Carolina Yanes Rivero

# *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas del alumnado con TDAH*

Mathematics learning disabilities in students with ADHD

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2017

Dirigido por

*María Isabel Marrero Rodríguez*
*Melinda Endrefy*

María Isabel Marrero Rodríguez
*Dpto. de Análisis Matemático*
*Universidad de La Laguna*
*38200 La Laguna, Tenerife*

Melinda Endrefy
*Gabinete Psicológico Guajara*
*38205 La Laguna, Tenerife*

# Agradecimientos

Agradezco infinitamente la labor y la dedicación que han aportado M.ª Isabel Marrero y Melinda Endrefy invirtiendo su tiempo y esfuerzo para que esta investigación se pudiera llevar a cabo.

A ti, no sólo por participar, sino por haber aceptado ser el protagonista de este proyecto que con tanta ilusión hemos creado.

A mi familia y amigos, por la paciencia y la confianza que han depositado en mí. Han sido un apoyo incondicional a lo largo de estos años.

Haber tenido la oportunidad de trabajar día a día en un proyecto que realmente me apasiona, es lo más gratificante que me llevo, y no podría haber sido posible sin la ayuda de mi tutora.

# Resumen · Abstract


## *Resumen*

*El trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH) es un desorden crónico, de origen neurobiológico, cuyos síntomas principales incluyen dificultad para sostener la atención y la concentración, impulsividad e inquietud motriz exagerada para la edad del niño y el contexto en que acontece. Se trata del trastorno con mayor prevalencia en la infancia; sin embargo, se constata que la administración educativa no proporciona los apoyos suficientes a padres y educadores. El objetivo general de este trabajo es estudiar el caso de un alumno de sexto curso de Educación Primaria diagnosticado de TDAH y desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a ese nivel, atendiendo a la directriz educativa de integración curricular de las tecnologías de la información y la comunicación. Se han configurado tres escenarios de enseñanza-aprendizaje: la estrategia I, según la cual el sujeto se enfrenta a la resolución de un problema sin ningún tipo de apoyo externo; la estrategia II, en la que se le proporciona ayuda verbal mediante técnicas psicopedagógicas; y la estrategia III, en la que se define una alternativa de aprendizaje por descubrimiento mediante el uso del software de matemáticas dinámicas GeoGebra. Atendiendo a los resultados obtenidos, se ha derivado una propuesta didáctica y metodológica.*



**Palabras clave:** *Trastorno por déficit de atención e hiperactividad – TDAH – Dificultades de aprendizaje de las matemáticas – DAM – GeoGebra.*

## *Abstract*

*Attention-Deficit Hyperactivity Disorder (ADHD) is a chronic, neurobiological disorder whose main symptoms include difficulty in sustaining attention and concentration, impulsivity, and exaggerated motor restlessness for the child's age and the environment where it occurs. It is the most prevalent disorder in childhood; however, it is noted that educational administration does not provide enough support to parents and educators. The general objective of this investigation is to study the case of a sixth-grade primary education student diagnosed with ADHD and to develop a didactic proposal for the teaching and learning of mathematics at that level, in accordance with the educational framework for curricular integration of information and communication technologies. To this end, three teaching-learning scenarios have been configured: strategy I, whereby the subject must resolve a problem without any external support; strategy II, where he is provided with verbal support through psychopedagogical techniques; and strategy III, where an alternative learning-by-discovery scenario is defined using the dynamic mathematical software GeoGebra. A didactic and methodological proposal has been made on the basis of the obtained results.*



**Keywords:** *Attention-Deficit Hyperactivity Disorder – ADHD – Mathematics Learning Disabilities – MLD – GeoGebra.*

# Contenido

# Introducción

## 0.1. Justificación

El trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH) es un desorden crónico, de origen neurobiológico, cuyos síntomas principales incluyen dificultad para sostener la atención y la concentración, impulsividad e inquietud motriz exagerada para la edad del niño y el contexto donde acontece [21]. El rendimiento escolar representa una de las áreas en que más deterioro puede causar el TDAH, pues estudiar requiere organización, planificación, autocontrol y concentración, que son precisamente las funciones ejecutivas más afectadas en quienes lo padecen. Según Barkley [6, p. 126], el 56 % de los niños con TDAH requiere tutorización académica, aproximadamente el 30 % repite algún curso, y un 30 %-40 % es derivado a algún programa de educación especial; hasta un 46 % suspende la educación primaria, y un 10 %-35 % abandona sin completar la secundaria.

Estudios recientes han determinado que el TDAH es el trastorno con mayor prevalencia en la infancia. Afecta de un 3 % a un 5 % de la población en edad escolar, lo que, estadísticamente hablando, supone de uno a tres estudiantes por aula. Además, se da un alto porcentaje de comorbilidad del TDAH con dificultades de aprendizaje (DA) en distintas materias; aunque la literatura sobre el tema es relativamente escasa, algunas investigaciones cifran en un 31 % el porcentaje de niños con TDAH que presenta una dificultad específica en matemáticas (DAM).

La legislación vigente, tanto estatal como autonómica, dispone que los escolares diagnosticados de TDAH requieren una atención educativa que les garantice alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales y, en todo caso, los objetivos establecidos con carácter general para todo el alumnado de su mismo nivel; a lo largo del trabajo se citarán las referencias oportunas. Pero el hecho real es que la administración educativa no proporciona los apoyos suficientes, y se detecta la necesidad de definir acciones concretas de soporte a los educadores.

## 0.2. Objetivos

Las matemáticas constituyen una asignatura muy compleja que requiere de concentración, lógica, reflexión y constancia, siendo necesario entrenar progresivamente tanto las destrezas operacionales como las habilidades para la resolución de problemas. Con independencia de la existencia o no de un trastorno por DAM comórbido, se trata de una de las materias que más dificultades suelen presentar a los niños con TDAH, caracterizados precisamente por la inatención, la impulsividad y la hiperactividad, lo que, con frecuencia, les induce a desistir de la asignatura.

El objetivo general de este trabajo es estudiar el caso [46] de un alumno de sexto curso de Educación Primaria diagnosticado de TDAH y desarrollar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a ese nivel, atendiendo a la directriz educativa de integración curricular de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC).

Adicionalmente a esta directriz, hay que tener en cuenta que las TIC están avaladas por la literatura como un apoyo adecuado para el manejo del TDAH, por cuanto facilitan la consecución de las competencias requeridas por el currículo al tiempo que mejoran la creatividad, autonomía, motivación y concentración del alumno afectado por este trastorno, si bien ha de cuidarse que las actividades educativas que se propongan puedan ser trabajadas en el aula junto al resto de compañeros y ayuden a controlar la tendencia a la distracción, manteniendo al sujeto concentrado y predispuesto.

Específicamente, hemos pretendido:

1. Comprender las principales causas y consecuencias del TDAH en conexión con las matemáticas.
2. Conocer la normativa estatal y autonómica que regula las necesidades específicas de apoyo educativo en relación con este trastorno.
3. Estudiar las DA en general, y las DAM en particular, a que se enfrentan en el aula los niños que padecen TDAH.
4. Revisar la literatura referente al uso de las TIC como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje en general, y de las matemáticas en particular, en el alumnado afectado de TDAH.
5. Contrastar experimentalmente la validez de GeoGebra como instrumento para la prestación de este apoyo, en el caso concreto de un estudiante de sexto de Primaria diagnosticado de TDAH.
6. Formular propuestas didácticas y metodológicas en función de las conclusiones derivadas de la experiencia desarrollada.

## 0.3. Metodología y plan de trabajo

Tras la preceptiva revisión bibliográfica, se ha elaborado un marco teórico donde se encuadra un estudio de caso en el que se consideran tres estrategias de enseñanza-aprendizaje: la estrategia I, según la cual el sujeto se enfrenta a la resolución de un problema sin ningún tipo de apoyo externo; la estrategia II, en la que se le proporciona ayuda verbal mediante técnicas psicopedagógicas; y la estrategia III, en la que se define una alternativa de aprendizaje por descubrimiento mediante el uso del software de matemáticas dinámicas GeoGebra. Se han configurado así tres escenarios de enseñanza-aprendizaje de cuya aplicación, atendiendo a los resultados obtenidos, se ha derivado una propuesta didáctica y metodológica.

Para la fundamentación teórica del trabajo, recogida en el capítulo 1 de la memoria, ha sido indispensable un estudio en profundidad sobre el TDAH y las DAM, recabando y contrastando la información necesaria de libros y artículos seleccionados con el asesoramiento de especialistas.

La intervención educativa, que se detalla en el capítulo 2 de la memoria, ha sido llevada a cabo mediante cinco secuencias didácticas, fundamentadas, respectivamente, en los teoremas de Pitágoras, Haga, Pick, el problema de la aguja de Buffon y el método de Montecarlo aplicado al cálculo de áreas. Estas secuencias consisten en un conjunto de actividades diseñadas siguiendo las pautas recomendadas para el manejo del TDAH desde un punto de vista educativo, las cuales se recogen en el capítulo 1. Cada secuencia corresponde a una sesión de trabajo con el sujeto, presentada en la memoria con la siguiente estructura:

1. Fundamentación matemática: enunciado y demostración del teorema o resultado a utilizar. Naturalmente, esta fundamentación rigurosa queda oculta al alumno.
2. Justificación en referencia al currículo de sexto de Primaria vigente en la Comunidad Autónoma de Canarias, y diseño de la experiencia: temporalización; recursos y espacios; modelos de enseñanza; objetivos didácticos; competencias; instrumentos de evaluación; contenidos; orientaciones metodológicas y estrategias didácticas particulares.
3. Resultados.
4. Discusión de la intervención.

Como instrumento de valoración de cada una de estas sesiones se ha utilizado una guía de observación con sendos formularios para el registro de las siguientes nueve dimensiones:

1. Desempeño general.
2. Uso de la tecnología.
3. Motivación y aceptación de la tecnología.
4. Manifestación de síntomas, en dos subejes: cognitivo y conductual.

5. Errores matemáticos tipificados.
6. Dificultades en la resolución de la actividad.
7. Aspectos formales.
8. Ejecución de la actividad.
9. Otras observaciones.

El capítulo 3 del trabajo recoge el análisis, conclusiones, limitaciones y prospectiva de la experiencia desarrollada. La memoria concluye con la relación de la bibliografía utilizada y el preceptivo póster en lengua inglesa que resume su contenido.

## 0.4. Análisis del caso

Resumimos brevemente las características del alumno al que se le aplicó la intervención, según constan en el informe psicopedagógico con propuesta realizado por el Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógico (EOEP) de zona el 5 de abril de 2017.

Juan (nombre ficticio para preservar la necesaria confidencialidad) es un niño de doce años que inicia su escolaridad a los tres en el mismo centro público donde ha cursado toda la Educación Primaria. El curso escolar 2013/14 se le diagnostica TDAH, subtipo combinado, pautándosele tratamiento farmacológico. Durante el curso 2016/17 cursó sexto de Primaria con todas las áreas superadas, desarrollo adecuado de todas las competencias y propuesta de promoción a ESO. Obtiene un buen desenvolvimiento en cálculo, aunque necesita mejorar la resolución de problemas.

Según la escala de Reynolds (RIAS), la capacidad intelectual general, así como las inteligencias verbal y no verbal de Juan se sitúan en el promedio, pero en memoria obtiene una puntuación media-baja. Muestra un estilo de aprendizaje dependiente, con poca iniciativa y lentitud en la realización de las tareas, evidenciando atención dispersa y dificultades en la concentración. Estos rasgos son compatibles con su diagnóstico.

Como orientaciones metodológicas y organizativas para el aula ordinaria y para la evaluación, el informe propone, esencialmente, las recogidas en el artículo 8 del Anexo II de la *Resolución de 9 de febrero de 2011, de la Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes, por la que se dictan instrucciones sobre los procedimientos y los plazos para la atención educativa del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo en los centros escolares de la Comunidad Autónoma de Canarias*[1].

[1] Boletín Oficial de Canarias no. 40, de 24 de febrero de 2011.

# 1

# Marco teórico

## 1.1. ¿Qué es el TDAH?

Las siglas TDAH son un acrónimo de «trastorno por déficit de atención con hiperactividad». Se trata de un trastorno originado en la infancia, cuyos síntomas principales incluyen problemas para sostener la atención y la concentración, impulsividad, e inquietud motriz exagerada para la edad del niño y el contexto donde acontece. Las personas que lo sufren tienen dificultades para controlarse, organizarse y/o priorizar sus impulsos y las percepciones que reciben tanto de su interior como del exterior. Estos síntomas interfieren con el aprendizaje y deterioran la convivencia familiar, escolar y social, constituyendo una seria amenaza a la autoestima de los niños afectados.

### 1.1.1. Causas y tratamiento

Muchos son los factores (ambientales, perinatales, genéticos, hormonales) que se han ido asociando al TDAH para explicar su etiología. Aunque en la actualidad ésta sigue sin conocerse con precisión, la hipótesis que ha cobrado más fuerza sostiene que se trata de un trastorno crónico de origen neurobiológico, relacionado con diferencias en el desarrollo y funcionamiento cerebral, y con una fuerte componente hereditaria [5].

Los pacientes con TDAH presentan un desequilibrio químico de los neurotransmisores, como la dopamina y la noradrenalina. Principalmente se ve afectado el lóbulo frontal, por lo que habrá una alteración en la atención, en el control de los impulsos y en las funciones ejecutivas, un amplio conjunto de capacidades adaptativas que nos permiten analizar qué es lo que queremos, cómo podemos conseguirlo y cuál es el plan de actuación más adecuado para su consecución, autoguiados por nuestras propias instrucciones (lenguaje interior) sin depender de indicaciones externas.

Uno de los modelos teóricos más desarrollados en la explicación del TDAH es el propuesto por Barkley [5, 6]. Según este autor, el problema principal radica en un déficit en la inhibición de respuesta, una función ejecutiva primordial que permite el buen funcionamiento de otras funciones ejecutivas importantes como la memoria de trabajo (no verbal), la interiorización del lenguaje, la autorregulación del sentimiento, motivación y activación, y la reconstitución. El funcionamiento inadecuado de las funciones ejecutivas se manifiesta en los siguientes rasgos predominantes en niños con TDAH:

- Inadecuada respuesta inhibitoria, dificultades en el control de impulsos y necesidad de recompensa inmediata.
- Excesiva actividad en tareas irrelevantes, o bien pobre regulación de la actividad frente a la exigencia de una determinada situación.
- Dificultades en la regulación de las emociones, la motivación y el estado de alerta.
- Mayor variabilidad en el rendimiento de su trabajo.
- Dificultad para mantener la atención de forma sostenida y gran facilidad para la distracción ante estímulos externos.
- Incapacidad para generar la motivación intrínseca necesaria ante tareas que no tengan ninguna consecuencia inmediata o resulten atractivas para ellos.
- Rendimiento académico por debajo de su capacidad.

Algunas formas leves de TDAH se pueden controlar a veces con tratamiento no farmacológico; sin embargo, numerosos estudios indican que el tratamiento más eficaz es la combinación de medicación, psicoterapia cognitivo-conductual, entrenamiento a los padres e intervención educativa. Los fármacos administrados (generalmente, metilfenidato o atomoxetina) modifican el funcionamiento cerebral, mejorando la atención y reduciendo la hipercinesis, pero el entorno, tanto familiar como socioeducativo, puede hacer mucho por la evolución y mejora del paciente [43], por lo que cabe destacar el papel fundamental que desempeñan tanto padres como educadores a la hora de enfrentar este trastorno y prevenir otros más graves. El trabajo conjunto de médico, profesores y familiares será el precursor del desarrollo personal y académico de estos niños que, con los estímulos positivos y el apoyo adecuado a sus dificultades, llegarán a alcanzar sus metas más próximas y de futuro.

### 1.1.2. Criterios diagnósticos

Para el diagnóstico de un niño posiblemente afectado de TDAH se cuenta con una serie de criterios que se han ido recogiendo en las sucesivas ediciones de los dos sistemas de clasificación internacionales: la Clasificación Internacional de Enfermedades de la OMS-Organización Mundial de la Salud, actualmente en su décima revisión (CIE-10), y el Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales de la APA-Asociación Americana de Psiquiatría, actualmente en su quinta edición (DSM-5).

