Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Adrián Roberto Mendioroz Morales

Aplicaciones de la transformación integral de Laplace

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, septiembre de 2017

Dirigido por

José Manuel Méndez Pérez

José Manuel Méndez Pérez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

El presente Trabajo Fin de Grado desarrolla la transformada integral de Laplace desde un punto de vista práctico, tratando de justificar, de una forma lo más sencilla posible, las manipulaciones (no siempre rigurosas, pero sí efectivas) que hacen los ingenieros, los físicos..., al abordar y solucionar diferentes problemas. Introduce, de manera elemental, la teoría de distribuciones, demostrando que la delta de Dirac, como función, está mal definida, y que solo tiene sentido si se considera una distribución.

Palabras clave: *Transformada de Laplace – Distribuciones – Distribuciones de crecimiento lento – Delta de Dirac – Heaviside – Circuitos eléctricos – Tranformada de Fourier – Funciones prueba – Derivación distribucional.*

Abstract

The present dissertation develops the Laplace integral transform from a practical point of view, trying to justify, in the simplest way possible, the manipulations (not always accurate, but effective) that engineers, physicists... do, when they aproach and solve different problems. It presents, in a basic way, the theory of distributions, proving that the Dirac delta, as a function, is not well defined, and it only makes sense if it is considered as a distribution.

Keywords: *Laplace transform – Distributions – Slow growth distributions – Dirac delta – Heaviside – Electrical circuits – Testing functions – Fourier transform – Distributional differentiation.*

Contenido

Introducción

La teoría de distribuciones, desarrollada por el matemático francés Laurent Schwartz y que le hizo merecedor de una medalla Fields por su enorme contribución al análisis, amplió el campo del análisis diferencial e integral, permitiendo una justificación rigurosa de diversos procedimientos que carecían de ella. Algunos tipos de distribuciones (en particular, la función delta y sus derivadas) se usaban en Física e Ingeniería desde mucho antes del desarrollo de la teoría de distribuciones.

Heaviside y Dirac perfeccionaron sus cálculos considerando siempre aplicaciones específicas. Sin embargo, sus procedimientos prescindían de fundamentos matemáticos rigurosos. La teoría de distribuciones constituyó una base matemática sólida, ampliando su rango de estudio y suministrando herramientas que permitieron su aplicación en numerosas áreas.

Físicos e ingenieros han utilizado frecuentemente la delta de Dirac para la resolución de problemas relacionados con la transformada de Laplace en circuitos lineales, siempre mediante una aplicación directa. Schwartz salva las inconsistencias originadas del cálculo de la delta de Dirac, al entenderla como una distribución, involucrando espacios de funciones, convergencia, operadores...

En esta memoria estudiaremos la transformada integral de Laplace desde un punto de vista práctico, e introduciremos de manera elemental la teoría de distribuciones y su relación con las transformadas de Laplace y de Fourier. Para ello, se ha dividido el proyecto en tres capítulos.

En el primer capítulo se describen las propiedades clásicas de la transformación de Laplace. Se establecen los resultados fundamentales y las reglas operacionales de dicha transformada, se introducen las funciones de Heaviside y la delta de Dirac, y para acabar se muestran unos ejemplos de aplicación de la transformada de Laplace a circuitos eléctricos, destacando los diferentes métodos de aproximación al mismo problema entre los matemáticos y los ingenieros.

En el capítulo 2 se desarrolla brevemente la teoría de distribuciones, en concreto, conceptos como: funciones prueba, espacio de distribuciones, convergencia de distribuciones, derivación de distribuciones... destacando uno de los resultados más importantes de la teoría de distribuciones, que toda distribución es infinitamente derivable. Se termina este capítulo demostrando que la delta de Dirac, como función, está mal definida, y que solo tiene sentido si la consideramos como una distribución.

Finalmente, en el capítulo 3 y aprovechando la relación existente entre las transformaciones de Fourier y de Laplace, se define esta última en el espacio de distribuciones, se comparan los resultados distribucionales con los clásicos del capítulo 1 (abscisa de convergencia, región de convergencia, unicidad, analiticidad...) y se deduce rigurosamente la transformada de Laplace de la delta de Dirac.

1

Resultados clásicos de la transformación de Laplace

1.1. Introducción

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos espacios de funciones. Una transformada entre dichos espacios es una aplicación

$$\begin{aligned} T : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{G} \\ f \ &\mapsto \ Tf = g \end{aligned}$$

que a cada función f del primer espacio le hace corresponder una función g del segundo. Por ejemplo, si $Tf = f^2 - 3f + 8$, y $x^2 \in \mathcal{F}$, su imagen será $g(x) = x^4 - 3x^2 + 8$. En particular, cuando el mecanismo para calcular la imagen se obtiene integrando la función dada contra una función conocida $K(x, y)$, denominada núcleo, sobre cierto intervalo I, es decir,

$$(Tf)(y) = F(y) = \int_I K(x, y) f(x)\ dx \tag{1.1}$$

se dice que T es una transformación integral del núcleo $K(x, y)$. El intervalo I puede ser finito, infinito o todo $\mathbb{R}$, incluso puede ser un camino complejo.

Según el núcleo y el intervalo I que comparezcan en (1.1), resultan distintas transformaciones. Así se tiene

$$\begin{array}{lll}
I = (0, \infty) & , K(t, s) = e^{-st} & : \text{transformación de Laplace} \\
I = (0, \infty) & , K(x, s) = x^{s-1} & : \text{transformación de Mellin} \\
I = (-\infty, \infty) & , K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ixy} & : \text{transformación de Fourier} \\
I = (0, \infty) & , K(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos xy & : \text{transformación de Fourier-coseno} \\
I = (0, \infty) & , K(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen} xy & : \text{transformación de Fourier-seno} \\
I = (0, \infty) & , K(x, y) = \sqrt{xy}\ J_\nu(xy) & : \text{transformación de Hankel}
\end{array}$$

En esta última, $J_\nu(z)$ denota la función de Bessel de primera clase y orden ν.

El objetivo de esta memoria es el estudio de la transformación integral de Laplace desde un punto de vista práctico, tratando de justificar, de una forma lo más sencilla posible, las manipulaciones (no siempre rigurosas, pero sí efectivas) que hacen los ingenieros, los físicos, los matemáticos aplicados..., al abordar y solucionar diferentes problemas.

En concreto, en este primer capítulo se presenta un resumen de las principales propiedades y reglas operacionales de la transformación de Laplace. Conviene recordar que esta transformación es muy versátil y, sin duda, la que tiene un mayor número de aplicaciones. Si conocemos la transformada de Laplace $F(s)$ de una función dada $f(t)$, se puede calcular inmediatamente la transformada de Laplace de $f(at+b)$, $e^{-\alpha t}f(t)$, $t^n f(t)$,..., donde $a, b, n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, en términos de $F(s)$. Incluso operaciones como derivar o integrar $f(t)$ se convierten en productos de $F(s)$ por potencias de s. Precisamente esta conversión de derivadas en simples productos algebraicos es lo que explica la utilidad de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

Finalizaremos este capítulo mostrando cómo proceden los ingenieros y físicos en la resolución de ciertos problemas relativos a circuitos eléctricos, resaltando la falta de rigor matemático en muchos de los pasos que dan y tratando de aportar posibles justificaciones.

1.2. Definición y ejemplos. Resultados fundamentales

Definición 1.2.1. Sea f una función real definida en $(0, \infty)$. Se denomina *transformada de Laplace de f* a la función

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt \tag{1.2}$$

donde $s \in \mathbb{C}$, siempre que esta integral exista. En tal caso diremos que f es *transformable Laplace*. En las aplicaciones es habitual poner

$$f(t) \bullet\!\!-\!\!\circ\ F(s)$$

para indicar que la función f en el espacio del tiempo tiene por imagen la función compleja F en el s-espacio.

Nota. Si la función f tomara valores complejos, se entenderá que f es transformable Laplace si lo son sus partes real e imaginaria.

Primeramente veamos algunas condiciones que aseguran la existencia de la integral (1.2).

Teorema 1.2.2. ***(Teorema de existencia)*** *Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ de modo que $e^{-ct}f(t) \in L(0,\infty)$, es decir, es absolutamente integrable en $(0,\infty)$. Entonces existe la transformada de Laplace de f para todo $s \in \mathbb{C}$, $Re\, s \geq c$.*

Demostración. Puesto que $|e^{ia}| = 1$, para todo $a \in \mathbb{R}$, este aserto sigue inmediatamente de que, si $Re\, s \geq c$, se tiene

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-(Re\, s - c)t} |e^{-ct} f(t)|\ dt \leq \int_0^\infty e^{-ct} |f(t)|\ dt$$

□

Ejemplo 1.2.3. La función

$$u(t) = \begin{cases} 0\ , si\ \ t \leq 0 \\ \\ 1\ , si\ \ t > 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

se denomina función escalón unidad o función de Heaviside, por lo cual también se denota por $H(t)$. Su transformada de Laplace es

$$(\mathcal{L}\ u)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s}$$

si, y solo si, $Re\, s > 0$.

Ejemplo 1.2.4. Si $f(t) = e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, sigue que

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\ dt = \frac{1}{s-\alpha}$$

siempre que $Re\, s > Re\, \alpha$

Ejemplo 1.2.5. Al calcular las transformadas de Laplace de las funciones $\operatorname{sen} \alpha t$ y $\cos \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{C}$, surgen integrales cíclicas, que se calculan integrando por partes dos veces para obtener

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} \alpha t)(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2} \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}(\cos \alpha t)(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2} \tag{1.5}$$

cuando $Re\, s > |Im\, \alpha|$

Ejemplo 1.2.6. Sea

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} 1\ ,\ \ t \in (a,b) \\ \\ 0\ ,\ \ t \notin (a,b) \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. Su transformada de Laplace es

$$(\mathcal{L}\ u_{a,b})(s) = \int_a^b e^{-st}\ dt = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$. Nótese que, en $s = 0$, el segundo miembro se define por continuidad, asignándole el valor $b - a$.

Ejemplo 1.2.7. Si $f(t) = e^{t^2}$, resulta que

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{t^2}\ dt = \int_0^T e^{t(t-s)}\ dt + \int_T^\infty e^{t(t-s)}\ dt$$

Obsérvese que, cualquiera que sea $s \in \mathbb{C}$, es posible encontrar siempre $T > 0$ de modo que $Re\,(t - s) = t - Re\, s > 0$, para todo $t > T$, por lo que no existe esta integral. Esta función, pues, no es integrable Laplace.

Definición 1.2.8. El menor valor de c para el que existe la integral (1.2) se denomina *abscisa de convergencia de la función* f y se representa por α_f.

Nota. La abscisa de convergencia divide el plano complejo en dos semiplanos, el derecho ($Re\, s > \alpha_f$) en el que la transformada converge, y el izquierdo ($Re\, s < \alpha_f$) en el cual diverge, separados por la recta vertical $Re\, s = \alpha_f$, sobre la cual puede ocurrir de todo: hay convergencia en todos sus puntos, no converge en ninguno o converge en unos y diverge en otros. Recuerda el comportamiento de las series potenciales, que convergen, en general, en un intervalo abierto, en cuyos extremos puede darse cualquier posibilidad: converge en los dos puntos, diverge en los dos, o converge en uno y diverge en el otro.

En el Ejemplo 1.2.3 es $\alpha_f = 0$ y el semiplano de convergencia es $Re\, s > 0$; en el Ejemplo 1.2.6 es $\alpha_f = -\infty$, ya que la transformada de Laplace converge cualquiera que sea $s \in \mathbb{C}$; en cambio, en el Ejemplo 1.2.7 es $\alpha_f = +\infty$, lo que indica que la integral no converge nunca.

Las funciones $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ y $g(t) = \frac{1}{1+t}$ son paradigmáticas. En la primera, $\alpha_f = 0$ y la recta vertical $Re\, s = 0$ forma parte de su dominio de convergencia, es decir, la integral converge para $Re\, s \geq 0$. En el segundo, también $\alpha_f = 0$, pero en $s = 0$ la integral diverge claramente, si bien converge en el resto de puntos de la recta vertical $Re\, s = 0$; ciertamente, para $s = iy$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, se tiene que

$$\int_0^\infty e^{-iyt} \frac{1}{1+t}\ dt = \int_0^\infty \frac{\cos yt}{1+t}\ dt - i \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} yt}{1+t}\ dt$$

que converge, por cuanto las dos integrales del segundo miembro convergen.

Teorema 1.2.9. ***(Analiticidad)*** *La transformada de Laplace es una función analítica en el interior de su semiplano de convergencia, $Re\, s > \alpha_f$, es decir,* *admite derivadas de todos los órdenes. Estas se obtienen derivando bajo el signo integral, esto es,*

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)\ dt\ , \qquad n = 0, 1, 2...$$

Obsérvese que

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\ \{(-t)^n f(t)\} \tag{1.6}$$

Demostración. Pongamos, para $Re\ s > \alpha_f$,

$$\varphi(\lambda, s) = \int_0^\lambda e^{-st} f(t)\ dt$$

Integrando por partes, con $Re\ s > Re\ s_1 > \alpha_f$, en

$$(s - s_1) \int_0^\infty e^{-(s-s_1)t} \varphi(t, s_1)\ dt = \left[-e^{-(s-s_1)t} \varphi(t, s_1)\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-(s-s_1)t} e^{-s_1 t} f(t)\ dt = (\mathcal{L}\ f)(s)$$

ya que los términos entre corchetes se anulan. Se ha establecido otra expresión de la transformación de Laplace

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s) = (s - s_1) \int_0^\infty e^{-(s-s_1)t} \varphi(t, s_1)\ dt \tag{1.7}$$

conocida en algunos libros como Teorema Fundamental de la teoría de la transformación integral de Laplace [3].

