al objeto que crea el campo gravitatorio,  $Ric$  y  $R$  el tensor de Ricci y la curvatura escalar de  $g$  y  $\kappa$  una constante.

Finalizamos el capítulo con una derivación alternativa de la ecuación de Einstein, proporcionada por D. Hilbert, sobre la misma fecha que Einstein. Esta deducción se basa en el *Principio de acción estacionaria* y utiliza elementos del cálculo de variaciones.

El último capítulo está dedicado a encontrar la expresión de la métrica que representa el campo gravitatorio producido por un cuerpo esférico (una estrella). Por la naturaleza del problema, el modelo de espacio-tiempo debe ser una variedad de Lorentz  $(M, g)$  que admita simetría esférica. Así, comenzamos el capítulo con el estudio de las variedades de Lorentz con simetría esférica, es decir, variedades sobre las que el grupo  $SO(3)$  actúa como grupo de isometrías de manera que las órbitas de los puntos no fijos por la acción de  $SO(3)$  sean subvariedades espaciales (es decir, la métrica inducida es definida positiva) de dimensión 2. Un primer resultado que obtenemos sobre la métrica  $g$  de una tal variedad es que, para cada punto  $q \in M$  no fijo por la acción de  $SO(3)$ , podemos encontrar un entorno  $\mathcal{U}$  y unas coordenadas  $(r, t, \theta, \phi)$  tal que la métrica se expresa como:

$$g = \pi_1^*(d\omega^2) + K\pi_2^*(d\Omega^2),$$

siendo  $d\omega^2$  una métrica de signatura  $(+, -)$  sobre una superficie  $\mathcal{C}_0$  de ecuaciones  $\theta = \theta_q$  y  $\phi = \phi_q$  (con  $q \equiv (r_q, t_q, \theta_q, \phi_q)$ ),  $d\Omega^2$  una métrica de Riemann con curvatura constante positiva sobre la órbita  $\mathcal{S}_0$  de  $q$  de ecuaciones  $r = r_q$  y  $t = t_q$ ,  $\pi_1$  y  $\pi_2$  las proyecciones de  $\mathcal{U}$  sobre  $\mathcal{C}_0$  y  $\mathcal{S}_0$  respectivamente y  $K$  una función positiva sobre  $\mathcal{U}$  en las variables de  $r$  y  $t$  (ver Teorema 3.11). Utilizando este resultado, para el caso de que la variedad de Lorentz tenga tensor de Ricci nulo, a continuación se obtiene el Teorema de Birkhoff (ver Teorema 3.12) que nos dice que en este caso, podemos encontrar para cada punto no fijo, un entorno  $\mathcal{U}$  y unas coordenadas  $(r, t, \theta, \phi)$  en la que  $g$  se expresa como:

$$g = \frac{1}{1 - \kappa/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - (1 - \kappa/r) dt^2. \quad (0.1)$$

Finalmente, usando el Teorema de Birkhoff describimos un modelo matemático idóneo para estudiar el campo producido por un cuerpo esférico (por ejemplo el Sol). Dicho modelo es la variedad  $V \times \mathbb{R}$ , siendo  $V = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } r > \kappa\}$ ,  $\kappa$  constante, junto con la métrica que se expresa en coordenadas por (0.1). Este espacio-tiempo es denominada *espacio-tiempo de Schwarzschild*.

# Geometría Diferencial

En este capítulo se resumen algunos conceptos y resultados fundamentales sobre geometría diferencial que nos serán de utilidad en los capítulos 2 y 3. Estos han sido extraídos de [1], [4], [7], [10].

## 1.1. Grupos de Lie y acciones de grupos de Lie

Comenzamos exponiendo algunos resultados sobre grupos de Lie y acciones de grupos de Lie sobre variedades.

Los grupos de Lie son grupos algebraicos que son también variedades diferenciables y cumplen una cierta condición de compatibilidad. La mayoría de ejemplos de grupos de Lie son subgrupos del grupo de matrices complejas  $n \times n$ . Estos son de especial interés para la física ya que están íntimamente relacionados con las simetrías de numerosos sistemas físicos.

Sea  $(G, \cdot)$  un grupo. Se dice que  $G$  es un *grupo de Lie* si se le puede dotar de una estructura de variedad diferenciable en el que las aplicaciones  $\mu : G \times G \rightarrow G$  e  $\iota : G \rightarrow G$  definidas por  $(g, h) \mapsto g \cdot h$  y  $g \mapsto g^{-1}$  son diferenciables. Un subgrupo  $H$  de un grupo de Lie  $G$  se dice que es un *subgrupo de Lie* de  $G$  si  $H$  es un subvariedad inmersa de  $G$  y admite una estructura de grupo de Lie tal que la inmersión  $i : H \hookrightarrow G$  es un homomorfismo de grupos de Lie. Una condición necesaria para que un subgrupo algebraico de un grupo de Lie  $G$  sea un subgrupo de Lie, la proporciona uno de los Teoremas de Cartan.

**Teorema 1.1.** *Si  $G$  es un grupo de Lie y  $H$  es un subgrupo de  $G$  cerrado, entonces existe una única estructura diferenciable sobre  $H$  que lo dota de subgrupo de Lie de  $G$ . Además  $H$  es una variedad embebida de  $G$ .*

El grupo  $O(n)$  de isometrías en  $\mathbb{R}^n$  y el grupo  $SO(n)$  de isometrías que conservan la orientación en  $\mathbb{R}^n$  son subgrupos cerrados del grupo de automorfismo  $GL(n, \mathbb{R})$  en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto,  $O(n)$  y  $SO(n)$  son ejemplos de grupos de Lie.

Recordar que un *álgebra* es un espacio vectorial real  $\mathfrak{g}$  dotado de una forma bilinear  $[\cdot, \cdot]$  anticonmutativa. Si  $[\cdot, \cdot]$  verifica además la *identidad de Jacobi*:

$$[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0,$$

para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ , se dice que  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  es un *álgebra de Lie*. A todo grupo de Lie  $G$  se le puede asociar un álgebra de Lie tomando  $[\cdot, \cdot]$  como el conmutador. Fijemos  $a \in G$  y consideremos la aplicación diferenciable  $L_a : G \rightarrow G$  definido por  $g \mapsto L_a(g) = a \cdot g$ . A  $L_a$  se le denomina *traslación por la izquierda* por el elemento  $a$  y resulta ser un difeomorfismo tal que  $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ . Un campo de vectores\*  $X \in \mathfrak{X}(G)$  se dice que es *invariante por la izquierda* si  $(L_a)_*X = X \circ L_a$ . El conjunto  $\mathfrak{g}$  de todos los campos de vectores de  $G$  invariantes por la izquierda admite una estructura de espacio vectorial real. Como además el corchete  $[\cdot, \cdot]$  es una ley de composición interna en  $\mathfrak{g}$ , resulta que  $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$  es un álgebra de Lie a la que denominaremos *álgebra de Lie de  $G$* .

Recordemos que un *subgrupo uniparamétrico*  $\{\varphi_t\}$  en un grupo de Lie  $G$  es un homomorfismo de grupos de Lie  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow G$ ,  $t \mapsto \psi_t$  es decir, una aplicación diferenciable de forma que  $\psi_{t+s} = \psi_t \psi_s$  para todo  $t, s \in \mathbb{R}$ . Resulta que dado un grupo de Lie  $G$  y  $X \in \mathfrak{X}(G)$  invariante por la izquierda, existe un único subgrupo uniparamétrico  $\{\psi_t\}$  en  $G$  tal que  $\frac{d\psi_t}{dt} |_{t=0} = X_e$ , siendo  $e$  el elemento identidad de  $G$ . A la aplicación:

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \exp(X) = \psi_1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

se le denomina *aplicación exponencial* en  $G$ .

**Proposición 1.2.** *Si  $G$  es un grupo de Lie entonces existe un entorno  $\mathcal{W}$  del elemento identidad de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\exp|_{\mathcal{W}} : \mathcal{W} \rightarrow \exp(\mathcal{W})$  es un difeomorfismo.*

Sea ahora  $M$  una variedad diferenciable y  $G$  un grupo de Lie. Se dice que  $G$  *actúa sobre  $M$*  si existe una aplicación diferenciable  $\vartheta : G \times M \rightarrow M$ ,  $(g, q) \mapsto \vartheta(g, q)$  tal que:

- (1)  $\vartheta(e, q) = q$  para todo  $q \in M$ ;
- (2)  $\vartheta(g, \vartheta(h, q)) = \vartheta(g \cdot h, q)$  para cualesquiera  $g, h \in G$  y  $q \in M$ .

A la aplicación  $\vartheta$  se le denomina *acción*. Fijado  $g \in G$  y  $q \in M$  es usual denotar:

$$\begin{aligned} \vartheta_g : M &\longrightarrow M & \vartheta_q : G &\longrightarrow M \\ q &\longmapsto \vartheta_g(q) = \vartheta(g, q) & g &\longmapsto \vartheta_q(g) = \vartheta(g, q) \end{aligned}$$

---

\* en general, dada una variedad diferenciable  $M$  denotamos por  $\mathfrak{X}(M)$  al  $C^\infty(M)$ -módulo constituido por todos los campos de vectores diferenciables de  $M$ .

Si para todo  $p, q \in M$  existe un  $g \in G$  tal que  $q = \vartheta_g(p)$  se dice que la acción es *transitiva*. La acción se dice *efectiva* si la condición  $\vartheta_g(q) = q$  para todo  $q \in M$  implica que  $g = e$ .

Se denomina *espacio de órbitas* de un punto  $q \in M$  a la subvariedad  $\vartheta_q(G)$  de  $M$ . Diremos que un elemento  $g \in G$  *deja fijo* a un elemento  $q$  de  $M$  si  $\vartheta_g(q) = q$ . Fijado  $q \in M$  al conjunto de todos los elementos  $g \in G$  que dejan fijo a  $q$  se le denomina *subgrupo de isotropía de  $q$*  y se denota por  $I_q$ . Por definición,  $I_q$  es un subgrupo cerrado de  $G$  por lo que admite una estructura diferenciable que lo hace subgrupo de Lie de  $G$ .

Consideremos  $(G, \cdot)$  un grupo algebraico y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Se define el conjunto cociente  $G/H$  como  $G/\sim_H$  siendo  $\sim_H$  la relación de equivalencia sobre  $G$  definida por:  $g \sim_H g'$  si y solo si existe  $h \in H$  tal que  $g = h \cdot g'$ . Es bien sabido que si  $H$  no es subgrupo normal de  $G$  el cociente  $G/H$  no admite, en general, una estructura de grupo. Supongamos además que  $G$  es grupo de Lie y  $H$  es cerrado topológico de  $G$ . Entonces se le puede dotar a  $G/H$  de una estructura de variedad diferenciable.

**Teorema 1.3.** *Sea  $G$  un grupo de Lie y  $H$  subgrupo cerrado de  $G$ . A  $G/H$  se le puede dotar de una estructura de variedad diferenciable de forma que la aplicación  $G \times (G/H) \rightarrow G/H$  dada por  $(g, g'H) \mapsto (g \cdot g')H$  es una acción diferenciable.*

**Teorema 1.4.** *Sea  $\vartheta : G \times M \rightarrow M$  una acción transitiva sobre una variedad  $M$ . Si  $I_q$  es el subgrupo de isotropía de un punto no fijo por  $\vartheta$  entonces  $G/I_q$  es difeomorfo a  $M$  por la aplicación  $g \cdot I_q \mapsto \vartheta_g(q)$ .*

Consideremos la acción natural de  $SO(n)$  sobre  $S^{n-1}$ , la cual es transitiva. Si  $q$  es un punto de  $S^n$  no fijo por la acción de  $SO(n)$ , el subgrupo de isotropía  $I_q$  es difeomorfo a  $SO(n-1)$ . Del teorema 1.4 se sigue que  $SO(n)/SO(n-1)$  es difeomorfo a  $S^{n-1}$ . Análogamente, se puede probar que  $SO(n)/O(n-1)$  es difeomorfo a  $\mathbb{R}P^{n-1}$ . Los detalles de este hecho se pueden encontrar en [10] pp. 125-128.

## 1.2. Distribuciones

Sea  $M$  una variedad diferenciable. Se denomina *distribución de dimensión  $r$*  (o simplemente *distribución*) a la asignación de cada punto  $q \in M$  un subespacio de dimensión  $r$  de  $T_qM$ , más precisamente, a la aplicación  $\Pi : q \mapsto \Pi_q$  siendo  $\Pi_q$  un subespacio vectorial de  $T_qM$  de dimensión  $r$  para todo  $q \in M$ . Si para cada  $q \in M$  existe un entorno  $\mathcal{U}$  y  $r$  campos de vectores  $X_1, \dots, X_r$  que constituyen una base de  $\Pi_q$  en cada  $q \in \mathcal{U}$ , entonces se dice que  $\Pi$  es *diferenciable*. Dadas dos distribuciones  $\Pi$  y  $\tilde{\Pi}$  en  $M$ , diremos que son *transversas* si  $\Pi_q \oplus \tilde{\Pi}_q = T_qM$  para todo  $q$  de  $M$ .

Además si  $\Pi$  es una distribución en  $M$ , diremos que  $\Pi$  es *integrable* si para cada  $q \in M$  existe una subvariedad  $N$  tal que  $T_q N = \Pi_q$ . En este caso, a  $N$  se le denomina *subvariedad integral de  $\Pi$* .

Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\Pi$  una distribución en  $M$ . Diremos que  $X$  es un *campo de vectores en  $\Pi$*  (y lo denotaremos por  $X \in \Pi$ ) si  $X_q \in \Pi_q$  para todo  $q \in M$ . Se dice entonces que una distribución  $\Pi$  es *involutiva* si para cualesquiera  $X, Y \in \Pi$  se tiene que  $[X, Y] \in \Pi$ . Es fácil probar que toda distribución integrable es involutiva. El recíproco también es cierto y nos lo proporciona el *Teorema de Frobenius*:

**Teorema 1.5.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\Pi$  una distribución de dimensión  $r$  involutiva en  $M$ . Para cada  $q \in M$  existe una carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$  de coordenadas  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$  de forma que para todo  $a = (a^1, \dots, a^n) \in \psi(\mathcal{U})$  la subvariedad de  $\mathcal{U}$  de ecuaciones  $x^{r+1} = a^{r+1}, \dots, x^n = a^n$  es subvariedad integral de  $\Pi$ .*

El siguiente resultado se obtiene como consecuencia del teorema 1.5 y nos será de gran utilidad en el capítulo 3.

**Teorema 1.6.** *Sea  $\Pi$  y  $\tilde{\Pi}$  dos distribuciones involutivas y transversas sobre  $M$  de dimensión  $r$  y  $n - r$  respectivamente. Entonces para cada punto  $q \in M$  existe una carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$  de coordenadas  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$  de forma que para cada  $a = (a^1, \dots, a^n) \in \psi(\mathcal{U})$  la subvariedad de  $\mathcal{U}$  de ecuaciones  $x^{r+1} = a^{r+1}, \dots, x^n = a^n$  es subvariedad integral de  $\Pi$  y la subvariedad de  $\mathcal{U}$  de ecuaciones  $x^1 = a^1, \dots, x^r = a^r$  es subvariedad integral de  $\tilde{\Pi}$ .*

### 1.3. Variedades de Riemann

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $g$  un campo de tensores\* de tipo  $(2, 0)$  en  $M$ . Para cada  $q \in M$ ,  $g_q$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal de  $T_q M \times T_q M$  a  $\mathbb{R}$ . Diremos que el campo de tensores  $g$  es *simétrico* si  $g_q$  es simétrico para todo  $q \in M$  y *definido positivo* si  $g_q$  es definido positivo para todo  $q \in M$ .

Dada una variedad diferenciable  $M$  y  $g$  un campo de tensores de tipo  $(2, 0)$  en  $M$ , si  $g$  es simétrico y definido positivo, entonces a  $g$  se le denomina *metrica de Riemann* en  $M$  y al par  $(M, g)$  *variedad de Riemann*. Fijado una carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$  de coordenadas  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$ , el tensor  $g$  se expresa en  $(\mathcal{U}, \psi)$  como:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu,$$

siendo  $\{g_{\mu\nu}\}$  las funciones coordenadas de  $g$  respecto de  $(\mathcal{U}, \psi)$ .

\* en lo que sigue, nos referiremos a tensores (o campos de tensores) de tipo  $(r, s)$  a los tensores  $r$  veces covariante y  $s$  veces contravariantes



Si  $(M, g)$  es una variedad de Riemann se define la *longitud* de una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  entre  $\alpha(a)$  y  $\alpha(b)$  (con  $a, b \in I$ ,  $a < b$ ) a la cantidad:

$$L[\alpha] = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t))} dt.$$

### 1.3.1. Conexión de Levi-Civita.

Sea  $M$  una variedad diferenciable, se denomina *conexión lineal* en  $M$  a toda aplicación  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que:

- (1)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z;$
- (2)  $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z;$
- (3)  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y;$
- (4)  $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y;$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$ . Si  $\nabla_X Y = \nabla_Y X$  para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , se dice que  $\nabla$  es *simétrica*.