La CIE-10 [36] clasifica el TDAH como un «trastorno hipercinético», caracterizado por dificultades para mantener la atención, hiperactividad motriz e impulsividad. El *déficit atencional* se pone de manifiesto por la incapacidad para concentrarse en las tareas o en el juego, interrupción prematura de la ejecución de las actividades, escasa capacidad de organización, evitación de esfuerzos mentales sostenidos, fácil distracción ante estímulos externos y pérdida u olvido de objetos y objetivos. La *hiperactividad* implica una persistencia en un patrón de actividad excesiva que no es modificable sustancialmente por los requerimientos del entorno social. La *impulsividad* se refleja en la precipitación al responder, incapacidad de guardar turno, verborrea o intromisión en asuntos ajenos. Estos síntomas han de presentarse antes de los 7 años, darse en dos o más aspectos del entorno del niño (escolar, familiar o social) y afectar negativamente a su calidad de vida. Además, debe descartarse previamente la existencia de un trastorno generalizado del desarrollo, episodio depresivo o trastorno de ansiedad.

El DSM-5 [3] es el sistema de clasificación de trastornos mentales más utilizado a nivel mundial. Para el diagnóstico del TDAH requiere un patrón de inatención y/o hiperactividad-impulsividad mantenido durante al menos 6 meses, en un grado que no concuerde con el nivel de desarrollo e interfiera con las actividades escolares y sociales. Algunos de estos síntomas deben haber estado presentes antes de los 12 años y en dos o más contextos. Se ha de descartar que se produzcan durante el curso de trastornos psicóticos y se expliquen mejor por otro trastorno mental (trastorno del estado de ánimo, trastorno de ansiedad, trastorno disociativo, trastorno de la personalidad, intoxicación o abstinencia de sustancias).

### 1.1.3. Prevalencia e indicadores

Estudios recientes han determinado que el TDAH es el trastorno con más prevalencia en la infancia. Afecta de un 3 % a un 5 % de la población en edad escolar [2, 3], lo que, estadísticamente hablando, representa de uno a tres estudiantes por aula. Se presenta con mayor incidencia en los niños que en las niñas, con una proporción de 4 a 1 según [2] y de 2 a 1 según [3]. Los niños muestran un mayor grado de hiperactividad e impulsividad que las niñas, lo que les lleva a ser más molestos o agresivos tanto con los padres como con el profesorado. Las niñas, sin embargo, presentan mayores problemas de rendimiento académico y no acostumbran a mostrar conductas disruptivas, lo que conlleva que sea más difícil detectar el trastorno en ellas.

Los padres y educadores deben permanecer atentos ante el niño o niña que:

- Tiene dificultades para autorregular su comportamiento y/o dirigir su conducta, que repercuten en su rendimiento escolar y en su día a día.
- Evidencia falta de atención y dificultades para responder a las exigencias de los aprendizajes.
- Sufre un claro impedimento para seguir las normas o para aprender de la experiencia, es decir, repite los mismos errores y las mismas acciones aunque éstas estén mal realizadas.
- Le resulta complicado adquirir hábitos, tanto higiénicos como escolares.
- Presenta las tareas de casa o los deberes descuidados, inacabados, o difíciles de entender.
- Pierde y olvida objetos, tales como material escolar o prendas de ropa.
- Adolece de baja autoestima debido a los constantes resultados negativos.

Es recomendable observar con qué intensidad se presentan los síntomas descritos anteriormente. Hay que tener en cuenta que, en general, los niños son inquietos y se distraen con cualquier cosa, por lo que no todos a los que les cuesta mantener la atención o la compostura padecen este trastorno. El diagnóstico diferencial debe ser realizado por un especialista.

### 1.1.4. Tipos de TDAH

Ni siquiera los niños diagnosticados de TDAH exhiben los mismos síntomas y con la misma intensidad. Algunos presentan, principalmente, síntomas de desatención; otros, síntomas impulsivos o hiperactivos; y otros más presentan una combinación de algunos de ellos. El DSM-5 distingue tres subtipos dentro del TDAH:

- *Subtipo predominante inatento.* Son niños que no prestan atención a los detalles; tienen dificultad en mantener el interés y la atención; con frecuencia parecen no escuchar cuando se les habla directamente, como si soñaran despiertos; no siguen las instrucciones; evitan hacer un esfuerzo mental sostenido; descuidan actividades o tareas diarias; se distraen fácilmente por estímulos externos. En el aula se muestran pasivos, pasan desapercibidos y no anotan los deberes en la agenda, lo que hace que olviden entregar tareas o las entreguen con retraso e incompletas; en los exámenes, sus respuestas son desorganizadas y ocupan lugares inapropiados. Estos niños normalmente pasan por mostrar poco interés o ser poco inteligentes, por lo que suelen terminar ubicados al fondo de la clase sin que nadie espere más de ellos.
- *Subtipo predominante hiperactivo-impulsivo.* Los afectados se mueven todo el rato, juguetean con las manos o los pies, se balancean o se levantan de su silla; hablan en exceso; tienden a precipitarse en las respuestas; no esperan su turno; interrumpen o se inmiscuyen en las actividades de otros. El comportamiento de estos niños en el aula suele ser disruptivo y pueden llegar a mostrar reacciones agresivas.

- *Subtipo combinado.* Los pacientes presentan una combinación de los síntomas atencionales e hiperactivo-impulsivos nombrados anteriormente.

## 1.2. Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas del alumnado con TDAH

### 1.2.1. ¿Qué se entiende por dificultades en el aprendizaje?

La LOMCE [24], en su artículo 71, y el *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*[1], en su artículo 14, reconocen explícitamente que

> *corresponde a las Administraciones educativas asegurar los recursos necesarios para que los alumnos y alumnas que requieran una atención educativa diferente a la ordinaria, por presentar necesidades educativas especiales, por dificultades específicas de aprendizaje, TDAH, por sus altas capacidades intelectuales, por haberse incorporado tarde al sistema educativo, o por condiciones personales o de historia escolar, puedan alcanzar el máximo desarrollo posible de sus capacidades personales y, en todo caso, los objetivos establecidos con carácter general para todo el alumnado,*

a cuyo fin *se establecerán las medidas curriculares y organizativas oportunas que aseguren su adecuado progreso.* En particular, *se establecerán las medidas más adecuadas para que las condiciones de realización de las evaluaciones se adapten a las necesidades del alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo.*

Se desprende de lo anterior que en el marco educativo de la LOMCE no existe una categoría diagnóstica específica para las dificultades de aprendizaje (DA), quedando englobadas bajo el término «necesidades específicas de apoyo educativo» junto con las referidas al alumnado que presenta TDAH, altas capacidades intelectuales, que se ha incorporado tarde al sistema educativo, o cuyas condiciones personales o de historia escolar limitan el desarrollo de sus capacidades y le impiden alcanzar los objetivos y competencias de la etapa. En consecuencia, las DA no se entienden como una entidad diferenciada, sino como una constatación de hecho sobre unas necesidades educativas especiales, para las que, sin embargo, sí se provee de recursos educativos por medio de las adaptaciones curriculares.

Tradicionalmente, las DA (y en particular las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, DAM) han sido y continúan siendo diagnosticadas desde el ámbito clínico como trastornos del aprendizaje, siguiendo los criterios de la APA en las sucesivas ediciones de su DSM, y en menor medida los criterios de la

[1] Boletín Oficial del Estado no. 52, de 1 de marzo de 2014.

OMS en su CIE. El DSM-5 [3] agrupa dentro de un único «trastorno específico del aprendizaje» los tres trastornos de aprendizaje que existían en su edición precedente DSM-IV-TR [2]: el trastorno de la lectura, el trastorno de la escritura y el trastorno del cálculo. La OMS se refiere a las DAM en la CIE-10 [36] con el término «trastorno específico del cálculo», caracterizándolo por una alteración específica de la capacidad de aprendizaje de la aritmética, no explicable por un retraso mental generalizado, por una escolaridad claramente inadecuada o por déficits sensoriales.

Por su parte, el Anexo I de la *Orden de 13 de diciembre de 2010 de la Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes, por la que se regula la atención al alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo en la Comunidad Autónoma de Canarias*[2], a los efectos de dicha Orden, define cuándo un alumno presenta necesidades específicas de apoyo educativo por «Dificultades específicas de aprendizaje» y, dentro de éstas, «Dificultades específicas de aprendizaje del cálculo aritmético o discalculia».

La definición de DA que adoptaremos para este trabajo será la más extendida en el campo: se entenderá por DA cualquier dificultad manifiesta en un área de conocimiento que el niño presente de forma inesperada [27, p. 524]. El matiz «inesperada» es esencial y se refiere a que tales dificultades no son congruentes con un nivel de inteligencia normal, oportunidades óptimas para aprender, carencia de desventajas socioeconómicas y dificultades emocionales, y un desarrollo escolar adecuado en otras áreas de conocimiento.

### 1.2.2. TDAH y DAM

Las DA son una de las condiciones comórbidas más comunes en el TDAH [7, 13], con una prevalencia significativamente superior a la encontrada en la población general, y una repercusión negativa en la evolución del trastorno a largo plazo [12]. A pesar de que el grado de asociación de las DAM con el TDAH oscila entre el 18 % y el 31 %, según los autores [8, 30, 48], las investigaciones empíricas han sido escasas y focalizadas en el análisis de las dificultades en aritmética [14, 15, 16] dejando de lado el área de la resolución de problemas [26], además de no atender específicamente al subgrupo TDAH+DAM. Como excepción a esta tónica podemos citar los recientes trabajos [9, 10, 31].

De acuerdo a numerosas investigaciones, la principal causa por la que se produce la elevada comorbilidad entre el TDAH y las DAM reside en el hecho de que muchos de los procesos cognitivos afectados son compartidos en los dos trastornos, y se relacionan con un déficit en el funcionamiento ejecutivo del individuo que los sufre. González Castro *et al.* [17], Meliá de Alba [31], Miranda Casas *et al.* [32, 33, 34] y Zentall [48] concluyen que la falta de atención, de

[2] Boletín Oficial de Canarias no. 250, de 22 de diciembre de 2010.

memoria de trabajo (especialmente de su componente visoespacial) y de control inhibitorio pueden ayudarnos a explicar las DAM de los niños con TDAH.

La *atención* se ha considerado como un proceso cognitivo básico que puede encontrarse en la base de la asociación TDAH+DAM. Es una especie de filtro de la información y un mecanismo de alerta ante los datos importantes. Además, nos permite focalizar y mantener el esfuerzo mental en determinados estímulos (internos o ambientales), excluyendo otros distractores irrelevantes en ese momento.

Existen varios tipos de atención que responden a circuitos cerebrales diferentes, siendo los más importantes los encargados de la fase de alerta, de la atención selectiva, de la atención continua o sostenida, y de la atención dividida. Estas funciones están afectadas por el TDAH:

- La *alerta-vigilancia-activación* (*arousal*) nos permite estar atentos para percibir y reaccionar ante estímulos significativos de cara a la actividad que estamos realizando. La consecuencia de su alteración en las personas con TDAH es la dificultad para acometer tareas de manera voluntaria, mostrando en cambio un comportamiento procrastinador, errático y carente de determinación.
- La *atención selectiva* es el filtro que evita la sobrecarga mental, seleccionando la información importante e ignorando el resto. Las personas con TDAH tienen alterada la capacidad de inhibir y rechazar las interferencias que habitualmente serían ignoradas o suprimidas, creando en su cerebro una atracción anormal por el medio que les rodea, en la búsqueda incansable de estímulos novedosos y gratificantes.
- La *atención sostenida* alude a la capacidad para mantener el foco de atención en un estímulo el tiempo suficiente, resistiendo las distracciones y el incremento de la fatiga. Las personas con TDAH son incapaces de sostener la atención, por lo que cambian de actividad con frecuencia, sin lograr terminar ninguna. Las dificultades surgen especialmente ante las tareas prolongadas, repetitivas y que exigen un esfuerzo mental continuo, y ante las metas a largo plazo, que no proporcionan recompensas inmediatas.
- La *atención dividida* es la capacidad para cambiar el foco de atención de manera flexible, es decir, para atender a más de una estímulo a la vez (como, por ejemplo, tomar apuntes mientras se escucha al profesor) o pasar de uno a otro alternativamente.

Baddeley (cf. [4, p. 234]) define la *memoria de trabajo* como un sistema cuya principal función es la de mantener y manipular a corto plazo la información necesaria para llevar a cabo tareas complejas tales como aprender, comprender y razonar. En este modelo [31, p. 68],

> *se asume un sistema de control intencional llamado* ejecutivo central*, que opera con dos sistemas subsidiarios: el* bucle fonológico*, que*

> *concierne a la información auditiva de base lingüística, y el* componente visoespacial*, encargado de mantener y manipular información visual y espacial. Este sistema tripartito presenta las funciones repartidas, de forma que el ejecutivo central asume la función de control, mientras que los dos sistemas subsidiarios asumirán la manipulación de la información específica de los ítems que están siendo procesados. Una característica importante de la memoria de trabajo es que tiene limitada su capacidad de información, por lo que los recursos se verán limitados en sistemas subsidiarios si las demandas en la ejecución son exigentes, y viceversa.*

La memoria de trabajo se relaciona con muchas tareas matemáticas: posibilita el mantenimiento activo de múltiples ideas, la recuperación de hechos matemáticos de la memoria a largo plazo y la monitorización persistente que requieren las actividades de matemáticas. El componente visoespacial de la memoria de trabajo permite la representación mental de magnitudes numéricas, a través de figuras o gráficos que se construyen durante el desarrollo de procesos numéricos o la resolución de problemas aritméticos, por lo que la afectación de este componente sugiere también dificultades en la representación gráfica del número y de las variables implicadas en los problemas [32, 39].

La *inhibición* es el freno del comportamiento: detiene la reacción automática ante un estímulo, para responder reflexiva y adecuadamente. Según Barkley [5], además de generar una conducta impulsiva, hiperactiva y desorganizada, el déficit inhibitorio propio del TDAH es el responsable de déficits cognitivos y alteraciones en el resto de funciones ejecutivas. La inhibición crea una pausa brevísima entre el estímulo y la respuesta; en ese intervalo, las funciones ejecutivas nos ayudan a analizar las posibles consecuencias de una acción y, en función de esto, nos planificamos y organizamos para conseguir el objetivo trazado. Si esa pausa no existe, las restantes funciones ejecutivas no pueden intervenir. Por ejemplo, la pausa inhibitoria creada entre el estímulo y la respuesta inmediata protege la atención de la interferencia de las distracciones, ya sea internas (pensamientos, emociones, sensaciones) o externas, evitando que nos desvíen del cumplimiento de una meta. Esta inhibición atencional facilita el funcionamiento de la memoria de trabajo.

### Dificultades en la numeración y el cálculo

Como ya quedó dicho, los afectados por TDAH muestran serios problemas para mantener la atención (atención sostenida en este caso), especialmente cuando se trata de actividades que se prolongan en el tiempo, o que son repetitivas; de ahí sus dificultades con la adquisición de los automatismos del cálculo, que depende de la repetición de las asociaciones y requiere vigilancia e implicación activa. Además, este proceso se ve perjudicado por las limitaciones en la memoria de trabajo y la atención selectiva; ambas discapacidades impiden evocar reglas matemáticas, realizar operaciones mentalmente e ignorar estímulos externos irrelevantes, abocando a una incapacidad para concluir con éxito los cálculos matemáticos y, en general, cualquier tarea multipaso que implique mantener en la memoria las etapas previas. Por otra parte, junto a las limitaciones para acceder rápidamente a la memoria, los estudiantes con TDAH suelen desplegar estrategias inmaduras de recuento, por ejemplo «contar todo» en lugar de «contar a partir de», que suponen también un coste enorme para la memoria de trabajo. Finalmente, los fallos de supervisión pueden provocar errores como confundir el signo, cambiar el algoritmo de la suma por el de la resta a mitad de operación, o restar el número mayor del menor [32].