Ya estamos en condiciones de probar nuestro teorema. En el caso $n = 1$ hay que ver que

$$F'(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\ dt$$

Para ello hemos de comprobar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\ dt \tag{1.8}$$

Si derivamos formalmente en (1.7), se obtiene

$$\varPsi(s) = \int_0^\infty e^{-(s-s_1)t} \left[1 - (s - s_1)t\right] \varphi(t, s_1)\ dt \tag{1.9}$$

por lo que, en lugar de (1.8), verificaremos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \varPsi(s) \tag{1.10}$$

En virtud de (1.7) podemos escribir

$$\triangle_f(s,h) = \frac{F(s+h)-F(s)}{h} - \Psi(s) = \int_0^\infty e^{-(s-s_1)t}(e^{-ht}-1)\,\varphi(t,s_1)\;dt$$
$$+\,(s-s_1)\int_0^\infty e^{-(s-s_1)t}\left(t-\frac{1-e^{-ht}}{h}\right)\varphi(t,s_1)\;dt$$

Por el Teorema 1.2.2 sigue que $\varphi(t,s_1)$ está acotada, pues la integral de Laplace converge en s_1, $Re\,s_1 > \alpha_f$. Elijamos ahora el número positivo

$$\xi = \frac{1}{3}(Re\,s - \alpha_f) > 0$$

y tomemos $s_1 = \alpha_f + \xi$. Ello entraña que $Re\,(s-s_1) = 2\xi$, por lo que, para cierta constante $K>0$, sigue que

$$|\Delta_f(s,h)| \leq K\int_0^\infty e^{-2\xi t}\left|e^{-ht}-1\right|\;dt + 2\xi K\int_0^\infty e^{-2\xi t}\left|t-\frac{1-e^{-ht}}{h}\right|\;dt$$

Ahora bien, por el desarrollo en serie de Taylor,

$$\left|e^{-ht}-1\right| = \left|-\frac{ht}{1!}+\frac{(ht)^2}{2!}-\frac{(ht)^3}{3!}+\ldots\right| \leq |h|\,t\left(1+|h|\,t+\frac{(|h|\,t)^2}{2!}+\ldots\right)$$
$$= |h|\,te^{\xi t}$$

si tomamos $|h|<\xi$. Análogamente se concluye que

$$\left|t-\frac{1-e^{-ht}}{h}\right| \leq |h|\,t^2e^{\xi t}$$

Por tanto,

$$|\Delta_f(s,h)| \leq K\,|h|\int_0^\infty e^{-\xi t}(1+2\xi t)t\;dt \;\longrightarrow 0,\;\text{si } h\longrightarrow 0$$

En consecuencia, se infiere de (1.10) que

$$F'(s) = \Psi(s) \tag{1.11}$$

Integrando por partes en

$$\begin{aligned}-(s-s_1)\int_0^\infty e^{-(s-s_1)t}t\varphi(t,s_1)\;dt &= \left[e^{-(s-s_1)t}t\varphi(t,s_1)\right]_0^\infty \\ &\quad-\int_0^\infty e^{-(s-s_1)t}\left[\varphi(t,s_1)+te^{-s_1t}f(t)\right]\;dt \\ &= -\int_0^\infty e^{-(s-s_1)t}\varphi(t,s_1)\;dt \\ &\quad-\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\;dt\end{aligned} \tag{1.12}$$

ya que $Re\, s > Re\, s_1 > \alpha_f$ y se tiene la identidad

$$t\varphi(t,s_1) = \int_0^t \left[\varphi(u,s_1) + ue^{-s_1 u} f(u)\right] \, du$$

Teniendo en cuenta (1.12) en (1.9) se concluye que

$$\Psi(s) = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t) \, dt$$

que es (1.8). Por inducción sobre n se deduce el caso general. □

Dos funciones diferentes pueden tener la misma transformada de Laplace. Es el caso, por ejemplo, de las funciones

$$f(t) = 1 \;, \qquad t > 0$$

y

$$g(t) = \begin{cases} 1 \;, & t > 0, t \neq 2, t \neq 3 \\ 2 \;, & t = 2 \\ 5 \;, & t = 3 \end{cases}$$

cuyas transformadas de Laplace son, respectivamente,

$$F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s) = \frac{1}{s} \quad \text{y} \quad G(s) = (\mathcal{L}\ g)(s) = \frac{1}{s} \;, \qquad Re\, s > 0$$

Esto es, $F(s) = G(s)$, para todo $s \in \mathbb{C}$, $Re\, s > 0$ pero $f(t) \neq g(t)$.

Definición 1.2.10. Una función $n(t)$ se llama *nula* si es integrable en cualquier intervalo finito de $(0,\infty)$, tal que

$$\int_0^t n(u) \, du = 0 \;, \qquad \forall t \geq 0$$

Calculemos su transformada de Laplace:

$$\int_0^T e^{-st} n(t) \, dt = e^{-sT} \int_0^T n(u) \, du + s \int_0^T e^{-st} \int_0^t n(u) \, du \, dt = 0$$

tras integrar por partes y tener en cuenta la definición anterior. Así pues, haciendo que $T \longrightarrow \infty$, se obtiene

$$(\mathcal{L}\ n)(s) = \int_0^\infty e^{-st} n(t) \, dt = 0$$

Se puede establecer

Teorema 1.2.11. ***(Unicidad)*** *Dos funciones originales cuyas transformadas de Laplace o imágenes son idénticas en el dominio común de convergencia, difieren a lo más en una función nula.*

Nota. El anterior aserto equivale al siguiente

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s) = 0 \Longrightarrow f(t) \text{ es una función nula.}$$

En el caso de que f sea continua en $(0, \infty)$, seguiría que $f(t) \equiv 0$, $t > 0$.

El siguiente resultado, que no demostraremos, recoge una propiedad clásica de las transformadas de Laplace: si $F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)$, $Re\ s > \alpha_f$, se tiene que $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$.

Teorema 1.2.12. *Si* $(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s)$ *converge en* $s_0 \in \mathbb{C}$*, entonces* $F(s)$ *tiende hacia cero cuando, en la región angular* $|arg(s - s_0| \leq w < \frac{\pi}{2}$*,* s *tiende a* ∞*.*

Más difícil resulta establecer el siguiente teorema, que nos limitaremos a enunciar.

Teorema 1.2.13. ***(Inversión)*** *Si*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$$

converge absolutamente en $Re\ s > \alpha$ *y* $f(x)$ *es de variación acotada en cierto entorno de* $x = t$*, se verifica*

$$(\mathcal{L}^{-1}\ F)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)\ ds = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} \tag{1.13}$$

para todo $c > \alpha$*. Si* $f(x)$ *es continua en* $x = t$*, el último miembro de (1.13) vale* $f(t)$*.*

Nota. La integración de la fórmula de inversión se realiza a lo largo de una recta vertical compleja, siendo esta integral independiente de c con tal que dicha recta permanezca en el dominio de convergencia. Ello quiere decir que la integral a lo largo de la recta que va desde $c_1 - i\infty$ a $c_1 + i\infty$, y de $c_2 - i\infty$ a $c_2 + i\infty$, con $c_1 > \alpha$, $c_2 > \alpha$, valen lo mismo.

1.3. Reglas operacionales

Quizás la de Laplace sea la transformación integral más rica en reglas operacionales. En lo que sigue, cuando se escriba $(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s)$ se debe entender que f es una función que admite transformada de Laplace en cierto semiplano derecho (f es transformable Laplace). Si se opera en varias funciones transformables Laplace, se sobreentenderá que la operación es válida en el semiplano derecho común a todas ellas.

Resumimos a continuación algunas propiedades y reglas operacionales:

a) *Linealidad.* Sean f y g funciones transformables Laplace. Entonces $f+g$ y λf, donde λ es cualquier constante real o compleja, son transformables Laplace y se verifica una sencilla consecuencia de la linealidad de la integral

$$(\mathcal{L}(f+g))(s) = F(s) + G(s) = (\mathcal{L}\ f)(s) + (\mathcal{L}\ g)(s)$$

$$(\mathcal{L}(\lambda f))(s) = \lambda F(s) = \lambda(\mathcal{L}\ f)(s)$$

b) *Semejanza.* Si f es transformable Laplace y $(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s)$, se tiene para todo $a > 0$ que

$$(\mathcal{L}\ f(at))(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

En efecto,

$$(\mathcal{L}\ f(at))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(at)\ dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}v} f(v)\ dv = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

Análogamente se obtiene, para todo $c > 0$,

$$F(cs) = \frac{1}{c}\left(\mathcal{L}\ f\left(\frac{t}{c}\right)\right)(s)$$

es decir,

$$(\mathcal{L}^{-1}\ F(cs))(t) = \frac{1}{c} f\left(\frac{t}{c}\right)$$

c) *Traslación.* Si f es transformable Laplace y $(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s)$, para todo $b > 0$, se cumple que

$$(\mathcal{L}\ f(t-b)u(t-b))\,(s) = e^{-bs} F(s)$$

donde $F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)$ y $u(t)$ representa la función del Ejemplo 1.2.3. Por definición, y efectuando el cambio $v = t - b$,

$$(\mathcal{L}\ f(t-b)u(t-b))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t-b)u(t-b)\ dt = \int_b^\infty e^{-st} f(t-b)\ dt$$
$$= e^{-bs}\int_0^\infty e^{-sv} f(v)\ dv = e^{-bs}F(s)$$

De forma similar, con d complejo cualquiera,

$$F(s+d) = (\mathcal{L}(e^{-dt} f(t))(s)$$

esto es,

$$(\mathcal{L}^{-1}\ F(s+d))(t) = e^{-dt} f(t)$$

d) La transformada de Laplace y la derivación. Supongamos que $f \in C^n([0,\infty))$, que $f^{(k)}$ es transformable Laplace ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) y que

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f^{(k)}(t) = 0 \ , \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

en el semiplano de convergencia. En estas hipótesis

$$(\mathcal{L}\ f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - s^n f(0) - s^{n-1} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \tag{1.14}$$

donde $F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)$. Ciertamente, para $n = 1$, sigue que

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\ f'(t))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\ dt = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st} f(t)\ dt \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

ya que la expresión entre corchetes se anula cuando $t \to \infty$ por hipótesis. Como estas también se cumplen para $f''(t)$, reiterando el resultado anterior,

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}\ f''(t))(s) &= (\mathcal{L}(f'(t))') = s(\mathcal{L}\ f'(t))(s) - f'(0) = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

Por inducción sobre n se llega al resultado general.

Nota. En el caso particular de que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, la fórmula (1.14) se reduce a

$$(\mathcal{L}\ f^{(n)}(t)(s) = s^n F(s) = s^n (\mathcal{L}\ f(t))(s) \tag{1.15}$$

La fórmula (1.15) manifiesta que una operación complicada, como es la derivación, se traduce en el espacio imagen en una simple operación algebraica: la multiplicación de $F(s)$ por una potencia de s de igual exponente al orden de derivación. Por otra parte, la fórmula (1.14) evidencia que la transformación de Laplace es idónea para resolver problemas de Cauchy (o de valores iniciales) planteados mediante ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Como se ve en dicha fórmula, los datos iniciales se incorporan al transformar el problema dado.

e) La transformada de Laplace y la integración. Supongamos que f está definida y es continua en $[0,\infty)$. Asúmase que, además, f es transformable Laplace y que $\lim_{t\to\infty} e^{-st} If(t) = 0$. Se tiene entonces que

$$(\mathcal{L}\ If(t))(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s}(\mathcal{L}\ f(t))(s) \tag{1.16}$$

donde $F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)$ e $If(t)$ denota el operador integración

$$If(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau \tag{1.17}$$

Veamos la prueba. Por definición, e integrando por partes,

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right)\, dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right)\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} f(t)\, dt$$
$$= \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

que es (1.16). Si iteramos n veces, $n \in \mathbb{N}$, el operador integral

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{x_{n-1}} \cdots \int_0^{x_2} \int_0^{x_1} f(x)\, dx\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_{n-1}$$

bajo similares restricciones al caso $n = 1$, se obtiene

$$(\mathcal{L}\ I^n f(t))(s) = \frac{F(s)}{s^n} = \frac{(\mathcal{L}\ f)(s)}{s^n} \tag{1.18}$$

Nota. Las fórmulas (1.16) y (1.18) demuestran que integrar en el primer espacio (el del tiempo) se transforma en un sencillo cociente algebraico (en el s-espacio)

Nota. Podríamos preguntarnos qué ocurre si en el espacio del tiempo dividimos una función $f(t)$ por una potencia de t.
Sea

$$\frac{f(t)}{t} = g(t)$$

es decir,

$$f(t) = tg(t) \tag{1.19}$$

Si suponemos que se cumplen los requisitos precisos y procedemos formalmente, al aplicar la transformación de Laplace a ambos miembros de (1.19) y tener presente (1.6), se deduce

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = -(\mathcal{L}\ (-t)g(t))(s) = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}\ g)(s)$$

es decir, con nuestra notación habitual,

$$F(s) = -\frac{d}{ds}G(s)$$

Integrando

$$G(s) = -\int_\infty^s F(\sigma)\, d\sigma = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma$$

concluimos que

$$\left(\mathcal{L}\ \frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma \tag{1.20}$$

Ello sugiere definir en el espacio imagen el operador integración

$$\mathcal{I}F(s) = \int_{\infty}^{s} F(\sigma)\, d\sigma$$

Sin mucho rigor, lo que nos indica (1.20) es que

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\ \mathcal{I}F(s)\right)(t) = \frac{f(t)}{t}$$

Iterando el proceso

$$\left(\mathcal{L}^{-1}\ \mathcal{I}^n F(s)\right)(t) = \frac{f(t)}{t^n} \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.21}$$

1.4. Producto de convolución

Se ha visto en el apartado anterior que la suma de funciones en el espacio del tiempo se corresponde en el s-espacio con la suma de sus imágenes. Es obvio que ello no ocurre con el producto, pero cabría preguntarse qué operación hay que definir entre dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ para que su transformada de Laplace se corresponda con el producto algebraico $F(s)\cdot G(s)$ de sus imágenes. La respuesta la veremos a continuación.