Sea ahora  $(\mathcal{U}, \psi)$ ,  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$  una carta local de  $M$  y  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  de forma que  $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  y  $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  respecto de  $(\mathcal{U}, \psi)$ . De las propiedades de la conexión lineal se sigue que:

$$\nabla_X Y = \left( X^\mu \frac{\partial Y^\sigma}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma X^\mu Y^\nu \right) \frac{\partial}{\partial x^\sigma}, \tag{1.2}$$

siendo las funciones  $\{\Gamma_{\mu\nu}^\sigma\}$  en  $\mathcal{U}$  las componentes de  $\nabla \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  respecto de la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ , esto es,

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma},$$

denominadas *símbolos de Christoffel* de  $\nabla$  respecto de la carta  $(\mathcal{U}, \psi)$ .

Sea de nuevo  $M$  una variedad diferenciable y  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ . Dados  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $q$  un punto de  $M$ , un estudio de la expresión (1.2) nos muestra que el valor de  $(\nabla_X Y)_q$  queda totalmente determinado por  $X_q$  y el valor de  $Y$  sobre una curva que pasa por  $q$  y que tenga  $X_q$  como vector tangente en  $q$ . Por ello, es usual denotar  $(\nabla_X Y)_q$  como  $\nabla_{X_q} Y$ . Esto nos permite definir el concepto de derivación covariante a lo largo de una curva.

Si  $\alpha : I \rightarrow M$  es una curva en  $M$ , se le denomina *campo de vectores a lo largo de  $\alpha$*  a toda aplicación  $X : I \rightarrow TM$  tal que  $X_t \in T_{\alpha(t)}M$  para todo  $t \in I$ . Fijemos  $(\mathcal{U}, \psi)$  una carta local de coordenadas  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$  y  $\alpha$  una curva totalmente contenida en  $\mathcal{U}$ . Entonces todo campo de vectores  $X$  en  $\alpha$  se escribe como:

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \circ \alpha,$$

siendo  $X^\mu$  funciones reales en  $I$ . Si además  $\{X^\mu\}$  son diferenciables para cualquier carta local, se dice que  $X$  es un *campo de vectores diferenciable a lo largo*

de  $\alpha$ . Al conjunto de todos los campos de vectores diferenciales a lo largo de  $\alpha$  lo denotaremos por  $\mathfrak{X}(\alpha)$  y admite de forma natural una estructura de  $C^\infty(I)$ -módulo. De aquí, estamos en condiciones de definir la derivada covariante de un campo a lo largo de una curva. Dada la curva  $\alpha : I \rightarrow M$  denotamos por  $\dot{\alpha}$  al vector tangente a  $\alpha$ , es decir,  $\dot{\alpha}(t) = \alpha_{*t} \left( \frac{d}{dt} \Big|_t \right)$ .

**Proposición 1.7.** *Si  $M$  es una variedad diferenciable y  $\nabla$  una conexión lineal en  $M$ , existe un única aplicación  $\nabla_{\dot{\alpha}} : \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$  tal que:*

1.  $\nabla_{\dot{\alpha}}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \nabla_{\dot{\alpha}} X + \mu \nabla_{\dot{\alpha}} Y$ ;
2.  $\nabla_{\dot{\alpha}}(fX) = \frac{df}{dt} X + f \nabla_{\dot{\alpha}} X$ ;
3.  $\nabla_{\dot{\alpha}}(Z \circ \alpha) = \nabla_{\dot{\alpha}(t)} Z$  para todo  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ ;

para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$ ,  $f \in C^\infty(I)$  y  $\lambda, \mu$  reales.

Dado  $X \in \mathfrak{X}(\alpha)$ , al campo de vectores  $\nabla_{\dot{\alpha}} X$  lo denominamos *derivada covariante de  $X$  a lo largo de  $\alpha$* . Si  $(\mathcal{U}, \psi)$  es una carta local de coordenadas  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$  y suponemos que  $\alpha(I)$  está contenido en  $\mathcal{U}$ , entonces:

$$\nabla_{\dot{\alpha}} X = \left( \frac{dX^\sigma}{dt} + (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma \circ \alpha) \frac{d(x^\mu \circ \alpha)}{dt} dX^\nu \right) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \circ \alpha,$$

siendo  $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  respecto de  $(\mathcal{U}, \psi)$ .

Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\nabla$  una conexión lineal. Se dice que  $\nabla$  es *libre de torsión* si  $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ . Si  $g$  es un tensor de Riemann en  $M$ , diremos que  $\nabla$  es *compatible* con  $g$  si:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad (1.3)$$

para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Esto nos permite exponer el siguiente resultado.

**Teorema 1.8.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann. Existe una única conexión lineal  $\nabla$  sobre  $M$  compatible con  $g$  y libre de torsión en  $M$ .*

A la conexión dada por el teorema anterior se le denomina *conexión de Levi-Civita* de  $g$  y está determinada por la *fórmula de Koszul*:

$$g(\nabla_X Y) = \frac{1}{2} \left( X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X]) \right).$$

Sea  $(\mathcal{U}, \psi)$  una carta local en una variedad de Riemann  $(M, g)$  con coordenadas  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$ . Si la métrica de Riemann se expresa localmente como  $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  y sustituimos  $X = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  y  $Z = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$  en la fórmula de Koszul, obtenemos que:

$$g_{\alpha\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\right), \quad (1.4)$$

y por lo tanto:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\alpha}\left(\frac{g_{\mu\alpha}}{x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}\right). \quad (1.5)$$

### 1.3.2. Geodésicas y aplicación exponencial.

Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann y  $\gamma : I \rightarrow M$  una curva en  $M$ . Se dice que  $\gamma$  es *geodésica* si  $\dot{\gamma}$  es un campo de vectores paralelo a lo largo de  $\gamma$ , esto es que  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$  en  $I$ . Si  $(\mathcal{U}, \psi)$  es una carta local de coordenadas  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$ , una curva  $\gamma$  en  $\mathcal{U}$  es geodésica si y sólo si:

$$\frac{d^2(x^{\sigma} \circ \gamma)}{dt^2} + (\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \circ \gamma) \frac{d(x^{\mu} \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^{\nu} \circ \gamma)}{dt} = 0,$$

para todo  $1 \leq \sigma \leq n$ .

Observar que en  $\mathbb{R}^n$ , los segmentos de rectas se pueden caracterizar por aquellas curvas  $\gamma$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $D_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ , siendo  $D$  la conexión natural de  $\mathbb{R}^n$ . En este sentido, se entiende que las geodésicas son la generalización natural de segmentos de líneas rectas a variedades de Riemann. Por otro lado, las líneas rectas en  $\mathbb{R}^n$  se pueden ver como aquellas curvas que minimizan su longitud. A continuación, indicamos cómo las geodésicas verifican una propiedad análoga en variedades de Riemann.

Sea  $\alpha = \alpha(t)$  una curva en  $M$  parametrizada por su longitud de arco y definida en un abierto que contiene a  $[0, a]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . Se denomina *variación* de  $\alpha$  a toda aplicación diferenciable:

$$\begin{aligned} H : (-\xi, \xi) \times (-\xi, a + \xi) &\longrightarrow M \\ (s, t) &\longmapsto H(s, t) \end{aligned}$$

con las siguientes propiedades:

- (1)  $H(0, t) = \alpha(t)$  para todo  $0 \leq t \leq a$ ;
- (2)  $H(s, 0) = \alpha(0)$  y  $H(0, a) = \alpha(a)$  para todo  $-\xi < s < \xi$ .

Está claro que para cada  $s$  fijo,  $H(s, \cdot)$  es una curva en  $M$  con extremos  $\alpha(0)$  y  $\alpha(a)$ , por lo que podemos calcular su longitud:

$$L[H(s, \cdot)] = \int_0^a \sqrt{g\left(\frac{\partial H}{\partial t}(s, t), \frac{\partial H}{\partial t}(s, t)\right)} dt.$$

De esta forma,  $s \mapsto L[H(s, \cdot)]$  es una función diferenciable en  $(-\xi, \xi)$ . Diremos que la curva  $\alpha$  dada anteriormente es *extremal para la longitud* si:

$$\delta L[H] = 0,$$

para cualquier variación  $H$  de  $\alpha$ , siendo  $\delta L[H] = \frac{d}{ds}|_{s=0} L[H(s, \cdot)]$ .

**Proposición 1.9.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann y  $\gamma$  una curva en  $M$ . Entonces  $\gamma$  es geodésica si y sólo si  $\gamma$  (parametrizada por su longitud de arco) es extremal para la longitud.*

Las curvas geodésicas tienen una importante propiedad que permiten establecer un difeomorfismo local entre una variedad de Riemann  $(M, g)$  y su espacio tangente. Fijados  $q \in M$  y  $v \in T_qM$  existe una única geodésica, que denotaremos por  $\gamma_v : (-\xi, \xi) \rightarrow M$ , tal que  $\gamma_v(0) = q$  y  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Además, para cada  $\lambda > 0$ , la curva  $t \mapsto \gamma = \gamma_v(\lambda t)$  es de nuevo una geodésica definida en  $(-\xi/\lambda, \xi/\lambda)$  tal que  $\gamma_{\lambda v}(1) = \gamma_v(\lambda)$ .

Sea de nuevo  $(M, g)$  una variedad de Riemann y  $q \in M$ . Si  $\Omega_q$  es el subconjunto de  $T_qM$  formado por aquellos vectores  $v \in T_qM$  tales que  $\gamma_v$  está definida al menos en  $[0, 1]$ , se define la aplicación exponencial en  $q$  como:

$$\begin{aligned} \exp : \Omega_q &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \exp_q(v) = \gamma_v(1) \end{aligned}$$

Por definición, la aplicación exponencial transforma rectas que pasan por el origen de  $T_qM$  en geodésicas de  $M$  que pasan por  $q$ .

**Proposición 1.10.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann. Para cada punto  $q \in M$  existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $q$  en  $\Omega_q$  de forma que para cada  $p \in \mathcal{U}$  existe un entorno  $\mathcal{W}_p$  del elemento neutro de  $T_pM$  de forma que la aplicación  $\exp_p : \mathcal{W}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{W}_p)$  es un difeomorfismo y  $\mathcal{U} \subseteq \exp_p(\mathcal{W}_p)$ .*

### 1.3.3. Curvatura en una variedad de Riemann

Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann. Se define el *tensor de curvatura de Riemann* de  $g$  al tensor de tipo  $(3, 1)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto \mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z \end{aligned}$$

Se puede comprobar que verifica las siguientes propiedades de simetría:

- (1)  $\mathcal{R}(X, Y)Z = -\mathcal{R}(Y, X)Z$ ;
- (2)  $g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathcal{R}(X, Y)W, Z)$ ;
- (3)  $g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W) = -g(\mathcal{R}(Z, W)X, Y)$ ;

para cualesquiera  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Sea  $(\mathcal{U}, \psi)$ ,  $\psi = (x^1, \dots, x^n)$  una carta local en  $M$  de coordenadas y  $X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $Y = Y^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  y  $Z = Z^\sigma \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ . Entonces podemos escribir:

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = X^\mu Y^\nu Z^\sigma R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}, \quad (1.6)$$

siendo  $R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ . Si  $\{\Gamma_{\mu\nu}^\sigma\}$  son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica, las funciones componentes  $\{R_{\sigma\mu\nu}^\lambda\}$  se expresan como:

$$R_{\sigma\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\beta}\Gamma_{\mu\beta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\sigma}^{\beta}\Gamma_{\nu\beta}^{\lambda}.$$

Consideremos una variedad de Riemann y  $\{e_{\mu}\}$  una base local ortonormal de campos de vectores, esto es, una familia de  $n$  campos de vectores en un abierto  $\mathcal{U}$  tal que  $g(e_{\mu}, e_{\nu}) = \delta_{\mu\nu}$  para todo  $1 \leq \mu, \nu \leq n$ . Se define el *tensor de Ricci* de  $g$ , como el campo de tensores de tipo  $(2, 0)$ .

$$\begin{aligned} Ric : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto Ric(X, Y) = \sum_{\mu} g(R(e_{\mu}, X)Y, e_{\mu}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Se define además el *escalar de curvatura* de  $g$  a la aplicación diferenciable:

$$\begin{aligned} R : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ q &\longmapsto R(q) = -2 \sum_{\mu} Ric(e_{\mu}, e_{\mu}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

siendo  $F_{\mu\nu}$  el plano de  $T_q M$  generado por  $\{e_{\mu}(q), e_{\nu}(q)\}$  para cada  $q \in M$ . Se puede comprobar que las definiciones (1.7) y (1.8) son independientes de la base local ortonormal de campos de vectores utilizada

*Observación.* Se puede comprobar que en toda variedad de Riemann  $(M, g)$ , se tiene que  $2\text{div}(Ric) = \text{div}(Rg)$ .

Un método alternativo para calcular el tensor de curvatura de una variedad de Riemann viene dado por ecuaciones de estructura de Cartan. Sea  $(M, g)$  una variedad de Riemann y  $\{e_{\mu}\}$  una base local ortonormal de campos de vectores en un abierto  $\mathcal{U}$  de  $M$ . Para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$  podemos escribir:

$$\nabla_X e_{\mu} = \omega_{\mu}^{\nu}(X)e_{\nu}.$$

A las 1-formas  $\{\omega_{\mu}^{\nu}\}$  se les conoce como *1-formas de conexión* de  $(M, g)$ . Análogamente, para cada  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  expresamos:

$$R(X, Y)e_{\mu} = 2\Omega_{\mu}^{\nu}(X, Y)e_{\nu},$$

siendo  $\Omega_{\mu}^{\nu}$  una 2-forma conocida como *2-forma de curvatura* de  $(M, g)$ . Sea ahora  $\{\theta^{\mu}\}$  a la base dual de  $\{e_{\mu}\}$ . Existe una relación entre esta base dual, las 1-formas de curvatura y las 2-formas de conexión y vienen dadas por las *ecuaciones de estructura de Cartan*:

$$d\theta^{\mu} = \theta^{\nu} \wedge \omega_{\nu}^{\mu} \quad (1.9)$$

$$\Omega_{\mu}^{\nu} = d\omega_{\nu}^{\mu} - \omega_{\mu}^{\sigma} \wedge \omega_{\sigma}^{\nu} \quad (1.10)$$

siendo  $\wedge$  el producto exterior.



## Introducción a la Teoría General de la Relatividad

La teoría especial de la relatividad no describe los fenómenos físicos de naturaleza gravitatoria, y si quisiésemos adaptar la teoría newtoniana de gravitación al marco relativista, encontraríamos una clara incompatibilidad con los postulados relativistas. La teoría general de la relatividad pretende ser una teoría que englobe los efectos gravitatorios y en ausencia de estos, se obtenga como caso límite la relatividad especial.

En primer lugar presentaremos el ejemplo del disco giratorio, considerando un sistema de referencia no inercial y argumentaremos que las fuerzas (ficticias) que actúen sobre las partículas dejadas en libertad aparentan una naturaleza gravitatoria. Este hecho motivará la idea de que para estudiar fenómenos físicos bajo la presencia de un campo gravitatorio, debemos considerar métricas más generales que la de Minkowski.

### 2.1. Ejemplo del disco giratorio

Sea  $S$  un sistema inercial con origen  $o$  de coordenadas espaciales  $x, y, z$  y coordenada temporal  $t$ . A continuación nos ocupamos de construir otro sistema de referencia  $S'$  que se moverá con movimiento rotacional respecto de  $S$ . Para ello, consideremos un disco, que denotaremos también como  $S'$ , de radio  $R > 0$  contenido en el plano  $z = 0$ . Inicialmente suponemos que para un tiempo inicial  $t = 0$  los puntos del disco están fijos respecto de  $S$ . Asignamos a cada punto  $q$  de este disco las coordenadas polares  $(r, \theta)$ , siendo  $r$  la distancia

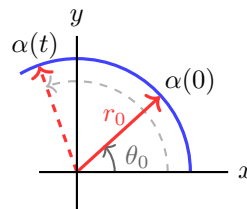


Figura 2.1. Punto fijo respecto del disco

de  $q$  al origen  $o$  y  $\theta$  el ángulo que forma el vector de posición de  $q$  con el eje  $ox$  de  $S$ . Suponemos ahora que en el instante  $t = 0$  el disco comienza a girar con velocidad angular constante  $\omega$  con  $\omega R < c$  (aquí,  $c$  representa la velocidad de la luz en el vacío). De ésta forma, cada punto  $q$  del disco describirá una curva espacial (ver figura 2.1) con coordenadas respecto de  $S$ :

$$(x(t), y(t)) = (r \cos(\omega t + \theta), r \sin(\omega t + \theta)), \quad (2.1)$$

para todo  $t > 0$ . Hemos omitido la coordenada  $z$  pues el movimiento ocurre solamente en el plano  $xy$ . Una vez que el disco  $S'$  está en movimiento, utilizaremos las coordenadas  $(r, \theta)$  descritas anteriormente como coordenadas espaciales para el sistema  $S'$ .