**Dificultades en la resolución de problemas aritmético-verbales**

La posibilidad de llevar a cabo correctamente los procesos que intervienen en la resolución de problemas aritmético-verbales [34, p. 255] requiere grandes recursos atencionales, memoria de trabajo, habilidades de planificación y organización y estrategias de comprensión [49, p. 311], todas ellas reguladas por un adecuado funcionamiento ejecutivo.

Zentall [48] afirma que a los individuos que sufren TDAH les resulta extremadamente difícil mantener en mente el enunciado y la pregunta de un problema mientras procesan la información relevante del mismo, ya que, como se reseñó anteriormente, la inatención selectiva que presentan les impide descartar la información verbal irrelevante, lo cual provoca el colapso de la memoria de trabajo y compromete la correcta resolución. Los estudiantes con TDAH suelen responder al problema sin haberlo leído con detenimiento. Incluso aunque lo hayan leído, no pueden recordar lo que se les pregunta, confunden datos importantes, o son incapaces de diferenciar la información que aporta el texto de aquella otra que se desconoce y hay que encontrar. Además, las dificultades en el sistema ejecutivo impiden la aplicación de una estrategia organizada para la resolución, sobre todo cuando el problema alcanza un cierto nivel de complejidad.

Zentall *et al.* [49] observan que cuando los alumnos con TDAH resuelven problemas matemáticos necesitan más tiempo para terminar la actividad que el grupo control, y explican esta diferencia porque la velocidad de lectura de los estudiantes con TDAH es menor que la de sus compañeros. También advierten que los alumnos con TDAH presentan mayores dificultades cuando el enunciado contiene conceptos de tipo no verbal o que no comprenden bien, como el tiempo o la distancia.

### 1.2.3. Orientaciones metodológicas

La mayoría de investigaciones que se han realizado sobre las estrategias a desarrollar por el profesor para tratar y enseñar matemáticas a un niño con

TDAH coinciden en señalar las siguientes: realizar adaptaciones donde obtengan más tiempo de descanso; reforzar los logros de los alumnos con premios que les ayuden a motivarse y confiar en sí mismos; conseguir en el aula un buen ambiente de trabajo en el que se eviten las distracciones; transmitirles la importancia del orden en las tareas y, en general, en la distribución temporal y espacial del aula; mantener el contacto visual con ellos, especialmente cuando se les dicten instrucciones; darles más tiempo para completar sus tareas; e introducir elementos novedosos en la práctica diaria que ayuden a captar su atención.

### Mejora de las dificultades en la numeración y el cálculo

- Miranda Casas *et al.* [34] y Zentall [47] proponen elaborar cuadernillos de trabajo donde se destaque la información esencial, con pocos ejercicios por página, y se den instrucciones claras y concisas que eviten la distracción del alumnado. Martínez Segura recomienda, siempre que sea posible, acompañar estas instrucciones de *soportes gráficos que complementen y amplíen su mera transmisión oral* [29, p. 21], para ayudar al alumno a disminuir el nivel de embotellamiento y saturación de la memoria de trabajo.
- Una medida que comparece frecuentemente en la bibliografía (cf. [34]) es la descomposición de la tarea inicial en varias fases más cortas, para facilitar que el alumno preste atención sostenida a cada una de ellas. Además, esta estrategia permite al profesor validar cada una de las partes, detectando en cuáles falla y en cuáles tiene éxito el estudiante. El reconocimiento por parte del docente de cada uno de estos éxitos parciales supone un elemento motivador para el alumno.
- También se propugna el uso de la calculadora como ayuda para disminuir la carga en la memoria de trabajo, especialmente si el retraso en la adquisición de los automatismos numéricos comienza a interferir en la resolución de problemas [34].
- Martínez Segura [29], Miranda Casas [34] y Zentall [48] hacen hincapié en la colaboración entre estudiantes que padecen TDAH y los que no tienen problemas de aprendizaje. De esta manera, los primeros pueden aprender de sus compañeros estrategias de organización y corrección en las tareas, corresponsabilizarse en la ejecución de los trabajos y mejorar sus habilidades matemáticas a través de la mentoría entre iguales.
- Zentall *et al.* [48, 49] argumentan que la atención de los estudiantes con TDAH depende enormemente del ambiente en que los alumnos aprenden, y sostienen que la introducción de un sonido controlado, en forma de ruido blanco o de música ambiental, ayuda a los estudiantes a centrar la atención en su actividad y mejora su desempeño matemático, especialmente en tareas de tipo memorístico. Otros autores, como Gratch [20], enfatizan la importancia de que el profesor proporcione al alumnado con TDAH una clase estructurada, predecible y silenciosa.

- En relación con la inatención selectiva que presenta el alumnado con TDAH, Zentall *et al.* [49] preconizan el subrayado de las palabras clave con colores llamativos como técnica para dirigir la atención hacia la información relevante.

**Mejora de las dificultades en la resolución de problemas aritmético-verbales**

- Miranda Casas *et al.* [34] defienden la importancia de que el contenido de los problemas esté relacionado con la vida real de los alumnos, porque de esta forma se consigue que la tarea sea significativa para ellos y le presten una mayor atención.
- Miranda Casas *et al.* [34, p. 267] y Zentall [48] proponen que se evite añadir información irrelevante en los enunciados de los problemas, para evitar la sobrecarga del sistema atención/memoria/funcionamiento ejecutivo.
- Estudios sobre neurofuncionamiento, como el ya citado de Orrantia y Múñez [39], ponen de manifiesto que la resolución de problemas aritmético-verbales requiere que los sujetos construyan una representación mental de las magnitudes numéricas a medida que leen los enunciados. Miranda Casas *et al.* [34] consideran imperativo que el profesor incida, mediante la relectura de los enunciados por parte de los alumnos, en la elaboración de estas imágenes mentales, para que representen correctamente la información contenida en el texto del problema.
- Una medida frecuentemente defendida en la bibliografía [37, 38, 42] consiste en que el alumno con TDAH se dote de autoinstrucciones, es decir, interiorice una serie de pasos a seguir para la resolución de un problema, con el fin de que pueda llegar a ser consciente en todo momento del hito que ha alcanzado y de dónde encuentra dificultades.
- Rosich y Casajús [42] resaltan la importancia de que el alumno parcele en cuatro el espacio del cuaderno destinado a la resolución del problema, asignando cada parcela a una tarea concreta: determinación de la incógnita, explicación de los datos, cálculo operacional y propuesta de resultado.
- Zentall *et al.* [48, 49] proponen que los estudiantes externalicen su pensamiento y potencien la propia metacognición leyendo en voz alta el enunciado del problema previamente a su resolución e intercambiando verbalmente, en grupos reducidos, las ideas que cada alumno extrae del mismo, medida que también resulta útil para el profesor.
- Zentall [48] señala la efectividad que tiene la práctica del pensamiento divergente en la resolución de problemas a la hora de disminuir el nivel de saturación de la memoria de trabajo en los estudiantes con TDAH. Esta práctica consiste en acompañar los enunciados de los problemas de tablas o gráficos que ayuden a discernir la veracidad o falsedad de la interpretación que se hace de ellos.

- Zentall [48] recalca, asimismo, la conveniencia de facilitar esquemas que coadyuven a la comprensión de los conceptos y al establecimiento de las relaciones matemáticas, de cara a conseguir el conocimiento conceptual y las habilidades procedimentales necesarias para enfrentarse con éxito a la resolución de nuevos problemas.

## 1.3. GeoGebra como respuesta educativa al alumnado con TDAH

González Castro *et al.* [17] aconsejan una metodología manipulativa y visual para facilitar el aprendizaje de las matemáticas en el alumnado con TDAH, mientras que Walker *et al.* [45] recomiendan específicamente el uso de nuevas tecnologías, con preferencia de aquellas orientadas a proporcionar ambientes de aprendizaje interactivos que favorezcan el desarrollo de los procesos cognitivos y metacognitivos.

En la revisión bibliográfica encontramos varios trabajos más donde se resaltan las ventajas de incluir la tecnología como un elemento mediador en el aprendizaje de los estudiantes con TDAH, en particular en matemáticas; véase [11] y las referencias que allí se citan. Aunque la aplicación de la informática a los casos de TDAH no es muy frecuente, las investigaciones realizadas demuestran que es recomendable *debido a los excelentes resultados, tanto en el terreno de la modificación de la conducta como en el desarrollo del aprendizaje* [18, p. 13]. Estos beneficios son todavía más acusados cuando la práctica matemática se gamifica organizando algún tipo de competición entre compañeros [29, 48].

En general, la utilización de ordenadores se presenta en la literatura como una herramienta muy potente a la hora de mejorar el aprendizaje matemático del alumnado con TDAH, por cuanto permite que cada alumno trabaje y aprenda a su propio ritmo, al tiempo que contribuye a controlar la impulsividad y a mejorar la atención sostenida y la motivación. Así, el alumno es responsable de sus aprendizajes, mientras que el profesor se convierte en guía/facilitador de las estrategias metodológicas y de los recursos tecnológicos que ayudarán a compensar los desequilibrios existentes entre el sujeto y el entorno educativo [28, 29].

### 1.3.1. Principios metodológicos

González Rus y Oliver [18] defienden que a la hora de escoger los programas informáticos más adecuados para el desarrollo del aprendizaje en estudiantes con TDAH, se tenga en cuenta la adecuación a los principios metodológicos que rigen la intervención educativa con dicho alumnado. Además, la selección deberá responder a las necesidades educativas especiales que se derivan de este trastorno. Así, los programas que se elijan han de favorecer los siguientes aspectos:

- *Refuerzo social.*
- *Responsabilidad.*
- *Colaboración con los compañeros.*
- *Secuenciación.*
- *Coordinación familia-escuela.*

Además de satisfacer las necesidades educativas del alumnado con TDAH, los programas educativos deben contribuir a neutralizar sus excesos conductuales. En este sentido, destacamos las características que según González Rus y Oliver [18] ha de tener el software elegido:

- *Motivador.*
- *Sin excesivas animaciones.*
- *Evitar la frustración ante el error.*
- *Graduar la dificultad de los aprendizajes.*
- *Verbalizaciones guiadas.*
- *Actividades que favorezcan la tranquilidad.*
- *Actividades lúdicas.*

### 1.3.2. ¿Qué es GeoGebra?

GeoGebra[3] es un software de matemáticas dinámicas adecuado para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa fácil de usar. Está disponible en múltiples plataformas, tanto para ordenadores de sobremesa (Windows, MacOS, Linux) como para dispositivos móviles (Android, iPad, Windows), y también en línea, a través de una aplicación web basada en HTML5.

El proyecto fue iniciado por Markus Hohenwarter en 2001 como parte de su trabajo fin de máster en la Universidad de Salzburgo. Actualmente está basado en la Universidad de Linz, aunque cuenta con el apoyo de desarrolladores de código fuente abierto y traductores en todo el mundo, así como de numerosas entidades, tanto comerciales como sin ánimo de lucro, que colaboran en la expansión del software y de los servicios en la nube, disponibles para una amplia comunidad de usuarios.

El repositorio oficial de GeoGebra, lanzado en junio de 2011 con el nombre de GeoGebraTube y renombrado como GeoGebra Materials[4] en 2016, aloja más de un millón de recursos. Casi la mitad de ellos están compartidos públicamente en forma de hojas de trabajo interactivas, simulaciones, juegos y libros electrónicos creados mediante la herramienta GeoGebra Book[5]. Estos materiales pueden ser exportados en varios formatos: imágenes estáticas, gifs animados, gráficos

[3] https://www.geogebra.org/
[4] https://www.geogebra.org/materials/
[5] https://www.geogebra.org/m/P5Zrj0Su

vectoriales, png, pdf.... También es posible exportar código PGF/TikZ o similar para incorporarlo a ficheros LaTeX.

GeoGebra ha recibido dieciséis premios educativos internacionales en el periodo 2002-2016.

### 1.3.3. ¿Por qué GeoGebra?

GeoGebra cumple con todos los estándares metodológicos necesarios para la intervención educativa en TDAH. Tanto profesores como estudiantes pueden utilizar GeoGebra para formular conjeturas y entender la demostración de teoremas geométricos. Se trata, por tanto, de una tecnología ideal para fomentar la creatividad, la autonomía, la motivación y la concentración del sujeto, y alcanzar niveles óptimos en la resolución de problemas desde la individualización de las necesidades específicas de apoyo educativo.

Las características más destacables de GeoGebra son:

- Es software libre.
- Ofrece un entorno gráfico atractivo y una interfaz sencilla, amigable y fácil de usar.
- Puede ser utilizado interactivamente. Por ejemplo, permite indagar qué sucede si se cambian uno o varios parámetros a la vez y se deja alguno fijo; plantear hipótesis; reiniciar el proceso cuantas veces sea necesario; complejizar las situaciones; proponer diferentes gradaciones en las tareas; etc.
- Tiene un importante aporte motivacional.
- Contribuye a superar las distracciones y centrar el esfuerzo.
- Supone la utilización de herramientas didácticas nuevas.
- Permite fusionar la creatividad, la imaginación, la motivación y la actividad lúdica.
- Exige reflexión y razonamiento lógico.
- Desarrolla la percepción visual.
- Favorece el entrenamiento en la autoinstrucción.

Estas características posibilitan la aplicación de las leyes que, según Alonso y Gallego [1], rigen el aprendizaje y que son particularmente relevantes en el caso del alumnado con TDAH:

- *Novedad.*
- *Efecto.*
- *Pluralidad.*
- *Autoestima.*
- *Ejercicio.*

# 2

# Propuestas de intervención

Las propuestas que se formularán y discutirán en este capítulo vendrán referidas, en cuanto a su concepción y notación, al *Decreto 89/2014, de 1 de agosto, de la Consejería de Educación, Universidades y Sostenibilidad del Gobierno de Canarias, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias*[1] según la LOMCE [24].

Se han diseñado cinco propuestas correspondientes a otras tantas sesiones, todas de 60 minutos de duración excepto la primera, en la que se han previsto 30 minutos adicionales para permitir la familiarización del sujeto con la tecnología. El hilo conductor de las cinco sesiones es el *Bloque de Aprendizaje 3: Medida*. Se han utilizado como recursos las fichas de actividades redactadas *ex profeso* para cada sesión, material de escritura, calculadora, ordenador y GeoGebra, y como espacio un despacho profesional dotado de ordenador y mesa de trabajo. La distribución de objetivos didácticos por sesión se recoge en la fig. 2.1; las competencias trabajadas en cada una han sido CL, CMCT, CD, AA, CSC, SIEE. Se ha valorado la actitud, el desempeño y la producción del alumno, tomando como instrumento de evaluación la guía de observación ya descrita.

Todas las sesiones comienzan con actividades de iniciación que establecen relaciones con otros bloques y ámbitos, cuyo propósito es tratar de captar el interés del estudiante haciendo el aprendizaje más significativo, pero sin dispersar su atención. En la elaboración de las fichas de trabajo se han tenido en cuenta, además, las indicaciones metodológicas enumeradas en la sección 1.2.3, entre las que mencionamos:

- Destacar la información esencial y dar instrucciones concisas, siguiendo un código de colores para focalizar la atención y descargar la memoria de trabajo (granate: información esencial, azul: información complementaria, naranja: actividades a realizar).

[1] Boletín Oficial de Canarias no. 156, de 13 de agosto de 2014.