Definición 1.4.1. Se define el *producto de convolución*, o abreviadamente, la *convolución* de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ mediante

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \ , \qquad t > 0 \tag{1.22}$$

Obsérvese que si $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ y $g(t) = |1-t|^{-\frac{1}{2}}$, no existe la convolución para todo $t > 0$. En efecto,

$$(f * g)(1) = \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}}\, |1-(1-\tau)|^{-\frac{1}{2}}\ d\tau = \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau}$$

Ello nos obliga a restringir el conjunto de funciones en que (1.22) tenga sentido siempre.

Definición 1.4.2. La *clase* $\mathcal{F}$ está formada por las funciones f absolutamente integrables en $(0, \infty)$ y acotadas en todo intervalo finito $0 < a \leq t \leq b$ que no contenga el origen.

Teorema 1.4.3. ***(Teorema de convolución)*** *Supongamos que $f(t)$ y $g(t)$ pertenecen a la clase $\mathcal{F}$ y que $F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)$ y $G(s) = (\mathcal{L}\ g)(s)$ convergen absolutamente. Entonces, se tiene que $(\mathcal{L}\ (f * g)(t))(s)$ converge absolutamente y se verifica*

$$(\mathcal{L}\ f * g)(s) = F(s)G(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)(\mathcal{L}\ g)(s) \tag{1.23}$$

Demostración. Fijado $t > 0$ y dado que $f, g \in \mathcal{F}$, existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$|f(\tau)| \leq c_1 \ , \ \ |g(\tau)| \leq c_2 \ , \qquad \frac{t}{2} \leq \tau \leq t$$

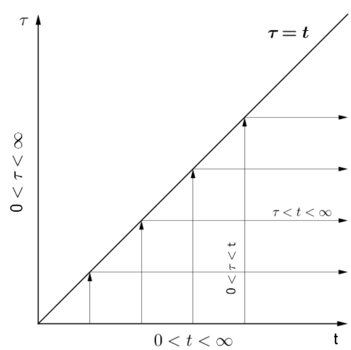
Consecuentemente

$$\int_0^{\frac{t}{2}} |f(\tau)g(t-\tau)| \ d\tau \leq c_2 \int_0^{\frac{t}{2}} |f(\tau)| \ d\tau$$
$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} |f(\tau)g(t-\tau)| \ d\tau \leq c_1 \int_0^{\frac{t}{2}} |g(u)| \ du$$

lo que implica que $f * g$ existe siempre en $\mathcal{F}$. Por otra parte, cambiando el orden de integración en

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\ f * g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-st} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau\ dt \\
&= \int_0^\infty f(\tau) \left(\int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau)\ dt \right)\ d\tau \\
&= \int_0^\infty f(\tau) \int_0^\infty e^{-s(u+\tau)} g(u)\ du\ d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\ d\tau \int_0^\infty e^{-su} g(u)\ du = F(s)\, G(s)
\end{aligned}$$

□



Nota. A esta operación se le denomina producto de convolución porque $*$ verifica las propiedades habituales del producto algebraico: conmutatividad ($f*g = g*f$), asociatividad ($(f*g)*h = f*(g*h)$), distributividad de $*$ respecto de la suma ($f*(g+h) = f*g + f*h$),... Pero normalmente, en la literatura, se refiere a $*$ como convolución, sin más.

Nota. De igual forma a como procedimos al inicio de esta sección, podríamos preguntarnos a qué operación en el s-espacio corresponde el producto algebraico $f(t) \cdot g(t)$ de dos funciones f y g en el espacio del tiempo. Procediendo formalmente, de acuerdo con el Teorema 1.2.13,

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}(f(t)g(t)))(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)g(t)\ dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\sigma t} F(\sigma)\ d\sigma \right) g(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma) \int_0^\infty e^{-(s-\sigma)t} g(t)\ dt\ d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma) G(s-\sigma)\ d\sigma
\end{aligned}
$$

Ello sugiere definir la convolución compleja de dos funciones $F(s)$ y $G(s)$ del espacio imagen, que denotaremos por "$\circ$", mediante

$$
(F \circ G)(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma) G(s-\sigma)\ ds
$$

siempre que esta integral exista.

1.5. Aplicaciones

1.5.1. Circuitos eléctricos

En el dominio del tiempo, un elemento de un circuito eléctrico (un resistor, un capacitor o un inductor) se expresa por la relación entre el voltaje $v(t)$ y la corriente $i(t)$. Así, por la ley de Ohm, en un resistor se tiene que $v(t) = R\, i(t)$, donde R representa la resistencia. O lo que es lo mismo

$$
R = \frac{v(t)}{i(t)} \tag{1.24}
$$

En cambio, en el s-dominio se definirá la impedancia mediante

$$
Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \tag{1.25}
$$

es decir, como el cociente de las transformadas de Laplace del voltaje y de la corriente, respectivamente, $V(s) = (\mathcal{L}\ v(t))(s)$ e $I(s) = (\mathcal{L}\ i(t))(s)$. De (1.24) sigue que

$$
v(t) = R\, i(t)
$$

donde suponemos que la resistencia R es constante. Esta igualdad se convierte, al aplicar la transformación de Laplace, en

$$V(s) = R\,I(s)$$

por lo cual, y a la vista de (1.25), se tiene

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R \tag{1.26}$$

Podemos, pues, afirmar que en el s-dominio, el elemento equivalente a un resistor es una resistencia R asociada a una corriente $I(s)$ y a una diferencia de potencial $V(s)$.

Por otra parte, en un inductor de inductancia constante L sin corriente inicial (o sea $i(0) = 0$), se satisface la relación

$$v(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \tag{1.27}$$

entre potencial y corriente. Vía la transformación de Laplace, al aplicar (1.14) se llega en el s-espacio a

$$V(s) = L[sI(s) - i(0)] = sL\,I(s)$$

de donde

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = sL \tag{1.28}$$

En otras palabras, en el s-dominio el elemento equivalente a un inductor es la impedancia sL. Si fuera $i(0) = i_0 \neq 0$, se tendría $V(s) = sL\,I(s) - L\,i_0$ y, por tanto,

$$I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i_0}{s} \tag{1.29}$$

Por último, en un capacitor cuya diferencia de potencial inicial es nula, se cumple

$$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$

donde C representa la capacitancia. Aplicando Laplace, esta expresión se transforma en

$$I(s) = C[sV(s) - v(0)] = sC\,V(s)$$

por lo cual

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{sC} \tag{1.30}$$

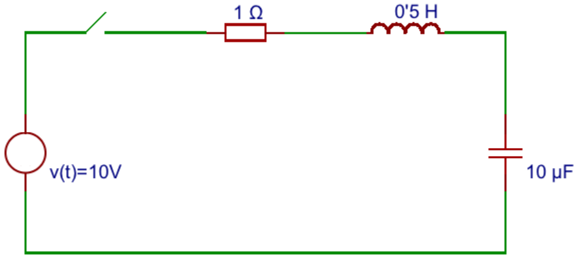
En el caso de que $v(0) = v_0 \neq 0$, resultaría

$$I(s) = C[sV(s) - v(0)] = sC\,V(s) - C\,v_0$$

de donde se deduce que

$$V(s) = \frac{1}{sC}\,I(s) + \frac{v_0}{s} \tag{1.31}$$

Ejemplo 1.5.1. Veamos, en un caso práctico sencillo, cómo procedería un ingeniero eléctrico al resolver el circuito en serie de la figura



Hay que determinar la corriente $i(t)$, medida en amperios, en términos del tiempo. Un ingeniero consideraría inmediatamente el circuito equivalente en el s-espacio y aplicaría luego las leyes de los circuitos eléctricos. En virtud de las consideraciones anteriores, la impedancia total es

$$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$$

Entonces

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{v_0}{s}}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

Sustituyendo $v_0 = 10V$, $R = 1\Omega$, $L = 0'5H$ y $C = 10\mu F = 10^{-5}F$, se tiene

$$I(s) = \frac{20}{s^2 + 2s + 2\cdot 10^5} = \frac{20}{(s+1)^2 + 2\cdot 10^5 - 1}$$

Si antitransformamos a fin de obtener la corriente $i(t)$ en el espacio inicial, a tenor de las correspondencias que podemos encontrar en las tablas de [4] o [5], se concluye que

$$i(t) = \frac{20}{(2\cdot 10^5 - 1)^{\frac{1}{2}}}\,e^{-t}\,\mathrm{sen}\left[(2\cdot 10^5 - 1)^{\frac{1}{2}}\,t\right]$$

Los matemáticos estamos más acostumbrados a plantear la ecuación diferencial que rige el circuito, a saber,

$$L\,\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\,\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,q(t) = v(t)$$

para la carga $q = q(t)$, o bien

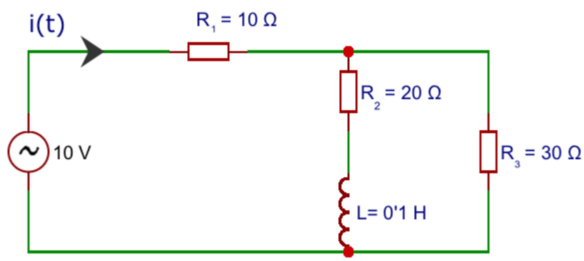
$$L\,\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\,\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,i(t) = v'(t)$$

para encontrar la corriente. En nuestro caso, teniendo presente que $v(t) = 10V$, esta última ecuación adopta la forma

$$i''(t) + 2\,i'(t) + 2\cdot 10^5\,i(t) = 0$$

con los datos iniciales $i(0) = 0$, $i'(0) = 20$

Ejemplo 1.5.2. Determinar la corriente $i(t)$ del circuito de la figura sabiendo que en el instante inicial se le aplica una fuerza electromotriz constante de $10V$



En lugar del circuito en el dominio del tiempo, trabajaremos en el s-dominio. Obsérvese que R_2 y L están en serie, y su composición, $R_2 + L$, en paralelo con R_3. Entonces, la impedancia $Z^*(s)$ resultante es

$$\frac{1}{20 + 0'1s} + \frac{1}{30} = \frac{50 + 0'1s}{600 + 3s} = \frac{1}{Z^*(s)}$$

Y la impedancia total

$$Z(s) = 10 + Z^*(s) = 10 + \frac{600 + 3s}{50 + 0'1s} = \frac{1100 + 4s}{50 + 0'1s}$$

Así pues, de (1.25) y teniendo en cuenta que $V(s) = (\mathcal{L}\ v)(s) = (\mathcal{L}\ 10)(s) = \frac{10}{s}$, se infiere que

$$I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{\frac{10}{s}}{\frac{1100+4s}{50+0'1s}} = \frac{500+s}{s(4s+1100)} = \frac{5}{11}\,\frac{1}{s} - \frac{9}{44}\,\frac{1}{s+275}$$

Retornando ahora al espacio del tiempo con ayuda de las tablas de [4] o [5], se obtiene

$$i(t) = \frac{5}{11} - \frac{9}{44}\,e^{-275t}$$

que nos da la (intensidad de) corriente en cualquier instante $t > 0$.

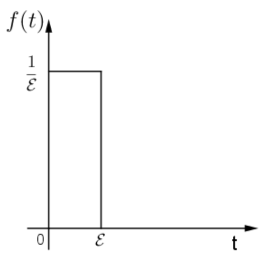
1.5.2. La función impulso unidad o función de Dirac

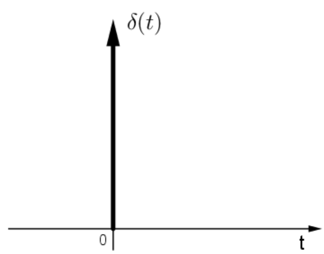
Los ingenieros y físicos aplicados manipulan, con tanta efectividad como falta de rigor, una función muy peculiar, que se define así

$$\begin{aligned} &\delta(t) = 0 \ , \ t \neq 0 \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ dt = 1 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Por la teoría de integración, el segundo requisito es incompatible con el primero. Para justificar de alguna manera, y sin salir de un cálculo matemático clásico y elemental, lo que se acaba de escribir, consideremos un pulso rectangular de amplitud $\varepsilon > 0$ y tamaño $\frac{1}{\varepsilon}$, es decir, la función

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & , t > \varepsilon \ \ o \ \ t < 0 \end{cases}$$





Obsérvese que a medida que ε se aproxima a cero, $f_\varepsilon(t)$ se va haciendo cada vez mayor, pero siempre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(t)\ dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\ dt = 1$$

que es el área de este pulso rectangular. Por tanto, cuando $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, intuitivamente podemos concebir que el límite nos da una idea de la supuesta "función" *delta de Dirac*: mientras que se preserva el área en el valor 1, el límite se concentra en el origen y el tamaño (la altura del rectángulo) se hace infinitamente grande. Resumiendo

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} f_\varepsilon(t) = \delta(t) \tag{1.33}$$

de manera que, en el límite, se tiene un impulso infinito en el origen de área 1. Por esta razón se conoce también como función impulso unidad.

Por otra parte, no hay ninguna dificultad en calcular la transformada de Laplace de las funciones $f_\varepsilon(t)$:

$$(\mathcal{L}\ f_\varepsilon(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_\varepsilon(t)\ dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon}\ e^{-st}\ dt = \frac{1}{s}\ \frac{1-e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} \tag{1.34}$$

Si admitimos (1.33), parece natural esperar que, al tomar límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$ en (1.34), se obtenga la transformada de la delta de Dirac. Efectuándolo, se llega a que

$$(\mathcal{L}\ \delta)(s) = 1 \tag{1.35}$$

El resultado (1.35) contradice un aserto clásico de la transformación de Laplace, el Teorema 1.2.12, en virtud del cual toda transformada de Laplace tiende a cero cuando $s \longrightarrow \infty$

Nota. La delta de Dirac resulta muy cómoda y útil a la hora de expresar, en un modelo matemático, cuándo se aplica una fuerza, un voltaje... instantáneo. Por ejemplo, a un circuito eléctrico se le aplica un voltaje de 5 V en el instante $t = 0$ (en el resto, $v(t) = 0$, $t > 0$). Se expresaría así: 5 $\delta(t)$. Si se hubiese aplicado en el instante $t = 7$ segundos, hubiésemos indicado 5 $\delta(t-7)$.