El movimiento de una partícula fija en un punto  $p$  de coordenadas  $(r, \theta)$  en  $S'$  es representada respecto de  $S$  por una curva en el espacio-tiempo de Minkowski:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), t), \quad (2.2)$$

para todo  $t > 0$ , en el que  $(x(t), y(t))$  está dado por (2.1). Si  $\alpha'$  es la derivada de  $\alpha$  respecto al tiempo  $t$  y  $\eta$  es la métrica de Minkowski escrita en las coordenadas de  $S$ ,  $\eta = dx^2 + dy^2 - c^2 dt^2$ , entonces:

$$\eta(\alpha'(t), \alpha'(t)) = r^2 \omega^2 - c^2,$$

para todo  $t > 0$ . De esta forma, el tiempo propio de la partícula será:

$$\tau(t) = \frac{1}{ic} \int_0^t \sqrt{\eta(\alpha'(\lambda), \alpha'(\lambda))} d\lambda = t \sqrt{1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}}. \quad (2.3)$$

De aquí, deducimos que el tiempo propio de las partículas fijas respecto de  $S'$  depende de su distancia al origen. En consecuencia, las marchas de los relojes de  $S'$  irán cada vez mas despacio a medida que nos alejamos del origen. Dado que conocemos la regla de cambio (2.3), podemos adoptar como tiempo común para  $S'$  el tiempo de un reloj situado en el origen ( $r = 0$ ) que coincide con el tiempo  $t$  de  $S$ .

En resumen, tenemos un sistema de referencia inercial  $S$  de coordenadas  $(x, y, t)$  y otro sistema de referencia  $S'$  de coordenadas  $(r, \theta, t)$  que se relacionan por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t + \theta) \\ y = r \sin(\omega t + \theta) \end{cases} \quad (2.4)$$

Fijemos ahora una partícula de masa  $m$  estática respecto de  $S'$  que se encuentra en una posición  $q$  de coordenadas  $(r_0, \theta_0)$  respecto de  $S'$ . Esta describe una curva en el espacio-tiempo de Minkowski de coordenadas (2.1) respecto de  $S$ . Calcularemos la fuerza de Minkowski que experimenta. Su tiempo propio viene dado por  $\tau(t) = \alpha_0 t$  siendo  $\alpha_0$  el coeficiente  $\sqrt{1 - r_0^2 \omega^2 / c^2}$ . Si parametrizamos  $\alpha$  por su tiempo propio, se tiene que:



$$\alpha(\tau) = \left( r_0 \cos\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right), r_0 \sin\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right), \frac{\tau}{\alpha_0} \right), \quad (2.5)$$

y la aceleración de Minkowski será:

$$\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}(\tau) = -\frac{\omega^2 r_0}{\alpha_0} \left( \cos\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right), \sin\left(\frac{\omega}{\alpha_0}\tau + \theta_0\right), 0 \right).$$

Por lo tanto, una partícula de masa  $m$  inmóvil respecto de  $S'$  en el punto  $(r_0, \theta_0)$  experimenta una fuerza de Minkowski de módulo  $m\omega^2 r_0/\alpha_0^2$  dirigida hacia el origen de coordenadas de  $S$ . A esta fuerza se le conoce como *fuerza centrípeta*. Estos cálculos se han realizado utilizando las coordenadas de  $S$ . Se puede comprobar que si hacemos los cálculos respecto a las coordenadas  $r, \theta$  de  $S'$ , llegaríamos al mismo resultado. Esto se debe a que la fuerza de Minkowski  $F$  es un concepto intrínseco. Se pueden encontrar los detalles de este cálculo en ([4] pp. 279-281).

A continuación, suponiendo que el sistema acelerado  $S'$  es inercial, analizaremos las consecuencias de la Primera Ley de Newton. Supongamos que dejamos una partícula en libertad en el punto  $(r_0, \theta_0)$  en el instante  $t = 0$  sin darle ninguna velocidad inicial respecto de  $S'$ . Si  $\gamma = \gamma(t)$  es la trayectoria de la partícula en el espacio-tiempo de Minkowski, entonces:

$$\gamma(t) = (r(t), \theta(t), t) = (\gamma^1(t), \gamma^2(t), \gamma^3(t)),$$

para todo  $t > 0$ , con  $\gamma(0) = (r_0, \theta_0, 0)$  y  $\gamma'(0) = (0, 0, 1)$ . La condición de que no actúa ninguna fuerza sobre ella será equivalente a que  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ , esto es:

$$\frac{d^2\gamma^\sigma}{dt^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \circ \gamma \frac{d\gamma^\mu}{dt} \frac{d\gamma^\nu}{dt} = 0, \quad (2.6)$$

para  $1 \leq \sigma \leq 3$ . Calculemos los símbolos de Christoffel  $\{\Gamma_{\mu\nu}^\sigma\}$  de la métrica de Minkowski en las coordenadas  $(r, \theta, t)$  de  $S'$ . De (2.4) se sigue que:

$$\begin{aligned} dx &= \cos(\omega t + \theta) dr - r\omega \sin(\omega t + \theta) dt - r \sin(\omega t + \theta) d\theta, \\ dy &= \sin(\omega t + \theta) dr + r\omega \cos(\omega t + \theta) dt + r \cos(\omega t + \theta) d\theta, \end{aligned}$$

y sustituyendo en  $\eta = dx^2 + dy^2 - c^2 dt^2$  queda:

$$\eta = dr^2 + r^2 d\theta^2 + 2r^2\omega dt d\theta - (c^2 - r^2\omega^2) dt^2. \quad (2.7)$$

Por lo tanto, la matriz métrica y su inversa serán:

$$(\eta_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & r^2\omega \\ 0 & r^2\omega & r^2\omega^2 - c^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\eta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} - \frac{\omega^2}{c^2} & \frac{\omega}{c^2} \\ 0 & \frac{\omega}{c^2} & -\frac{1}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, las ecuaciones (2.6) en  $t = 0$  son equivalente a:

$$\frac{d^2\gamma^\sigma}{dt^2}\Big|_{t=0} = -(\Gamma_{33}^\sigma \circ \gamma)(0).$$

Utilizando la expresión (1.5) de los símbolos de Christoffel  $\{\Gamma_{\mu\nu}^\sigma\}$  para la métrica (2.7), se sigue que  $\Gamma_{33}^1 = -r\omega^2$ ,  $\Gamma_{33}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0$  y en consecuencia:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2}\Big|_{t=0} = r_0\omega^2 \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{t=0}.$$

En física, al vector  $d^2\gamma/dt^2$  se le denomina *aceleración aparente* respecto de  $S'$ . Si el sistema  $S'$  refiere la aceleración aparente a su tiempo propio  $\tau = \alpha_0 t$  la partícula tendrá una aceleración aparente igual a:

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau}\Big|_{\tau=0} = \frac{r_0\omega^2}{\alpha_0^2} \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\gamma(0)}.$$

Para el sistema  $S'$  sobre la partícula actúa una fuerza aparente de módulo  $mr_0\omega^2/\alpha_0^2$  y de sentido contrario a la fuerza centrípeta. A ésta se le conoce como *fuerza centrífuga*.

En resumen, para el sistema inercial  $S$ , sobre una partícula de masa  $m$  inmóvil respecto de  $S'$  en el punto  $(r_0, \theta_0)$  actúa una fuerza centrípeta de módulo  $m\omega^2 r_0^2/\alpha_0^2$ . Por el contrario, para un observador de  $S'$ , además de ésta fuerza actúa otra de igual módulo pero de sentido contrario a la centrípeta (fuerza centrífuga). Esta nueva fuerza no es apreciada por los observadores de  $S$ . La fuerza centrífuga no es otra cosa que el fruto de la elección del sistema de coordenadas.

Consideremos ahora un observador de  $S'$  situado en el punto  $p$  en  $t = 0$  que permanece fijo respecto del disco. Tal observador podría pensar que en un entorno suficientemente pequeño, la fuerza (aparente) que sufre la partícula es producida por la acción de un campo gravitatorio. Si realizamos el experimento anterior con una partícula de masa  $M$ , esta sufriría exactamente la misma aceleración. Esta es una propiedad característica de los campos gravitatorios. Sin embargo, en un entorno suficientemente grande, el observador medirá que la fuerza que actúa sobre la partícula es directamente proporcional a su distancia al origen, lo que contradice la Ley de la gravitación universal de Newton. Por lo tanto: *Una partícula dejada en libertad, en un entorno suficientemente pequeño, no puede diferenciar si su movimiento es producido por la acción de un campo gravitatorio o es debido a la presencia de unas fuerzas ficticias debidas a un movimiento no inercial del observador.*

## 2.2. Teoría de gravitación. Variedades de Lorentz.

En la sección anterior, el movimiento no inercial del sistema  $S'$  producía unas fuerzas ficticias sobre las partículas dejadas en libertad. Localmente, estas partículas se comportaban como si estuviesen bajo la acción de un campo

gravitatorio y sus trayectorias eran geodésicas de la métrica:

$$g = dr^2 + r^2 dt\theta^2 + 2r^2\omega dt d\theta - (c^2 - r^2\omega^2) dt^2. \tag{2.8}$$

Esto motiva el hecho de considerar métricas más generales que la de Minkowski para describir un campo gravitatorio. Asumiremos entonces que un campo gravitatorio no es más que la modificación de la métrica de Minkowski  $\eta = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ .

Observar que la métrica  $g$  dada en (2.8) sigue siendo una métrica llana y con un cambio de coordenadas apropiados la podemos escribir como la métrica de Minkowski  $\eta$ . En general, no es lógico imponer esta condición a los campos gravitatorios. Lo que si resulta natural imponer es que el campo gravitatorio esté representado por un tensor métrico  $g$  en algún abierto  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^4$  de forma que, para cada punto  $q$  en  $\mathcal{U}$ , la métrica  $g_q$  se puede poner con un cambio de coordenadas apropiado, como la métrica de Minkowski.

En problemas globales, el par  $(\mathcal{U}, g)$  descrito anteriormente debe ser sustituido por una variedad de Lorentz  $(M, g)$ , en la que  $g$  representa el campo gravitatorio. Las partículas dejadas en libertad seguirán trayectorias geodésicas de la métrica  $g$  con vector tangente temporal apuntando hacia el futuro. Los rayos de luz seguirán trayectorias geodésicas de vector tangente lumínico apuntando hacia el futuro. Un observador describirá una curva de vector tangente temporal apuntando hacia el futuro. El tiempo propio del observador, desde  $t_0$  a  $t$ , será:

$$\tau = \frac{1}{ic} \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt,$$

siendo  $\alpha = \alpha(t)$  la trayectoria del observador.

**Definición 2.1.** Una variedad de Lorentz es un par  $(M, g)$ , en el que  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión 4 y  $g$  un campo de tensores de tipo  $(2, 0)$ , simétrico y no degenerado de signatura constante  $(+, +, +, -)$  que denominaremos métrica de Lorentz.

Así, si  $(M, g)$  es una variedad de Lorentz, para todo  $q \in M$

$$g_q : T_q M \times T_q M \longrightarrow \mathbb{R},$$

es una aplicación bilineal simétrica y podemos encontrar una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_q M$  en la que la matriz  $(g_{\mu\nu}(q))$  asociada a  $g_q$  es diagonal:

$$(g_{\mu\nu}(q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A continuación nos ocupamos de exponer qué entendemos por una orientación temporal en una variedad de Lorentz.

**Definición 2.2.** Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz y  $q$  un punto de  $M$ . Un vector  $v \in T_q M$  se dice que es espacial, temporal o lumínico si  $g_q(v, v) > 0$ ,  $g_q(v, v) < 0$  o  $g_q(v, v) = 0$  respectivamente.

Para cada punto  $q$  de una variedad de Lorentz  $(M, g)$  el subconjunto de  $T_q M$ :

$$C_q = \left\{ v \in T_q M \text{ tal que } v \text{ es temporal} \right\},$$

tiene dos componentes conexas, que denotaremos por  $C_q^+$  y  $C_q^-$ . A  $C_q$  se le conoce como *cono de los vectores temporales*.

**Definición 2.3.** Una variedad de Lorentz  $(M, g)$  es orientable respecto del tiempo si para cada punto  $q \in M$  podemos elegir una componente conexa  $C_q^+$  de  $C_q$  con la siguiente propiedad: en toda carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$  de  $M$  existe un campo de vectores  $T \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$  tal que  $T_p \in C_p^+$  para todo  $p \in \mathcal{U}$ . La elección de una componente conexa  $C_q^+$  en cada  $T_q M$  con la propiedad anterior se le denomina *orientación temporal en  $M$* .

En ([4], pp. 286-287) podemos encontrar demostrado el siguiente resultado:

**Proposición 2.4.** Una variedad de Lorentz  $(M, g)$  es orientable respecto del tiempo si y sólo si existe un campo de vectores  $T \in \mathfrak{X}(M)$  de forma que  $T_q$  es un vector temporal para todo  $q \in M$ .

**Definición 2.5.** Un espacio-tiempo es una variedad de Lorentz  $(M, g)$  con una *orientación temporal*.

Un vector tangente  $v \in T_q M$  apunta hacia el futuro si  $g_q(v, w) < 0$  para algún  $w \in C_q^+$ . Así, los vectores de  $C_q^+$  apuntan hacia el futuro. Si  $v$  es lumínico,  $v$  apunta hacia el futuro si  $v$  está en la frontera de  $C_q^+$ .

### 2.3. Ecuaciones de campo gravitatorio

Hasta ahora hemos indicado que un campo gravitatorio en el espacio-tiempo  $(M, g)$  es representado por la métrica de Lorentz  $g$ . A continuación nos disponemos a encontrar las ecuaciones de la métrica a partir de las condiciones físicas del medio. Pero antes, recordemos algunos conceptos sobre la teoría clásica de gravitación.

Supongamos que tenemos un cuerpo o en medio continuo en una región  $K$  de  $\mathbb{R}^3$ . La materia de este medio está descrita por una función  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  denominada *función densidad de masa*. La masa de una región  $D$  de  $K$  será entonces:

$$m(D) = \int_D \rho(\xi) d\xi,$$

siendo  $d\xi$  la 1-forma de volumen  $dx \wedge dy \wedge dz$  de  $\mathbb{R}^3$ . Se define el *campo gravitatorio* (estático) creado por  $K$  a la función vectorial  $\mathfrak{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:

$$\mathfrak{G}(x) = \int_K \rho(\xi) \frac{x - \xi}{\|x - \xi\|^3} d\xi,$$

siendo  $\|\cdot\|$  la norma estándar de  $\mathbb{R}^3$ . Resulta que  $\mathfrak{G}$  no sólo está bien definida, sino que es un campo conservativo con función potencial  $x \mapsto \Phi(x) = \int_K \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} d\xi$ . A  $\Phi$  se le conoce como *potencial gravitatorio* de  $K$  y conocida la distribución de masa  $\rho$ , el potencial gravitatorio se obtiene de la *ecuación de Poisson*:

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho, \tag{2.9}$$

siendo  $G$  la constante de gravitación universal. Además si  $r : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es la trayectorial que sigue una partícula bajo la acción del campo gravitatorio, esta se rige por la ecuación:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\text{grad } \Phi \circ r. \tag{2.10}$$

### 2.3.1. Derivación heurística de las ecuaciones de campo

Hasta aquí, hemos identificado un campo gravitatorio con una métrica de Lorentz  $g$  en el espacio-tiempo  $M$ , pero no hemos determinado cómo obtener este campo gravitatorio a partir de las condiciones físicas del medio. Einstein trató de hallar una ecuación análoga a la ecuación de Poisson (2.9) que relacionase la métrica  $g$  con las características del medio físico que creara dicho campo. Como ya hemos indicado, en la teoría clásica de gravitación el campo gravitatorio está determinado por una única función escalar  $\Phi$ , sin embargo, en la Relatividad General el campo gravitatorio viene dado por las 10 componentes  $\{g_{\mu\nu}\}$  de la métrica (o potenciales gravitatorios). Así, Einstein propuso sustituir la ecuación de Poisson por 10 ecuaciones escalares, o equivalentemente, por una ecuación tensorial entre tensores simétricos de orden 2 del tipo:

$$G = \kappa T, \tag{2.11}$$

en el que  $G$  es un tensor construido a partir de la métrica y  $T$  otro tensor que describe las propiedades físicas de la materia que creaba el campo gravitatorio. Describamos cual debía ser el tensor  $T$  que aparece en la parte derecha de la ecuación (2.11). Recordemos que en mecánica relativista de fluidos aparece un tensor  $\mathcal{T}$  simétrico y de tipo  $(2, 0)$ , denominado *tensor de energía-impulso*, que contiene toda la información sobre la materia, incluida su densidad. Este viene dado por la ecuación:

$$c^2 \text{div } \mathcal{T} = f,$$

siendo  $f$  un campo de vectores que representa la fuerza exterior (de Minkowski) que actúa sobre el medio continuo. La idea de Einstein sobre el paso de la Teoría Especial de la Relatividad a la Teoría General es que debía hacerse de la forma más natural posible, sustituyéndose la métrica de Minkowski  $\eta$  por una métrica de Lorentz. Por ello, si entendemos que el campo gravitatorio lo crea un medio continuo que no sufre fuerzas exteriores, el tensor  $T$  que aparecía en (2.11) debía ser el análogo al tensor energía-impulso de la relatividad especial, y por lo tanto tener divergencia nula.