OBJETIVOS DIDÁCTICOS

| | | SESIÓN 1 | SESIÓN 2 | SESIÓN 3 | SESIÓN 4 | SESIÓN 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | **BLOQUE DE APRENDIZAJE 1: PROCESOS, MÉTODOS Y ACTITUDES EN MATEMÁTICAS** | | | | | |
| 1 | Describir y analizar situaciones de cambio. | | | | • | • |
| 2 | Encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, valorando su utilidad para formular e investigar conjeturas y para desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones. | • | | • | | • |
| 3 | Profundizar en los problemas resueltos y expresar verbalmente el proceso seguido de forma razonada y empleando un lenguaje adecuado. | • | • | • | | |
| 4 | Utilizar estrategias de resolución de problemas propuestos en el bloque, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas. | • | • | • | • | • |
| | **BLOQUE DE APRENDIZAJE 2: NÚMEROS** | | | | | |
| 1 | Desarrollar el sentido numérico, es decir, la habilidad para componer y descomponer números. | • | | • | • | • |
| 2 | Comprender y utilizar la estructura del sistema de numeración decimal, y utilizar las propiedades de las operaciones y las relaciones entre ellas para realizar cálculos y resolver problemas con la ayuda de la manipulación de materiales. | • | | • | • | • |
| 3 | Desarrollar la habilidad para el cálculo con diferentes procedimientos y la decisión en cada caso sobre el que sea más adecuado. | | • | • | • | • |
| 4 | Calcular con fluidez y hacer estimaciones razonables, tratando de lograr un equilibrio entre la comprensión de las operaciones y la competencia en el cálculo. | • | • | • | • | • |
| | **BLOQUE DE APRENDIZAJE 3: MEDIDA** | | | | | |
| 1 | Comprender los mensajes en los que se cuantifican magnitudes en situaciones reales. | • | | • | • | • |
| 2 | Adquirir la noción de medida y su realización a partir de la percepción y conocimiento de la magnitud como atributo medible de los objetos, por comparación, superposición y ordenación de éstos. | • | • | • | | |
| 3 | Considerar la necesidad de la medición, manejándola en situaciones diversas. | • | • | • | | • |
| 4 | Establecer los mecanismos para efectuar mediciones: elección de instrumento y unidad, relaciones entre unidades y grado de fiabilidad, y exactitud, partiendo de unidades corporales y arbitrarias para pasar a las unidades de medida habituales en el mundo actual. | | • | • | | • |
| | **BLOQUE DE APRENDIZAJE 4: GEOMETRÍA** | | | | | |
| 1 | Analizar las características y propiedades de cuerpos y figuras geométricas. | • | • | • | | |
| 2 | Desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas. | • | • | • | | • |
| 3 | Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas y otros sistemas de representación como el croquis. | • | • | • | | |
| 4 | Utilizar la visualización, la modelización, el razonamiento matemático y las transformaciones para aplicarlos a la resolución de problemas. | • | • | • | • | • |
| 5 | Establecer relaciones constantes con el resto de los bloques y con otros ámbitos, como el arte o la ciencia. | • | • | • | • | • |
| 6 | Manipular a través del uso de materiales, realizando plegados, construcciones, vistas, … para llegar al concepto a través de modelos reales. A este mismo fin puede contribuir el uso de programas informáticos. | • | • | • | • | • |
| | **BLOQUE DE APRENDIZAJE 5: ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD** | | | | | |
| 1 | Adquirir estrategias que posibiliten realizar pequeñas investigaciones con el fin de facilitar la lectura, interpretación, representación y valoración crítica de la información sobre la realidad. | | | | • | • |
| 2 | Construir el conocimiento de la probabilidad, primero a través del juego y situaciones reales, y posteriormente mediante experimentos con objetos concretos tales como sacar fichas coloreadas de una bolsa, tirar una moneda o un dado, … | | | | • | • |
| 3 | Fomentar el desarrollo de conductas responsables frente a los juegos de azar. | | | | • | • |
| | **OBJETIVO TRANSVERSAL** | | | | | |
| 1 | Integrar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en todos los bloques y orientarlas a su utilización como recurso habitual para aprender de forma autónoma, buscar, observar, analizar, experimentar, comprobar y rehacer la información, o como instrumentos de consulta e investigación, comunicación e intercambio. | • | • | • | • | • |

**Figura 2.1.** Distribución de objetivos didácticos por sesión.

- Se han incorporado pautas, cuadrículas o casillas en las partes que debe cumplimentar el alumno, para facilitarle la organización visoespacial.
- Las tareas más largas se presentan segmentadas a fin de favorecer la atención sostenida.
- Para liberar la memoria de trabajo se permite el uso de calculadora, medida que, por otra parte, aparece potenciada en el currículo con independencia de las características del alumnado.

- Se han previsto actividades en las que el alumno ha de expresar con sus propias palabras el enunciado del teorema que debe aplicar, como una forma de externalizar su pensamiento y mejorar la propia metacognición.
- En algunas actividades se pide al alumno contar los puntos o segmentos que contiene una figura. Este tipo de ejercicios favorecen su entrenamiento cognitivo.
- Algunas sesiones prevén la realización de actividades lúdicas con GeoGebra para ser utilizadas bien como forma de gamificación de los aprendizajes, bien como recompensa por la tarea bien hecha, bien como recurso con el que recuperar la atención del alumno.
- En alguna actividad se ha empleado un recurso mnemotécnico con refuerzo visual y lúdico («hipopotenusa» por «hipotenusa»).

Todo el material generado para el desarrollo de este capítulo está disponible en la dirección https://goo.gl/Pv7zpb.

## 2.1. Aplicación del teorema de Pitágoras

Se cree que Pitágoras (o algún miembro de su escuela) fue el primero en demostrar el conocido teorema que lleva su nombre sobre la relación existente entre los lados de un triángulo rectángulo, aunque ya los egipcios y los babilonios lo usaban heurísticamente en sus cálculos y construcciones.

### 2.1.1. Fundamentación matemática

**Teorema 2.1 (Teorema de Pitágoras).** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado construido sobre el lado que subtiende el ángulo recto (hipotenusa) es igual a los dos cuadrados construidos sobre los lados que contienen el ángulo recto (catetos). Simbólicamente: si un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes $a$ y $b$, y la longitud de la hipotenusa es $c$, entonces*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

*Demostración.* Se considera el triángulo $\triangle(ABC)$, donde el ángulo recto está en $C$ (fig. 2.2). La perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por $C$ (altura relativa a la hipotenusa $c$) divide $c$ en dos segmentos: $b'$ y $a'$, proyecciones de los catetos $b$ y $a$, respectivamente. Obtenemos así tres triángulos rectángulos semejantes: $\triangle(ABC)$, $\triangle(AHC)$ y $\triangle(BCH)$. La semejanza entre $\triangle(ABC)$ y $\triangle(AHC)$ proporciona

$$\frac{b}{b'} = \frac{c}{b},$$

y por lo tanto $b^2 = b'c$. De la semejanza entre $\triangle(ABC)$ y $\triangle(BCH)$ resulta

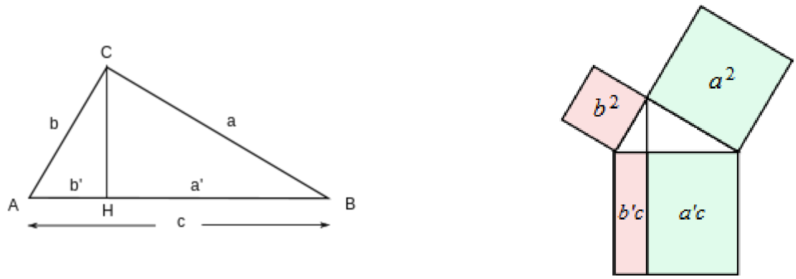


**Figura 2.2.** Demostración del teorema de Pitágoras.

$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{a},$$

así que $a^2 = a'c$. Puesto que $a' + b' = c$, finalmente

$$a^2 + b^2 = c(a' + b') = c^2,$$

lo que prueba el teorema. □

El teorema de Pitágoras puede ser generalizado a espacios de dimensón infinita.

**Teorema 2.2 (Teorema de Pitágoras en espacios de Hilbert).** *Sea* $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio prehilbertiano real, y sean* $x, y \in X$. *Entonces* $\langle x, y \rangle = 0$ *si, y sólo si,*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

*Demostración.* Se verifica:

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle .$$

De esta igualdad sigue inmediatamente la conclusión deseada. □

### 2.1.2. Justificación curricular y diseño de la experiencia

El teorema de Pitágoras como tal es parte del currículo de ESO y no de Primaria, pero puede ser aplicado al diseño de actividades que ayuden a la comprensión y manejo de las raíces cuadradas y de las propiedades geométricas del triángulo rectángulo, o a la interpretación del cuadrado de un número como un área, que sí forman parte del currículo de sexto curso. De hecho, el teorema de Pitágoras se considera, cronológicamente, la primera conexión entre dos ramas de las ciencias matemáticas: la aritmética (los números y las operaciones entre ellos) y la geometría (estudio de las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos y figuras, y la manera como se miden). Además, conforme al currículo es totalmente pertinente desarrollar la actividad con el apoyo de un software de matemáticas dinámicas.

- *Modelos de enseñanza:* Enseñanza directiva, simulación.
- *Contenidos:*
  - Bloque 1: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.6, 1.7, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4
  - Bloque 2: 3.1, 3.2, 3.3, 4.1, 4.2, 4.3, 4.6, 5.2, 5.13
  - Bloque 3: 6.1, 6.6, 6.7, 6.10, 6.11
  - Bloque 4: 7.1, 7.4, 7.5, 7.7, 8.1, 8.2, 8.4, 8.5, 8.7, 8.8

### 2.1.3. Resultados

La sesión constó de 6 actividades, de las cuales 3 fueron de inicio y otras 3 de desarrollo, correspondiendo cada una de estas últimas a las 3 estrategias planteadas.

Se comenzó proporcionando a Juan una explicación detallada sobre el personaje de Pitágoras y el alcance de su teorema, tras lo cual procedió a resolver satisfactoriamente las actividades de inicio (#1 a #3). Cabe destacar que en la actividad #3 logró explicar con sus propias palabras el contenido del teorema, distinguiendo acertadamente entre los catetos y la hipotenusa.

El tiempo invertido por Juan en las 3 actividades de desarrollo fue de 20, 9 y 13 minutos, respectivamente. En conjunto se le identificaron 4 errores en el transcurso de la actividad #4 (realizada sin apoyo), 5 en la #5 (realizada con apoyo psicopedagógico) y 3 en la #6 (realizada con apoyo tecnológico). Sostuvo la atención de forma continuada en las dos últimas, pero sólo alcanzó un resultado final correcto en la segunda.

Respecto al uso de tecnología, cabe destacar que Juan no necesitó tiempo para familiarizarse con el software y reconoció al primer intento lo que tenía que hacer. Su motivación hacia el uso de GeoGebra fue decididamente positiva y no presentó dificultad alguna a la hora de navegar por la interfaz o interactuar con la simulación.

La sintomatología TDAH se puso de manifiesto sobre todo en la actividad #4, en 3 ocasiones en el subeje cognitivo (expresión de sentimientos de baja autoestima) y otras tantas en el conductual (muestras de impulsividad y comportamiento inquieto), aunque también respondió impulsivamente en 2 ocasiones durante la actividad #5 y en 1 ocasión durante la actividad #6.

Los errores matemáticos tipificados también se produjeron, fundamentalmente, en la actividad #4: en 1 ocasión omitió la coma en el resultado de la operación a pesar de haberla puesto para operar, y por 2 veces sustituyó operaciones debido a una respuesta impulsiva. En 3 ocasiones cometió errores achacables a la inatención (dejar dígitos sin operar o intercambiarlos durante el proceso de resolución). Al resolver la actividad #6 alineó incorrectamente las cifras y colocó la coma del resultado en un lugar erróneo, además de cambiar de lugar la coma decimal al trasladar los datos para operar.

Respecto a las dificultades encontradas en la ejecución, los registros revelan que han sido significativamente mayores en la actividad que resolvió sin ayuda, algo menores en aquella para la que recibió apoyo psicopedagógico y pocas en la que realizó con ayuda de la tecnología. En general, los aspectos formales (anotación de datos e incógnitas, control del trazo, pulcritud, distribución del espacio) pueden considerarse satisfactorios, especialmente en el desarrollo de las actividades #5 y #6.

### 2.1.4. Discusión

Inicialmente, Juan abordó solo la actividad #4, pero a los 5 minutos de empezar solicitó ayuda por no saber resolverla. Tras explicarle lo que pedía el primer apartado y los pasos a seguir, demostró impulsividad y desorden al sustituir los datos en la fórmula, y además no los elevó al cuadrado. En el segundo apartado vuelve a reclamar ayuda; expresa que «no sabe hacerlo» y que «se ha hecho un lío», escribiendo valores sin sentido. Aun reiterándole la explicación del proceso comete nuevamente el error de no elevar los datos al cuadrado. Durante la resolución del ejercicio se muestra inquieto, repitiendo cálculos y jugueteando con el lápiz y la silla. No ha sido sistemático, lo que le ha hecho perderse varias veces en las operaciones.

En la actividad #5, resuelta con ayuda psicopedagógica, ha entendido desde el principio que se pide hallar la hipotenusa, pero a la hora de dibujar el triángulo y transcribir los datos ha obrado impulsivamente y se ha equivocado varias veces. Una vez planteada la fórmula ha procedido con cuidado y orden, produciendo un resultado legible y correcto. Cabe reseñar que ha trazado el signo de la raíz cuadrada especularmente simétrico respecto al estándar.

Al realizar la actividad #6, resuelta con ayuda de GeoGebra, fue capaz de colocar por sí mismo la imagen que la ilustra en la hoja de trabajo del programa, eligiendo incluso el tamaño, y siguió perfectamente las instrucciones pautadas casi sin ayuda ni indicaciones, mostrando gran concentración e interés. No sólo respondió bien al primer apartado, sino que decidió autónomamente ir anotando los otros datos que iba averiguando, como los catetos del triángulo rectángulo. Planteó correctamente la respuesta al segundo apartado aplicando el teorema de Pitágoras, pero cometió dos errores inherentes a la sintomatología atencional del trastorno que padece, transcribiendo incorrectamente un dato (10,4 en vez de 10,04) y un resultado (467,856 en vez de 46,7856). Pese a ello, su implicación, iniciativa y autonomía han sido notables en relación con las dos actividades anteriores. El propio alumno confirma que el ejercicio que más le ha gustado ha sido el trabajado con GeoGebra.

## 2.2. Aplicación del teorema de Haga

El teorema de Haga se utiliza en papiroflexia para dividir el lado de un cuadrado en un número arbitrario de partes iguales.

### 2.2.1. Fundamentación matemática

**Teorema 2.3 (Teorema de Haga).** *Si en el cuadrado $ABCD$ de lado unidad de la fig. 2.3 se lleva el vértice $B$ sobre un punto $E$ del lado $\overline{DC}$ situado a una distancia $x$ del vértice $C$, entonces:*

*i) El lado $\overline{AB}$ corta al lado $\overline{DA}$ en un punto $I$ a distancia*

$$d = \frac{2x}{1+x}$$

*del vértice $D$.*

*ii) Las longitudes de los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{EF}$ son*

$$y = \frac{1-x^2}{2}, \quad z = \frac{1+x^2}{2},$$

*la longitud de $\overline{EI}$ es*

$$e = \frac{1+x^2}{1+x},$$

*y las longitudes de $\overline{HI}$, $\overline{HG}$ e $\overline{IG}$ son*

$$a = \frac{x(1-x)}{1+x}, \quad b = \frac{(1-x)^2}{2}, \quad c = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2(1+x)},$$

*respectivamente.*

*iii) El perímetro del triángulo $\triangle(EDI)$ es igual al semiperímetro del cuadrado inicial, e igual a la suma de los perímetros de los triángulos $\triangle(FCE)$ y $\triangle(GIH)$.*

*Demostración.* Procedemos como indica el enunciado para obtener los triángulos rectángulos semejantes $\triangle(FCE)$, $\triangle(EDI)$ y $\triangle(GIH)$ de la fig. 2.3.