Ejemplo 1.5.3. Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \delta(t-\pi) \\ \\ x(0) = 0\ \ ,\ \ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Si ponemos $X(s) = (\mathcal{L}\ x(t))(s)$ y tenemos en cuenta que, por la propiedad 1.3 *c)*, se verifica que $(\mathcal{L}\ \delta(t-\pi))(s) = e^{-\pi s}$, la aplicación de la transformación de Laplace convierte el problema dado en la ecuación algebraica

$$s^2 X(s) + 2sX(s) + 2X(s) = e^{-\pi s}$$

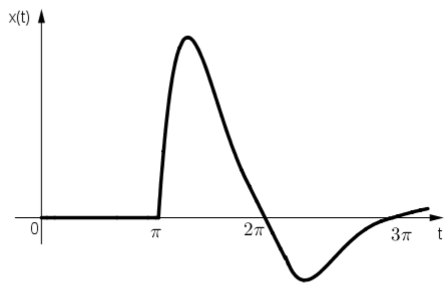
cuya solución es

$$X(s) = e^{-\pi s} \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Invirtiendo este resultado con la ayuda de las tablas ([4], [5]) y la citada propiedad, se concluye que

$$x(t) = e^{-(t-\pi)}\,\mathrm{sen}(t-\pi)H(t-\pi) = \begin{cases} 0 & , 0 \le t < \pi \\ e^{-(t-\pi)}\,\mathrm{sen}(t-\pi) & , \quad t \ge \pi \end{cases}$$

donde H representa la función (1.3), siendo su representación gráfica



Las condiciones iniciales son homogéneas y no existe excitación externa hasta $t = \pi$, por lo cual no hay respuesta del sistema en el intervalo $0 < t < \pi$. El impulso en $t = \pi$ segundos produce una respuesta que perdura indefinidamente, aunque decae exponencialmente.

Ejemplo 1.5.4. En un circuito RLC en serie, se aplica en el instante $t = 0$ un impulso de magnitud $1V$. Hasta entonces la carga en el capacitor es cero culombios y la corriente en el circuito es también de cero amperios. Hallar el modelo matemático. Resolverlo cuando $L = 1H$, $R = 10\Omega$ y $C = 0'01F$.

Aplicando las leyes de Kirchhoff, se deriva el modelo matemático

$$L\,\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\,\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,q(t) = v(t)$$

donde $q = q(t)$ denota la carga eléctrica en el instante t. En nuestro caso, se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{d^2q(t)}{dt^2} + 10\,\dfrac{dq(t)}{dt} + 100\,q(t) = \delta(t) \\ q(0) = 0 \ , \ \ q'(0) = i(0) = 0 \end{cases}$$

Si ponemos $Q(s) = (\mathcal{L}\ q)(s)$ y aplicamos Laplace, resulta el problema transformado

$$s^2\,Q(s) + 10s\,Q(s) + 100\,Q(s) = 1$$

cuya solución es

$$Q(s) = \frac{1}{s^2 + 10s + 100}$$

Invirtiendo ([4], [5]) se obtiene la carga en cualquier instante $t > 0$

$$q(t) = \frac{1}{5\sqrt{3}}\ e^{-5t}\, \mathrm{sen}(5\sqrt{3}\ t)$$

1.5.3. Cálculo operacional

Oliver Heaviside (1850-1925, Reino Unido) fue un ingeniero eléctrico, físico y matemático inglés, al que se puede considerar el padre del moderno Cálculo Operacional, en el que la derivada se considera y manipula como un ente algebraico.

Ejemplo 1.5.5. Acaso la primera vez que se utilizó este método fue cuando Heaviside determinó la intensidad de corriente $i(t)$ de un circuito regido por la ecuación

$$L\ \frac{di(t)}{dt} + R\ i(t) = V\ , \qquad t > 0 \tag{1.36}$$

donde la fuerza electromotriz V, la inductancia L y la resistencia R son constantes del circuito. Si D representa el operador derivada, se puede escribir

$$(LD + R)\, i(t) = V$$

La solución la obtiene, no considerando la anterior expresión como una ecuación diferencial, sino como una sencilla ecuación algebraica, cuya solución se obtiene despejando

$$i(t) = \frac{1}{LD + R}\ V$$

Después Heaviside manipula el segundo miembro, llegando a desarrollar la expresión sin sentido $\frac{1}{LD+R}$ en una serie de potencias de $\frac{1}{D}$, como sigue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{LD+R}\ V &= \frac{1}{LD}\ \frac{1}{(1+\frac{R}{L}\frac{1}{D})}\ V = \frac{V}{L}\ \frac{1}{D}\left(1 - \frac{R}{L}\ \frac{1}{D} + \frac{R^2}{L^2}\ \frac{1}{D^2} + \dots\right)(1) \\
&= \frac{V}{L}\ \frac{1}{D}\left[1 - \frac{R}{L}\left(\frac{1}{D}\right)(1) + \frac{R^2}{L^2}\left(\frac{1}{D^2}\right)(1) + \dots\right] \\
&= \frac{V}{L}\ \frac{1}{D}\left(1 - \frac{R}{L}\ t + \frac{R^2}{L^2}\ \frac{t^2}{2!} - \frac{R^3}{L^3}\ \frac{t^3}{3!} + \dots\right) \\
&= \frac{V}{L}\ \frac{1}{D}\ e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{V}{L}\int_0^t e^{-\frac{R}{L}\tau}\ d\tau
\end{aligned}$$

Deduce así la solución

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \tag{1.37}$$

A pesar de que la validez matemática de los pasos seguidos es discutible, se puede comprobar fácilmente que (1.37) satisface la ecuación (1.36)

Ejemplo 1.5.6. Determinar una solución particular de la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes

$$2x''(t) + 2x'(t) + 3x(t) = t^2 + 2t - 1 \tag{1.38}$$

Si, como en el ejemplo anterior, ponemos $D = \frac{d}{dt}$, formalmente podemos escribir

$$(2D^2 + 2D + 3)x(t) = t^2 + 2t - 1 \tag{1.39}$$

Despejando de ahí, conseguiríamos una solución particular

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2D^2 + 2D + 3}\,(t^2 + 2t - 1) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{3}D - \frac{2}{9}D^2 + \dots\right)(t^2 + 2t - 1) \\ &= \frac{1}{3}(t^2 + 2t - 1) - \frac{2}{9}\,D(t^2 + 2t - 1) - \frac{2}{27}\,D^2(t^2 + 2t - 1) + \dots \end{aligned} \tag{1.40}$$

serie que se anula a partir del cuarto término, ya que $D^n(t^2 + 2t - 1) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Queda, por consiguiente

$$x(t) = \frac{1}{3}(t^2 + 2t - 1) - \frac{2}{9}(2t + 2) - \frac{2}{27}(2) = \frac{t^2}{3} + \frac{2}{9}t - \frac{25}{27}$$

Resulta muy difícil digerir tal cantidad de pasos dados sin ningún rigor matemático: qué sentido tiene el cociente de operadores, cómo interpretar un desarrollo en serie de potencias de un operador... Pero lo que asombraba en aquella época, es que el método funcionaba. Heaviside recibió muchas críticas y algunos trabajos suyos fueron rechazados para publicar en las revistas de su época, acusándole de falta de rigor. Hubo de pasar un cierto tiempo hasta que los matemáticos consiguieran explicar los cálculos de Heaviside. La primera justificación se logró mediante la utilización de la transformación de Laplace.

En efecto, sea $X(s) = (\mathcal{L}\ x(t))(s)$. Puesto que nos piden una solución particular, busquemos, en aras de la simplificación, la solución particular que verifica que $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Aplicando Laplace a (1.38) se llega a que

$$(2s^2 + 3s + 3)X(s) = (\mathcal{L}(t^2 + 2t - 1))(s)$$

igualdad que coincide exactamente con (1.39). Es absolutamente lícito desarrollar una función racional en serie de potencias. En este caso, si $|s| < \max\{|r_1|, |r_2|\}$, donde r_1 y r_2 denotan las raíces de la ecuación de segundo grado $2s^2+3s+3 = 0$, todos los pasos que siguen son matemáticamente correctos

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{2s^2+3s+3}\,(\mathcal{L}(t^2+2t-1))(s) \\
&= \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}\,s-\frac{2}{9}\,s^2+\dots\right)(\mathcal{L}(t^2+2t-1))(s)
\end{aligned}
$$

que es el mismo desarrollo que vemos en (1.40), con la diferencia de que en lugar del operador D, comparece la variable independiente s. Recordemos ahora, fórmulas (1.14) y (1.15), que multiplicar en el segundo espacio por s, s^2, s^3... significa en el espacio del tiempo derivar una, dos, tres... veces. Luego, invirtiendo esta última expresión, en el espacio del tiempo se tendría

$$
x(t) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{3}\,D-\frac{2}{9}\,D^2+\dots\right)(t^2+2t-1)
$$

que es de donde se partía, si se usaba el método de Heaviside.

Nota. A pesar de las críticas, hemos intentado explicar que los cálculos de Heaviside son correctos. Basta interpretar el producto por potencias negativas de D: $\frac{1}{D}=D^{-1}$, $\frac{1}{D^2}=D^{-2}$... con integraciones, en correcta analogía a como multiplicar por potencias negativas de s: $\frac{1}{s}=s^{-1}$, $\frac{1}{s^2}=s^{-2}$... se corresponde en el espacio del tiempo con la realización de integraciones. Así mismo, los productos por D, D^2... coinciden con multiplicaciones por s, s^2... respectivamente, y esto último, en el espacio del tiempo, se traduce en derivar una, dos... veces.

Nota. Considerar la delta de Dirac como una función no resulta muy afortunado y necesita una justificación matemática de mayor calado, que será el objetivo del siguiente capítulo.

1.5.4. Cálculo fraccionario

La transformada de Laplace también se presta para dar una sencilla introducción al Cálculo Fraccionario. No estamos acostumbrados a derivar o integrar media vez una función, o $\sqrt{3}$ veces, o $\sqrt{3}+2i$ veces... De hecho, en la fórmula (1.18)

$$
(\mathcal{L}\ I^n f(t))(s) = \frac{F(s)}{s^n}
$$

donde, recordemos, $If(t)$ denota el operador integración

$$
If(t) = \int_0^t f(\tau)\ d\tau
$$

se presupone que $n = 0, 1, 2\dots$ ¿Tiene sentido $I^\alpha f(t)$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$, o incluso, $\alpha \in \mathbb{C}$? No, pero sí lo tiene el segundo miembro de la anterior expresión

$$
\frac{F(s)}{s^\alpha}\ , \qquad s \neq 0
$$

pues es el cociente de dos funciones complejas. Ello nos permitiría escribir

$$(\mathcal{L}\ I^{\alpha} f(t))(s) = \frac{F(s)}{s^{\alpha}} \tag{1.41}$$

y, por la fórmula de inversión,

$$I^{\alpha} f(t) = \left(\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s^{\alpha}}\right)\right)(t) \tag{1.42}$$

siempre que ello sea posible matemáticamente. En tal caso, la expresión (1.42) definiría la integral fraccionaria de $f(t)$ de orden α.

Ejemplo 1.5.7. Primero, por (1.41), y después, recurriendo a las tablas de [4] y [5], sigue que

$$\left(\mathcal{L}\ I^{\frac{3n}{n+1}} t\right)(s) = \frac{(\mathcal{L}\ t)(s)}{s^{\frac{3n}{n+1}}} = \frac{1}{s^{\frac{3n}{n+1}+2}}$$

esto es,

$$I^{\frac{3n}{n+1}} t = \frac{t^{\frac{4n+1}{n+1}}}{\Gamma\left(\frac{5n+2}{n+1}\right)} \tag{1.43}$$

expresión que nos suministra la derivada de orden $\alpha = \frac{3n}{n+1}$ de la función $f(t) = t$. Así, tenemos:
Para $n = 1$:

$$I^{\frac{3}{2}} t = \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}$$

Para $n = 2$:

$$I^{\frac{6}{3}} t = I^{2} t = \frac{t^{3}}{\Gamma(4)} = \frac{t^{3}}{3!}$$

que es ciertamente el resultado de integrar t dos veces

$$I^{2} t = \int_{0}^{t}\int_{0}^{u} \tau\ d\tau = \int_{0}^{t} \frac{u^{2}}{2}\ du = \frac{t^{3}}{6}$$

Para $n = 3$:

$$I^{\frac{9}{4}} t = \frac{t^{\frac{13}{4}}}{\Gamma\left(\frac{17}{4}\right)}$$

Por último, si hacemos que $n \longrightarrow \infty$ en (1.43), se tiene formalmente

$$I^{3} t = \frac{t^{4}}{\Gamma(5)} = \frac{t^{4}}{4!}$$

que coincide con la integración de t tres veces.

2

Introducción elemental de la teoría de distribuciones

2.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es introducir de una forma sencilla y elemental, sin recurrir a los espacios vectoriales topológicos, la teoría de distribuciones.

Como vimos en el capítulo primero, la transformación integral de Laplace permite justificar ciertas manipulaciones, no muy ortodoxas matemáticamente hablando, que efectúan los matemáticos aplicados, físicos, ingenieros... con éxito a pesar de todo, y que conciernen básicamente al Cálculo Operacional y al Cálculo Fraccionario. Pero hay otras cuestiones, conceptualmente más complejas, que no se pueden explicar con esta poderosa herramienta que es la transformada de Laplace. Nos referimos, en concreto, a la delta de Dirac, que se trata frecuentemente en los textos técnicos como una función, y a la convergencia de ciertas sucesiones de funciones hacia entes matemáticos que no son funciones.