Ahora bien, respecto a la parte izquierda de la ecuación (2.11),  $G$  debía ser un tensor simétrico de tipo  $(2, 0)$  con divergencia nula y que respecto a cada carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$ ,  $\psi = (x^1, \dots, x^4)$  debía ser expresado en función de los potenciales gravitatorios  $\{g_{\mu\nu}\}$  y sus derivadas parciales hasta el orden 2 (linealmente en las de orden 2), de la misma manera que el primer miembro de la ecuación de Poisson (2.9) que contiene (linealmente) derivadas de orden 2 del potencial  $\Phi$ . Es decir,

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} \left( g_{\alpha\beta}, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \right). \quad (2.12)$$

El primer candidato, para ser el tensor  $G$ , es el tensor de Ricci. Sin embargo, en general  $2\text{div}(Ric) = \text{div}(Rg) \neq 0$ . Ahora bien,

$$Ric - \frac{1}{2}Rg$$

sí cumple con todas las condiciones requeridas sobre  $G$ . Por ello, Einstein establece que las ecuaciones para el campo gravitatorio en la Relatividad General debía ser:

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = \kappa T, \quad (2.13)$$

siendo  $\kappa$  una constante. A la ecuación (2.13) se le conoce como *Ecuación de Einstein* y a  $G = Ric - \frac{1}{2}Rg$  como *Tensor de Einstein*.

*Observación.* Resulta natural preguntarse si el tensor de Einstein es el único tensor que cumple con las propiedades requeridas, es decir, que sea un tensor de orden 2, simétrico con divergencia nula y que respecto a cada carta local sea de la forma (2.12) cuya dependencia con las derivadas segundas de  $\{g_{\mu\nu}\}$  sea solamente lineal. Como aparece en [11], durante los años 1917 y 1922, H. Vermeil, E. Cartan y H. Weyl probaron que los únicos tensores que cumplen las propiedades anteriores son aquellos de la forma

$$\tilde{G} = \mu G + \Lambda g = \mu \left( Ric - \frac{1}{2}Rg \right) + \Lambda g, \quad (2.14)$$

siendo  $\mu$  y  $\Lambda$  constantes reales. De hecho, décadas mas tarde, D. Lovelock [12] demostró que la suposición realizada sobre la dependencia lineal de las derivadas segundas de las componenets de la métrica era redundante.

La constante  $\Lambda$  que aparece en (2.14) se le conoce como *constante cosmológica* y permite reescribir la ecuación de Einstein (2.13) como:

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Rg + \Lambda g = \kappa T.$$

La Teoría General de la Relatividad no impone ningún valor especial para la constante cosmológica  $\Lambda$ , sin embargo, estudiando el límite newtoniano se puede deducir que  $\Lambda$  debe ser un valor muy pequeño o la constante cero.

### 2.3.2. Derivación lagrangiana de las ecuaciones de campo

En la sección anterior hemos establecido las ecuaciones de campo gravitatorio a partir de un razonamiento análogo al propuesto por A. Einstein en 1915. A continuación indicamos brevemente una alternativa más axiomática proporcionada por D. Hilbert, en la misma época que Einstein, a partir del conocido *Principio de acción estacionaria* que comentaremos a continuación.

Consideremos en el espacio newtoniano  $\mathbb{R}^3$  una partícula de masa  $m$  bajo la acción de un campo de fuerzas conservativo. La diferencia entre la energía cinética y la energía potencial  $V = V(x)$  de la partícula es una función  $L : T(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  que se conoce como *lagrangiano de la partícula*:

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\|\dot{x}\|^2 - V(x).$$

La trayectoria que sigue tal partícula es aquella que hace que una determinada cantidad, denominada *acción*, sea mínima. Dicho de una forma más precisa, el Principio de acción estacionaria establece que, de todas las posibles trayectorias que puede seguir la partícula entre dos puntos fijos  $x, y$  de  $\mathbb{R}^3$ , la trayectoria  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  que sigue la partícula en la naturaleza es aquella que hace que

$$S[\alpha] = \int_a^b L(\alpha(\lambda), \dot{\alpha}(\lambda), \lambda) d\lambda$$

sea mínima. De alguna forma, esto es similar al hecho de que las geodésicas en variedades riemannianas sean extremales para su longitud (proposición 1.9).

Hilbert se preguntó cual sería el lagrangiano para el campo gravitatorio en la relatividad general. Teniendo en cuenta la naturaleza geométrica de la gravitación que había considerado Einstein, Hilbert propuso que el espacio-tiempo intenta curvarse lo menos posible y de esta forma, el lagrangiano debía ser una función escalar que dependiese intrínsecamente de la geometría del espacio-tiempo. Por ello, en ausencia de efectos físicos no gravitatorios, parecía lógico suponer que la curvatura total debería ser mínima y por lo tanto la acción:

$$S[g] = \int_M R d\Omega, \quad (2.15)$$

sería estacionaria al variar la métrica, siendo  $d\Omega$  la forma de volumen del espacio-tiempo  $M$ . Si existiesen campos eléctricos, presiones asociadas a los fluidos, colisiones entre partículas u otros efectos físicos en el medio, estos debían ser descritos por un lagrangiano  $L$  y tendríamos que sustituir la (2.15) por:

$$S[g] = \int_M (R + \kappa L) d\Omega, \quad (2.16)$$

para cierta constante  $\kappa$ . A (2.16) se le conoce como *acción de Einstein-Hilbert*.

Siguiendo la notación que precede, Hilbert postuló que la métrica asociada al campo gravitatorio producido por un medio descrito por un lagrangiano  $L$ , debía ser extremal para la acción de Einstein-Hilbert (de forma análoga a como se hizo en la sección 1.3.2). Así, Hilbert prueba:

**Teorema 2.6.** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión 4. Una métrica de Lorentz  $g$  satisface la ecuación de Einstein (2.13) si y sólo si es extremal para la acción de Einstein-Hilbert (2.16).*

Dado el lagrangiano del medio  $L$ , podemos construir un tensor  $T$  de tipo  $(2, 0)$  de componentes:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g}L)}{\partial g^{\mu\nu}} \quad (2.17)$$

el cual será el tensor de energía-impulso del medio. Un ejemplo de un lagrangiano para el espacio-tiempo y su respectivo tensor energía momento puede verse ([2], pp. 105-110) como exponemos a continuación.

*Ejemplo 2.7.* En presencia de un campo electromagnético, el lagrangiano del medio viene dado por:

$$L = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

siendo  $F$  cierto tensor 2-covariante de componentes  $F_{\mu\nu}$  denominado *tensor de tensiones de Maxwell* que contiene toda la información sobre el potencial eléctrico. El tensor de energía-impulso  $T$  definido por el lagrangiano (2.18) se obtiene de (2.17). Las ecuaciones de campo se escriben:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{4\pi} \left( \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} \right)$$



## Campo gravitatorio producido por una estrella. La solución de Schwarzschild

Nuestro propósito es describir el campo gravitatorio producido por un cuerpo esférico (una estrella) que supondremos situado en nuestro espacio-tiempo. Supondremos que en el exterior de la estrella, no existen fenómenos físicos de naturaleza no gravitatoria y veremos que en este caso, la métrica que representa el campo gravitatorio debe tener tensor de Ricci nulo. Por la naturaleza del problema supondremos que el espacio-tiempo admite simetría esférica. Así, en este tema nos ocuparemos de estudiar las variedades de Lorentz con simetría esférica, la expresión local de la métrica para el caso particular de tensor de Ricci nulo (Teorema de Birkhoff) y su aplicación para el estudio del campo gravitatorio creado por una estrella (La solución de Schwarzschild).

### 3.1. Variedades de Lorentz con Simetría Esférica

Por cuestiones físicas, estamos interesados en las variedades de Lorentz que admiten a  $SO(3)$  como grupo de isometrías y sus espacios de órbitas son subvariedades espaciales de dimensión 2.

**Definición 3.1.** *Una variedad de Lorentz  $(M, g)$  tiene simetría esférica si admite una acción efectiva  $\vartheta : SO(3) \times M \rightarrow M$  de forma que para cada  $A \in SO(3)$ ,  $\vartheta_A : M \rightarrow M$  sea isometría y la órbita  $\mathcal{S}(q) = \vartheta_q(SO(3))$  de un punto  $q$  no fijo sea una subvariedad espacial de  $M$  de dimensión 2.*

*Observación.* En ([14], lema 1) se prueba que si  $SO(3)$  actúa como una isometría sobre  $M$ , sus espacios de órbitas no pueden tener dimensión 1, y si los espacios de órbitas tienen dimensión 2, estos deben ser espaciales. Teniendo esto en cuenta, la condición de que los espacios de órbitas sean espaciales en la definición 3.1 es redundante.

En esta subsección, probaremos que, en una variedad de Lorentz  $(M, g)$  con simetría esférica, los espacios de órbita de puntos no fijos por la acción de  $SO(3)$  deben ser conformes a la esfera  $S^2$  o al plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$ . Sea  $q \in M$  un punto no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Como  $SO(3)$  define una acción transitiva sobre el espacio de órbitas  $\mathcal{S}(q)$ , si  $I_q$  es el subgrupo de isotropía de  $q$ , entonces el teorema 1.4 nos asegura de que el cociente  $SO(3)/I_q$  es difeomorfo a  $\mathcal{S}(q)$ . Por lo tanto, para conocer el espacio de órbitas de un punto, nos es suficiente con conocer el subgrupo de isotropía de ese punto. Dado que  $I_q$  es cerrado por definición, estudiamos cómo son los subgrupos cerrados y de dimensión 1 de  $SO(3)$ .

Antes de continuar, observemos que si consideramos a los elementos de  $SO(3)$  como transformaciones de  $\mathbb{R}^3$  que conservan el producto escalar y la orientación usual, fijado  $\alpha \in SO(3)$  podemos encontrar una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que la matriz asociada a dicha transformación sea del tipo:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

para algún  $\theta$  real (ver por ejemplo [3] p. 286). En lo que sigue utilizaremos esta identificación para los elementos de  $SO(3)$ .

**Lema 3.2.** *Sea  $e$  el elemento identidad de  $SO(3)$ . Si  $\{\psi_t\}$  es un subgrupo uniparamétrico de transformaciones de  $SO(3)$  entonces existe una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que:*

$$\psi_t(e) = \begin{pmatrix} \cos \kappa t & -\sin \kappa t & 0 \\ \sin \kappa t & \cos \kappa t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

para todo  $t$  real, siendo  $\kappa \in \mathbb{R}$  una constante.

*Demostración.* Por la proposición 1.2 existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $e$  en  $SO(3)$  tal que para cualquier  $\alpha \in \mathcal{U}$  existe un único subgrupo uniparamétrico  $\{\varphi_t\}$  de forma que  $\varphi_0 = e$  y  $\varphi_1 = \alpha$ . Fijemos  $t_0 > 0$  tal que  $\psi_{t_0}(e) \in \mathcal{U}$  y escribamos  $\alpha = \psi_{t_0}(e)$ . Entonces podemos encontrar una base ortonormal  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  en la que  $\alpha$  se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para algún  $\theta \in \mathbb{R}$ . Definamos ahora el subgrupo uniparamétrico  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  dado por:

$$\varphi_s = \begin{pmatrix} \cos \theta s & -\sin \theta s & 0 \\ \sin \theta s & \cos \theta s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para todo  $s$  real. Como  $s \mapsto \psi_{st_0}(\mathbf{e})$  es también un subgrupo uniparamétrico en  $SO(3)$  y verifica que para  $s = 1$ ,  $\psi_{t_0}(\mathbf{e}) = \alpha$  la unicidad de los subgrupos uniparamétricos implica que  $\varphi_s$  debe coincidir con  $\psi_{t_0 s}(\mathbf{e})$  para cualquier  $s$  en  $[0, 1]$ . Pero la condición de subgrupo requiere que  $\varphi_s = \psi_{t_0 s}(\mathbf{e})$  para todo  $s$  real. Denotando  $t = st_0$  se sigue que  $\psi_t(\mathbf{e}) = \varphi_{t/t_0}$  y queda probado el resultado.  $\square$

**Proposición 3.3.** *Sea  $H$  es un subgrupo cerrado y de dimensión 1 de  $SO(3)$  y  $H_0$  la componente conexa que contiene a la identidad  $\mathbf{e}$  de  $SO(3)$ . Entonces o  $H$  es conexo y  $H = H_0$  o bien  $H$  tiene dos componentes conexas  $H_0$  y  $H_1$ . Además existe una base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $H_0$  es el conjunto de transformaciones de  $\mathbb{R}^3$  que en esta base se expresan por matrices de la forma:*

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

y  $H_1$ , si no es vacío, es el conjunto de transformaciones que respecto de esta base se expresan como matrices de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

*Demostración.* En virtud del lema 3.2, para probar que existe una base ortonormal positiva  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  en la que los elementos de  $H_0$  se escriben como (3.3), basta ver que  $H_0$  coincide con  $\{\psi_t(\mathbf{e})\}$  para algún grupo uniparamétrico  $\{\psi_t\}$  de transformaciones de  $SO(3)$ . En primer lugar, dado que  $H$  es cerrado, el teorema 1.1 demuestra que  $H$  es un subgrupo de Lie de  $SO(3)$ . Como  $\dim H = 1$ , su álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  es isomorfa a  $\mathbb{R}$ . Denotaremos  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{h}$  a tal isomorfismo. Consideremos ahora la aplicación exponencial  $\exp : \mathfrak{h} \rightarrow H$  y definamos:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R} \times SO(3) &\longrightarrow SO(3) \\ (t, \alpha) &\longmapsto \psi_t(\alpha) = \alpha \exp(\phi(t)) \end{aligned}$$

Entonces  $\{\psi_t\}$  es un grupo uniparamétrico de transformaciones de  $SO(3)$  ya que:

$$\begin{aligned} \psi_t(\psi_s(\alpha)) &= \psi_t(\alpha \exp(\phi(s))) = \alpha \exp(\phi(t)) \exp(\phi(s)) \\ &= \alpha \exp(\phi(t+s)) = \psi_{t+s}(\alpha). \end{aligned}$$

Además,  $\{\psi_t(\mathbf{e})\} = \exp(\mathfrak{h})$  y por ser  $\mathfrak{h}$  conexo, de la continuidad de la aplicación exponencial se sigue que  $\{\psi_t(\mathbf{e})\} = H_0$ . El lema 3.2 termina de probar el resultado cuando  $H$  es conexo.

Supongamos ahora que  $H$  no es conexo y sea  $\beta \in H - H_0$ . Veamos que necesariamente  $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$ , o bien  $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$  para cualquier  $\alpha \in H_0$ . Para ello, consideremos el automorfismo:

$$\begin{aligned} H_0 &\longrightarrow H_0 \\ \alpha &\longmapsto \beta\alpha\beta^{-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Es bien sabido que  $SO(2)$  es isomorfo a  $S^1$  y que los únicos automorfismos en  $S^1$  son  $z \mapsto z$  y  $z \mapsto z^{-1}$ . Pero como  $H_0 = \{\psi_t(\mathbf{e})\}$  y  $\{\psi_t(\mathbf{e})\}$  es isomorfo a  $SO(2)$ , el automorfismo dado en (3.5) debe coincidir con la aplicación  $H_0 \rightarrow H_0$  dada por  $\alpha \rightarrow \alpha$ , o bien  $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ . En consecuencia, si  $\beta \in H - H_0$  entonces  $\beta\alpha = \alpha\beta$ , o bien  $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha^{-1}$  para todo  $\alpha \in H_0$ . Fijemos  $\beta \in H - H_0$  y  $\alpha \in H_0$ . Respecto de  $\{e_1, e_2, e_3\}$  se expresan:

$$\beta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un cálculo matricial nos muestra que:

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & c \\ \bullet & \bullet & f \\ g \cos \theta + h \sin \theta & -g \sin \theta + h \cos \theta & i \end{pmatrix}.$$

Los valores de los elementos de la matriz con el símbolo  $\bullet$  no nos interesan. Denotemos ahora  $\alpha^\epsilon$  como  $\alpha$  si  $\epsilon = 1$  y  $\alpha^{-1}$  si  $\epsilon = -1$ . Entonces:

$$\alpha^\epsilon \beta = \begin{pmatrix} \bullet \bullet c \cos \theta - \epsilon f \sin \theta \\ \bullet \bullet \epsilon c \cos \theta + f \sin \theta \\ g h & i \end{pmatrix},$$

para  $\epsilon = \pm 1$ . Haciendo entonces  $\alpha^\epsilon \beta = \beta\alpha$  se tiene que:

$$\begin{cases} c(\cos \theta - 1) - \epsilon f \sin \theta = 0 \\ \epsilon c \sin \theta + f(\cos \theta - 1) = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} g(\cos \theta - 1) + h \sin \theta = 0 \\ -g \sin \theta + h(\cos \theta - 1) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Las ecuaciones anteriores (3.6) se pueden interpretar como dos sistemas de ecuaciones lineales, con incógnitas  $c, f$  y  $c, h$  y determinante:

$$\det \begin{pmatrix} \cos \theta - 1 & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - 1 \end{pmatrix} = 2(1 - \cos \theta).$$

Si  $\theta \neq 2\pi n$  para cualquier  $n$  entero, el determinante no se anula y por lo tanto  $c, f, g, h = 0$ . Así, la matriz  $\beta$  es:

$$\beta = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

De la expresión (3.7) se sigue que el elemento  $i \in \mathbb{R}$  es un autovalor de  $\beta$ , pero los autovalores de  $\beta$  son  $\{\pm 1\}$  por ser  $\alpha \in SO(3)$ . Está claro que  $i = 1$  no puede ser posible pues en ese caso la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

debe ser un elemento de  $SO(2)$  y eso equivale a que exista  $\kappa \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta$  se exprese de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

esto implica que  $\beta \in H_0$ , en contra de la hipótesis. Consideremos entonces el caso  $i = -1$ . Ya que la matriz (3.8) debe ser un elemento de  $O(2)$  con determinante  $-1$ , podemos escribir:

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Sea  $H_1$  el conjunto de matrices de la forma (3.9). Si  $H$  no es conexo, entonces  $H_1 \subseteq H$  ya que siempre existe una matriz  $\beta \in H$  de la forma (3.9) para algún  $\theta$ . Por lo tanto, las matrices

$$\begin{pmatrix} \cos \kappa & -\sin \kappa & 0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\kappa + \theta) & \sin(\kappa + \theta) & 0 \\ \sin(\kappa + \theta) & -\cos(\kappa + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

, son elementos de  $H$  para todo  $\kappa$ . De esta forma se obtienen todas las matrices de  $H_1$ . En resumen, si  $H$  no es conexo, entonces  $H_1 \subset H$  y dado  $\beta \in H - H_0$  resulta que  $\beta \in H_1$ . □

Sea de nuevo  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica por una acción  $\vartheta : SO(3) \times M \rightarrow M$  y consideremos un punto  $q \in M$  no fijo por  $\vartheta$ . Está claro que  $\vartheta$  induce una acción transitiva  $SO(3) \times \mathcal{S}(q) \rightarrow \mathcal{S}(q)$ , que seguiremos denotando por  $\vartheta$ . Sea  $I_q = \{\alpha \in SO(3) \text{ tal que } \vartheta_\alpha(q) = q\}$  el subgrupo de isotropía de  $q$ . Entonces  $\vartheta$  define la acción de  $I_q$  sobre el espacio  $T_q \mathcal{S}(q)$  dada por:

$$\begin{aligned} I_q \times T_q \mathcal{S}(q) &\longrightarrow T_q \mathcal{S}(q) \\ (\alpha, v) &\longmapsto (\vartheta_\alpha)_* v \end{aligned} \tag{3.10}$$

La aplicación (3.10) está bien definida, ya que para todo  $\alpha \in I_q$ , la aplicación  $\vartheta_\alpha : \mathcal{S}(q) \rightarrow \mathcal{S}(q)$  transforma curvas de  $\mathcal{S}(q)$  que parten desde  $q$  en curvas de  $\mathcal{S}(q)$  que parten desde  $q$ .