Aplicando el teorema de Pitágoras a $\triangle(FCE)$ resulta

$$\overline{EF}^2 = x^2 + \overline{CF}^2.$$

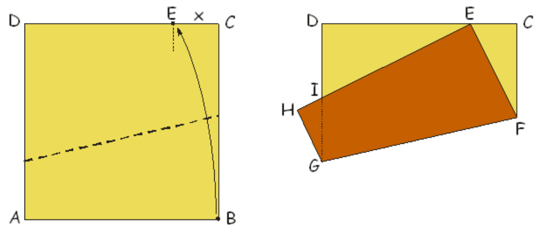


**Figura 2.3.** Teorema de Haga.

Por otro lado,

$$\overline{EF} = \overline{FB} = 1 - \overline{CF}.$$

Así

$$\left(1 - \overline{CF}\right)^2 = x^2 + \overline{CF}^2,$$

de donde

$$\overline{CF} = \frac{1-x^2}{2}, \quad \overline{EF} = \frac{1+x^2}{2}.$$

Como los triángulos $\triangle(FCE)$ y $\triangle(EDI)$ son semejantes:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DI}} = \frac{\overline{CF}}{x};$$

luego,

$$\overline{DI} = \frac{x \cdot \overline{DE}}{\overline{CF}} = \frac{2x(1-x)}{1-x^2} = \frac{2x}{1+x},$$

probando i).

Una nueva aplicación del teorema de Pitágoras proporciona

$$\overline{EI} = \sqrt{(1-x)^2 + \frac{4x^2}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{(1-x^2)^2+4x^2}{(1+x)^2}} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2}{(1+x)^2}} = \frac{1+x^2}{1+x}.$$

Consecuentemente,

$$\overline{HI} = 1 - \overline{EI} = \frac{x(1-x)}{1+x}.$$

Por último, la semejanza de $\triangle(FCE)$ y $\triangle(GIH)$ conduce a

$$\overline{HG} = \frac{\overline{HI} \cdot \overline{CF}}{x} = \frac{x(1-x)}{1+x}\frac{1-x^2}{2x} = \frac{(1-x)^2}{2},$$

$$\overline{IG} = \frac{\overline{HI} \cdot \overline{EF}}{x} = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2(1+x)}.$$

Esto demuestra ii). A partir de i) y ii) se comprueba sin dificultad que los perímetros de $\triangle(EDI)$, $\triangle(FCE)$ y $\triangle(GIH)$ son, respectivamente, 2, $1+x$ y $1-x$, y con ello la veracidad de iii). $\square$

### 2.2.2. Justificación curricular y diseño de la experiencia

El teorema de Haga permite trabajar las operaciones con fracciones y la proporcionalidad, así como el cálculo de perímetros, los conceptos de longitud y distancia, simetría y giro, y la semejanza de triángulos.

- *Modelos de enseñanza:* Enseñanza directiva, formación de conceptos.
- *Contenidos:*
  - Bloque 1: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 2.1, 2.2, 2.3
  - Bloque 2: 3.2, 3.3, 4.2, 4.6, 4.7, 5.2, 5.3, 5.5, 5.13
  - Bloque 3: 6.1, 6.6, 6.7, 6.10, 6.11
  - Bloque 4: 7.1, 7.4, 7.5, 7.7, 8.1, 8.2, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8

### 2.2.3. Resultados

La sesión constó de 8 actividades, de las cuales 4 fueron de inicio y 3 de desarrollo, correspondiendo cada una de éstas a las 3 estrategias de enseñanza-aprendizaje planteadas. La última actividad tuvo carácter complementario (tangram en GeoGebra).

Se comenzó proporcionando a Juan una explicación detallada del contenido del teorema de Haga, con ejemplos escritos y manipulativos, tras lo cual procedió a realizar las actividades de inicio (#1 a #4). Experimentó dificultades a la hora de entender y razonar el enunciado de la actividad #2, y cometió 1 error de «llevadas» en la resta. En la actividad #3 consiguió explicar con sus palabras el contenido del teorema de Haga de forma acertada pero incompleta.

El tiempo invertido por Juan en las 3 actividades de desarrollo fue de 2, 10 y 30 minutos, respectivamente. En conjunto se le identificaron 3 errores en la ejecución de la actividad #5 (realizada sin apoyo), 5 en la #6 (realizada con apoyo psicopedagógico) y 2 en la #7 (realizada con apoyo tecnológico). Sólo sostuvo la atención de forma continuada y logró un resultado final correcto en las dos últimas.

Respecto al uso de tecnología, cabe destacar que Juan no necesitó tiempo para familiarizarse con GeoGebra y reconoció al primer intento lo que tenía que hacer. Su motivación hacia el uso de la tecnología es claramente positiva, sin que presente dificultades para navegar por la interfaz o interactuar con la simulación.

La sintomatología TDAH se puso de manifiesto sobre todo en la actividad #6, en 2 ocasiones en el subeje cognitivo (distracción con elementos externos) y en 3 en el conductual (muestras de cansancio). En 1 ocasión respondió impulsivamente a la actividad #5.

Los errores matemáticos tipificados se produjeron también, fundamentalmente, en la actividad #6, donde cometió 1 error de automatización de la suma y 2 cambios de operaciones por respuesta impulsiva. En la actividad #5, y en 1 ocasión, restó los dígitos menores de los mayores en vez de «llevar».

Respecto a las dificultades encontradas en la ejecución, los registros revelan que han sido claramente mayores en la actividad que debió resolver sin ayuda, algo menores en aquella para la que recibió apoyo psicopedagógico y muy escasas en la que realizó con ayuda de la tecnología. En general, los aspectos formales (anotación de datos e incógnitas, control del trazo, pulcritud, distribución del espacio) pueden considerarse satisfactorios, con ligeras diferencias a favor de las actividades desarrolladas con apoyo psicopedagógico o tecnológico.

### 2.2.4. Discusión

La impulsividad con que Juan respondió a la actividad #5 le condujo a un resultado incorrecto: aparentemente, a la vista de las longitudes de los lados de los triángulos interpretó que debía completar la serie numérica del 3 al 8 con los números faltantes (3 y 7), sin vincular el dato sobre la semejanza de dichos triángulos con la proporcionalidad entre sus lados. En este sentido, es muy probable que uno de los resultados correctos fuese casual, pero igualmente se le ha computado como válido.

Juan experimentó menos dificultades en entender la actividad #6, resuelta con ayuda psicopedagógica. El planteamiento del ejercicio fue correcto hasta el final, supo responder razonadamente a la mayoría de las preguntas y usó el espacio previsto para ello, si bien omitió dos soluciones. Sus principales escollos han sido la operatoria con fracciones y la aplicación del teorema de Pitágoras, trabajado dos días antes de esta propuesta de ejercicios. Concretamente, no resolvió el cuadrado y sumó sin hallar el mínimo común múltiplo para reducir a común denominador, de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{5}.$$

Durante la realización de la actividad #6 Juan exteriorizó síntomas de cansancio, sobre todo al intentar calcular las hipotenusas; sin embargo, se mostró muy entusiasmado ante la perspectiva de realizar la actividad #7 con ayuda del ordenador. Esta actividad se encuentra estructurada en varios apartados, con instrucciones detalladas sobre los pasos a seguir para realizar las distintas construcciones de GeoGebra que permiten descubrir la solución. Dada la longitud del ejercicio, cabría esperar que el alumno acabara manifestando cansancio verbal o actitudinalmente, o que experimentase dificultades para sostener la atención. Por el contrario, no sólo se mantuvo concentrado todo el tiempo sino que apenas requirió ayuda para ejecutar las instrucciones, demostrando una gran predisposición e interés en investigar por sí mismo las posibilidades del programa. Además, razonó y respondió correctamente a las preguntas que se le formularon.

Interpelado al final de la sesión sobre qué actividad le gustó más, Juan respondió que las tres, pero que la #6 le había parecido más difícil.

Como conclusión, podemos afirmar que el uso de GeoGebra permitió al alumno explorar, razonar e interiorizar la noción de semejanza y las propiedades sobre proporcionalidad y congruencia derivadas de dicha noción manteniéndolo concentrado y liberando la memoria de trabajo de otros elementos, como la extracción de raíces cuadradas o el cálculo con fracciones, que estarían interfiriendo en la comprensión de los conceptos principales.

## 2.3. Áreas de polígonos reticulares simples mediante el teorema de Pick

El teorema de Pick da una fórmula que relaciona el área de un polígono reticular simple (esto es, un polígono cuyos vértices tienen coordenadas enteras y cuyos lados no adyacentes no se intersecan) con el número de puntos en su interior y en su frontera que también tengan coordenadas enteras.

### 2.3.1. Fundamentación matemática

**Teorema 2.4 (Teorema de Pick).** *Supongamos que tenemos una cuadrícula en la que cada vértice corresponde a un punto del plano cuyas coordenadas son números enteros, y sea $P$ un polígono simple (es decir, cuya frontera no se interseca a sí misma) que cumple que todos sus vértices están situados sobre vértices de la cuadrícula. Sea $i$ el número de vértices de la cuadrícula que quedan dentro del polígono y sea $f$ el número de vértices de la cuadrícula que están sobre el borde del polígono. Entonces el área de $P$, $A_P$, se puede calcular como*

$$A_P = i + \frac{f}{2} - 1.$$

*Demostración.* Sean $P$ un polígono simple y $T$ un triángulo con un lado común con $P$. Asumamos que el teorema es cierto para $P$ y para $T$ por separado, y demostremos que también es cierto para el polígono $PT$ conseguido añadiendo $T$ a $P$. Como $P$ y $T$ comparten un lado, todos los puntos frontera a lo largo del lado común, excepto los puntos extremos de ese lado, se convierten en puntos interiores de $PT$. Por tanto, llamando $c$ al número de puntos frontera en común, tenemos que

$$i_{PT} = (i_P + i_T) + (c - 2) \quad \text{y} \quad f_{PT} = (f_P + f_T) - 2(c - 2) - 2.$$

De aquí obtenemos

$$(i_P + i_T) = i_{PT} - (c - 2) \quad \text{y} \quad (f_P + f_T) = f_{PT} + 2(c - 2) + 2.$$

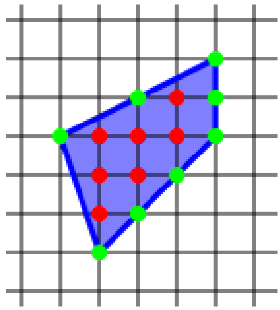

**Figura 2.4.** Aplicación del teorema de Pick: $A_P = 7 + 8/2 - 1 = 10$ u.c.

Como el teorema se supone cierto para $P$ y $T$ por separado:

$$
\begin{aligned}
A_{PT} = A_P + A_T &= \left(i_P + \frac{f_P}{2} - 1\right) + \left(i_T + \frac{f_T}{2} - 1\right) \\
&= (i_P + i_T) + \frac{f_P + f_T}{2} - 2 = i_{PT} - (c-2) + \frac{f_{PT} + 2(c-2) + 2}{2} - 2 \\
&= i_{PT} + \frac{f_{PT}}{2} - 1.
\end{aligned}
$$

Por tanto, el resultado es cierto para el polígono $A_{PT}$. Como en dos dimensiones cualquier polígono puede ser triangulado, hemos probado que si el teorema es cierto para cualquier triángulo $T$ y para un polígono formado por $n$ triángulos, entonces también lo es para un polígono formado por $n+1$ triángulos.

Para completar la demostración basta ver que el teorema vale para cualquier triángulo, lo cual se puede lograr mediante los pasos siguientes:

- La fórmula es cierta para cualquier cuadrado reticulado de lado 1.
- De aquí se deduce que también lo es para cualquier rectángulo de lados paralelos a los ejes.
- Se prueba entonces que el teorema se cumple para los triángulos rectángulos obtenidos cortando un rectángulo de lados paralelos a los ejes por una de sus diagonales.
- Finalmente, cualquier triángulo se puede convertir en un rectángulo añadiendo un número finito de triángulos rectángulos de este tipo. Como la fórmula se verifica para los triángulos rectángulos y para el rectángulo, también es cierta para cualquier triángulo.

El último paso utiliza el hecho de que si el teorema es cierto para el polígono $PT$ y para el triángulo $T$, entonces también lo es para $P$, lo que se demuestra efectuando un cálculo similar al anterior. □

### 2.3.2. Justificación curricular y diseño de la experiencia

Las áreas de los polígonos regulares forman parte del currículo de sexto de Primaria: el alumno aprende las áreas del triángulo, del cuadrado, del rectángulo, del rombo, del romboide, del trapecio y otros polígonos regulares (pentágono, hexágono, heptágono, etc.), por lo que verá natural tratar de calcular el área resultante de yuxtaponer dos de estos polígonos, momento en el que podríamos introducir el teorema de Pick.

- *Modelos de enseñanza:* Enseñanza directiva, modelo sinéctico.
- *Contenidos:*
  - Bloque 1: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 2.1, 2.2, 2.3
  - Bloque 2: 3.1, 3.2, 3.3, 4.2, 4.6, 5.2, 5.12, 5.13
  - Bloque 3: 6.6, 6.7, 6.10, 6.11
  - Bloque 4: 7.1, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 8.1, 8.2, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8

### 2.3.3. Resultados

La sesión constó de 7 actividades, de las cuales 2 fueron de inicio, 4 de desarrollo y 1 complementaria, esta última consistente en 3 juegos relacionados con el geoplano y el teorema bajo estudio, realizados con GeoGebra.

Para empezar se proporcionó al alumno una explicación detallada del teorema de Pick, ilustrada con ejemplos visuales. A continuación procedió a realizar las actividades de inicio (#1 y #2), que supo responder con acierto, seguridad y rapidez, situando correctamente el año de nacimiento de Pick en la línea del tiempo y en el siglo correspondiente.

El tiempo invertido por Juan en las 4 actividades de desarrollo fue de 12, 5 y 8 minutos, respectivamente. En conjunto se le identificaron 5 errores en las actividades #3 y #4 (realizadas sin apoyo), 4 en la #5 (realizada con apoyo psicopedagógico) y 1 en la #6 (realizada con apoyo tecnológico). El resultado final fue correcto sólo en la actividad #6, si bien sostuvo la atención de forma continuada en ésta y en la #5.

En la presente sesión Juan tampoco necesitó tiempo para familiarizarse con GeoGebra, bastándole el primer intento para reconocer lo que tenía que hacer. Su motivación hacia el uso de la tecnología fue, igualmente, muy positiva. No experimentó dificultades para navegar por la interfaz, ni precisó de intervenciones externas para progresar.

La sintomatología TDAH se puso de manifiesto cognitivamente en el transcurso de las actividades #3 y #4, en 3 ocasiones (preguntas, distracción con elementos externos, exteriorización de sentimientos de baja autoestima). La conducta impulsiva quedó evidenciada en el desarrollo de todas las actividades, especialmente durante la actividad #5, en otras 3 ocasiones.

Los errores matemáticos tipificados se produjeron en las actividades #3 y #4 (cálculo mental deficiente y dejar dígitos sin operar, en 5 y 2 ocasiones, respectivamente) y en la actividad #5 (1 cambio de operaciones por impulsividad y 1 sustitución de dígitos por inatención).

Respecto a las dificultades encontradas en la ejecución, los registros revelan, de nuevo, que han sido claramente mayores en la actividad que debió resolver sin ayuda, bastante menores en aquella para la que recibió apoyo psicopedagógico y muy escasas en la que realizó con ayuda de la tecnología. En esta ocasión Juan ha descuidado un tanto los aspectos formales, particularmente en las actividades #3 y #4.

### 2.3.4. Discusión

Las actividades #3 y #4, que el alumno realizó sin apoyo externo, se han presentado combinadas, pretendiendo correlacionar el cálculo de áreas de polígonos (i)rregulares por descomposición en polígonos regulares de área conocida, con su cálculo mediante la fórmula de Pick. De hecho, las áreas pedidas se pueden calcular fácilmente advirtiendo que la del hexágono es igual a la del rectángulo y ésta el doble de la del triángulo. Sin embargo, en la actividad #3 Juan intentó aplicar las fórmulas para el cálculo del área de triángulos (mitad de la base por la altura), rectángulos (base por altura) y hexágonos regulares (mitad del perímetro por apotema), escribiendo correctamente las dos primeras pero no la tercera, donde omitió la división por 2. Tampoco se percató de que esta última no es aplicable, pues el hexágono propuesto no es regular. Finalmente, los cálculos mentales que realiza son incorrectos, aunque a su favor hay que decir que especifica las unidades de área adecuadas (centímetros cuadrados). En cuanto a la actividad #4, Juan parece entender perfectamente la fórmula de Pick (sobre la cual ha preguntado una sola vez) y coloca correctamente los datos, pero olvida dividir por 2 el número de puntos frontera. El comentario «¡Es un lío!» con que Juan se refiere a la disposición en la que se le pide anotarlos sugiere que quizá, contrariamente a lo esperado, dicha disposición incremente las dificultades visoespaciales inherentes a su patología. En ninguna de las dos actividades #3 y #4 explica cómo obtiene la solución.