En el apartado 2.2 se introduce el espacio de funciones prueba $\mathcal{D}$ y la noción de convergencia en el mismo. En la sección 2.3 se define el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$, distinguiendo entre distribuciones regulares y singulares. Entre estas últimas encaja perfectamente la delta de Dirac, que se define rigurosamente como una distribución. Se analizan las principales operaciones con distribuciones (suma, producto por un escalar, traslación...), así como los conceptos de conjunto de anulación y soporte de una distribución. Finaliza esta sección con el estudio de la derivación distribucional. Se establece que toda distribución es infinitamente derivable, resultado insólito si se compara con el Análisis clásico, en el que existen funciones que no son derivables en ningún punto, incluso aunque sean continuas en todos ellos. Cuando se consideran las distribuciones n-dimensionales, se define de igual manera sus derivadas parciales, definición que puede extenderse a derivadas parciales de cualquier orden, resultando sorprendente, en comparación con los resultados clásicos para funciones, que no importe el orden de derivación.

En el último parágrafo, el 2.4, se trata la convergencia en $\mathcal{D}'$, demostrando que el límite de una sucesión de distribuciones que converja, lo hace a otra distribución. Análogamente, se verifica que si una serie de distribuciones converge, su suma es una nueva distribución. Muy llamativo, en contraste con los resultados clásicos sobre series de funciones, es que si una serie distribucional converge, se puede derivar término a término las veces que se quiera.

2.2. El espacio de funciones prueba $\mathcal{D}$

Definición 2.2.1. *El espacio de funciones prueba* $\mathcal{D}$ está constituido por las funciones complejas $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, infinitamente derivables que se anulan fuera de cierto intervalo finito.

Esta definición se puede restringir a funciones $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, en cuyo caso diríamos $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. O bien se puede extender a funciones $\varphi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Normalmente trabajaremos con funciones $\varphi(t)$ de una variable real y cuando $I = \mathbb{R}$ escribiremos $\mathcal{D}$ en lugar de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Con las operaciones habituales de suma de funciones y producto de una función por un escalar, $\mathcal{D}$ es un espacio vectorial.

Ejemplo 2.2.2. Es fácil comprobar que la función

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \geq 1 \\ \\ e^{\frac{1}{t^2-1}} & , \quad |t < 1| \end{cases}$$

pertenece a $\mathcal{D}$. También la función definida a partir de ella

$$\gamma_\alpha(t) = \frac{\xi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \xi\left(\frac{t}{\alpha}\right)\, dt} \quad , \qquad \alpha > 0$$

que tiene la propiedad de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\alpha(t)\, dt = 1$$

Definición 2.2.3. Diremos que la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ *converge en* $\mathcal{D}$ *a cero* si

(i) $\varphi_n(t) = 0$ fuera mismo intervalo, para todo $n \in \mathbb{N}$.
(ii) $D^k\varphi_n(t)$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

La sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ *converge en* $\mathcal{D}$ si

(i′) $\varphi_n(t) = 0$, $t \notin J$ (J intervalo fijado).
(ii′) $D^k\varphi_n(t)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ cuando $n \longrightarrow \infty$, para todo $k = 0, 1, 2 \ldots$

Nota. Pongamos $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$. Por la anterior definición y [1, p. 383], en virtud de la convergencia uniforme, se infiere que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\varphi(t) = 0$, $t \in J$. Luego, $\varphi \in \mathcal{D}$. Es decir, el espacio $\mathcal{D}$ es cerrado para la convergencia.

De aquí se concluye que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}$ si, y solo si, $(\varphi_n - \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero en $\mathcal{D}$.

Ejemplo 2.2.4. La sucesión

$$\left(\frac{\xi(t)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0 \quad \text{en } \mathcal{D}$$

ya que todos los elementos de la misma se anulan fuera del intervalo $(-1,1)$ y

$$\left|D^k\left(\frac{\xi(t)}{n}\right)\right| = \left|\frac{\xi^{(k)}(t)}{n}\right| \leq \frac{C_k}{n} \longrightarrow 0 \ , \qquad n \longrightarrow \infty$$

uniformemente en $t \in \mathbb{R}$. En cambio,

$$\left(\frac{\xi\left(\frac{t}{n}\right)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

no converge en $\mathcal{D}$, pues los elementos de la sucesión se anulan fuera de distintos intervalos de la forma $(-n,n)$.

Definición 2.2.5. *El soporte* de una función prueba $\varphi \in \mathcal{D}$ se representa y define como la clausura del conjunto

$$sop\ \varphi = \overline{\{t \in \mathbb{R} / \varphi(t) \neq 0\}}$$

En el Ejemplo 2.2.2 se tiene que $sop\ \xi = [-1,1]$ mientras que $sop\ \gamma_\alpha = [-\alpha,\alpha]$.

2.3. El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$

2.3.1. El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$

Definimos sobre $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto f(\varphi) = \langle f, \varphi\rangle \end{aligned}$$

Definición 2.3.1. f es un *funcional lineal* sobre $\mathcal{D}$ cuando se cumple

$$\langle f, \varphi_1 + \varphi_2\rangle = \langle f, \varphi_1\rangle + \langle f, \varphi_2\rangle \qquad , \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$$

$$\langle f, \lambda\varphi\rangle = \lambda \langle f, \varphi\rangle \qquad , \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Diremos que el funcional f es continuo sobre $\mathcal{D}$ si, cualquiera que sea la sucesión de funciones prueba $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja en $\mathcal{D}$ hacia φ, se tiene que la sucesión numérica

$$(\langle f, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge al número $\langle f, \varphi \rangle$. En el caso en que f sea lineal, f es continuo en $\mathcal{D}$ si, y solo si,

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, \varphi_n \rangle = 0$$

cualquiera que sea la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a cero en $\mathcal{D}$.

Definición 2.3.2. *Una distribución* es cualquier funcional lineal y continuo sobre $\mathcal{D}$. El conjunto de todas las distribuciones se representa por $\mathcal{D}'$, es decir,

$$\mathcal{D}' = \{f / f : \mathcal{D} \to \mathbb{C} \ \ , \ f \text{ lineal y continuo}\}$$

A $\mathcal{D}'$ se le suele también llamar *espacio dual de* $\mathcal{D}$.

Sea $L_{loc}(\mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones que son integrables sobre cualquier intervalo finito. Se tiene que $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ genera una distribución en $\mathcal{D}'$ mediante

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\ dt \ \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D} \tag{2.1}$$

Es obvio que f es lineal. Para ver que es continuo, considérese que $(\varphi_n) \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}$, lo que implica, por la definición 2.2.3, que *sop* $\varphi_n = [a, b]$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y que $D^k\varphi_n(t)$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. En particular, dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de modo que para $n \in \mathbb{N}$, $n > \nu$, se tiene que

$$|\varphi_n(t)| < \varepsilon$$

independientemente de t. Por tanto,

$$|\langle f, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\ dt \right| \leq \varepsilon \int_a^b |f(t)|\ dt$$

es decir, $(\langle f, \varphi_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathbb{C}$. Así pues, el funcional f definido por (2.1) origina una distribución. A las distribuciones que admiten una representación integral de la forma (2.1) se les conoce como distribuciones regulares.

Dos funciones continuas f y g (y por tanto localmente integrables) que produzcan la misma distribución regular en $\mathcal{D}'$ han de ser idénticas. En efecto, supongamos que $f \not\equiv g$. Existe entonces al menos un punto x_0 tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$. Supongamos que $f(x_0) > g(x_0)$. Por continuidad sigue que $(f - g)(x) > 0$ para todo $x \in E(x_0)$, cierto entorno de x_0. Si tomamos $\varphi \in \mathcal{D}$, $\varphi(t) > 0$ y *sop* $\varphi \subset E(x_0)$, se tiene

$$\langle f, \varphi \rangle - \langle g, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - g(x)]\, \varphi(x)\ dx = \int_{E(x_0)} [f(x) - g(x)]\, \varphi(x)\ dx > 0$$

Luego, $\langle f, \varphi\rangle \neq \langle g, \varphi\rangle$, en contra de lo supuesto.

En particular, todos los elementos de $\mathcal{D}$ generan distribuciones regulares en $\mathcal{D}'$. Identificando $f \in \mathcal{D}$ con la distribución que produce en $\mathcal{D}'$ es como debe entenderse la inclusión $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.

Definición 2.3.3. ***(La delta de Dirac)*** Definimos el funcional

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \langle \delta(t), \varphi(t)\rangle = \varphi(0) \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D} \tag{2.2}$$

Es trivial ver que δ es lineal y continua en $\mathcal{D}$, por lo que $\delta \in \mathcal{D}'$. A esta distribución se le conoce como *delta de Dirac.*

Esta distribución no es regular, pues si lo fuera, de (2.2) se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)\ dt = \varphi(0) \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

En particular, si se toma $\varphi(t) = \xi\left(\frac{t}{a}\right)$, $a > 0$ (Véase Ejemplo 2.2.2), queda

$$\int_{-a}^{a} \delta(t)\ e^{\frac{a^2}{t^2-a^2}}\ dt = \frac{1}{e}$$

Pero el primer miembro se anula cuando $a \longrightarrow 0$, por lo que se llega a un absurdo. A esta clase de distribuciones se les llama singulares y no admiten representación integral como (2.1).

2.3.2. Propiedades y operaciones en $\mathcal{D}'$

Realizaremos a continuación un conjunto de definiciones:

a) Dos distribuciones $f, g \in \mathcal{D}'$ son iguales si

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle \ , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Dos distribuciones son iguales sobre el conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}$ cuando

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle \ , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D},\ sop\ \varphi \subset \Omega$$

Esta última definición recuerda la igualdad de dos funciones en un conjunto.

b) El conjunto de anulación de $f \in \mathcal{D}'$ se denota y define por

$$Nul(f) = \bigcup \Omega_j$$

donde Ω_j son abiertos tales que

$$\langle f, \varphi\rangle = 0 \ , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D},\ sop\ \varphi \subset \Omega_j$$

El conjunto $Nul(f)$ es un abierto. El soporte de $f \in \mathcal{D}'$ se define como el complementario de su conjunto de anulación.

$$sop\ (f) = \mathbb{R} \setminus Nul(f)$$

y es cerrado. Por ejemplo, según la definición 2.3.3,

$$Nul(\delta) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ya que, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ con $sop\ \varphi \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se tiene

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$$

Así pues, $sop\ \delta = \{0\}$. En cambio, $f(t) = t^2 \in L_{loc}(\mathbb{R})$, por lo que define una distribución regular en $\mathcal{D}'$ mediante (2.1). Ahora $Nul(f) = \emptyset$ y, por consiguiente, $sop\ (f) = \mathbb{R}$.

c) Si $f, g \in \mathcal{D}'$ definimos $f + g$ como sigue:

$$\langle f + g, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle \quad , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Análogamente, si $f \in \mathcal{D}'$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, definimos

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle = \alpha \langle\ f, \varphi \rangle \quad , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Fácilmente se ve que tanto $f + g$ como αf son operadores lineales y continuos sobre $\mathcal{D}$, esto es, se trata de distribuciones. El conjunto $\mathcal{D}'$, con las operaciones usuales suma de distribuciones y producto de una distribución por un escalar, es un espacio vectorial.

d) La definición de la traslación $f(t - \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, de una distribución viene sugerida por lo que pasa si $f(t-\tau)$ fuera una distribución regular. Entonces, se tendría, de acuerdo con (2.1),

$$\begin{aligned} \langle f(t - \tau), \varphi(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)\varphi(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi(u + \tau)\ du \\ &= \langle f(t), \varphi(t + \tau) \rangle \end{aligned}$$

efectuando el cambio $u = t - \tau$. En general, se define

$$\langle f(t - \tau), \varphi(t) \rangle = \langle f(t), \varphi(t + \tau) \rangle \quad , \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

Por ejemplo, según (2.2),

$$\langle \delta(t - \tau), \varphi(t) \rangle = \langle \delta(t), \varphi(t + \tau) \rangle = \varphi(t + \tau)_{|t=0} = \varphi(\tau)$$

e) Dada $f(t) \in \mathcal{D}'$, ¿cómo se define $f(at)$, $a > 0$, es decir, cómo se define la multiplicación de la variable independiente por una constante? De nuevo, considerar la situación en que $f(at)$ define una distribución regular da la respuesta

$$\langle f(at), \varphi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)\varphi(t)\ dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\varphi\left(\frac{u}{a}\right)\ du$$

tras realizar el cambio $u = at$. Luego, en general,

$$\langle f(at), \varphi(t)\rangle = \langle f(t), \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{t}{a}\right)\rangle \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

f) No siempre es posible definir el producto de dos distribuciones. Por ejemplo,

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \in L_{loc}(\mathbb{R})$$

y, en consecuencia, genera una distribución regular en $\mathcal{D}'$ mediante (2.1). Sin embargo, $f(t)f(t) = \frac{1}{|t|}$ y

$$\langle \frac{1}{|t|}, \varphi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{|t|}\ dt$$

que no converge en general. No obstante, sí tiene sentido el producto de $f \in \mathcal{D}'$ por una función $\psi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$. En efecto, se define

$$\langle \psi f, \varphi\rangle = \langle f, \psi\varphi\rangle \ , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Siendo obvia la linealidad, obsérvese que $\psi\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, *sop* $(\psi\varphi) \subseteq$ *sop* φ y, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}$, entonces $(\psi\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}$, lo cual entraña que $(\langle f, \psi\varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$, $n \longrightarrow \infty$, por la continuidad de f. Luego, ψf es un operador lineal y continuo, así que $\psi f \in \mathcal{D}'$.