Denotemos  $\text{Iso}(T_q\mathcal{S}(q))$  al grupo de isometrías de  $T_q\mathcal{S}(q)$  respecto a la métrica (definida positiva):

$$g_q : T_q\mathcal{S}(q) \times T_q\mathcal{S}(q) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Fijada una orientación en  $T_q\mathcal{S}(q)$ , denotemos por  $\text{Rot}(T_q\mathcal{S}(q))$  al grupo de isometrías en  $T_q\mathcal{S}(q)$  que conservan la orientación, el cual no depende de la orientación elegida.

*Observación.* Manteniendo la notación que precede, para cada  $q \in M$  los grupos  $\text{Iso}(T_q\mathcal{S}(q))$  y  $\text{Rot}(T_q\mathcal{S}(q))$  son isomorfos a  $O(2)$  y  $SO(2)$  respectivamente.

**Definición 3.4.** *Consideremos el homomorfismo:*

$$\begin{aligned} \chi : I_q &\longrightarrow \text{Iso}(T_q\mathcal{S}(q)) \\ \alpha &\longmapsto \chi(\alpha) = (\vartheta_\alpha)_{\star q} \end{aligned} \quad (3.11)$$

A la imagen  $\chi(I_q)$  se le denomina grupo lineal de isotropía del punto  $q$ .

**Proposición 3.5.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $q$  un punto no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Entonces el subgrupo de isotropía  $I_q$  es isomorfo al grupo lineal de isotropía  $\chi(I_q)$ . Además  $\chi(I_q)$  coincidirá con  $\text{Rot}(T_q\mathcal{S}(q))$  si  $I_q$  es conexo y con  $\text{Iso}(T_q\mathcal{S}(q))$  si  $I_q$  no es conexo.*

*Demostración.* Sea  $\alpha \in \ker \chi$ . Por la proposición 1.10 existe un entorno  $W_q$  de 0 en  $T_q\mathcal{S}(q)$  tal que  $\exp_q : W_q \rightarrow \exp_q(W_q)$  es un difeomorfismo. Veamos primero que  $\vartheta_\alpha : \mathcal{S}(q) \rightarrow \mathcal{S}(q)$  es la aplicación identidad en  $\mathcal{U} = \exp_q(W_q)$ . Sea entonces  $p \in \mathcal{U}$ . Existe un único vector  $v \in W_q$  tal que  $p = \gamma_v(1)$ . Para ver que  $\vartheta_\alpha(p) = p$  es suficiente probar que  $\tilde{\gamma} = \vartheta_\alpha \circ \gamma_v$  es de nuevo una geodésica en  $\mathcal{S}(q)$  que coincide con  $\gamma_v$  en  $[0, 1]$ . En efecto, ya que  $\vartheta_\alpha$  es una isometría,  $\tilde{\gamma}$  es una geodésica en  $\mathcal{S}(q)$ , y esta verifica que:

- (1)  $\tilde{\gamma}(0) = (\vartheta_\alpha \circ \gamma_v)(0) = \vartheta_\alpha(q) = q$ , pues  $\alpha \in I_q$ ;
- (2)  $\tilde{\gamma}'(0) = (\vartheta_\alpha \circ \gamma_v)'(0) = (\vartheta_\alpha)_{\star q} v = v$  pues  $\alpha \in \ker \chi$ .

De la unicidad de las geodésicas se sigue que  $\tilde{\gamma} = \gamma_v$  al menos, en  $[0, 1]$  y por lo tanto  $\tilde{\gamma}(1) = \gamma_v(1)$ . Esto prueba que  $\vartheta|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \subset \mathcal{S}(q) \rightarrow \mathcal{U}$  es la aplicación identidad.

A continuación, veremos que  $\alpha$  debe coincidir con el elemento identidad  $e$  de  $SO(3)$ . Sea entonces  $p \in \mathcal{U} - \{q\}$ . Ya que  $p \in \mathcal{S}(q)$ , debe existir  $\beta \in SO(3)$  tal que  $p = \vartheta_\beta(q)$ . Consideremos el difeomorfismo (inverso) dado por el teorema 1.4:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{S}(q) &\longrightarrow SO(3)/I_q \\ p' &\longmapsto \phi(p') = \gamma I_q \end{aligned}$$

siendo  $\gamma \in SO(3)$  tal que  $p' = \vartheta_\gamma(q)$ . Entonces, al ser  $p \in \mathcal{U}$ ,  $p = \vartheta_\alpha(p)$ . La condición de que  $p \neq q$  implica que  $\beta \notin I_q$ . Utilizando  $\phi$ , la condición  $\vartheta_\alpha(p) = p$

se escribirá  $\alpha\beta I_q = \beta I_q$ . Es decir,  $\beta^{-1}\alpha\beta I_q = I_q$  y por lo tanto  $\beta^{-1}\alpha\beta \in I_q$ . De aquí, debe existir  $\gamma \in I_q$  tal que  $\alpha\beta = \beta\gamma$ . Como  $\alpha, \gamma \in I_q$ , por la proposición 3.3 existirá una base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\alpha$  y  $\gamma$  se expresan:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon_1 \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \epsilon_1 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \gamma = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\epsilon_2 \sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \epsilon_2 \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

con  $\epsilon_1 = \pm 1, \epsilon_2 = \pm 1$ . Escribamos además  $\beta$  de la forma:

$$\beta = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Un cálculo matricial nos muestra que:

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} \bullet\bullet & c \cos \theta - \epsilon_1 f \sin \theta \\ \bullet\bullet & c \sin \theta + \epsilon_1 f \cos \theta \\ \bullet\bullet & \epsilon_1 i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \beta\gamma = \begin{pmatrix} \bullet\bullet & \epsilon_2 c \\ \bullet\bullet & \epsilon_2 f \\ \bullet\bullet & \epsilon_2 i \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Podemos escoger  $\beta$  de forma que  $i \neq 0$ . Entonces de (3.12), usando que  $\alpha\beta = \beta\gamma$ , se tiene que  $\epsilon_1 = \epsilon_2 (= \epsilon)$  y:

$$\begin{cases} c(\cos \theta - \epsilon) - f\epsilon \sin \theta = 0 \\ c \sin \theta + \epsilon f(\cos \theta - 1) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Dado que (3.13) debe ser cierta para todo par  $(c, f)$  próximo a  $(0, 0)$ , los coeficientes del sistema (3.13) deben anularse. Esto implica que  $\cos \theta = 1, \sin \theta = 0$  y  $\epsilon = 1$ . Lo que equivale a que  $\alpha$  coincida con la matriz identidad  $e$ . Así,  $\chi$  es inyectiva.

Además el isomorfismo  $\chi : I_q \rightarrow \chi(I_q)$  definido por (3.11) es un isomorfismo de grupos de Lie. Si  $I_q$  es conexo, entonces  $\chi(I_q)$  será un subgrupo de Lie conexo de dimensión 1 de  $\text{Iso}(T_q\mathcal{S}(q))$ . Dado a que el único subgrupo conexo de dimensión 1 de  $\text{Iso}(T_q\mathcal{S}(q))$  es  $\text{Rot}(T_q\mathcal{S}(q))$ , resulta que  $\chi(I_q) = \text{Rot}(T_q\mathcal{S}(q))$ . De forma análoga, si  $I_q$  es no conexo entonces  $\chi(I_q)$  coincidirá con  $\text{Iso}(T_q\mathcal{S}(q))$ .  $\square$

A partir de aquí denotaremos por  $S^2$  a la esfera unitaria de  $\mathbb{R}^3$  con la métrica  $\tilde{g}$  inducida por el producto escalar euclídeo de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $\mathbb{RP}^2$  el espacio proyectivo de dimensión 2 construido a partir de  $S^2$  identificando los puntos diametralmente opuestos. Dotamos a  $\mathbb{RP}^2$  de la métrica inducida por  $\tilde{g}$ , que seguiremos denotando por  $\tilde{g}$ .

A continuación, dado  $q \in M$ , vamos a probar que existe un difeomorfismo conforme de  $\mathcal{S}(q)$  sobre  $S^2$  ó  $\mathbb{RP}^2$  en función de que  $I_q$  sea conexo o no. Para ello necesitamos el siguiente resultado:

**Lema 3.6.** Sea  $\mathbb{E}^n$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un producto interior en  $\mathbb{E}^n$ . Sea  $f : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$  un isomorfismo lineal con la propiedad de que para todos  $x, y \in \mathbb{E}^n$  con  $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle$  se cumple que  $\langle f(x), f(x) \rangle = \langle f(y), f(y) \rangle$ . Entonces existe una constante  $\kappa > 0$  tal que  $\langle f(x), f(y) \rangle = \kappa \langle x, y \rangle$  para cualesquiera  $x, y \in \mathbb{E}^n$ .

*Demostración.* Dado  $x \in \mathbb{E}^n$  pongamos  $\langle f(x), f(x) \rangle = \kappa \langle x, x \rangle$ . Si  $y \in \mathbb{E}^n$ , entonces existe una constante  $\kappa' > 0$  tal que  $\langle y, y \rangle = \kappa' \langle x, x \rangle$ . Entonces  $\langle \frac{1}{\sqrt{\kappa'}} y, \frac{1}{\sqrt{\kappa'}} y \rangle = \langle x, x \rangle$  y por lo tanto:

$$\left\langle f\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa'}} y\right), f\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa'}} y\right) \right\rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \kappa \langle x, x \rangle = \kappa \left\langle \frac{1}{\sqrt{\kappa'}} y, \frac{1}{\sqrt{\kappa'}} y \right\rangle.$$

Así,  $\langle f(y), f(y) \rangle = \kappa \langle y, y \rangle$ . En resumen, para cualquier  $x \in \mathbb{E}^n$  existe  $\kappa$  tal que  $\langle f(x), f(x) \rangle = \kappa \langle x, x \rangle$ . Ahora, si tomamos  $x, y \in \mathbb{E}^n$  arbitrarios se sigue que  $\langle f(x+y), f(x+y) \rangle = \kappa \langle x+y, x+y \rangle$ , y por linealidad,  $\langle f(x), f(y) \rangle = \kappa \langle x, y \rangle$ .  $\square$

**Proposición 3.7.** Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica por una acción  $\vartheta : SO(3) \times M \rightarrow M$  y  $q$  un punto de  $M$  no fijo por  $\vartheta$ . Si  $I_q$  es conexo, entonces existe un difeomorfismo  $\phi : \mathcal{S}(q) \rightarrow S^2$  tal que  $\phi^* \tilde{g} = \kappa g$  para cierto  $\kappa > 0$ . Si  $I_q$  no es conexo, entonces existe un difeomorfismo  $\varphi : \mathcal{S}(q) \rightarrow \mathbb{RP}^2$  con la misma propiedad,  $\varphi^* g = \kappa g$  con  $\kappa > 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $I_q$  es conexo. Por la proposición 3.3 podemos elegir una base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de forma que los elementos de  $I_q$  se expresen como (3.3). Definimos:

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{S}(q) &\longrightarrow S^2 \\ p &\longmapsto \phi(p) = \alpha(e_3) \end{aligned}$$

siendo  $\alpha \in SO(3)$  tal que  $p = \vartheta_\alpha(q)$ . Para ver que  $\phi$  está bien definida, tomemos  $\alpha, \beta \in SO(3)$  tales que  $\vartheta_\alpha(q) = \vartheta_\beta(q)$ . Así,  $\vartheta_{\alpha^{-1}\beta}(q) = q$  y en consecuencia  $\alpha^{-1}\beta \in I_q$ . Dado que los elementos de  $I_q$  dejan fijo a  $e_3$ , se tiene que  $(\alpha^{-1}\beta)(e_3) = e_3$  y por lo tanto  $\alpha(e_3) = \beta(e_3)$ . Veremos a continuación que  $\phi$  es inyectiva. En efecto, sean  $p, r \in \mathcal{S}(q)$  tales que  $\phi(p) = \phi(r)$ . Podemos encontrar  $\alpha, \beta \in SO(3)$  de forma que  $p = \vartheta_\alpha(q)$ ,  $r = \vartheta_\beta(q)$ . Así la condición de que  $\phi(p) = \phi(r)$  se puede escribir como  $\alpha(e_3) = \beta(e_3)$  y por lo tanto  $\alpha^{-1}\beta(e_3) = e_3$ . Dado que  $\alpha^{-1}\beta$  deja fijo a  $e_3$ , existe una matriz  $A \in SO(2)$  de forma que  $\alpha^{-1}\beta$  toma la forma  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Esto implica que  $\alpha^{-1}\beta \in I_q$  y  $\vartheta_{\alpha^{-1}\beta}(q) = q$ . Queda demostrado que  $p = r$ . La sobreyectividad se sigue de la acción natural de  $SO(3)$  sobre  $S^2$ . De esta forma  $\phi$  es sobreyectiva y además diferenciable.

Probemos ahora que  $\phi^* \tilde{g} = \kappa g$ ,  $\kappa > 0$  en  $q$ . Sean  $u, v \in T_q \mathcal{S}(q)$  con  $g_q(u, u) = g_q(v, v)$ . Por la proposición 3.5,  $I_q$  actúa sobre  $\mathcal{S}(q)$  como el grupo de rotaciones  $\text{Rot}(T_q \mathcal{S}(q))$  y por lo tanto, existe  $\beta \in I_q$  de forma que  $(\vartheta_\beta)_* v = u$ . Si escribimos  $x = \phi(q)$  se sigue que:



$$\tilde{g}_x(\phi_{\star q}u, \phi_{\star q}u) = \tilde{g}_x((\phi \circ \vartheta_\beta)_{\star q}v, (\phi \circ \vartheta_\beta)_{\star q}v). \quad (3.14)$$

Ahora bien,  $\phi \circ \vartheta_\beta = \beta \circ \phi$ . En efecto, dado  $p \in \mathcal{S}(q)$ ,  $p = \vartheta_\alpha(q)$  y se tiene que:

$$(\phi \circ \vartheta_\beta)(p) = (\phi \circ \vartheta_\beta \circ \vartheta_\alpha)(q) = \phi(\vartheta_{\beta\alpha}(q)) = \beta(\alpha(e_3)) = \beta\phi(p)$$

Sustituyendo  $\phi \circ \vartheta_\beta$  por  $\beta \circ \phi$  en la segunda igualdad de (3.14) obtenemos:

$$\tilde{g}_x(\phi_{\star q}u, \phi_{\star q}u) = \tilde{g}(\beta_{\star e_3} \circ \phi_{\star q}v, \beta_{\star e_3} \circ \phi_{\star q}v) \stackrel{\beta \text{ isometría en } S^2}{=} \tilde{g}(\phi_{\star q}v, \phi_{\star q}v).$$

Por el lema 3.6, existe una constante  $\kappa > 0$  tal que  $\phi^*\tilde{g} = \kappa g$  en  $q$ . En lo que sigue, probaremos que  $\phi^*\tilde{g} = g$  en cualquier otro punto  $p \in \mathcal{S}(q)$ . Escribamos  $p = \vartheta_\alpha(q)$ ,  $\alpha \in SO(3)$  y fijemos  $u, v \in T_p\mathcal{S}(q)$ . Si  $x = \phi(p)$ , se tiene que:

$$\tilde{g}_x(\phi_{\star p}u, \phi_{\star p}v) = \tilde{g}_{\phi(q)}(\alpha_{\star x}^{-1} \circ \phi_{\star p}u, \alpha_{\star x}^{-1} \circ \phi_{\star p}v). \quad (3.15)$$

Pero como  $\phi \circ \vartheta_\alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \phi$ , i.e. el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(q) & \xrightarrow{\phi} & S^2 \\ \vartheta_\alpha^{-1} \downarrow & & \downarrow \alpha^{-1} \\ \mathcal{S}(q) & \xrightarrow{\phi} & S^2 \end{array}$$

es conmutativo, de (3.15) resulta:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_x(\phi_{\star p}u, \phi_{\star p}v) &= \tilde{g}_{\phi(q)}((\phi_{\star q} \circ (\vartheta_\alpha^{-1})_{\star p})u, (\phi_{\star q} \circ (\vartheta_\alpha^{-1})_{\star p})v) \\ &\stackrel{(\phi^*\tilde{g})_q = g_q}{=} \kappa g_q((\vartheta_\alpha^{-1})_{\star p}u, (\vartheta_\alpha^{-1})_{\star p}v) = \kappa g_q(u, v). \end{aligned}$$

Esto prueba la proposición cuando  $I_q$  es conexo.