En la actividad #5, que el alumno realiza con ayuda psicopedagógica, se le pide trazar un polígono con sus vértices en los puntos de una cuadrícula y calcular el área mediante el teorema de Pick. Juan plantea esta actividad de forma satisfactoria, dibujando el polígono, escribiendo la fórmula y contando correctamente los datos, excepto por la omisión de un punto interior. Sin embargo, resurgen los problemas de impulsividad e inatención: al efectuar los cálculos comienza olvidándose de dividir por dos el número de puntos frontera; aunque rectifica, y pese a tener bien indicado el orden de las operaciones, acaba repitiendo eventualmente la división por dos. Además, hace caso omiso de la invitación a revisar la solución.

La actividad #6, a realizar con GeoGebra, es saludada por Juan con una excelente disposición y motivación. Le llama especialmente la atención la forma de «mano» del lago. Aunque sigue manifestando mucha impulsividad en sus respuestas, traza sin dificultad un polígono reticular que lo bordea y marca todos los puntos interiores y frontera, asignándoles incluso un color diferente. De esta manera, no omite ningún punto en el recuento y transcribe adecuadamente los valores en la fórmula de Pick. Sin embargo, al computar el resultado de ésta comete un pequeño error de cálculo mental.

Al término de la sesión se le pregunta por su percepción sobre las actividades y se le pide que explique la fórmula de Pick. Responde que todas las actividades le han gustado por igual, y con su explicación evidencia una buena comprensión del teorema.

## 2.4. Estimación del número $\pi$ mediante la aguja de Buffon

La aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica que proporciona un método para aproximar el valor del número $\pi$.

### 2.4.1. Fundamentación matemática

**Teorema 2.5.** *Consideremos un plano dividido en rectas paralelas, equidistantes una cantidad $d$. Si una aguja de longitud $L \leq d$ se deja caer sobre el plano, entonces la probabilidad de que la aguja corte alguna de las rectas es exactamente*

$$p = \frac{2L}{\pi d}.$$

*Demostración.* Sea $X$ la variable aleatoria que da la distancia del punto medio de la aguja a la recta más cercana, y sea $\Theta$ la varable aleatoria que da el ángulo agudo entre la aguja, o su prolongación, y la recta. Denotamos por $x$ y $\theta$ los valores de $X$ y $\Theta$, respectivamente. La variable $X$ se distribuye uniformemente entre 0 y $d/2$, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{d}, & 0 \leq x \leq \dfrac{d}{2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por su parte, la variable aleatoria $\Theta$ se distribuye uniformemente entre 0 y $\pi/2$, con función de densidad de probabilidad

$$g(\theta) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}, & 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

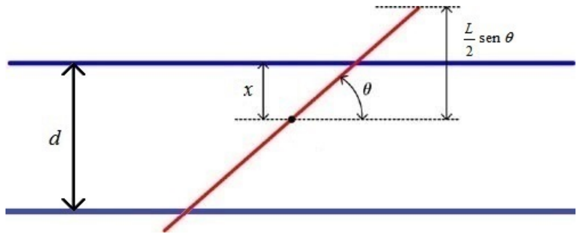


**Figura 2.5.** Aguja de Buffon.

Al ser $X$ y $\Theta$ variables aleatorias independientes, la función de densidad conjunta es el producto de ambas funciones de densidad:

$$h(x,\theta) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi d}, & (x,\theta) \in \left[0, \dfrac{d}{2}\right] \times \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La condición para que la aguja cruce una recta es que se tenga

$$x \leq \frac{L}{2} \operatorname{sen} \theta,$$

y la probabilidad de este suceso está dada por:

$$p = \frac{4}{\pi d} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{(L \operatorname{sen} \theta)/2} dx = \frac{2L}{\pi d}.$$

Esto completa la prueba. □

Si se realiza el experimento de la aguja de Buffon un gran número de veces, la ley de los grandes números asegura que la proporción de cortes de la aguja con las rectas es aproximadamente igual a la probabilidad de que esto suceda. Por tanto, denotando $N_n$ el número de éxitos en los primeros $n$ lanzamientos de la aguja, para $n$ grande debemos tener

$$\frac{N_n}{n} \approx \frac{2L}{\pi d},$$

de donde

$$\pi \approx \frac{2nL}{N_n d}.$$

### 2.4.2. Justificación curricular y diseño de la experiencia

El número $\pi$ es parte del currículo de sexto de Primaria, donde se le menciona explícitamente entre los contenidos del *Bloque de Aprendizaje 4: Geometría* como la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. También está presente en la fórmula del área del círculo. Proporciona un ejemplo de número decimal no exacto ni periódico (es decir, irracional), y por tanto tiene cabida en el *Bloque de Aprendizaje 2: Números*. La estimación de $\pi$ mediante el teorema de la aguja de Buffon es un problema de probabilidad geométrica que establece una conexión con el *Bloque de Aprendizaje 5: Estadística y Probabilidad*.

- *Modelos de enseñanza:* Enseñanza directiva, modelo inductivo básico.
- *Contenidos:*
  - Bloque 1: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 2.1, 2.2, 2.3
  - Bloque 2: 3.2, 3.3, 4.2, 4.6, 5.2, 5.3, 5.13
  - Bloque 3: 6.5, 6.6, 6.7, 6.10, 6.11
  - Bloque 4: 7.1, 7.5, 7.7, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8
  - Bloque 5: 9.2, 9.5, 9.8, 9.9, 10.2, 10.3

### 2.4.3. Resultados

La sesión constó de 5 actividades, de las cuales 2 fueron de inicio y 3 de desarrollo.

Una vez explicado el concepto de probabilidad, el teorema de Buffon y la forma de estimar el número $\pi$ mediante este teorema, Juan procedió a realizar las actividades de inicio (#1 y #2), que respondió con impulsividad pero correctamente.

El tiempo invertido por Juan en las 3 actividades de desarrollo fue de 16, 16 y 11 minutos, respectivamente. En conjunto se le identificaron 2 errores en la actividad #3 (realizada sin apoyo), 4 en la #4 (realizada con apoyo psicopedagógico) y 2 en la #5 (realizada con apoyo tecnológico). El resultado final fue correcto sólo en la actividad #5, única donde sostuvo la atención de forma continuada.

En la presente sesión Juan tampoco necesitó tiempo para familiarizarse con GeoGebra, bastándole 1 intento para reconocer lo que tenía que hacer. Su motivación hacia el uso de la tecnología fue, como habitualmente, muy positiva, sin que experimentase dificultades para navegar por la interfaz, ni precisara de intervenciones externas para progresar.

La sintomatología TDAH se puso de manifiesto cognitivamente en el transcurso de la actividad #3, en 3 ocasiones (preguntas y exteriorización de sentimientos de baja autoestima). La conducta impulsiva quedó evidenciada durante la actividad #3, en 3 ocasiones, y durante la actividad #4, en 1 ocasión. En esta última también mostró 1 vez un comportamiento inquieto.

En cuanto a los errores matemáticos tipificados, registró una alineación incorrecta de las cifras en la actividad #3 y sendas aplicaciones incorrectas del algoritmo de la división en las actividades #3, #4 y #5. También, por 3 veces, dejó sin contestar preguntas de enunciados que contenían más de una.

Al igual que en las sesiones anteriores, las mayores dificultades de ejecución aparecen en la actividad que Juan debió resolver sin ayuda, son ligeramente menores en aquella para la que recibió apoyo psicopedagógico, y se reducen casi a la mitad en la realizada con ayuda de la tecnología. Los aspectos formales están satisfactoriamente cuidados en las actividades #4 y #5, pero no tanto en la actividad #3.

### 2.4.4. Discusión

Juan se enfrentó solo a la actividad #3, pero transcurridos 4 minutos pidió ayuda para resolver el problema argumentando no haber entendido el enunciado, por lo que se le explicó lo que se solicita en el primer apartado. Posteriormente supo continuar solo y colocó adecuadamente los datos en la fórmula, excepto por el hecho de no identificar la yuxtaposición de constantes y variables con la multiplicación, aunque seguramente este fallo no sea imputable al alumno ya que es muy posible que, en general, el alumnado de sexto de Primaria no esté familiarizado con este aspecto de la notación matemática. Al transcribir los datos a la calculadora para obtener la probabilidad pedida intercambió el numerador con el denominador, y anotó el resultado con ocho decimales en vez de redondear a uno, como se le pedía. Pasados 6 minutos manifestó no comprender el segundo apartado de esta actividad. Tras explicárselo y proceder al recuento de las agujas omitió algunas de las que tocan las rectas, por lo que no obtuvo correctamente la proporción que se pide en el tercer apartado; tampoco redondeó el resultado a un decimal, como se requería.

En la actividad #4, realizada con ayuda psicopedagógica, Juan demuestra haber comprendido el enunciado, lo dibuja, interpreta los datos y entiende correctamente la yuxtaposición como multiplicación, pero al operar con la calculadora vuelve a intercambiar el numerador con el denominador sin advertir que, según se le acababa de explicar, las probabilidades deben tomar valores comprendidos entre 0 y 1. Declina revisar el resultado, pese a que se le invita a ello.

Siguiendo la tónica ya habitual, Juan muestra un alto grado de entusiasmo ante la actividad #5, que trabajará con GeoGebra. Prácticamente no necesita nada de ayuda, pues maneja muy bien el programa con las instrucciones proporcionadas en el enunciado. Alcanza niveles de atención y concentración tan altos que responde con acierto a todas las preguntas, e incluso efectúa correctamente las divisiones; tan sólo puede considerarse insuficiente la explicación que ofrece a la cuestión del tercer apartado.

El desarrollo de la sesión se ha ajustado bastante al tiempo previsto (unos 20 minutos para cada actividad). Especialmente a la vista de los resultados de la actividad #5, nuestra percepción que este teorema es uno de los que Juan ha entendido mejor y más le ha gustado; sabe lo que está haciendo y sustituye bien los datos en las fórmulas, pero cuando no está asistido por la tecnología, la impulsividad y la inatención consustanciales al trastorno que padece le inducen a cometer errores de cálculo.

## 2.5. Estimación de áreas mediante el método de Montecarlo

Se conoce como integración de Montecarlo a una técnica de integración numérica que utiliza números aleatorios. Como veremos, se trata de una generalización del procedimiento descrito en la sección 2.4.1.

### 2.5.1. Fundamentación matemática

Imaginemos que se pretende calcular el área del conjunto $A$ encerrado por la gráfica de una función continua no negativa $f$ definida en un intervalo real $[a, b]$. Se considera el rectángulo $R = [a, b] \times [0, d]$, donde $d = \text{máx}_{a\leq x\leq b} f(x)$. Contemplamos las coordenadas cartesianas $X$ e $Y$ como variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[a, b]$ y $[0, d]$, respectivamente, y definimos en $R$ la variable aleatoria de Bernoulli

$$U(X, Y) = \begin{cases} 1, & (X, Y) \in A \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La media de $U$ es

$$E(U) = \frac{|A|}{|R|} = \frac{\mu}{d},$$

donde $|C|$ denota el área del conjunto $C$ y

$$\mu = E(f(X)) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{|A|}{b-a}$$

es la media de la variable aleatoria $f(X)$. Como $U^2 = U$, la varianza de $U$ es

$$\sigma^2(U) = E(U^2) - [E(U)]^2 = \frac{|A|}{|R|} - \left(\frac{|A|}{|R|}\right)^2.$$

Para aproximar $E(U)$ tomamos sendas muestras aleatorias $X_1, \ldots, X_m$ en $[a, b]$ e $Y_1, \ldots, Y_m$ en $[0, d]$, y definimos

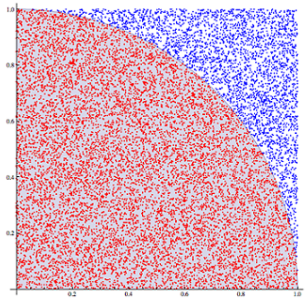

**Figura 2.6.** Aproximación de $\pi$ por estimación del área del primer cuadrante de la circunferencia unidad mediante integración Montecarlo ($m = 15000$, $\pi \approx 3,14533$).

$$U_i(X_i, Y_i) = \begin{cases} 1, & (X_i, Y_i) \in A \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & Y_i \leq f(X_i) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ahora ponemos

$$\overline{U}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} U_i.$$

Nótese que, para cada $m$, $\overline{U}_m$ representa la proporción de puntos de la muestra de $m$ elementos $(X_i, Y_i)$ que caen dentro de $A$. Entonces $E(\overline{U}_m) = E(U)$ y $\sigma^2(\overline{U}_m) = \sigma^2(U)/m$. La ley de los grandes números asegura que $\overline{U}_m$ converge en probabilidad a $E(U)$; por tanto, $d\overline{U}_m$ converge en probabilidad a $\mu$. Se concluye que, si $m$ es grande,

$$|A| = \int_a^b f(x)\, dx = \mu(b-a) \approx (b-a)d\overline{U}_m \approx |R|\, \overline{U}_m,$$

con un error máximo de

$$\sigma(\overline{U}_m) = \frac{\sigma(U)}{\sqrt{m}} \leq \frac{1}{2\sqrt{m}}.$$

Para la acotación del error, nótese que $\sigma^2(U) = p - p^2$, donde $p = |A|/|R|$, alcanza su máximo cuando $p = 1/2$.

### 2.5.2. Justificación curricular y diseño de la experiencia

La integración de Montecarlo viene a ser un problema de probabilidad geométrica: determinar la probabilidad de que un punto elegido al azar esté en cierta parte de una región plana. Conecta, por tanto, los *Bloques de Aprendizaje 3: Medida*, *4: Geometría* y *5: Estadística y Probabilidad*. Puede ser introducida para ilustrar el cálculo de áreas «raras» o para proporcionar una segunda forma de aproximar el número $\pi$, enlazando, de nuevo, los bloques anteriores con el bloque aritmético.

- *Modelos de enseñanza:* Enseñanza directiva, modelo inductivo básico.
- *Contenidos:*
  - Bloque 1: 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 2.1, 2.2, 2.3
  - Bloque 2: 3.1, 3.2, 3.3, 4.2, 4.6, 5.2, 5.3, 5.13
  - Bloque 3: 6.3, 6.6, 6.7, 6.10, 6.11
  - Bloque 4: 7.1, 7.4, 7.5, 7.7, 8.1, 8.2, 8.3, 8.4, 8.5, 8.7, 8.8
  - Bloque 5: 9.2, 9.5, 9.8, 9.9, 10.2, 10.3

### 2.5.3. Resultados

La sesión constó de 5 actividades, de las cuales 2 fueron de inicio y 3 de desarrollo.

Comenzamos con la explicación del método Montecarlo para la estimación de áreas y la razón de esta denominación. Seguidamente, Juan procedió a realizar las actividades de inicio (#1 y #2), que respondió acertadamente.

El tiempo invertido por Juan en las 3 actividades de desarrollo fue de 10, 12 y 8 minutos, respectivamente. En conjunto sólo se le identificaron 2 errores en la actividad #3 (realizada sin apoyo) y 1 en la #4 (realizada con apoyo psicopedagógico), sin que cometiera ninguno en la actividad #5 (realizada con apoyo tecnológico). En las tres actividades sostuvo la atención de forma continuada y logró un resultado final correcto.

En la presente sesión Juan tampoco necesitó tiempo para familiarizarse con GeoGebra, y le bastó 1 intento para reconocer lo que tenía que hacer. Al igual que en las sesiones anteriores, mostró una actitud entusiasta hacia el uso de la tecnología y no experimentó dificultad alguna para navegar por la interfaz, ni precisó de intervenciones externas para progresar en la actividad.