2.3.3. Derivación de una distribución

En el Análisis clásico existen funciones localmente integrables que no son derivables en algunos puntos, funciones integrables que no son derivables en ningún punto e incluso funciones continuas en todo punto y derivables en ninguno. Estos comportamientos no se dan en $\mathcal{D}'$. Toda distribución f es infinitamente derivable.

Veamos cómo se define la derivada de una distribución $f \in \mathcal{D}'$. Si f' diera lugar a una distribución regular se tendría por (2.1)

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\ dt = \Big[f(t)\varphi(t)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\ dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(-\varphi'(t)\right)\ dt\end{aligned}$$

al integrar por partes y tener en cuenta que los términos entre corchetes se anulan, pues *sop* φ es un compacto. Esto sugiere la siguiente

Definición 2.3.4. La derivada primera f' de una distribución $f \in \mathcal{D}'$ es el funcional definido sobre $\mathcal{D}$ por

$$\langle f'(t), \varphi(t)\rangle = \langle f(t), -\varphi'(t)\rangle \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

Ejemplo 2.3.5. ¿Cuál es la derivada de la delta de Dirac?
Para todo $\varphi \in \mathcal{D}$, sigue

$$\langle \delta'(t), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t), -\varphi'(t)\rangle = -\varphi'(0)$$

Análogamente, y por reiteración,

$$\langle \delta''(t), \varphi(t)\rangle = \langle (\delta'(t))', \varphi(t)\rangle = \langle \delta'(t), -\varphi'(t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi''(t)\rangle = \varphi''(0)$$

Y, en general, para $n = 1, 2, \ldots$,

$$\langle \delta^{(n)}(t), \varphi(t)\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

Ejemplo 2.3.6. La función del Ejemplo 1.2.3

$$u(t) = H(t) = \begin{cases} 0\ , si \ \ t \leq 0 \\ \\ 1\ , si \ \ t > 0 \end{cases}$$

no es derivable. Es claro que $u = H \in L_{loc}(\mathbb{R})$, por lo que da lugar a una distribución regular en $\mathcal{D}'$. Entonces, en virtud de la Definición 2.3.4,

$$\begin{aligned} \langle H'(t), \varphi(t)\rangle &= \langle H(t), -\varphi'(t)\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} H(t)\varphi'(t)\ dt = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(t)\ dt \\ &= \Big[-\varphi(t)\Big]_0^{\infty} = \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi(t)\rangle \end{aligned}$$

ya que $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$. Hemos establecido que, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle H'(t), \varphi(t)\rangle = \langle \delta(t), \varphi(t)\rangle$$

Por la igualdad de distribuciones, se tiene en $\mathcal{D}'$ que

$$H'(t) = \delta(t)$$

Una función, como $H(t)$, que ni siquiera es continua, es infinitamente derivable y,

$$H^{(n)}(t) = \delta^{(n-1)}(t)\ , \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

al considerarla como distribución.

Teorema 2.3.7. *La derivada de una distribución es de nuevo otra distribución.*

Demostración. f' es un funcional lineal ya que, para todo $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ y cualesquiera que sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$, se obtiene por la Definición 2.3.4

$$\begin{aligned}\langle f', \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2\rangle &= \langle f, -(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)'\rangle = \langle f, -\alpha_1\varphi_1' - \alpha_2\varphi_2'\rangle \\ &= \langle f, -\alpha_1\varphi_1'\rangle + \langle f, -\alpha_2\varphi_2'\rangle = \alpha_1\langle f, -\varphi_1'\rangle + \alpha_2\langle f, -\varphi_2'\rangle \\ &= \alpha_1\langle f', \varphi_1\rangle + \alpha_2\langle f', \varphi_2\rangle\end{aligned}$$

Por otra parte, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{D}$, sigue que

$$(\langle f', \varphi_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} = (\langle f, -\varphi_n'\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

cuando $n \longrightarrow \infty$, por la continuidad de f. □

Teorema 2.3.8. *La derivación es una operación lineal y continua en $\mathcal{D}'$, esto es,*

(i) $D^k(f+g) = D^k f + D^k g$, $D^k(\alpha f) = \alpha D^k f$, *para* $f, g \in \mathcal{D}'$, $\alpha \in \mathbb{C}$ *y* $k = 0, 1, 2\dots$

(ii) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f$ *en* $\mathcal{D}'$, $n \longrightarrow \infty$, *entonces* $(D^k f_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow D^k f$ *en* $\mathcal{D}'$, $n \longrightarrow \infty$, *para* $k = 0, 1, 2\dots$

Demostración. La demostración de (i) es trivial. Para ver (ii), nótese que para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene

$$\langle D^k f_n, \varphi\rangle = \langle f_n, (-1)^k D^k\varphi\rangle \xrightarrow{(n\to\infty)} \langle f, (-1)^k D^k\varphi\rangle = \langle D^k f, \varphi\rangle$$

□

La Definición 2.3.4 se puede extender a distribuciones n-dimensionales, $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, originando las derivadas parciales de una distribución.

Definición 2.3.9. Sea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Se define la *derivada parcial de f respecto de t_i* mediante

$$\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \varphi\rangle = \langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial t_i}\rangle \ , \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

El Teorema 2.3.7 asegura que $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ sigue siendo una distribución. Además, repitiendo esta definición, se pueden introducir las derivadas parciales de cualquier orden.

Teorema 2.3.10. *El orden de derivación en una derivada parcial de orden superior se puede cambiar arbitrariamente sin que se modifique el resultado.*

Demostración. Estableceremos este aserto para las derivadas parciales mixtas de segundo orden. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i} \ , \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

En efecto, puesto que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es una función infinitamente derivable con derivadas parciales de todos los órdenes continuas, se cumple que [1, p. 119]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_i \partial t_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t_j \partial t_i} \tag{2.3}$$

Por tanto, según la Definición 2.3.9,

$$\begin{aligned}\langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}, \varphi \rangle &= \langle f, \frac{\partial^2}{\partial t_j \partial t_i} \varphi \rangle = \langle f, \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial t_j} \varphi \rangle = \langle f, -\frac{\partial}{\partial t_i} \left(-\frac{\partial}{\partial t_j} \varphi \right) \rangle \\ &= \langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, -\frac{\partial}{\partial t_j} \varphi \rangle = \langle \frac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_i}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

De aquí se infiere la validez de (2.3). □

Nota. En el Análisis clásico no se puede garantizar la validez de (2.3) en todas las situaciones [1, Teorema 6-20]. En la teoría de distribuciones no tienen sentido teoremas del tipo Schwarz, Young... pues se puede cambiar el orden de derivación arbitrariamente.

2.4. Convergencia en $\mathcal{D}'$

Definición 2.4.1. La sucesión de distribuciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{D}'$ si la sucesión numérica $(\langle f_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$, converge en el sentido ordinario. Denotamos

$$\langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f_n, \varphi \rangle \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

Es decir, la convergencia de la sucesión $(\langle f_n, \varphi \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ permite definir el funcional

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f_n, \varphi \rangle \end{aligned} \tag{2.4}$$

No resulta difícil establecer que [7, p. 37].

Teorema 2.4.2. *Si una sucesión de distribuciones $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathcal{D}'$, el funcional f dado por (2.4) también es una distribución, esto es, $f \in \mathcal{D}'$. En otras palabras, el espacio $\mathcal{D}'$ es cerrado respecto de la convergencia.*

Definición 2.4.3. La serie de distribuciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en $\mathcal{D}'$ si la sucesión de sumas parciales $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$F_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n \ , \qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

converge en $\mathcal{D}'$

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.4.2 es el siguiente

Teorema 2.4.4. *Si la serie de distribuciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en $\mathcal{D}'$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, entonces f es asimismo una distribución.*

Ejemplo 2.4.5. La sucesión de funciones $f_n(t) = \operatorname{sen} nt$ no tiene límite cuando $n \longrightarrow \infty$ y t se mueve en un conjunto continuo de valores, excepto si $t = 0$. Ahora bien, $f_n \in L_{loc}(\mathbb{R})$ por lo que origina una distribución regular

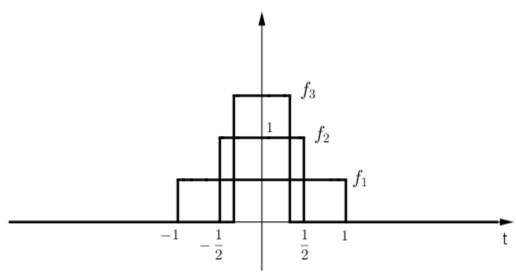
$$\begin{aligned}\langle f_n, \varphi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (\operatorname{sen} nt)\, \varphi(t)\ dt = \left[-\varphi(t)\frac{\cos nt}{n}\right]_{t\to-\infty}^{t\to\infty} + \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} (\cos nt)\, \varphi'(t)\ dt \\ &= \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{\infty} (\cos nt)\, \varphi'(t)\ dt \longrightarrow 0 = \langle 0, \varphi\rangle\end{aligned}$$

cuando $n \longrightarrow 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$. Luego, considerada como una sucesión de distribuciones, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sí converge y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sen} nt = 0 \qquad \text{en } \mathcal{D}'$$

Ejemplo 2.4.6. Sea $f_n(t)$, $n = 1, 2 \ldots$, definida por

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2} \ , & |t| < \frac{1}{n} \\ 0 \ , & |t| \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$



En el sentido clásico, esta sucesión de funciones converge y

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0 \ , \qquad t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$$

Sin embargo, como distribuciones regulares,

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,\varphi(t)\ dt = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(t)\ dt \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D} \tag{2.5}$$

Como $\varphi \in \mathcal{D}$, se puede poner

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\,\psi(t)$$

donde ψ es una función continua y, por tanto, acotada en cualquier compacto. Entonces, (2.5) se puede reescribir

$$\langle f_n, \varphi \rangle = \varphi(0) + \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t\,\psi(t)\ dt$$

Pero

$$\left| \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} t\,\psi(t)\ dt \right| \leq Cn\int_{0}^{\frac{1}{n}} t\ dt = \frac{C}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

siendo C cierta constante. Luego,

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \ , \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

Como sucesión de distribuciones, concluimos que, en $\mathcal{D}'$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \delta(t)$$

En este caso el límite funcional no coincide con el límite distribucional.

El término general de esta sucesión es similar a la función $f_\varepsilon(t)$ considerada en el apartado 1.5.2, en el cual se establecía de una forma intuitiva y sin rigor matemático el límite (1.33). Acabamos de demostrar que aquel resultado es correcto, siempre que interpretemos la convergencia en el sentido distribucional. Lo que se hizo en (1.33) es forzar la situación, pues se manipulaba la delta de Dirac como una función y se probaba que la sucesión de funciones $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ convergía a un ente que no era una función y que, además, estaba mal definido. En conclusión, la delta de Dirac no es una función, es una distribución que está rigurosamente introducida en la Definición 2.3.3.

Ejemplo 2.4.7. En muchos textos técnicos se ven expresiones como:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos wt\ dw = \delta(t) \tag{2.6}$$

que carecen de sentido y no tienen consistencia matemática. Pero si ponemos

$$g_\lambda(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \cos wt \; dw = \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{\pi t}$$

no existe, en general para todo $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda(t)$. Sin embargo, como distribuciones regulares, ya que $g_\lambda(t) \in L_{loc}(\mathbb{R})$, se tiene

$$\lim_{\lambda\to\infty} \langle g_\lambda(t), \varphi(t)\rangle = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\lambda t}{\pi t}\,\varphi(t)\;dt \;, \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

que es una integral tipo Dirichlet que vale [1, Teorema 15-14]

$$\lim_{\lambda\to\infty} \langle g_\lambda(t), \varphi(t)\rangle = \frac{1}{\pi}\,\pi\,\varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta(t), \varphi(t)\rangle$$

Así pues, $\lim_{\lambda\to\infty} g_\lambda(t) = \delta(t)$ en $\mathcal{D}'$.
En resumen, cuando vemos (2.6), hay que interpretarla en el sentido de la convergencia en $\mathcal{D}'$

Teorema 2.4.8. *Si la serie distribucional $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en $\mathcal{D}'$, digamos a $f \in \mathcal{D}'$, entonces la serie se puede derivar las veces que se quiera término a término, obteniéndose*

$$D^k\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} D^k f_n = D^k f \;, \qquad k = 0, 1, 2\ldots$$

donde la serie diferenciada converge de nuevo en $\mathcal{D}'$.

Demostración. Sea $S_n = \sum_{j=1}^{n} f_j$ la suma parcial n-ésima. Por hipótesis, $S_n \longrightarrow f$ en $\mathcal{D}'$, $n \longrightarrow \infty$, lo cual implica, en virtud del Teorema 2.3.8,

$$D^k S_n \longrightarrow D^k f \;\text{ en } \mathcal{D}'$$

es decir, puesto que S_n es una suma finita,

$$D^k S_n = \sum_{j=1}^{n} D^k f_j \longrightarrow D^k f$$

en $\mathcal{D}'$ cuando $n \longrightarrow \infty$. □

Nota. Compárese el conjunto de hipótesis que se precisan para derivar una serie funcional k veces [1, p. 385] con los requisitos del anterior teorema: basta que la serie de distribuciones converja para que se pueda derivar término a término las veces que se quiera.

3

La transformación distribucional de Laplace

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es presentar una introducción sencilla de la transformación de Laplace en el espacio $\mathcal{D}'$ de las distribuciones, que nos permita justificar algunas manipulaciones incorrectas realizadas en el capítulo 1. Y una de las formas más simples de hacerlo es aprovechando la relación de esta transformada con la de Fourier.