Supongamos ahora que  $I_q$  no es conexo. Por la proposición 3.3, existe una base  $\{e_1, e_2, e_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  de forma que los elementos de  $I_q$  se expresan como:

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\epsilon \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \epsilon \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix},$$

para  $\epsilon = \pm 1$ . Sea  $\psi : \mathcal{S}(q) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  dada por  $p \mapsto \psi(p) = [\phi(p)]$ . Se puede comprobar que  $\psi$  está bien definida, es diferenciable y sobreyectiva. Estudiemos la inyectividad. Sea  $p, r \in \mathcal{S}(q)$  tal que  $\varphi(p) = \varphi(r)$ . Entonces existe  $\alpha, \beta \in SO(3)$  tales que  $p = \vartheta_\alpha(q)$ ,  $r = \vartheta_\beta(q)$  y  $[\alpha(e_3)] = [\beta(e_3)]$ . Esto implica que  $\alpha(e_3) = \pm\beta(e_3)$ , o lo que es equivalente,  $(\beta^{-1}\alpha)e_3 = \pm e_3$ . De aquí,  $\beta^{-1}\alpha$  se expresa como  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$  para cierta matriz  $A \in O(2)$ . De nuevo, por la proposición 3.3 podemos asegurar que  $\beta^{-1}\alpha \in I_q$  y  $\vartheta_\alpha(q) = \vartheta_\beta(q)$  esto es,  $p = r$ . Que  $\psi^*\tilde{g} = \kappa g$  se prueba como el caso anterior.  $\square$

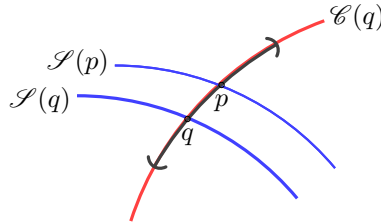
Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $q$  un punto de  $M$  no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Denotemos por  $\mathcal{C}(q)$  el conjunto de los puntos de  $M$  formados por todas las geodésicas que parten desde  $q$  y tienen vector tangente ortonormal a  $T_q\mathcal{S}(q)$ . De la proposición 1.10 existirá un entorno  $\mathcal{U}$  de  $q$  tal que para todo  $p \in \mathcal{U}$ , el conjunto  $\mathcal{C}(p) \cap \mathcal{U}$  es una subvariedad de  $M$ , ya que:

$$\mathcal{C}(p) \cap \mathcal{U} = \mathcal{U} \cap \exp_p (T_p\mathcal{S}(p)^\perp \cap \mathcal{W}_p)$$

siendo  $\mathcal{W}_p$  aquel entorno del elemento neutro de  $T_pM$  tal que  $\exp_p : \mathcal{W}_p \rightarrow \exp_p(\mathcal{W}_p)$  es un difeomorfismo y  $\mathcal{U} \subset \exp_p(\mathcal{W}_p)$ .

**Proposición 3.8.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $I_q$  el subgrupo de isotropía de un punto  $q$  no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Si  $H_q$  es la componente conexa de la identidad de  $I_q$ , entonces  $H_q$  deja fijos todos los puntos de  $\mathcal{C}(q)$ .*

*Demostración.* Como los elementos de  $H_q$  definen isometrías de  $T_qM$  que transforman  $T_q\mathcal{S}(q)$  en  $T_q\mathcal{S}(q)$ , también deben transformar su complemento ortogonal  $T_q\mathcal{S}(q)^\perp$  en  $T_q\mathcal{S}(q)^\perp$ . Así, los elementos de  $H_q$  transforman geodésicas ortogonales que parten de  $q$  en geodésicas ortogonales que parten de  $q$ , esto es que,  $H_q$  transforma el conjunto  $\mathcal{C}(q)$  en sí mismo. Sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $q$  en  $M$  sin puntos fijos por la acción de  $SO(3)$  tal que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{C}(p)$  es una subvariedad de  $M$  para todo  $p \in \mathcal{U}$ . Como  $\mathcal{C}(q)$  y  $\mathcal{S}(q)$  son subvariedades transversas (esto es,  $T_q\mathcal{S}(q) \oplus T_q\mathcal{C}(q) = T_qM$ ) existirá un entorno  $\mathcal{V}$  de  $q$  en  $\mathcal{C}(q) \cap \mathcal{U}$  tal que  $\mathcal{C}(q)$  y  $\mathcal{S}(p)$  sean transversas para cualquier  $p \in \mathcal{V}$ . Veremos que  $H_q$  deja fijo cualquier punto  $p \in \mathcal{V}$ .



En efecto, de la proposición 3.3 existe un subgrupo uniparamétrico  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  de  $SO(3)$  de forma que  $H_q = \{\varphi_t\}$ . Dado que  $p \in \mathcal{C}(q) \cap \mathcal{S}(p)$  y  $H_q$  deja fijo  $\mathcal{C}(q) \cap \mathcal{S}(p)$ , la curva:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \vartheta_\varphi(p) \end{aligned}$$

debe estar contenida en  $\mathcal{C}(q) \cap \mathcal{S}(p)$ . Por tanto su vector tangente en  $p$  debe ser nulo por estar en  $T_p\mathcal{C}(q) \cap T_p\mathcal{S}(p)$ . Como esto se cumple para todo  $p \in \mathcal{V}$ ,  $\{\varphi_t\}$  define un campo vectorial nulo en todo  $\mathcal{V}$ . Luego,  $\{\varphi_t\}$  actúa sobre  $\mathcal{V}$  dejando fijo todos sus puntos. De aquí deducimos que  $H_q$  actúa sobre el espacio

tangente  $T_q\mathcal{C}(q)$  como la aplicación identidad. Como  $H_q$  transforma geodésicas en geodésicas, de la definición de  $\mathcal{C}(q)$ ,  $H_q$  deja fijos los puntos de  $\mathcal{C}(q)$ .  $\square$

Sea ahora  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $q \in M$  un punto no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Como antes, sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $q$  en  $M$  que no contiene puntos fijos por la acción de  $SO(3)$  y de forma que  $\mathcal{C}(p) \cap \mathcal{U}$  sea una subvariedad de  $M$  para todo  $p \in \mathcal{U}$ . Consideramos entonces en  $\mathcal{U}$  las distribuciones:

$$\Pi : p \mapsto T_p\mathcal{S}(p) \quad \text{y} \quad \Pi^\perp : p \mapsto T_p\mathcal{S}(p)^\perp. \quad (3.16)$$

Está claro que tanto  $\Pi$  como  $\Pi^\perp$  son transversas. Por construcción  $\Pi$  es integrable y  $\mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}$ , son subvariedades integrables para cada  $p \in \mathcal{U}$ . A continuación veremos que  $\Pi^\perp$  también es integrable.

**Proposición 3.9.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $q$  un punto no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $q$  que no contenga puntos fijos y de forma que  $\mathcal{U} \cap \mathcal{C}(p)$  sea una subvariedad de  $M$  para todo  $p \in \mathcal{U}$ . Si  $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}(q)$ , entonces  $T_p\mathcal{S}(p)$  es ortogonal a  $T_p\mathcal{C}(q)$ .*

*Demostración.* Para probar que  $\mathcal{C}(p) \cap \mathcal{U}$  es una subvariedad integrable de  $\Pi^\perp$  basta ver que  $T_p\mathcal{C}(q) = T_p\mathcal{S}(p)^\perp$  para todo  $p \in \mathcal{U} \cap \mathcal{C}(q)$ . Sea  $H_q$  la componente conexa que contiene a la identidad del subgrupo de isotropía  $I_q$  por la acción  $\vartheta$  de  $SO(3)$  sobre  $M$ . Por la proposición 3.3 existe un subgrupo uniparamétrico  $\{\psi_t\}$  de forma que  $H_q = \{\psi_t\}$ . Entonces dados  $v \in T_p\mathcal{S}(p)$  y  $w \in T_p\mathcal{C}(q)$  se tiene que:

$$g_p(u, v) = g_p((\vartheta_{\psi_t})_{\star p}v, (\vartheta_{\psi_t})_{\star p}w) \stackrel{\text{proposición 3.8}}{=} g((\vartheta_{\psi_t})_{\star p}v, w). \quad (3.17)$$

Denotemos  $\alpha(t) = \vartheta_{\psi_t}(p)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Derivando (3.17) respecto a  $t$  y evaluando en  $t = 0$  se tiene que:

$$g_p((\alpha'(0))_{\star p}v, w) = 0.$$

Como  $H_q$  deja fijos a todos los puntos de  $\mathcal{C}(q)$ , en particular, debe dejar fijo a  $p$ , por lo que  $H_q \subset H_p$  y de la proposición 3.5, ya que  $H_q$  actúa sobre  $T_p\mathcal{S}(p)$  como el grupo de rotaciones, se sigue que  $(\alpha'(0))_{\star p}v$  es un vector de  $T_p\mathcal{S}(p)$  perpendicular a  $w$ . Ahora bien, todo vector de  $T_p\mathcal{S}(p)$  puede escribirse como  $(\alpha'(0))_{\star p}v$  para algún  $v \in T_p\mathcal{S}(p)$  y por lo tanto  $w$  es perpendicular a  $T_p\mathcal{S}(p)$ . De aquí, se concluye que  $T_p\mathcal{C}(q) = T_p\mathcal{S}(p)^\perp$ .  $\square$

De la proposición 3.9 sabemos que si  $(M, g)$  es una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $q$  un punto no fijo por la acción de  $SO(3)$ , podemos encontrar un entorno  $\mathcal{U}$  de  $q$  de forma que las distribuciones  $\Pi$  y  $\Pi^\perp$  sean integrable y sus

subvariedades integrables son, respectivamente,  $\mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}$  y  $\mathcal{C}(p) \cap \mathcal{U}$  para cada  $p \in \mathcal{U}$ .

Del teorema 1.6 podemos encontrar una carta local cúbica  $(\mathcal{U}_q, \psi)$ ,  $\psi = (r, t, \theta, \phi)$  con  $\mathcal{U}_q \subset \mathcal{U}$  tal que para cada  $p \in \mathcal{U}_q$  de coordenadas  $p \equiv (r_p, t_p, \theta_p, \phi_p)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}_q &= \{(r, t, \theta, \phi) \in \mathcal{U}_q \text{ tal que } r = r_p, t = t_p\}, \\ \mathcal{C}(p) \cap \mathcal{U}_q &= \{(r, t, \theta, \phi) \in \mathcal{U}_q \text{ tal que } \theta = \theta_p, \phi = \phi_p\}.\end{aligned}$$

Nos referiremos al par  $(\mathcal{U}_q, \psi)$  como el *sistema de coordenadas adaptado* para  $q$ . A continuación, dado  $p \in \mathcal{U}_q$ , vamos a ver que existe una aplicación conforme de  $\mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}_q$  en  $\mathcal{S}(q) \cap \mathcal{U}_q$ , esto es, un difeomorfismo  $\chi : \mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{S}(q) \cap \mathcal{U}_q$  tal que  $\chi^*g = \kappa g$  para cierto  $\kappa > 0$ . Pero antes, veamos cómo se expresa  $\vartheta_\alpha$ ,  $\alpha \in SO(3)$ , respecto a  $(\mathcal{U}_q, \psi)$ . Sea entonces  $\alpha \in SO(3)$  y  $q' = \vartheta_\alpha(q)$ . Dado que  $\vartheta_\alpha : M \rightarrow M$  transforma geodésicas perpendiculares a  $T_q\mathcal{S}(q)$  que parten desde  $q$  en geodésicas perpendiculares a  $T_{q'}\mathcal{S}(q')$  que parten desde  $q'$ , se sigue que  $\vartheta_\alpha(\mathcal{C}(q)) = \mathcal{C}(q')$ . Así, respecto la carta  $(\mathcal{U}_q, \psi)$ ,  $\vartheta_\alpha$  se expresa como:

$$\vartheta_\alpha : (r, t, \theta, \phi) \mapsto (r, t, \bar{\theta}(\theta, \phi), \bar{\phi}(\theta, \phi)), \quad (3.18)$$

para ciertas funciones  $\bar{\theta}, \bar{\phi} : \mathcal{C}(q) \cap \mathcal{U}_q \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables.

**Lema 3.10.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $q \in M$  no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Si  $(\mathcal{U}_q, \psi)$  es un sistema de coordenadas adaptado para  $q$ , entonces para cada punto  $p$  de  $\mathcal{C}(q) \cap \mathcal{U}$  la aplicación:*

$$\begin{aligned}\chi : \mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}_q &\mapsto \mathcal{S}(q) \cap \mathcal{U}_q \\ (r_p, t_p, \theta, \phi) &\mapsto (r_q, t_q, \theta, \phi)\end{aligned}$$

donde  $q \equiv (r_q, t_q, \theta_q, \phi_q)$ ,  $p \equiv (r_p, t_p, \theta_p, \phi_p)$ , es un difeomorfismo conforme, es decir, existe una constante  $\kappa > 0$  tal que  $\chi^*g = \kappa g$  en  $\mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}$ .

*Demostración.* Está claro que  $\chi$  es un difeomorfismo por definición. Para ver que es conforme, veamos primero que  $\chi$  conmuta con cualquier elemento de  $SO(3)$ . Para ello, basta observar que en  $\mathcal{U}_q$  se tiene que:

$$\begin{aligned}(\chi \circ \vartheta_\alpha)(r, t, \theta, \phi) &= \chi(r, t, \bar{\theta}(\theta, \phi), \bar{\phi}(\theta, \phi)) = (r_q, t_q, \bar{\theta}(\theta, \phi), \bar{\phi}(\theta, \phi)) \\ &= \vartheta_\alpha(r_q, t_q, \theta, \phi) = (\vartheta_\alpha \circ \chi)(r, t, \theta, \phi).\end{aligned}$$

En consecuencia  $\chi \circ \vartheta_\alpha = \vartheta_\alpha \circ \chi$  en los puntos en los que los dos miembros estén definidos.