La sintomatología TDAH se puso de manifiesto cognitivamente en el transcurso de la actividad #3, en 3 ocasiones (preguntas y exteriorización de sentimientos de baja autoestima). La conducta impulsiva quedó evidenciada en sendas ocasiones durante la realización de las actividades #3 y #4. Exhibió un comportamiento inquieto ante las tres aunque, de nuevo, más acusado en las desarrolladas sin apoyo tecnológico (2 ocasiones en cada una de las actividades #3 y #4 frente a 1 ocasión en la actividad #5).

No se registró ningún error matemático tipificado.

Al igual que en las sesiones precedentes, las mayores dificultades de ejecución aparecen en la actividad que Juan debió resolver sin ayuda, son bastante menores en aquella para la que recibió apoyo psicopedagógico, y prácticamente inexistentes en la desarrollada con ayuda de la tecnología.

Los aspectos formales están satisfactoriamente cuidados en las tres actividades.

### 2.5.4. Discusión

Juan se enfrentó solo a la actividad #3. Tras varios minutos pensativo, durante los cuales exteriorizó cierta inquietud (jugar con la silla, cambiar de postura), manifestó que no sabía resolverla y pidió ayuda para entender el enunciado. Una vez se le explicó lo que tenía que hacer, se mostró bastante concentrado y resolvió correctamente los dos primeros apartados. Volvió a preguntar en el tercero, pero inmediatamente continuó con la ejecución y obtuvo resultados correctos.

En la actividad #4, realizada con apoyo psicopedagógico, Juan supo expresar el enunciado con sus palabras y esbozó un esquema de la situación, si bien cometió algún error de escasa relevancia. Tras anotar la fórmula para estimar el área, sustituyó los valores pertinentes y efectuó los cálculos oportunos. En este momento se mostró inquieto, moviendo la silla y jugueteando con las hojas de las actividades; no obstante, respondió perfectamente a todas las cuestiones.

Siguiendo la tónica ya habitual, Juan muestra un alto grado de entusiasmo hacia la actividad #5, que trabajará con GeoGebra. Se siente especialmente motivado ante la perspectiva de calcular el área del núcleo de una célula animal. Ejecuta satisfactoriamente y con seguridad las instrucciones estructuradas que se le han facilitado a tal fin, evidenciando un alto grado de concentración y respondiendo con acierto. Tan sólo en una ocasión mostró un comportamiento inquieto, desplazando la silla. Aunque su respuesta a la última pregunta resulta un tanto pobre, deja traslucir una comprensión adecuada del procedimiento seguido.

El desarrollo de la sesión se ha ajustado bastante al tiempo previsto. Sin ninguna duda, esta es la que Juan ha entendido y trabajado mejor, con un alto nivel de concentración y corrección total en los resultados. Preguntado al respecto, el alumno coincide en mostrar su satisfacción con la sesión en general y, muy especialmente, con la actividad realizada en GeoGebra.

# 3

# Análisis, conclusiones, limitaciones y prospectiva

## 3.1. Análisis

Las tablas 3.1, 3.2 y 3.3 resumen las valoraciones del desempeño de Juan realizadas mediante la guía de observación en el conjunto de las cinco sesiones programadas. En cada sesión, además de unas actividades de inicio, se propusieron sendas actividades de desarrollo para ser realizadas conforme a las tres estrategias I (sin apoyo), II (con apoyo psicopedagógico) y III (con ayuda de GeoGebra). El apoyo psicopedagógico consistió en asistirle con un esquema de trabajo orientado a suplir el déficit en autoinstrucciones propio de su patología, compuesto de los siguientes pasos:

1. Leer el enunciado tres veces.
2. Expresarlo con palabras propias, diferenciando los datos de la pregunta.
3. Representar el enunciado por partes mediante esquemas o dibujos.
4. Pensar qué operación es necesaria.
5. Ejecutar la operación.
6. Revisar el resultado.

Para evitar en lo posible sesgos condicionados por el aprendizaje previo, todas las sesiones versaron sobre resultados matemáticos conectados con el currículo de su nivel (sexto de Primaria) pero que no forman parte explícita de sus contenidos: teoremas de Pitágoras, Haga, Pick y Buffon, y estimaciones de áreas mediante integración Montecarlo.

La tabla 3.1 y el desglose por sesiones efectuado en el capítulo 2 reflejan que el tiempo total de ejecución de las actividades de tipo I es mayor que el invertido en las actividades de tipo II, y que ambos son generalmente mayores que el requerido para desarrollar las actividades de tipo III (excepto en la sesión 2, donde el alumno configuró enteramente la simulación a diferencia de las de las restantes sesiones, que se le proporcionaron prediseñadas). Se advierte también que en las actividades de tipo III Juan obtiene más resultados finales correctos que en las actividades de tipo II, y notoriamente más que en las actividades de tipo I; además, tanto al realizar las actividades de tipo I como las de tipo II comete el doble o más de errores que con las de tipo III. La valoración de los aspectos formales (control del trazo, pulcritud, etc.) se realizó mediante una escala de tipo Likert Nada-0, Poco-1, Bastante-2, Mucho-3, de manera que una mayor puntuación corresponde a un desempeño mejor. La puntuación más alta en esta dimensión fue alcanzada en las actividades de tipo III.

| **Ítem** | **I** | **II** | **III** |
|---|---|---|---|
| Tiempo total de ejecución de las actividades de cada tipo (minutos) | 60 | 52 | 70 |
| Número de resultados correctos (sobre 5) | 1 | 3 | 4 |
| Cantidad de errores identificados | 16 | 19 | 8 |
| Atención sostenida (sobre 5) | 1 | 4 | 5 |
| Aspectos cognitivos negativos | 12 | 2 | 0 |
| Aspectos conductuales negativos | 11 | 13 | 3 |
| Aspectos formales positivos | 27 | 37 | 41 |

**Tabla 3.1.** Desempeño global.

La tabla 3.2 revela una motivación y una adaptación totales del sujeto a la tecnología. Juan no necesitó tiempo para familiarizarse con ella, y en todas las sesiones reconoció a la primera lo que debía hacer. Siempre abordó la actividad con agrado, y no tuvo ninguna dificultad para navegar por la interfaz ni para interactuar con el programa.

| **Ítem** | **III** |
|---|---|
| Tiempo total dedicado a la familiarización (minutos) | 0 |
| Tiempo total de juego con la simulación (minutos) | 70 |
| Total de errores identificados durante la resolución | 8 |
| Total de intentos hasta reconocer qué hay que hacer (sobre 5) | 5 |
| Interés por el uso de la tecnología (sobre 5) | 5 |
| Total de dificultades para navegar por la interfaz (sobre 5) | 0 |
| Total de dificultades para interactuar con la simulación (sobre 5) | 0 |

**Tabla 3.2.** Uso de la tecnología (GeoGebra).

La tabla 3.3 da cuenta del comportamiento resolutor de Juan. Sus dificultades con el enunciado y con la estrategia de resolución de las actividades fueron valoradas mediante una escala de tipo Likert Nada-0, Poco-1, Bastante-2, Mucho-3, de manera que a mayor dificultad, mayor puntuación. En consonancia con los resultados comentados anteriormente, en estas dos dimensiones la puntuación de Juan es mucho más alta (más del doble) en las actividades de tipo

I, que en las actividades de tipo III. El porcentaje total de resultados correctos es prácticamente el mismo en las actividades de tipos II y III, pero debe advertirse que en las actividades de tipo III el sujeto los consigue interactuando autónomamente con el software, sin el apoyo de la educadora.

| **Ítem** | **I** | **II** | **III** |
|---|---|---|---|
| Total de errores en la ejecución de operaciones | 2 | 1 | 1 |
| Total de errores en el cálculo con decimales | 1 | 0 | 2 |
| Total de errores de cálculo debidos a «llevadas» | 1 | 0 | 0 |
| Total de otros errores de cálculo no debidos a «llevadas» | 7 | 4 | 0 |
| Total de errores achacables a la inatención | 8 | 1 | 1 |
| Puntuación total de dificultades con el enunciado | 68 | 42 | 27 |
| Puntuación total de dificultades con la estrategia de resolución | 69 | 46 | 28 |
| Porcentaje total de resultados correctos | 30,7 % | 77,3 % | 73,7 % |

**Tabla 3.3.** Comportamiento resolutor.

Todas estas evidencias guardan correlación directa con una manifestación mucho más reducida de la sintomatología cognitivo-conductual, especialmente de la cognitiva, en las actividades de tipo III frente a las de tipos I y II (tabla 3.1). En las 5 sesiones se ha conseguido que Juan muestre cambios reales, tanto atencionales como conductuales, al realizar el ejercicio de tipo III.

## 3.2. Conclusiones

Respecto a los objetivos planteados al comienzo de este trabajo, podemos formular las siguientes reflexiones:

1. *Comprender las principales causas y consecuencias del TDAH en conexión con las matemáticas.* Pensar estrategias que desarrollen y potencien las habilidades de individuos que presentan un trastorno determinado obliga a los docentes a plantear nuevas formas de trabajar, conjuntamente con profesionales de otras áreas, y supone también un reto para los investigadores que pretenden involucrarse en estas problemáticas.
2. *Conocer la normativa estatal y autonómica que regula las necesidades específicas de apoyo educativo en relación con este trastorno.* En nuestra comunidad autónoma, el artículo B.2 del Anexo I de la *Orden de 13 de diciembre de 2010 de la Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes*[1] detalla los criterios de identificación de los escolares con necesidades específicas de apoyo educativo por TDAH, mientras que el artículo 8 del

[1] Boletín Oficial de Canarias no. 250, de 22 de diciembre de 2010.

Anexo II a la *Resolución de 9 de febrero de 2011* de la misma Consejería[2] establece orientaciones metodológicas y organizativas para el aula ordinaria y para la evaluación de este alumnado. A nivel estatal, el reconocimiento legal del TDAH como necesidad específica de apoyo educativo se produce por primera vez en el artículo 71 de la LOMCE [24].

3. *Estudiar las DA en general, y las DAM en particular, a que se enfrentan en el aula los niños que padecen TDAH.* Al objeto de comprender el TDAH y conocer las medidas más adecuadas para atender a estudiantes con este diagnóstico se realizó una revisión bibliográfica y se contó con el asesoramiento de especialistas. La revisión realizada permitió concretar algunos aspectos relativos a las decisiones metodológicas: el ambiente y las ayudas psicopedagógicas e interdisciplinares que necesitan los afectados y las características que deberían tener las tecnologías utilizadas, así como las que definen algunos instrumentos utilizados para registrar conductas y actitudes en relación con los síntomas.
4. *Revisar la literatura referente al uso de las TIC como apoyo al proceso de enseñanza-aprendizaje en general, y de las matemáticas en particular, hacia el alumnado afectado de TDAH.* Los resultados de la revisión también sugieren que las tecnologías podrían ser útiles en el proceso de aprendizaje de los niños que padecen este trastorno. Es oportuno recalcar que las TIC no son eficaces por sí mismas, sino en la medida en que su utilización se planifica e integra en diferentes actividades de una secuencia didáctica. Nos planteamos entonces la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo se puede ayudar a un estudiante diagnosticado de TDAH a aprender matemáticas usando tecnologías educativas?
5. *Contrastar experimentalmente la validez de GeoGebra como herramienta en la prestación de este apoyo, en el caso concreto de un estudiante de sexto de Primaria diagnosticado de TDAH.* GeoGebra permite enseñar matemáticas involucrando a los sujetos en actividades de creación, manipulación y análisis de modelos. El reto consiste en proponer actividades donde los sujetos puedan expresar, confrontar, reelaborar y utilizar los modelos mentales construidos, teniendo en cuenta las características de su patología.
6. *Formular propuestas didácticas y metodológicas en función de las conclusiones derivadas de la experiencia desarrollada.* Precisamos conocer las explicaciones, conjeturas y argumentos que los sujetos elaboran al usar las tecnologías o después de su utilización. Una enseñanza con estas características sitúa al sujeto más cerca de comprender que el conocimiento científico hoy en día se genera con la propuesta de diferentes modelos para un determinado fenómeno, cada uno con distinto alcance y capacidad de predicción.

Lo anterior conduce a las siguientes conclusiones:

[2] Boletín Oficial de Canarias no. 40, de 24 de febrero de 2011.

1. Los estudios donde se plantee ayudar a aprender matemáticas a estudiantes con TDAH mediante el uso de tecnología requieren, por un lado, integrar referentes de distintas áreas: matemáticos, psicológicos, didácticos, epistemológicos y psicopedagógicos; y, por otro, diseñar estrategias metodológicas que contemplen las funciones y actuaciones de las personas que interactúan con nuestro sujeto: la familia y los profesionales de la salud y la educación.
2. El trabajo desarrollado es concluyente respecto al hecho de que el uso de GeoGebra favorece el tiempo de atención del sujeto para concentrarse en lo que se le solicita; al frenar la impulsividad y estimular la concentración, mejora su autonomía y rendimiento.
3. Durante los últimos años, las técnicas de neuroimagen y otras para el estudio de la actividad cerebral han permitido obtener evidencias neurológicas de las variaciones estructurales y funcionales que ocurren en el cerebro de las personas con TDAH (cf. [23]).
   Según numerosos estudios, estas personas muestran alteraciones en la corteza frontal del cerebro, específicamente en los circuitos frontoestriatales. La corteza frontal controla diferentes funciones cognitivas, entre las que se encuentran las funciones ejecutivas, la atención a estímulos y la planificación; ejerce un control inhibitorio cognitivo y de organización en la consecución de objetivos y metas. Al tener esta zona afectada, Juan encuentra grandes dificultades para mantener la atención en las actividades de tipo I y resolverlas correctamente.
   Por el mismo motivo, las autoinstrucciones suponen otra gran dificultad para un alumno con TDAH. Estudios realizados con magnetoencefalografía (MEG) evidencian que los niños con TDAH muestran una mayor activación de la región parietal inferior y temporal superior después de la aparición de retroalimentaciones que les indiquen cómo realizar una actividad. Este aumento sugiere la necesidad de utilizar recursos atencionales para ejecutar mejor las tareas y obtener el mismo rendimiento que los niños sin TDAH, lo que es compatible con el hecho de que Juan haya alcanzado mejores resultados en las actividades de tipo II (sustituyendo las autoinstrucciones por el apoyo psicopedagógico ya descrito) que en las de tipo I.
   Los niños con TDAH presentan alteraciones anatómicas en la corteza temporal posterior y en la parietal inferior, vinculadas a su incapacidad para concentrar los recursos atencionales en una tarea e ignorar los elementos irrelevantes. La estimulación virtual facilita la percepción de estos pacientes e incrementa la respuesta sensorial desde las vías aferentes de transmisión nerviosa hasta la corteza cerebral. GeoGebra proporciona un aprendizaje multisensorial y dinámico que ha estimulado la curiosidad de Juan, aumentando el disfrute del proceso perceptivo a la par que eliminando los elementos distractores (compárense los resultados comportamentales I, II y III de la tabla 3.1).

Considerando los resultados alcanzados en los tres tipos de actividades, podemos concluir que no sólo es importante conocer las zonas afectadas del cerebro y las alteraciones en la conectividad cerebral de los sujetos con TDAH, sino cuándo se producen los errores cognitivo-conductuales y en relación con qué.

4. Sobre la base de los buenos resultados obtenidos se han diseñado cinco secuencias didácticas que integran y complementan las propuestas para las sesiones de trabajo, conteniendo actividades de iniciación, desarrollo, consolidación y complementarias. Están disponibles en la dirección https://goo.gl/Pv7zpb.

## 3.3. Limitaciones y prospectiva

Las principales limitaciones de este trabajo son las propias de un estudio de caso:

- Dificultad para extraer conclusiones de causa-efecto.
- La interpretación de los resultados está afectada por las impresiones subjetivas del observador.
- Presenta problemas de generalización: no todos los individuos con el mismo trastorno van a responder de la misma manera a la propuesta de intervención.

