

Cristina Desireé Praena Pacheco

*Polinomios ortogonales.  
Aplicación electrostática.*

Orthogonal Polynomials. Electrostatics  
application.

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Septiembre de 2017



---

## Agradecimientos

Este trabajo simboliza la culminación de una enriquecedora etapa y el resultado del esfuerzo de todas y cada una de las personas que han sido partícipes de haberlo hecho posible.

No hubiese podido llegar hasta aquí sin el apoyo y sacrificio de mi familia. Gracias por no dudar de mí, por hacerme sentir que me apoyaban de cerca a pesar de la distancia y por celebrar juntos cada meta alcanzada. En definitiva, gracias por brindarme la oportunidad de ser lo que un día soñé.

Gracias a mis compañeros y compañeras, que con su ayuda desinteresada me han allanado parte del camino. En especial a quienes me han hecho sentir parte de su familia, mis hermanas Lucía y Adriana, y a Dani Martín. Por supuesto, a mi pareja, que ha permanecido de manera incondicional para darme aliento.

Por último, gracias a la Universidad. Gracias a cada uno de los profesores a quienes debo la mayor parte de mis conocimientos. Gracias a los que hicieron de su asignatura un placer, pues no todo el mundo tiene ese don. Pero gracias sobretodo a quienes nos hicieron luchar un poco más y entender el verdadero significado del esfuerzo. Gracias a Ramón por darme a conocer un nuevo campo de trabajo y por aportarme todo el material necesario para desarrollarlo.





---

## Resumen · Abstract

---

### *Resumen*

---

**Palabras clave:** *Polinomios ortogonales – Jacobi – Laguerre – Hermite – aplicación electrostática – ceros de polinomios ortogonales – Stieltjes.*

*El presente trabajo está dedicado a los polinomios ortogonales clásicos y su relación con el campo de la electrostática.*

*En un primer contacto, se introduce la definición de polinomio ortogonal y se profundiza en las propiedades más significativas a efectos de su posterior aplicación. Además, se presentan las familias clásicas: Jacobi, Laguerre y Hermite, exponiéndose para cada una de ellas sus principales características.*

*El segundo capítulo abarca “El problema de Stieltjes”. Debe su nombre al matemático holandés Thomas Joannes Stieltjes, quien tras trabajar en varias contribuciones relacionadas con las fracciones continuas, la cuadratura de Gauss o los polinomios ortogonales entre otras, aportó un resultado que relacionaba estos últimos con la electrostática. Demostró que  $n$  cargas unitarias alcanzan su posición de equilibrio dentro de un intervalo cerrado, gobernado por dos cargas positivas en sus extremos, justo donde los polinomios de Jacobi se anulan.*

*A continuación, se describen varias extensiones del modelo anterior. En el caso de los intervalos no acotados, sucede lo propio para los polinomios ortogonales de Laguerre: al situar una carga positiva en el origen y dejar  $n$  unitarias libres en el semieje real positivo, resulta que su energía mínima se da en los ceros de estos polinomios. De forma análoga, sucede en el caso de tomar como intervalo de referencia el eje real, donde los polinomios protagonistas son los del tipo Hermite. Por último, se presenta el modelo “Heine-Stieltjes”, que estudia el lugar de equilibrio  $n$  cargas distribuidas en  $p$  intervalos considerando todas las posibles formas de dispersarse en ellos.*

*Para concluir el trabajo, se exponen posibles cuestiones abiertas que pueden ser un motivo interesante para futuras investigaciones.*

## *Abstract*

---

**Keywords:** *Orthogonal polynomials – Jacobi – Laguerre – Hermite – electrostatics application – zeros of orthogonal polynomials – Stieltjes.*

*This paper is devoted to classical orthogonal polynomials and their relation to the field of electrostatics.*

*In a first contact, the definition of orthogonal polynomial is introduced and the most significant properties are examined for their subsequent application. In addition, the classic families are presented: Jacobi, Laguerre and Hermite, exposing for each of them its main characteristics.*

*The second chapter covers “The Problem of Stieltjes”. Its name is in honor to the Dutch mathematician Thomas Joannes Stieltjes, who after working on several contributions related to continuous fractions, Gauss’s quadrature or orthogonal polynomials, among others, brought an outcome that related the latter to electrostatics. He showed that  $n$  unit charges reach their equilibrium position within a closed interval, governed by two positive charges at their boundaries, just where the Jacobi polynomials are equal to zero.*