Por ello, en el segundo párrafo se define el espacio $\mathcal{S}'$ de las distribuciones de crecimiento lento, que está constituido por todos los funcionales lineales y continuos sobre el espacio $\mathcal{S}$ de funciones prueba de rápido decrecimiento en el infinito. Se analizan, por una parte, las conexiones entre los espacios $\mathcal{D}$ y $\mathcal{S}$ y, por otra, entre sus correspondientes duales $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{S}'$.

En la tercera sección se estudia la transformación de Fourier, primero, en el espacio $\mathcal{S}$ y, después, en el espacio de distribuciones $\mathcal{S}'$ como una extensión de cierta relación de Parseval. Se establece que la transformación de Fourier es un automorfismo sobre el espacio $\mathcal{S}'$, y se determina la relación existente entre una sucesión de distribuciones convergente en $\mathcal{S}'$ y la sucesión de sus transformadas de Fourier.

Finalmente, en el cuarto párrafo, se considera la transformación de Laplace en el espacio $\mathcal{D}'$, efectuando una comparación entre los resultados distribucionales y los clásicos obtenidos en el capítulo 1: abscisa de convergencia, región de convergencia, unicidad, analiticidad... Ya se está en condiciones de obtener rigurosamente la transformada de Laplace de la delta de Dirac, bien directamente, bien considerando una sucesión de distribuciones que converja a δ, para ver después a qué converge la sucesión de sus transformadas de Laplace.

3.2. El espacio $\mathcal{S}'$ de las distribuciones de crecimiento lento

Definición 3.2.1. $\mathcal{S}$ es el espacio de todas las funciones complejas $\varphi(t)$ infinitamente derivables en $\mathbb{R}$ tales que $\varphi(t)$ y todas sus derivadas decrecen a cero, cuando $|t| \longrightarrow \infty$, más rápidamente que cualquier potencia de $\frac{1}{|t|}$, es decir,

$$\mathcal{S} = \{\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}/\varphi \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}), \left|t^m D^k \varphi(t)\right| \leq C_{m,k}\}$$

donde $C_{m,k}$ son constantes que no dependen de t, y m, k representan enteros no negativos cualesquiera. Se dice que estas funciones son de *rápido decrecimiento*.

Es inmediato que, con las operaciones habituales, $\mathcal{S}$ es un espacio vectorial. Además, $\mathcal{D}$ es un subespacio propio de $\mathcal{S}$, ya que cualquier $\varphi(t) \in \mathcal{D}$ verifica que $\varphi(t) \equiv 0$ para todo t no perteneciente al *sop* φ, que es un conjunto acotado. Sin embargo, $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \mathcal{S}$, función que nunca se anula, lo cual implica que $\varphi \notin \mathcal{D}$. Así pues,

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$$

Se puede verificar que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}$ [7, p. 101].

Definición 3.2.2. Diremos que la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathcal{S}$ si:

(i) $\varphi_n \in \mathcal{S}$, $n = 1, 2 \ldots$
(ii) La sucesión $\left(t^m D^k \varphi_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en todo $\mathbb{R}$ ($\forall k, m$ enteros no negativos).

Es obvio que $\mathcal{S}$ es cerrado para la convergencia.

Definición 3.2.3. El espacio de los funcionales lineales y continuos sobre $\mathcal{S}$ es el espacio de las distribuciones de *lento crecimiento*, y se denota por $\mathcal{S}'$. Es decir, $f \in \mathcal{S}'$ si

$$\begin{aligned} f : \mathcal{S} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\mapsto \langle f, \varphi\rangle \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

entendiendo que f es <u>lineal</u> sobre $\mathcal{S}$ si, para todas las constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y cualesquiera $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, se tiene

$$\langle f, \alpha\varphi + \beta\psi\rangle = \alpha\langle f, \varphi\rangle + \beta\langle f, \psi\rangle$$

y que f es <u>continuo</u> si cualquiera que sea la sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$, se verifica que la sucesión numérica $(\langle f, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$.

Nota. Recordemos que una función $f(t)$ es de lento crecimiento si $|f(t)| \leq C|t|^k$, para cierto k, siendo $C > 0$ constante. Pues bien, toda función de lento crecimiento que sea $L_{loc}(\mathbb{R})$ genera una distribución regular en $\mathcal{S}'$ mediante

$$\langle f(t), \varphi(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\ dt \ , \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

En efecto, esta expresión tiene sentido porque

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\ dt\right| \leq C\int_{-\infty}^{\infty} |t|^k(1+t^2)\frac{|\varphi(t)|}{1+t^2}\ dt$$
$$\leq C(C_k + C_{k+2})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{1+t^2} < \text{constante}$$

Ahora la linealidad sigue de la del operador integración. Para ver la continuidad, sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$. De lo anterior se infiere que

$$|f(t), \varphi(t)| \leq C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t^n\varphi_n(t)| + |t^{n+2}\varphi_n(t)|}{1+t^2}\ dt \ \longrightarrow 0 \ , \qquad n \longrightarrow \infty$$

en virtud de la Definición 3.2.2. Por esta razón, en general, a todos los elementos de $\mathcal{S}'$ se le denominan distribuciones de crecimiento lento.

Nota. Como $\mathcal{D}$ es un subespacio denso de $\mathcal{S}$, resulta que $\mathcal{S}'$ es un subespacio del espacio $\mathcal{D}'$ de las distribuciones considerado en el capítulo 2. Además, la inclusión

$$\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

es propia, ya que

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2}\delta(t-n) \ , \qquad t \in \mathbb{R}$$

define una distribución de $\mathcal{D}'$. Ciertamente, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2}\varphi(n)$$

que en realidad es una sucesión finita, dado que $sop\,\varphi$ está acotado. Sin embargo, si tomamos $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \mathcal{S}$, se llega a que

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Luego, $f \notin \mathcal{S}'$. Hemos establecido así la cadena de inclusiones

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

Nota. En $\mathcal{S}'$ se pueden definir las mismas operaciones que en el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$ estudiado en el capítulo 2: suma de distribuciones de lento crecimiento, producto por una constante, traslación, multiplicación de la variable independiente por una constante positiva, convergencia, derivación...

3.3. La transformación integral de Fourier en el espacio $\mathcal{S}'$

Recordaremos primeramente la definición clásica de la transformación de Fourier. Existen muchas formas de hacerlo pero, como queremos compararla con la transformación de Laplace (1.2) estudiada en el capítulo 1, optaremos por considerar el par

$$F(w) = (\mathcal{F}f)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} f(t)\, dt \tag{3.1}$$

$$(\mathcal{F}^{-1}F)(t) = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} F(w)\, dw \tag{3.2}$$

Teorema 3.3.1. *La transformada de Fourier de cualquier elemento de $\mathcal{S}$ origina otro elemento de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$. Pongamos $\Phi(w) = (\mathcal{F}\varphi)(w)$ y verifiquemos que $\Phi \in \mathcal{S}$. En primer lugar, $\Phi(w)$ existe para todo $\varphi \in \mathcal{S}$, puesto que, de (3.1)

$$|F(w)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+t^2)|\varphi(t)|}{1+t^2}\, dt \leq C$$

$C > 0$ constante. Por el mismo razonamiento y al ser $\varphi \in \mathcal{S}$, es lícito derivar k-veces bajo el signo integral

$$\Phi^{(k)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^k e^{-iwt} \varphi(t)\, dt \tag{3.3}$$

Si integramos a continuación m-veces por partes en (3.3) y tenemos en cuenta que $\varphi(t)$ y sus derivadas son de rápido decrecimiento a cero cuando $|t| \longrightarrow \infty$, lo que conlleva la anulación de los términos no afectados por la integración, se obtiene

$$\Phi^{(k)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iwt}}{(iw)^m} \frac{d^m}{dt^m}\left[(-it)^k \varphi(t)\right]\, dt$$

de donde se deduce

$$\left|(iw)^m\, \Phi^{(k)}(w)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|D^m\left[t^k \varphi(t)\right]\right|\, dt < C_{m,k}$$

con $C_{m,k} > 0$ constante. Luego, $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ y $\left|w^m\, \Phi^{(k)}(w)\right| \leq C_{m,k}$, esto es, $\Phi \in \mathcal{S}$. $\square$

Cuando queremos especificar que $\varphi \in \mathcal{S}$ depende de una determinada variable, por ejemplo, x, escribimos $\mathcal{S}_x$. Así, las fórmulas (3.1) y (3.2) originan las aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: \ \mathcal{S}_t &\longrightarrow \mathcal{S}_w \\ \varphi(t) &\mapsto \varPhi(w) = (\mathcal{F}\varphi)(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\varphi(t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}: \ \mathcal{S}_w &\longrightarrow \mathcal{S}_t \\ \varPhi(w) &\mapsto \varphi(t) = (\mathcal{F}^{-1}\varPhi)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\varPhi(w)\, dw \end{aligned}$$

Además, si $(\mathcal{F}\varphi) \equiv 0$, $\varphi \in \mathcal{S}$, entonces $\varphi(t) \equiv 0$. Se puede demostrar que:

(i) $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son biyecciones de $\mathcal{S}$ en sí mismo.
(ii) $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son operadores lineales.
(iii) $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}^{-1}$ son operadores continuos, ya que si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$, $n \longrightarrow \infty$, entonces $(\varPhi_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\mathcal{F}\varphi_n)(w) \longrightarrow 0$ en $\mathcal{S}$, $n \longrightarrow \infty$.

En definitiva [7, p. 182-184].

Teorema 3.3.2. *La transformación de Fourier es un automorfismo sobre el espacio $\mathcal{S}$ de las funciones de rápido decrecimiento.*

Hay muchas formas de definir la transformada de Fourier de una distribución, dependiendo de qué relación de Parseval se utilice. Si se emplea la relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varPhi(w)\,\varPsi(w)\, dw = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\psi(-t)\, dt \ , \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{S}$$

donde $\varPhi = \mathcal{F}\varphi$ y $\varPsi = \mathcal{F}\psi$, se define la transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}'$ mediante

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}\varphi\rangle = 2\pi\,\langle f(t), \varphi(-t)\rangle \ , \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

Si partimos de la relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varPhi(w)\,\psi(w)\, dw = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\varPsi(t)\, dt$$

se justifica la siguiente

Definición 3.3.3. La transformada de Fourier de $f \in \mathcal{S}'$ viene dada por

$$\langle \mathcal{F}f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle \ , \qquad \varphi \in \mathcal{S}' \tag{3.4}$$

Se puede establecer, como consecuencia del Teorema 3.3.2,

Teorema 3.3.4. *La transformación de Fourier definida por (3.4) es un automorfismo sobre* $\mathcal{S}'$.

Nota. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{S}'$ que converge a f en $\mathcal{S}'$, se tiene que $f \in \mathcal{S}'$, es decir, $\mathcal{S}'$ es cerrado para la convergencia. Además, para todo $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle \mathcal{F} f_n, \varphi\rangle = \langle f_n, \mathcal{F}\varphi\rangle \longrightarrow \langle f, \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F} f, \varphi\rangle$$

Se ha verificado que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f$ en $\mathcal{S}'$, también $(\mathcal{F} f_n)_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{F} f$ en $\mathcal{S}'$, $n \longrightarrow \infty$.

En algunos casos, la definición (3.4) adopta una forma que recuerda mejor la definición clásica (3.1) de la transformación de Fourier. Se recoge en el siguiente

Teorema 3.3.5. *Si una distribución* $f \in \mathcal{S}'$ *tiene soporte acotado, su transformada de Fourier es infinitamente derivable y viene dada por*

$$(\mathcal{F} f)(w) = F(w) = \langle f(t), e^{-iwt}\rangle \tag{3.5}$$

cuyo segundo miembro hay que interpretarlo que vale

$$\langle f(t), \lambda(t) e^{-iwt}\rangle \tag{3.6}$$

donde $\lambda(t) \in \mathcal{D}$ *y* $\lambda(t) = 1$ *en un entorno del sop* f

Demostración. Conviene comentar que el valor (3.6) de (3.5) es independiente de la función $\lambda(t)$ que se tome, ya que dicho valor depende únicamente de lo que valga la función prueba $\varphi(t)$ en *sop* f [7, p. 30].

Esbozaremos la prueba. Para todo $\varphi \in \mathcal{S}$ se tiene, según (3.4),

$$\langle (\mathcal{F} f)(w), \varphi(w)\rangle = \langle f(t), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\varphi(w)\ dw\rangle = \langle f(t), \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\lambda(t)\varphi(w)\ dw\rangle \tag{3.7}$$

Se puede verificar, recurriendo a la linealidad de f y a las sumas de Riemann, que es factible intercambiar en (3.7) el funcional con la integral, obteniéndose

$$\begin{aligned}\langle (\mathcal{F} f)(w), \varphi(w)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \langle f(t), \lambda(t)e^{-iwt}\rangle\ \varphi(w)\ dw \\ &= \langle \langle f(t), \lambda(t)e^{-iwt}\rangle, \varphi(w)\rangle\ , \qquad \varphi \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

Luego, $(\mathcal{F} f)(w) = \langle f(t), \lambda(t)e^{-iwt}\rangle$, que es (3.5)-(3.6). □

3.4. La transformación distribucional de Laplace

Existen diferentes tipos de transformaciones integrales de Laplace:

(i) La bilateral

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt$$

(ii) La lateral por la derecha

$$(\mathcal{L}_R\ f)(s) = F_R(s) = \int_{T}^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt$$

(iii) La lateral por la izquierda

$$(\mathcal{L}_L\ f)(s) = F_L(s) = \int_{-\infty}^{T} e^{-st} f(t)\ dt$$

donde $T \in \mathbb{R}$ está fijado.

En el capítulo 1 consideramos el caso (ii) cuando $T = 0$, que es realmente la versión más conocida y utilizada. A fin de armonizar todas estas definiciones, además de las hipótesis del Teorema 1.2.2, asumimos que $f(t) \equiv 0$, para todo $t < 0$. Por otra parte, si escribimos $s = \sigma + iw$, resulta fácilmente que

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = (\mathcal{F}(e^{-\sigma t} f(t)))(s)\ , \qquad Re\ s = \sigma > c \tag{3.8}$$

expresión que conecta la transformada de Laplace con la de Fourier.