Ahora bien, habíamos visto en la proposición 3.8 que la componente conexa  $H_q$  del subgrupo de isotropía de  $q$  dejaba fijos a los puntos de  $\mathcal{C}(q)$ . De ésta forma, si  $p \in \mathcal{C}(q)$ , la componente conexa  $H_p$  del subgrupo de isotropía de  $I_q$  que contiene a la identidad coincide con  $H_q$ , es decir,  $H_p = H_q$ . De aquí se

deduce que  $\chi_{\star p} : T_p \mathcal{S}(p) \rightarrow T_q \mathcal{S}(q)$  transforma vectores  $u, v \in T_p \mathcal{S}(p)$  de igual norma en vectores de  $T_q \mathcal{S}(q)$  de igual norma. En efecto, sean  $u, v \in T_p \mathcal{S}(p)$ ,  $g_p(u, u) = g_p(v, v)$ . Entonces como  $H_q$  actúa como el grupo de rotaciones sobre  $T_p \mathcal{S}(p)$  (ver proposición 3.5) existe  $\alpha \in H_p = H_q$  tal que  $v = (\vartheta_\alpha)_{\star p} u$ . Entonces:

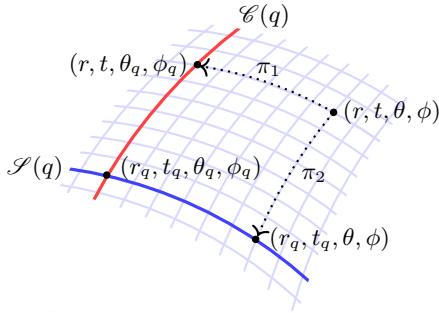
$$\begin{aligned} g_q(\chi_{\star p} v, \chi_{\star p} v) &= g_q(\chi_{\star p} \circ (\vartheta_\alpha)_{\star p} u, \chi_{\star p} \circ (\vartheta_\alpha)_{\star p} u) \\ &= g_q((\vartheta_\alpha)_{\star p} \circ \chi_{\star p} u, (\vartheta_\alpha)_{\star p} \circ \chi_{\star p} u) = g_q(\chi_{\star p} u, \chi_{\star p} u). \end{aligned}$$

Veamos que esta condición se cumple en cualquier otro punto de  $\mathcal{S}(p)$ . Sea  $p' \in \mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}_q$ , entonces existe  $\alpha \in SO(3)$  tal que  $\vartheta_\alpha(p') = p$ . Como  $\chi = \vartheta_\alpha^{-1} \circ \chi \circ \vartheta_\alpha$ , tomando la aplicación inducida en  $p'$  se tiene que  $\chi_{\star p'} = (\vartheta_\alpha^{-1})_{\star q} \circ \chi_{\star p} \circ (\vartheta_\alpha)_{\star p'}$ ,

$$T_{p'} \mathcal{S}(p) \xrightarrow{(\vartheta_\alpha)_{\star p'}} T_p \mathcal{S}(p) \xrightarrow{\chi_{\star p}} T_q \mathcal{S}(q) \xrightarrow{(\vartheta_\alpha^{-1})_{\star q}} T_{\vartheta_\alpha^{-1}(q)} \mathcal{S}(q)$$

En consecuencia, al ser  $\vartheta_\alpha, \vartheta_\alpha^{-1}$  isometrías y  $\chi_{\star p}$  conforme en  $p'$ , se concluye que  $\chi$  es conforme en  $\mathcal{S}(p) \cap \mathcal{U}_q$ . □

Sea de nuevo  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y  $q \in M$  un punto no fijo por la acción de  $SO(3)$ . Sea  $(\mathcal{U}_q, \psi)$  sistema de coordenadas adaptado para  $q$  y denotemos  $S_0 = \mathcal{S}(q) \cap \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(q) \cap \mathcal{U}$ . Sean  $\pi_1 : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{C}_0$ ,  $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (r, t, \theta_q, \phi_q)$  y  $\pi_2 : \mathcal{U}_q \rightarrow \mathcal{S}_0$ ,  $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (r_q, t_q, \theta, \phi)$  las proyecciones de  $\mathcal{U}$  sobre  $\mathcal{C}_0$  y  $\mathcal{S}_0$  respectivamente tal y como se muestra en la figura 3.1.



**Figura 3.1.** Representación del sistema de coordenadas adaptado para  $q \equiv (r_q, t_q, \theta_q, \phi_q)$  y las proyecciones  $\pi_1, \pi_2$  sobre un punto de coordenadas  $(r, t, \theta, \phi)$

Manteniendo la notación anterior, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.11.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica. Para cada punto  $q \in M$  no fijo por la acción de  $SO(3)$  existe un entorno  $\mathcal{U}$  de coordenadas  $(r, t, \theta, \phi)$  de forma que la métrica se expresa como:*

$$g = \pi_1^*(d\omega^2) + K \pi_2^*(d\Omega^2),$$

siendo  $d\omega^2$  una métrica de signatura  $(+, -)$  sobre  $\mathcal{C}_0$ ,  $d\Omega^2$  una métrica de Riemann con curvatura constante positiva en  $\mathcal{S}_0$  y  $K : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K = K(r, t)$  una función diferenciable positiva

*Demostración.* Sea  $(\mathcal{U}_q, \psi)$ ,  $\psi = (r, t, \theta, \phi)$  sistema de coordenadas adaptado para  $q$ . Respecto de  $(\mathcal{U}_q, \psi)$  podemos escribir la métrica  $g$  como  $g = h + h'$  siendo:

$$h = A dr^2 + B dt^2 + 2C dr dt \quad y \quad h' = D d\theta^2 + E d\phi^2 + 2F dr dt,$$

en donde se ha utilizado la notación  $dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2}(dx^\mu \otimes dx^\nu + dx^\nu \otimes dx^\mu)$  y  $A, B, C, D, E, F$  son funciones diferenciables de  $\mathcal{U}_q$  en  $\mathbb{R}$ . Si  $\alpha \in SO(3)$ , entonces  $\vartheta_\alpha$  se expresa en  $(\mathcal{U}_q, \psi)$  como (3.18) y al ser  $\vartheta_\alpha$  isometrías, resulta que  $\vartheta_\alpha^*(g) = g$  en  $q$ . Por lo tanto:

$$\vartheta_\alpha^*(h) = h \quad y \quad \vartheta_\alpha^*(h') = h'$$

en  $q$ . De esta forma, como:

$$(\vartheta_\alpha)_q^*(h_{\vartheta_\alpha(q)}) = A(r_q, t_q, \bar{\theta}_q, \bar{\phi}_q) dr_q^2 + B(r_q, t_q, \bar{\theta}_q, \bar{\phi}_q) dt_q^2 + 2C(r_q, t_q, \bar{\theta}_q, \bar{\phi}_q) dr_q dt_q$$

con  $\bar{\theta}_q = \bar{\theta}(\theta_q, \phi_q)$ ,  $\bar{\phi}_q = \bar{\phi}(\theta_q, \phi_q)$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} A(r_q, t_q, \bar{\theta}_q, \bar{\phi}'_q) &= A(r_q, t_q, \theta_q, \phi_q); \\ B(r_q, t_q, \bar{\theta}_q, \bar{\phi}'_q) &= A(r_q, t_q, \theta_q, \phi_q); \\ C(r_q, t_q, \bar{\theta}_q, \bar{\phi}'_q) &= A(r_q, t_q, \theta_q, \phi_q). \end{aligned}$$

Como  $\vartheta : SO(3) \times \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}_0$  es transitiva, entonces las funciones  $A, B, C$  no dependen de  $\theta$  ni  $\phi$ . Así, podemos escribir:

$$d\omega_{(r,t,\theta,\phi)}^2 = h_{(r,t,\theta,\phi)} = A(r, t, \theta_q, \phi_q) dr_q^2 + B(r, t, \theta_q, \phi_q) dt_q^2 + 2C(r, t, \theta_q, \phi_q) dr_q dt_q$$

es decir,  $d\omega^2$  es una métrica sobre  $\mathcal{C}_0$ . Por otra parte, por el lema 3.10,  $\chi : (r_p, t_p, \theta, \phi) \mapsto (r_q, t_q, \theta, \phi)$  es conforme por lo que  $h'_{(r,t,\theta,\phi)} = K(r, t)h'_{(r_q,t_q,\theta,\phi)}$ ,  $K(r, t) > 0$ . Además por la proposición 3.7,  $\mathcal{S}_0$  tiene curvatura constante positiva. Si denotamos:

$$d\Omega_{(r,t,\theta,\phi)}^2 = D(r_q, t_q, \theta, \phi) d\theta_q^2 + E(r_q, t_q, \theta, \phi) d\phi_q^2 + 2F(r_q, t_q, \theta, \phi) d\theta_{(r,t,\theta,\phi)} d\phi_q$$

Entonces  $d\Omega^2$  es una métrica definida positiva sobre  $\mathcal{S}_0$  y  $\pi_2^*(d\Omega^2) = h'$ .  $\square$

### 3.2. Variedades de Lorentz con simetría esférica y tensor de Ricci nulo

Como ya se ha indicado anteriormente, nuestro propósito es describir el campo gravitatorio producido por una estrella en su exterior. Dado que en el

exterior de la estrella no hay materia, la ecuación de Einstein equivale a la anulación del tensor de Ricci. Por ello, nos interesa saber cómo es la métrica para una variedad de Lorentz con simetría esférica y tensor de Ricci nulo.

*Observación.* Dado que en el exterior de la estrella no hay materia, el tensor de energía-momento  $T$  debe ser nulo y la ecuación de Einstein se reduce a:

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = 0. \quad (3.19)$$

Veamos que (3.19) equivale a la anulación del tensor de Ricci. En efecto, respecto a una carta local de  $M$  tenemos que:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = 0,$$

de lo que se sigue que  $R - 2R = 0$  y en consecuencia  $R = 0$ . De (3.19) se concluye que  $Ric = 0$ . El recíproco es evidente.

Dada  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica, por el teorema 3.11 si  $q$  es un punto de  $M$  no fijo por la acción de  $SO(3)$ , podemos encontrar una carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$ ,  $\psi = (r, t, \theta, \phi)$  tal que la métrica se expresa:

$$g = \pi_1^*(d\omega^2) + K \pi_2^*(d\Omega^2), \quad (3.20)$$

siendo  $d\omega^2$  una métrica de índice 1 sobre la superficie  $\mathcal{C}_0$  de ecuaciones  $\phi = \phi_q, \theta = \theta_q$  y  $d\Omega^2$  es una métrica de Riemann de curvatura constante positiva sobre la superficie  $\mathcal{S}_0$  de ecuaciones  $r = r_q, t = t_q$ . Consideremos en  $\mathbb{R}^3$  la parametrización de  $S^2$ :

$$(\theta, \phi) \longmapsto (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

La métrica euclídea  $dx^2 + dy^2 + dz^2$  define una métrica de Riemann sobre  $S^2$  que en las coordenadas  $(\theta, \phi)$  se expresa como  $d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ . Dado que  $\mathcal{S}_0$  es conforme a  $S^2$ , podemos elegir coordenadas  $\theta, \phi$  en  $\mathcal{S}_0$  de manera que:

$$d\Omega^2 = \lambda^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

para cierta constante  $\lambda \neq 0$ . Por otra parte, la superficie  $\mathcal{C}_0$  podemos elegir coordenadas  $r, t$  tal que las curvas  $\partial/\partial r, \partial/\partial t$  sean ortogonales. En estas coordenadas, se tendrá que:

$$d\omega^2 = X^2 dr^2 - Z^2 dt^2,$$

siendo  $X = X(r, t), Z = Z(r, t)$  funciones diferenciables de  $\mathcal{C}_0$  en  $\mathbb{R}$ . Entonces de (3.20) se sigue que:

$$g_p = X^2(r, t) dr_{\pi_1(p)}^2 - Z^2(r, t) dt_{\pi_1(p)}^2 + Y(r, t)(d\theta_{\pi_2(p)}^2 + \sin \theta d\phi_{\pi_2(p)}^2) \quad (3.21)$$

para todo punto  $p$  de  $\mathcal{U}$  de coordenadas.  $(r, t, \theta, \phi)$ . Aunque  $Y$  está definida en  $\mathcal{U}$ , se puede definir intrínsecamente en todo el abierto  $M'$  de punto de  $M$  no fijos por la acción de  $SO(3)$ . De hecho, fijado  $p \in M'$ , si  $I_p$  es conexo, entonces el área de  $\mathcal{S}(p)$  es  $4\pi Y^2(p)$  y si  $I_p$  no es conexo, el área de  $\mathcal{S}(p)$  será  $2\pi Y^2(p)$ . A continuación obtendremos las funciones  $X, Y, Z$  imponiendo la anulación del tensor de Ricci de la métrica dada en (3.21).

En la carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$  anterior consideramos la base ortonormal de campos de vectores  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ :

$$e_1 = \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial r}, \quad e_2 = \frac{1}{Y} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad e_3 = \frac{1}{Y \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad e_4 = \frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial t} \quad (3.22)$$

y su base dual de 1-formas  $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4\}$  que viene dada por:

$$\theta^1 = X dr, \quad \theta^2 = Y d\theta, \quad \theta^3 = Y \sin \theta d\phi, \quad \theta^4 = Z dt.$$

Si denotamos  $\theta^\mu = \theta^\mu_\nu dx^\nu$  (aquí  $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (r, t, \theta, \phi)$ ), entonces la diferencial de  $\theta^\mu$  se escribe:

$$d\theta^\mu = d\theta^\mu_\nu \wedge dx^\nu = \frac{\partial \theta^\mu_\nu}{\partial x^\sigma} dx^\sigma \wedge dx^\nu.$$

siendo  $\wedge$  el producto exterior de 1-formas. Escribiendo además  $dr, dt, d\theta, d\phi$  en funciones de  $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$  se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} d\theta^1 &= \frac{\dot{X}}{XZ} \theta^4 \wedge \theta^1; \\ d\theta^2 &= \frac{Y'}{XY} \theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{\dot{Y}}{YZ} \theta^4 \wedge \theta^2; \\ d\theta^3 &= \frac{Y'}{XY} \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{\dot{Y}}{YZ} \theta^4 \wedge \theta^3 + \frac{\cotan \theta}{Y} \theta^2 \wedge \theta^3; \\ d\theta^4 &= \frac{Z'}{XZ} \theta^1 \wedge \theta^4; \end{aligned}$$

en donde  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  y  $X', Y', Z'$  denotan las derivadas de  $X, Y, Z$  respecto de  $t$  y  $r$  respectivamente. Las 1-formas  $\{\theta^\mu\}$  se relacionan con las 1-formas de conexión  $\{\omega^\nu_\mu\}$  por medio de la primera ecuación de estructura de Cartan (1.9). Teniéndose que:

$$\begin{aligned} \omega_2^1 &= -\frac{Y'}{X} d\theta; & \omega_2^3 &= \cos \theta d\phi; \\ \omega_4^1 &= \frac{\dot{X}}{Z} dr + \frac{Z'}{X} dt; & \omega_3^1 &= -\frac{Y' \sin \theta}{X} d\phi; \\ \omega_4^2 &= \frac{\dot{Y}}{Z} d\theta; & \omega_4^3 &= \frac{\dot{Y}}{Z} \sin \theta d\phi. \end{aligned}$$



Las 2-formas de curvatura son:

$$\begin{aligned}\Omega_2^1 &= \left( \left( \frac{Y'}{X} \right)' - \frac{\dot{X}\dot{Y}}{Z^2} \right) d\theta \wedge dr + \left( \left( \frac{Y'}{X} \right)^\circ - \frac{\dot{Y}Z'}{XZ} \right) d\theta \wedge dt; \\ \Omega_3^1 &= \left( \frac{\dot{X}\dot{Y}}{Z^2} - \left( \frac{Y'}{X} \right)' \right) \sin \theta dr \wedge d\phi + \left( \frac{\dot{Y}Z'}{ZX} - \left( \frac{Y'}{X} \right)^\circ \right) \sin \theta dt \wedge d\phi; \\ \Omega_2^3 &= \left( \left( \frac{Y'}{X} \right)^2 - 1 - \left( \frac{\dot{Y}}{Z} \right)^2 \right) \sin \theta d\theta \wedge d\phi; \\ \Omega_4^1 &= \left( \left( \frac{Z'}{X} \right)' - \left( \frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ \right) dr \wedge dt; \\ \Omega_4^2 &= \left( \left( \frac{\dot{Y}}{X} \right)' - \frac{\dot{X}Y'}{ZX} \right) dr \wedge d\theta + \left( \left( \frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ - \frac{Z'Y'}{X^2} \right) dt \wedge d\theta; \\ \Omega_4^3 &= \left( \left( \frac{\dot{Y}}{Z} \right)' - \frac{\dot{X}Y'}{XZ} \right) \sin \theta dr \wedge d\phi + \left( \left( \frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ - \frac{Z'Y'}{X^2} \right) \sin \theta dt \wedge d\phi.\end{aligned}$$

El tensor de curvatura  $\mathfrak{R}$  está dado por las 2-formas de curvatura según:

$$\mathfrak{R}(X, Y)e_\mu = 2\Omega_\mu^\nu(X, Y)e_\nu,$$

para cualesquiera  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Por lo tanto, el tensor de Ricci de  $g$  se escribe:

$$Ric = \tilde{R}_{\sigma\mu}\theta^\sigma \otimes \theta^\mu = 2\Omega_\mu^\nu(e_\nu, e_\sigma)\theta^\sigma \otimes \theta^\nu.$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{11} &= \frac{2}{YX} \left( \frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} - \left( \frac{Y'}{X} \right)' \right) - \frac{1}{ZX} \left( \left( \frac{Z'}{X} \right)' - \left( \frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ \right) \\ \tilde{R}_{22} &= \frac{1}{YX} \left( \frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} - \left( \frac{Y'}{X} \right)' \right) + \frac{1}{Y^2} \left( 1 + \left( \frac{\dot{Y}}{Z} \right)^2 - \left( \frac{Y'}{X} \right)^2 \right) + \frac{1}{ZY} \left( \left( \frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ - \frac{Z'Y'}{X^2} \right) \\ \tilde{R}_{33} &= \tilde{R}_{22} \\ \tilde{R}_{44} &= \frac{1}{XZ} \left( \left( \frac{Z'}{X} \right)' - \left( \frac{\dot{X}}{Z} \right)^\circ \right) + \frac{2}{YZ} \left( \frac{Z'Y'}{X^2} - \left( \frac{\dot{Y}}{Z} \right)^\circ \right) \\ \tilde{R}_{14} &= \frac{2}{YZ} \left( \frac{\dot{Y}Z'}{ZX} - \left( \frac{\dot{Y}}{X} \right)^\circ \right)\end{aligned}$$

Siendo el resto de coeficientes son nulos.

El siguiente teorema se le conoce como *Teorema de Birkhoff* y establece cómo es la expresión local de la métrica de una variedad de Lorentz con simetría esférica y tensor de Ricci nulo (ver por ejemplo [9], [5], [13]). Esta métrica fué dada por primera vez por K. Schwarzschild en menos de un año después de que Einstein estableciese las ecuaciones de campo gravitatorio (2.13).