Adicionalmente, en este trabajo se ha partido de cero, diseñando y aplicando la propuesta al nivel de un trabajo fin de grado, durante el tiempo disponible en un curso y bajo las restricciones de extensión de la memoria que impone la normativa académica, lo cual ha ocasionado que el tiempo de aplicación fuese relativamente reducido y se dispusiese de un escaso margen de maniobra para, una vez evaluada la efectividad de la propuesta, ofrecer y valorar propuestas alternativas en aquellos aspectos detectados como mejorables.

De cara a trabajos futuros se podría pensar en su aplicación a un grupo más amplio de estudiantes de sexto curso diagnosticados de TDAH, tratando de este modo de obtener conclusiones nomotéticas. Otra posible línea de investigación podría consistir en aplicar las mismas propuestas a un grupo de control formado por alumnado sin patologías diagnosticadas, y comparar el rendimiento obtenido en ambos casos (grupo TDAH vs. grupo control).

Un proyecto más ambicioso, en posible colaboración con el grupo de investigación en Neurociencia Cognitiva y Psicolingüística de la ULL (Neurocog ULL), consistiría en utilizar el equipamiento científico de que dispone este grupo[3], particularmente la fMRI, para medir y registrar en tiempo real el impacto del uso de GeoGebra en el funcionamiento cerebral de los sujetos con TDAH, obteniendo así evidencias neurológicas del efecto positivo del programa en el aprendizaje de las matemáticas de quienes padecen este trastorno.

[3] Cf. http://www.neurocog.ull.es/es/equipamiento/.

# Bibliografía


[1] C.M. Alonso, D.J. Gallego: *Aprendizaje y ordenador*. Dykinson, 2000.

[2] American Psychiatric Association: *Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales DSM-IV-TR*. Masson, 2002.

[3] American Psychiatric Association: *Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales DSM-5*. Masson, 2013.

[4] A. Baddeley: Recent developments in working memory. *Current Opinion in Neurobiology* **8** (1998), 234–238.

[5] R.A. Barkley: *ADHD and the nature of self-control*. Guilford Press, 1997.

[6] R.A. Barkley: *Attention-Deficit Hyperactivity Disorder: A handbook for diagnosis and treatment*, 3rd ed. Guilford Press, 2006.

[7] U. Brook, M. Boaz: Attention deficit and learning disabilities (ADHD/LD) among school pupils in Holon (Israel). *Patient Education and Counselling* **58** (2005), 164–167.

[8] L. Capano, D. Minden, S.X. Chen, R.J. Schachar, A. Ickowicz: Mathematical learning disorder in school-age children with attention-deficit hyperactivity disorder. *Canadian Journal of Psychiatry* **53** (2008), no. 6, 392–399.

[9] Á.M. Casajús Lacosta: *La resolución de problemas aritmético-verbales por alumnos con Déficit de Atención con Hiperactividad (TDAH)*. Tesis Doctoral, Facultad de Formación del Profesorado, Universidad de Barcelona, 2005.

[10] M. Creu Obrer: *TDAH y Matemáticas: propuestas para mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje de los alumnos de la ESO*. Trabajo Fin de Máster, Facultad de Educación, Universidad Internacional de La Rioja, 2014.

[11] M.A. Domínguez: Aproximaciones metodológicas en una investigación sobre cómo se aprende física con tecnología en casos de TDA/H. *Revista de Enseñanza de la Física* **28** (2016), no. 2, 39–49.

[12] S.V. Faraone, J. Bierderman, M.C. Monuteaux, A.E. Doyle, L.J. Seidman: A psychometric measure of learning disability predicts educational failure four years later in boys with Attention-Deficit/Hyperactivity Disorder. *Journal of Attention Disorders* **4** (2001), 220–230.

[13] J.M. Fletcher, S.E. Shaywitz, B.A. Shaywitz: Comorbidity of learning and attention disorders. *Pediatric Clinics of North America* **46** (1999), 885–887.

[14] D.C. Geary: *Learning disabilities in arithmetic: Problem-solving differences and cognitive deficits.* En H.L. Swanson, K.R. Harris, S. Graham, eds.: *Handbook of learning disabilities*, Guilford Press, 2003, pp. 199–212.

[15] D.C. Geary: Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities* **37** (2004), 4–15.

[16] D.C. Geary, M.K. Hoard, J. Byrd-Craven, M.C. DeSoto: Strategy choices in simple and complex addition: Contributions of working memory and counting knowledge for children with mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology* **88** (2004), 121–151.

[17] P. González Castro, C. Rodríguez, M. Cueli, L. Cabeza, L. Álvarez: Competencias matemáticas y control ejecutivo en estudiantes con Trastorno por Déficit de Atención con Hiperactividad y Dificultades de Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista de Psicodidáctica* **19** (2014), no. 1, 125–143.

[18] G. González Rus, R. Oliver Franco: *La informática en el Déficit de Atención con Hiperactividad.* Jornadas de Hiperactividad, ICSE (Sevilla), 2002. Disponible en http://diversidad.murciaeduca.es/tecnoneet/docs/2002/3-142002.pdf.

[19] P.M. González Urbaneja: El teorema llamado de Pitágoras: Una historia geométrica de 4000 años. *Sigma* **32** (2008), 103–130.

[20] L.O. Gratch: *El trastorno por déficit de atención (ADD-ADHD): Clínica, diagnóstico y tratamiento en la infancia, la adolescencia y la adultez.* Editorial Médica Panamericana, 2009.

[21] R. Guzmán Rosquete, M.I. Hernández Valle: Estrategias para evaluar e intervenir en las dificultades de aprendizaje académicas en el Trastorno de Déficit de Atención con/sin Hiperactividad. *Qurriculum: Revista de teoría, investigación y práctica educativa* **18** (2005), 147–174.

[22] K. Haga: *Origamics.* World Scientific, 2008.

[23] M. Hoogman *et al.*: Subcortical brain volume differences in participants with attention deficit hyperactivity disorder in children and adults: a cross-sectional mega-analysis. *The Lancet Psychiatry* **4** (2017), 310–319.

[24] Jefatura del Estado: Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado* no. **295**, de 10 de diciembre de 2013.

[25] C. Jiménez Gestal, L.J. Blanco Nieto: El teorema de Pick como pretexto para la enseñanza de la geometría con estudiantes para maestro. *Números* **94** (2017), 7–21.

[26] D. Lucangeli, S. Cabrele: Mathematical difficulties and ADHD. *Exceptionality* **14** (2006), 53–62.

[27] G.R. Lyon, J.M. Fletcher, M.C. Barnes: *Learning disabilities.* En A.J. Mash, R.A. Barkley, eds.: *Child psychopathology*, 2nd ed., Guilford Press, 2003, pp. 520–586.

[28] M.J. Martínez Segura: Utilización de las TIC en la respuesta educativa a las dificultades de aprendizaje atencionales. *Comunicación & Pedagogía* **219** (2007), 8–14.

[29] M.J. Martínez Segura: *Características del trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH).* Universidad de Murcia, 2010. Disponible en https://digitum.um.es/xmlui/handle/10201/10809.

[30] S.D. Mayes, S.L. Calhoun, E.W. Crowell: Learning disabilities and ADHD: Overlapping spectrum disorders. *Journal of Learning Disabilities* **33** (2000), no. 5, 417–424.

[31] A. Meliá de Alba: *Dificultades de aprendizaje de las matemáticas en niños con trastorno por déficit de atención e hiperactividad: Comparación de los perfiles cognitivos y metacognitivos.* Tesis Doctoral, Servicio de Publicaciones, Universidad de Valencia, 2008.

[32] A. Miranda Casas, A. Meliá de Alba, R. Marco Taverner: Habilidades matemáticas y funcionamiento ejecutivo de niños con trastorno por déficit de atención con hiperactividad y dificultades del aprendizaje de las matemáticas. *Psicothema* **21** (2009), no. 1, 63–69.

[33] A. Miranda Casas, A. Meliá de Alba, R. Marco Taverner, B. Roselló, F. Mulas: Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas en niños con trastorno por déficit de atención e hiperactividad. *Revista de Neurología* **42**, Supl. 2 (2006), S163–S170.

[34] A. Miranda Casas, M. Soriano Ferrer, R. García Castellar: Optimización del proceso de enseñanza/aprendizaje en estudiantes con trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH). *EduPsykhé* **1** (2002), no. 2, 249–274.

[35] D. Neal: Determining sample sizes for Monte Carlo integration. *The College Mathematics Journal* **24** (1993), no. 3, 254–259.

[36] Organización Mundial de la Salud: *Trastornos mentales y del comportamiento de la Décima Revisión de la Clasificación Internacional de las Enfermedades (CIE-10)*, 3 vols. Organización Panamericana de la Salud, 2008.

[37] I. Orjales Villar: El tratamiento cognitivo en niños con trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH): Revisión y nuevas aportaciones. *Anuario de Psicología Clínica y de la Salud* **3** (2007), 19–30.

[38] I. Orjales Villar: *Déficit de atención con hiperactividad: Manual para padres y educadores*, 19a. ed. CEPE, 2014.

[39] J. Orrantia, D. Múñez: Arithmetic word problem solving: evidence for a magnitude-based mental representation. *Memory & Cognition* **41** (2013), 98–108.

[40] M. Raman, L.D. Ohman: *Two beautiful proofs of Pick's theorem*. En *Proceedings of CERME 7-Seventh Congress of European Society for Research in Mathematics Education*, Rzeszów, Poland, 2011, pp. 1–10. Disponible en http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/1/CERME7_WG1_Raman&Ohman.pdf.

[41] J.L. Ramírez Ramírez: El teorema de Pick y redes de puntos. *Materials Matemàtics* **2010**, artículo no. 5, 41 pp.

[42] N. Rosich Sala, Á. Casajús Lacoste: El alumnado con déficit de atención e hiperactividad (TDAH) en el aprendizaje de las matemáticas en los niveles obligatorios. *Unión* **16** (2008), 63–83.

[43] C. Soutullo Esperón, A. Díez Suárez: *Manual de diagnóstico y tratamiento del TDAH*. Editorial Médica Panamericana, 2007.

[44] T. Van Hecke: Fostering understanding of Monte Carlo simulations for estimating $\pi$ using dynamic GeoGebra applets. *North American GeoGebra Journal* **4** (2015), 9–15.

[45] A. Walker, M. Recker, L. Ye, M.B. Robertshaw, L. Sellers, H. Leary: Comparing technology-related teacher professional development designs: A multilevel study of teacher and student impacts. *Educational Technology Research and Development* **60** (2012), 421–444.

[46] R.K. Yin: *Case study research: Design and methods*. Sage Publications, 2003.

[47] S.S. Zentall: Theory- and evidence-based strategies for children with attentional problems. *Psychology in the Schools* **42** (2005), no. 8, 821–836.

[48] S.S. Zentall: *Math performance of students with ADHD: Cognitive and behavioral contributors and interventions*. En D.B. Berch, M.M.M. Mazzocco, eds.: *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*, Paul H. Brookes Publishing, 2007, pp. 219–243.

[49] S.S. Zentall, K. Tom-Wright, J. Lee: Psychostimulant and sensory stimulation interventions that target the reading and math deficits of students with ADHD. *Journal of Attention Disorders* **17** (2012), no. 4, 308–329.

# *Mathematics learning disabilities of ADHD students*

**Carolina Yanes Rivero**
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100533224@ull.edu.es

## Abstract

*This investigation consists of a case study of a sixth-grade primary school student diagnosed with Attention-Deficit Hyperactivity Disorder (ADHD). A didactic proposal for the teaching and learning of mathematics is developed, appropriate for the aforementioned level and specific educational needs, in accordance with the framework for curricular integration of information and communication technologies.*

## 1. Introduction

ADHD is a chronic, neurobiological disorder whose main symptoms include difficulty in sustaining attention and concentration, impulsivity, and exaggerated motor restlessness for the child's age and the environment where it occurs. It is the most prevalent disorder in childhood. The general objective of this investigation is to study the case of a sixth-year primary education student diagnosed with ADHD and to develop a didactic proposal for the teaching and learning of mathematics at that level, in accordance with the educational framework for curricular integration of information and communication technologies. To this end, three teaching-learning scenarios have been configured: strategy I, whereby the subject must resolve a problem without any external support; strategy II, where he is provided with verbal support through psychopedagogical techniques; and strategy III, where an alternative learning-by-discovery scenario is defined through the dynamic mathematical software GeoGebra. A didactic and methodological proposal has been made on the basis of the obtained results.

## 2. Theoretical framework

According to the most widespread theory, the etiology of ADHD lies in a deficiency in response inhibitions, a primordial executive function that enables the correct functioning of other important executive functions such as working memory, language internalization, self-regulation of feeling, motivation and activation, and reconstitution. There are three subtypes of ADHD: predominant inattentive, predominant hyperactive-impulsive and combined. In order to calculate and solve arithmetic-verbal problems, great attention, working memory, planning and organization skills, and comprehension strategies are required, all of which are regulated by an adequate executive functioning, that is deficient in those affected by ADHD; hence, these patients frequently present mathematics learning disabilities (MLD). GeoGebra complies with all the methodological standards necessary for educational intervention in ADHD, *a priori* making this technology ideal to promote creativity, autonomy, motivation and concentration of the subjects, thus helping them to reach optimal levels in the resolution of problems from the individualization of their specific educational needs.

## 3. Intervention proposals

Taking into account the methodological guidance for improving the MLD associated with ADHD students gathered from the specialized literature, five proposals, corresponding to as many sessions, have been designed and integrated in the curriculum for sixth-grade primary education. For each session, the mathematical foundation, curriculum justification, experience design, results of its implementation and a brief discussion of these results are provided.
The five proposals are based on:

- the Pythagorean theorem, which is applied to the design of activities that help the understanding and management of the square root and the geometric properties of the right triangle, or the interpretation of the square of a number as an area;
- the Haga theorem, which allows operations with fractions and proportionality, as well as working with the calculation of perimeters, the concepts of length and distance, symmetry and rotation, and the similarity of triangles;
- the areas of simple reticular polygons through Pick's theorem, since after learning how to calculate areas of regular polygons, the student will naturally try to calculate the results of juxtaposing two of these polygons;
- the estimate of the number $\pi$ through Buffon's theorem, a geometric probability problem that connects the numerical, geometric, measurement, and statistical and probability learning blocks;
- and, finally, the estimation of areas by the Monte Carlo method, in order to illustrate the calculation of «strange» areas or to provide a second way of approaching the number $\pi$.

## 4. Conclusions, limitations and prospective

The following conclusions can be drawn:

1. Investigations that aim to help students with ADHD learn mathematics through the use of technology require an interdisciplinary approach and the involvement of all those interacting with the student.
2. The use of GeoGebra encourages the individual to focus on what is required; by curbing impulsivity and stimulating concentration, the student's autonomy and performance are enhanced.
3. The results obtained (worse for type I, better for type II and very good for type III activities) are consistent with the neurobiological findings on the brain functioning of those affected by ADHD.

The main limitations of this investigation are those generally encountered with case studies. In the future it would be desirable to develop this experience with a broader group of sixth-graders diagnosed with ADHD, in order to obtain nomothetic conclusions; to apply the same proposals to a control group formed by students without diagnosed pathologies, and to compare the performance obtained in both cases; and even to measure in real time the impact of using GeoGebra on the brain functioning of subjects with ADHD, in order to obtain neurological evidence of the positive effect of the program in the learning of mathematics of the students with this disorder.

## References

[1] R.A. BARKLEY: *Attention-Deficit Hyperactivity Disorder: A handbook for diagnosis and treatment*, 3rd ed. Guilford Press, 2006.

[2] P.M. GONZÁLEZ URBANEJA: El teorema llamado de Pitágoras: Una historia geométrica de 4000 años. *Sigma* **32** (2008), 103–130.

[3] K. HAGA: *Origamics*. World Scientific, 2008.

[4] J.L. RAMÍREZ RAMÍREZ: El teorema de Pick y redes de puntos. *Materials Matemàtics* **2010**, artículo no. 5, 41 pp.

[5] T. VAN HECKE: Fostering understanding of Monte Carlo simulations for estimating $\pi$ using dynamic GeoGebra applets. *North American GeoGebra Journal* **4** (2015), 9–15.