En lo que sigue, representaremos por $\mathcal{D}'_+$ al conjunto de las distribuciones $f \in \mathcal{D}'$ tales que $sop\, f \subset [0, \infty)$. Lo más natural, y lo primero que se nos ocurre, es definir la transformada de Laplace de $f \in \mathcal{D}'_+$ según

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s) = \langle f(t), e^{-st} \rangle \tag{3.9}$$

pero $e^{-st} \notin \mathcal{D}$, pues no se anula nunca, por lo que el segundo miembro de (3.9) carece de sentido.

Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-ct} f(t) \in \mathcal{S}'$ y que $\lambda(t)$ denote una función de $C^\infty(\mathbb{R})$ con soporte acotado por la izquierda y que valga 1 en un entorno del $sop\, f$. Entonces podemos reemplazar (3.9) por

$$(\mathcal{L}\ f)(s) = F(s) = \langle e^{-ct} f(t), \lambda(t) e^{-(s-c)t} \rangle \tag{3.10}$$

Obsérvese que $\lambda(t) e^{-(s-c)t} \in \mathcal{S}$ para $Re\, s > c$. Ahora (3.10) tiene sentido, ya que se aplica un elemento $e^{-ct} f(t) \in \mathcal{S}'$ a una función prueba de $\mathcal{S}$. Como se escribe (3.10) es como hay que interpretar (3.9), por la misma razón que (3.5)-(3.6) dan sentido a la transformación de Fourier. En este caso diremos que la distribución f es transformable Laplace.

Al menor valor de $c \in \mathbb{R}$ para el que $e^{-ct}f(t) \in \mathcal{S}'$ se le llama abscisa de convergencia y lo denotamos, como en el caso clásico, por α_f. Al semiplano $Re\ s > \alpha_f$ se le denomina región de convergencia.

La definición (3.10) es independiente del valor de $c > \alpha_f$ que se tome. En efecto, sea $Re\ s > a > c$. Entonces, el segundo miembro de (3.10) adopta la forma

$$\begin{aligned}\langle e^{-ct}f(t), \lambda(t)e^{-(s-c)t}\rangle &= \langle e^{(c-a)t}e^{-ct}f(t), e^{(a-c)t}\lambda(t)e^{-(s-c)t}\rangle \\ &= \langle e^{-at}f(t), \lambda(t)e^{-(s-a)t}\rangle\end{aligned}$$

Esta última expresión, en la que realmente se ha cambiado c por a, tiene sentido. Ciertamente, por una parte, $e^{-at}f(t) \in \mathcal{S}'$, ya que, para todo $\varphi \in \mathcal{S}$,

$$\langle e^{-at}f(t), \lambda(t)\,\varphi(t)\rangle = \langle e^{-ct}f(t), \lambda(t)e^{(c-a)t}\varphi(t)\rangle$$

donde, por hipótesis, $e^{-ct}f(t) \in \mathcal{S}'$ y $\lambda(t)e^{(c-a)t}\varphi(t) \in \mathcal{S}$, pues $c - a < 0$. Por otra parte, $\lambda(t)e^{-(s-a)t} \in \mathcal{S}$ al ser $Re\ s > a$.

Nota. No todas las distribuciones son transformables Laplace. Por ejemplo, la distribución regular $f(t) = H(t)e^{t^2}$, donde $H(t)$ viene dada en el Ejemplo 2.3.6, no lo es, ya que no existe ningún $c \in \mathbb{R}$ tal que $H(t)e^{(t^2-ct)} \in \mathcal{S}'$.

Nota. Conviene tener en cuenta que, aunque su rol sea el mismo, las abscisas de convergencia de una función y de una distribución no tienen exactamente igual significado. En el caso de las funciones (capítulo 1), dicha abscisa marca la convergencia de cierta integral; en el caso de una distribución, señala cuándo $e^{-ct}f(t) \in \mathcal{S}'$.

Enumeraremos a continuación, sin prueba, algunos resultados análogos a los clásicos.

(i) La relación entre las transformadas de Fourier y de Laplace de $f \in \mathcal{D}'_+$ sigue siendo
$$(\mathcal{L}\ f)(s) = (\mathcal{F}(e^{-\sigma t}f(t))(s)\ , \qquad Re\ s = \sigma > \alpha_f$$
(ii) Si $f, g \in \mathcal{D}'_+$ son distribuciones transformables Laplace y $\mathcal{L}\ f = \mathcal{L}\ g$ en alguna recta vertical $s = c + iw$ contenida en su región común de convergencia, entonces $f = g$ (Teorema de unicidad).
(iii) (Teorema de analiticidad) Si $f \in \mathcal{D}'_+$ y $F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)$, entonces $F(s)$ es una función analítica para $Re\ s > \alpha_f$ y
$$F^{(k)}(s) = \langle f(t), \frac{\partial^k}{\partial s^k}(e^{-st})\rangle = \langle (-t)^k f(t), e^{-st}\rangle\ , \qquad k = 0, 1, 2\ldots$$

Por último, establecemos el siguiente

Teorema 3.4.1. *Sea* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de distribuciones que satisface*

a) *sop* $f_n \subset [0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$
b) *Existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que la sucesión* $(e^{-ct}f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en* $\mathcal{S}'$ *a* $e^{-ct}f(t)$.

Entonces, la sucesión de transformadas de Laplace

$$(F_n(s))_{n\in\mathbb{N}} = (\mathcal{L}\ f_n)(s) \longrightarrow F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s) \ , \qquad n \longrightarrow \infty \ , \ \ Re\, s > c$$

Demostración. Nótese que $e^{-ct}f(t) \in \mathcal{S}'$, pues este espacio es cerrado para la convergencia. Luego, en virtud de (3.10), f es transformable Laplace, esto es, existe $F(s) = (\mathcal{L}\ f)(s)$, $Re\, s > c$. Así pues, a la vista de la nota de la página 44, sigue

$$\mathcal{L}\ f_n = \langle e^{-ct}f_n(t), \lambda(t)e^{-(s-c)t}\rangle \longrightarrow \langle e^{-ct}f(t), \lambda(t)e^{-(s-c)t}\rangle = \mathcal{L}\ f$$

Hemos establecido que $F_n = \mathcal{L}f_n \longrightarrow F = \mathcal{L}\ f$. □

Ejemplo 3.4.2. Ahora resulta fácil calcular la transformada de Laplace de la $\delta(t)$. Como $sop\,\delta = \{0\}$, es obvio que $e^{-ct}\delta(t) \in \mathcal{S}'$, para todo $c \in \mathbb{R}$. De acuerdo con (3.9)-(3.10), tenemos

$$(\mathcal{L}\ \delta)(s) = \langle e^{-ct}\delta(t), \lambda(t)e^{-(s-c)t}\rangle = \langle \delta(t), \lambda(t)e^{-st}\rangle = \lambda(t)e^{-st}\ _{|t=0} = 1$$

Así pues, $(\mathcal{L}\ \delta)(s) = 1$, para todo $s \in \mathbb{C}$, como se dedujo informalmente en (1.35).

Es más, si reescribimos la función $f_\varepsilon(t)$ considerada en 1.5.2 como sigue, con $n = 1, 2 \ldots$,

$$f_n(t) = \begin{cases} n & , 0 \le t < \frac{1}{n} \\ 0 & , t > \frac{1}{n} \ \ o\ \ t < 0 \end{cases}$$

se probó que $(f_n) \longrightarrow \delta$ en $\mathcal{D}'$ (Ver Ejemplo 2.4.6). Entonces, por el Teorema 3.4.1,

$$F_n(s) = (\mathcal{L}\ f_n)(s) = \frac{n}{s}\left(1 - e^{-\frac{s}{n}}\right) \longrightarrow 1 = (\mathcal{L}\ \delta)(s) \ , \qquad n \longrightarrow \infty$$

lo que justifica las manipulaciones realizadas en la sección 1.5.2.

Bibliografía

[1] T.M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1960.

[2] W.E. y R.C. DiPrima Boyce, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa, 1996.

[3] G. Doetsch, *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[4] I.N. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, 1979.

[5] M.R. Spiegel, *Transformadas de Laplace*, Colección Schaum, McGraw-Hill, México, 1996.

[6] J. Williams, *Transformadas de Laplace*, Limusa, México, 1975.

[7] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, Dover, Nueva York, 1987.

Applications of the Laplace integral transformation

Adrián R. Mendioroz Morales
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100230659@ull.edu.es

Universidad de La Laguna

FACULTAD DE CIENCIAS

Abstract

The present project develops the Laplace integral transform from a practical point of view, trying to justify, in the simplest way possible, the manipulations (not always accurate, but effective) that engineers, physicists... do, when they aproach and solve different problems. It presents, in a basic way, the theory of distributions, proving that the Dirac delta, as a function, is not well defined, and it only makes sense if it is considered as a distribution.

1. Introduction

The theory of distributions, developed by French mathematician Laurent Schwartz, had important effects in mathematical analysis, broadening the differential and integral calculus and allowing a rigorous justification for some manipulations with a lack of mathematical foundation. Some distributions, like the delta function, had been used by phsysicists and engineers for long time before the develop of the theory of distributions. Heaviside and Dirac had always generalized their calculations with specific applications on their minds, however their methods were built without a solid mathematical base. The theory of distributions extended their range of significance and provided tools for applications in many areas. The Dirac delta has been used, through direct application, in electrical circuit problems related to the Laplace transform. We are going to study the Laplace transform from a practical point of view and see how Schwartz, and his distribution theory, provided the Dirac delta of mathematical rigour, defining it as a distribution and involving spaces of functions, convergence, operators...

2. Classical results of the Laplace transform

In this first chapter we develop some classical properties of the Laplace transformation for functions, which will be needed in the later exposition on the distributional transformation.

Definition 1.2.1 Let f be a function defined for all real numbers $t>0$. The Laplace transform of f is defined by

$$(\mathscr{L}\ f)(s)=F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\ dt$$

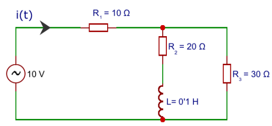
where $s\in\mathbb{C}$.

We specify the conditions under which we can establish the existence of the Laplace transform and the uniqueness and the analyticity theorems. We expose some of the many operational rules that the Laplace transform possesses. We present the Dirac delta

$$\delta(t)=0\ ,\ \ t\neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\ dt=1$$

And we show the importance of the Laplace transform introducing some examples of its application on electrical circuits problems.



3. Elementary introduction to the distribution theory

In this section we introduce, in a basic manner, the theory of distributions. We define the space $\mathscr{D}$ of testing functions and the space $\mathscr{D}'$ of distributions, and we set forth the concept of functional

$$\begin{aligned} f:\mathscr{D}&\longrightarrow\mathbb{C}\\ \varphi&\longmapsto f(\varphi)=\langle f,\varphi\rangle\end{aligned}$$

and characterize distributions as fuctionals on the space $\mathscr{D}$ that possess the properties of linearity and continuity. We shall see that $f\in L_{loc}(\mathbb{R})$ generates a distribution on $\mathscr{D}'$ by

$$\langle f,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\varphi(t)\ dt\ \ ,\ \ \varphi\in\mathscr{D}$$

We resume the study of the Dirac delta as a distribution

$$\langle\delta,\varphi\rangle=\langle\delta(t),\varphi(t)\rangle=\varphi(0)\ \ ,\ \ \varphi\in\mathscr{D}$$

Properties and operations with distributions are explained in this chapter, highlighting the differentiation of distributions.

Definition 2.3.4 The first derivative f' of a distribution $f\in\mathscr{D}'$ is the functional defined on $\mathscr{D}$ by

$$\langle f'(t),\varphi(t)\rangle=\langle f(t),-\varphi'(t)\rangle\qquad\varphi\in\mathscr{D}$$

Distributions always possess derivates, and these derivates are again distributions.

4. The distributional Laplace transformation

In this final chapter, we define the space S of testing functions of rapid descent and the space S' of distributions of slow growth. The distributions of slow groth arise in the development of the distributional Laplace and Fouier transformations.

Definition 3.2.3 The space of continuous linear functionals on S is the space S' of distributions of slow growth

We establish the relation of inclusions

$$\mathscr{D}\subset S\subset S'\subset\mathscr{D}'$$

We develop the distributional Fourier transformation

Theorem 3.3.5 *If a distribution $f\in S'$ has bounded support, its Fourier transform is infinitely smooth and it is given by*

$$(\mathscr{F}f)(w)=F(w)=\langle f(t),e^{-iwt}\rangle$$

and the distributional Laplace transformation

$$(\mathscr{L}\ f)(s)=F(s)=\langle e^{-ct}f(t),\lambda(t)e^{-(s-c)t}\rangle$$

The Laplace transform and the Fourier transform of a distribution $f\in\mathscr{D}'_+$

$$(\mathscr{L}\ f)(s)=(\mathscr{F}(e^{-\sigma t}f(t))(s)\ \ ,\ \ Re\,s>\alpha_f$$

We finish calculating the Laplace transform of the Dirac delta, justifying the manipulations done in chapter 1

$$(\mathscr{L}\ \delta)(s)=1$$

for all $s\in\mathbb{C}$.

References

[1] T.M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1960.

[2] W.E. y R.C. DiPrima Boyce, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, Limusa, 1996.

[3] G. Doetsch, *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation*, Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[4] I.N. Sneddon, *The Use of Integral Transforms*, McGraw-Hill, 1979.

[5] M.R. Spiegel, *Transformadas de Laplace*, Colección Schaum, McGraw-Hill, México, 1996.

[6] J. Williams, *Transformadas de Laplace*, Limusa, México, 1975.

[7] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, Dover, Nueva York, 1987.