**Teorema 3.12.** *Sea  $(M, g)$  una variedad de Lorentz con simetría esférica y tensor de Ricci nulo. Existe un subconjunto cerrado  $S$  de  $M$  y de medida nula tal que para cada  $q \in M - S$  no fijo por la acción de  $SO(3)$  existe una carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$  de coordenadas  $\psi = (r, t, \theta, \phi)$  de forma que  $g$  se expresa en  $\mathcal{U}$  como:*

$$g = \frac{1}{1 - \kappa/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - (1 - \kappa/r) dt^2, \quad (3.23)$$

para cierta constante positiva  $\kappa$ .

*Demostración.* Sea  $q \in M$  no fijo por la acción de  $SO(3)$  y  $(\mathcal{U}, \psi)$ ,  $\psi = (r, t, \theta, \phi)$  una carta local en la que la métrica se expresa como (3.21). Consideremos la función  $F$  en  $M'$  dada por:

$$F = g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)$$

Siendo  $\text{grad } Y$  el campo de vectores definido por  $g(\text{grad } Y, W) = W(Y)$  para todo  $W \in \mathfrak{X}(M')$ . Como  $Y$  sólo depende de  $r$  y  $t$  en  $(\mathcal{U}, \psi)$ ,

$$\text{grad } Y = \lambda \frac{\partial}{\partial r} + \mu \frac{\partial}{\partial t},$$

para ciertas funciones  $\lambda, \mu$ . Imponiendo que:

$$g\left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial Y}{\partial r} \quad \text{y} \quad g\left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial Y}{\partial t},$$

se sigue que  $\lambda = Y'/X^2$  y  $\mu = -\dot{Y}/Z^2$ . Por lo tanto, la función  $F$  se expresa en  $\mathcal{U}$  como:

$$F = \left(\frac{Y'}{X}\right)^2 - \left(\frac{\dot{Y}}{Z}\right)^2.$$

Veamos ahora que  $F$  no se puede anular sobre ningún abierto. El hecho de que  $F$  se anule en un abierto es equivalente a que  $\frac{Y'}{X} = \pm \frac{\dot{Y}}{Z}$ . Estudiemos primero el caso de que  $Y'/X = \dot{Y}/Z$ . En primer lugar, la ecuación  $\tilde{R}_{14} = 0$  queda  $\frac{Y'Z'}{X^2} - \left(\frac{\dot{Y}}{Z}\right)^\circ = 0$ . Sustituyendo en  $\tilde{R}_{44} = 0$  se tiene que  $\left(\frac{Z'}{X}\right)' - \left(\frac{\dot{X}}{Z}\right)^\circ = 0$  y si volvemos a sustituir en  $\tilde{R}_{11} = 0$  se tiene que  $\frac{\dot{Y}\dot{X}}{Z^2} - \left(\frac{Y'}{X}\right)' = 0$ . Finalmente de  $\tilde{R}_{22} = 0$  se sigue que:

$$\frac{1}{Y^2} \left( 1 + \left(\frac{\dot{Y}}{Z}\right)^2 - \left(\frac{\dot{Y}}{X}\right)^2 \right) = 0,$$

pero al ser  $\dot{Y}/X = \dot{Y}/Z$  debe darse que  $1/Y^2 = 0$ , lo que no es posible. En el caso de que  $Y'/X = -\dot{Y}/Z$  ya está probado pues en la métrica aparece el término  $Z$  elevado al cuadrado, y así si se cumple  $Y'/X = -\dot{Y}/Z$  basta cambiar  $Z$  por  $-Z$  en la métrica y estamos en el caso anterior.

Sea ahora  $S$  el subconjunto de  $M'$  formado por los puntos  $p$  tales que  $F(p) = 0$ . Este conjunto podría ser vacío. Fijado  $q \in M' - S$ , consideremos la carta local  $(\mathcal{U}, \psi)$  alrededor de  $q$  descrita anteriormente y tal que  $\mathcal{U} \cap S = \emptyset$ . Siguiendo la notación que precede, ponemos  $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}(q) \cap \mathcal{U}$  y  $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}(q) \cap \mathcal{U}$ .

Supongamos ahora que  $F > 0$  en  $\mathcal{U}$  y tomemos las coordenadas  $r$  y  $t$  de  $\mathcal{C}_0$  de forma que:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\text{grad } Y}{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)},$$

y que  $\partial/\partial t$  sea perpendicular a  $\partial/\partial r$ . Dado que  $F > 0$  y  $\text{grad } Y$  es espacial, el vector  $\partial/\partial t$  debe ser temporal. Además:

$$\frac{\partial Y}{\partial r} = g\left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1 \quad \text{y} \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = g\left(\text{grad } Y, \frac{\partial}{\partial t}\right) = 0,$$

se deduce que  $Y$  es una función únicamente de  $r$  y podemos tomar  $Y(r) = r$ . De aquí, la ecuación  $R_{14} = 0$  es equivalente a  $\dot{X} = 0$ , lo que implica que  $X$  es una función exclusivamente de  $r$ . En consecuencia, las ecuaciones  $R_{11} = 0, R_{44} = 0$  toman la forma:

$$\frac{2}{rX} \left(\frac{1}{X}\right)' + \frac{1}{ZX} \left(\frac{Z'}{X}\right)' = 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{XZ} \left(\frac{Z'}{X}\right)' + \frac{2}{rZ} \frac{Z'}{X^2} = 0.$$

De las relaciones anteriores se sigue que  $Z'/Z + X'/X = 0$  y por lo tanto que  $Z = \mu/X$  para cierta constante  $\mu > 0$ . Además, como  $X$  no depende de  $t$ ,  $Z$  tampoco. Expresamos entonces  $R_{22} = 0$  como:

$$-\frac{1}{Xr} \left(\frac{1}{X}\right)' + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{X^2}\right) - \frac{1}{Zr} \frac{Z'}{X^2} = 0. \tag{3.24}$$

Para resolver (3.24) basta plantear el campo de variable  $X^2 = 1/W$  quedando así que  $W' = (1 - W)/r$ . Es fácil ver que la solución general de esta ecuación es  $W(r) = 1 - \kappa/r$ . La solución de (3.24) es:

$$X(r)^2 = \frac{1}{1 - \kappa/r} \quad \text{y} \quad Z(r)^2 = \mu^2 \left(1 - \frac{\kappa}{r}\right).$$

Así, la métrica  $g$  se expresa en estas coordenadas como:

$$g = \frac{1}{1 - \kappa/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - \mu^2(1 - \kappa/r) dt^2,$$

redefiniendo  $t$  como  $\mu t$ , se obtiene (3.23). Supongamos ahora que  $F < 0$  en  $\mathcal{U}$ . Tomamos entonces las coordenadas  $r$  y  $t$  de  $\mathcal{C}_0$  de manera que:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\text{grad } Y}{g(\text{grad } Y, \text{grad } Y)},$$

y que  $\partial/\partial r$  y  $\partial/\partial t$  sean perpendiculares. De esta forma se tiene que  $\partial/\partial r$  es temporal y  $\partial\partial t$  es espacial. Procediendo de forma similar al caso anterior, se obtiene la expresión de  $g$  (ver [4]):

$$g = \left(\frac{\kappa}{t} - 1\right) dr^2 - \frac{1}{\kappa/t - 1} dt^2 + t^2(d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2).$$

Si intercambiamos las variables  $r$  por  $t$  y  $t$  por  $r$  en la expresión anterior, se obtiene de igual forma la métrica dada en (3.23)

Por otra parte, se tiene que:

$$\text{grad } Y = \left(1 - \frac{\kappa}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r},$$

y por lo tanto  $F(r) = 1 - \kappa/r$ . □

### 3.3. El espacio-tiempo de Schwarzschild

Consideremos un cuerpo esférico (una estrella) de masa  $m$  centrado en el origen de coordenadas de  $\mathbb{R}^3$ . El campo gravitatorio que produce se representará por una métrica, que sustituirá a la de Minkowski, que tendremos que calcular. En el exterior de la estrella el tensor de energía-impulso  $T$  es nulo y por tanto el tensor de Ricci de la métrica ha de ser nulo. Por la naturaleza del cuerpo, es lógico suponer que el espacio-tiempo que buscamos tiene simetría esférica con lo que la métrica se expresará localmente como:

$$g = \frac{1}{1 - \kappa/r} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - (1 - \kappa/r) dt^2, \quad (3.25)$$

siendo  $\kappa$  una constante. Observamos que en  $r = \kappa$  la métrica no está definida en dichas coordenadas. Para evitar esta singularidad tomamos:

$$V = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } r > \kappa\}.$$

Así,  $(V \times \mathbb{R}, g)$  es una variedad de Lorentz. Para que sea además un espacio-tiempo, la dotamos de la orientación temporal en la que  $\partial/\partial t$  apunta hacia el futuro.

**Definición 3.13.** *El espacio-tiempo de Schwarzschild es el producto  $V \times \mathbb{R}$  dotado de la métrica  $g$  dada en (3.25), siendo  $(r, \theta, \phi)$  coordenadas esféricas en  $V$  y  $t$  la coordenada correspondiente a  $\mathbb{R}$ .*

El grupo  $SO(3)$  actúa sobre  $(V \times \mathbb{R}, g)$  según la acción:

$$\begin{aligned} SO(3) \times (V \times \mathbb{R}) &\longrightarrow V \times \mathbb{R} \\ (\alpha, (x, t)) &\longmapsto (\alpha x, t) \end{aligned}$$

siendo  $\alpha(x)$  la acción usual de  $\alpha$  sobre  $x \in \mathbb{R}$ . De esta forma,  $(M, g)$  es una variedad de Lorentz con simetría esférica y tensor de Ricci nulo.

En realidad se puede ver que  $\kappa = 2mG$  siendo  $m$  la masa de la estrella y  $G$  la constante de gravitación universal (aquí, estamos suponiendo que  $c = 1$ ). Para unidades arbitrarias, la *métrica de Schwarzschild* viene dada por:

$$g = \frac{1}{1 - \frac{2Gm}{rc^2}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) dt^2 \quad (3.26)$$

siendo  $c$  la velocidad de la luz y  $G$  la constante de gravitación universal. Para más detalles, ver [4].



## Conclusiones y valoraciones

Con la realización del presente Trabajo de Fin de Grado he podido iniciarme en el estudio de la Relatividad General, considerada como el principal logro del pensamiento humano sobre la obtención de una teoría que formaliza el comportamiento de la naturaleza. En ella, es fundamental la aportación de Einstein de sustituir la acción a distancia que produce un campo gravitatorio creado por un cuerpo, según la Teoría Clásica de Gravitación, por la idea de que un tal cuerpo lo que produce es una distorsión del espacio a su alrededor, la cual es medida por un concepto geométrico que aparece en la geometría de Riemann, la curvatura.

Para el desarrollo del presente Trabajo de Fin de Grado, he necesitado familiarizarme en nuevos conceptos y herramientas de geometría diferencial. En particular, he necesitado ampliar estudios sobre grupos de Lie, acciones de grupos de Lie en variedades y geometría de Riemann.

He procurado que este documento sea lo más autocontenido posible dentro de sus limitaciones. Pese a ello, ha sido necesario introducirme en algunas ramas de la física pre-relativista tales como la mecánica de Newton, mecánica de fluidos o el electromagnetismo, y estudiar los fundamentos geométricos de la Relatividad Especial. Con todo ello, he adquirido nuevos conocimientos que son de gran interés para mi formación, así como las competencias que aparecen en la guía de la asignatura y los resultados de aprendizaje sobre la utilización de textos científicos de relevancia.

Por último mencionar que para la redacción de este documento, me he percatado de la dificultad que tiene redactar documentos científicos de este volumen, particularmente en lo referido a la organización del contenido que se incluye.





---

## Bibliografia

- [1] W.M. BOOTHBY. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. 2nd Ed. Revised, Academic Press (1986)
- [2] M. CARMELI. *Classical Fields*. John Wiley & Sons (1982)
- [3] M. CASTELLET, I. LLERENA. *Álgebra Lineal Y Geometría* Reverté S.A. (1994)
- [4] J. GIRBAU. *Geometria diferencial i relativitat*. Manuals de la Universitat Autònoma de Barcelona (1993)
- [5] S.W. HAWKING, G.F.R. ELLIS. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (1975).
- [6] M. KRIELE. *Spacetime: foundations of general relativity and differential geometry*. Lecture notes in physics, New series Monographs 59, Springer (2001).
- [7] A. MONTESDEOCA. *Apuntes de Introducción a las Variedades diferenciables*. (1997).
- [8] R.K. SACHS, H. WU. *General Relativity for Mathematicians*. Graduate Texts in Mathematics 48, Springer-Verlag New York (1977).
- [9] N. STRAUMANN. *General relativity*. 2nd ed., Graduate texts in physics, Springer. (1984)
- [10] F.W. WARNER. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. 1st Ed., Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag New York (1971).
- [11] H. WEYL. *Space-Time-Matter*. 4th Ed., Dover Publications (1952),
- [12] D. LOVELOCK. *The four-dimensionality of space and the Einstein tensor*. J. Math. Phys. 13, (1972), 874-876
- [13] P. G. BERGMANN, M. CAHEN, A.B. KOMAN. *Spherically Symmetric Gravitational Fields* J. Math. Phys. 6 (1965), 1-5
- [14] J. SZENTHE. *On the global geometry of spherically symmetric space-times* Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 137, (2004), pp. 297-306.



# An introduction to General Relativity

Nowadays, *The General Theory of Relativity* seems to be the greatest accomplishment of human thought about nature. This theory involves a solid mathematical formalism and experimental physics.

## 1. Introduction

This memory is divided in three chapters. In the first chapter we start introducing some fundamental results about differential geometry on smooth manifolds. Later, in the second chapter, we conclude that the spacetime in presence of a gravitational field must be identified with a lorentzian manifold  $(M, g)$  and  $g$  must contain all the information about the gravitational field. Finally we study Lorentz manifolds with spherical symmetries and prove the Birkhoff's theorem. Using this theorem, we describe the Schwarzschild space-time.

## 2. Mathematical tools

- Lie groups and actions of Lie groups.
  - Lie algebra of a Lie group and the exponential map.
  - Rotational group  $SO(3)$ .
- Riemannian geometry.
  - Lorentz metric.
  - Levi-Civita connection.
  - Geodesics and exponential map.
  - Curvature tensor.
  - Cartan structure equations.
- Distributions.
  - Integrable distribution: Frobenius theorem.

## 3. Results obtained

Introduction to General Relativity:

- The gravitational field must be identified with a lorentzian metric  $g$  over the four dimensional space-time manifold  $M$ .
- The metric  $g$  is given by the *Einstein's fields equation*:

$$Ric - \frac{1}{2}Rg = \kappa T.$$

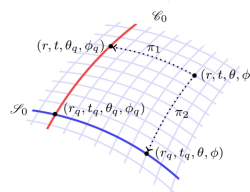
where  $T$  is the stress-energy tensor.

Spherically symmetric solution of the Einstein's fields equation:

- Let  $(M, g)$  be spherically symmetric Lorentz manifold. For any  $q \in M$  (not fixed by  $SO(3)$ ) there is a local chart  $(U, \psi), \psi = (r, t, \theta, \phi)$  such that:

$$g = \pi_1^*(d\omega^2) + K^2\pi_2^*(d\Omega^2) \quad (1)$$

being  $d\omega^2$  a metric of signature  $(+, -)$  over a 2-dimensional surface  $\mathcal{C}_0$  of coordinates  $\theta = const, \phi = const$  and  $d\Omega^2$  a riemannian metric of constant positive curvature of other 2-dimensional surface  $\mathcal{S}_0$  of coordinates  $r = const, t = const$ . Also,  $K = K(r, t)$  is a real function on  $\mathcal{C}_0$  and  $\pi_1, \pi_2$  the projections  $(r, t, \theta, \phi) \mapsto (r, t, \theta_q, \phi_q), (r, t, \theta, \phi) \mapsto (r_q, t_q, \theta, \phi)$  respectively.



- Furthermore, if  $Ric = 0$ :

$$g = \frac{1}{1-\kappa/r} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) - \left(1 - \frac{\kappa}{r}\right) dt^2 \quad (2)$$

This statement is known as the *Birkhoff Theorem*.

- The *Schwarzschild spacetime*  $(M, g)$  where  $g$  is the *Schwarzschild metric* given by (2) with  $\kappa = 2Gm$  ( $G$  is the gravitational constant, and  $m$  is the mass of the body that produces the gravitational field) and  $M$  is the manifold  $V \times \mathbb{R}, V = \{(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : r > \kappa\}$ .

## References

- [1] W.M. BOOTHBY. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. 2nd Ed. Revised, Academic Press (1986)
- [2] M. CARMELI. *Classical Fields*. John Wiley & Sons (1982)
- [3] J. GIRBAU. *Geometria diferencial i relativitat*. Manu- als de la Universitat Autònoma de Barcelona (1993)
- [4] S.W. HAWKING, G.F.R. ELLIS. *The large scale structure of space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press (1975).
- [5] M. KRIELE. *Spacetime: foundations of general relativity and differential geometry*. Lecture notes in physics, New series Monographs 59, Springer (2001).
- [6] N. STRAUMANN. *General relativity*. 2nd ed., Gradu- ate texts in physics, Springer. (1984)
- [7] F.W. WARNER. *Foundations of differentiable man- ifolds and Lie groups*. 1st Ed., Graduate Texts in Mathematics 94, Springer-Verlag New York (1971).