*Several extensions of the previous model are described below. In the case of non-bounded intervals, the same happens for Laguerre’s orthogonal polynomials: by placing a positive charge at the origin and leaving  $n$  free unit charges in the positive real half-axis, it turns out that its minimum energy is given in the zeros of these polynomials. Similarly, it happens in the case of taking as reference interval the real axis, where the main polynomials are the Hermite type. Finally, the “Heine-Stieltjes” model is presented, which studies where  $n$  charges reach equilibria distributed in  $p$  intervals considering all possible ways of dispersing in them.*

*To conclude the paper, possible open questions are presented which may be an interesting reason for future research.*

---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
0.1. Introducción histórica. ....	IX
0.2. Motivación y objetivos. ....	X
<b>1. Polinomios ortogonales clásicos.</b> .....	1
1.1. Definición .....	1
1.2. Propiedades generales .....	5
1.3. Familias clásicas .....	8
1.3.1. Polinomios de Jacobi .....	8
1.3.2. Polinomios de Laguerre .....	12
1.3.3. Polinomios de Hermite .....	13
<b>2. Aplicación física: interpretación electrostática de ceros. El problema de Stieltjes.</b> .....	17
2.1. El problema de Stieltjes. ....	19
<b>3. Extensiones del modelo de Stieltjes.</b> .....	25
3.1. Laguerre y Hermite: Intervalo no acotado. ....	25
3.1.1. Laguerre: $(0, \infty)$ . ....	25
3.1.2. Hermite: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ . ....	28
3.2. Heine-Stieltjes. ....	30
<b>4. Conclusión y cuestiones abiertas.</b> .....	41
<b>Bibliografía</b> .....	43

<b>Lista de Figuras</b> .....	47
<b>Poster</b> .....	49

---

# Introducción

## 0.1. Introducción histórica.

La teoría de polinomios ortogonales ocupa un papel relevante en el campo de la Matemática Aplicada, no solamente en lo referido al marco teórico, sino por ofrecer un gran abanico de aplicaciones. Está estrechamente relacionada con diferentes tipos de problemas ligados a las ecuaciones diferenciales, matrices aleatorias, teoría de la aproximación o series trigonométricas entre otros, pero además, se extiende a distintas materias como la Física o la Ingeniería.

Las primeras familias de polinomios ortogonales estudiadas, conocidas como familias clásicas, llevan nombre propio debido a los matemáticos que le dedicaron parte de su investigación: Jacobi, Laguerre, Hermite, Chevyshev, Legendre...

En este documento se estudia la relación existente entre dichas familias y una conocida especialidad de la física: la electrostática. Los trabajos realizados al respecto por Thomas Jan Stieltjes (1856-1894) sirvieron, no solo para establecer una irrefutable correspondencia entre ambas disciplinas, sino que además abrieron varios frentes de investigación.

Concretamente, estableció que las posiciones de equilibrio de un número fijo de cargas regidas por un potencial logarítmico y dispuestas en un determinado recinto, sea intervalo acotado, semi-acotado, etc., toman lugar justamente donde lo hacen los ceros de los polinomios ortogonales clásicos asociados a dichos intervalos.

En las sucesivas páginas se asientan las bases necesarias para entender el problema y su resolución.

## 0.2. Motivación y objetivos.

Las razones para la elección del contenido que aborda este Trabajo Fin de Grado son de diferente índole.

Por un lado, la teoría de polinomios ortogonales, así como los temas vinculados a ellos, constituyen un tema transversal que engloba el conocimiento adquirido en numerosas asignaturas del actual Grado en Matemáticas. Consigue conectar desde los Métodos Numéricos, el Álgebra o las Ecuaciones Diferenciales, hasta conceptos de diferentes cursos de Análisis Matemático y Fundamentos de Física. Por tanto, se trata de una materia completa que consigue fusionar coetáneamente los contenidos estudiados durante el Grado.

Además, la opción de inclinar el trabajo hacia aplicaciones competentes a otros campos distintos de la clásica teoría matemática, hace apreciar una parte en la que quizás, debido a las limitaciones temporales, no se profundiza suficiente durante la carrera. Esa parte hace referencia a la que la mayoría del alumnado se pregunta a medida que avanza en su ciclo universitario, y no sólo eso, esa pregunta que a veces surge a raíz de explicar que se está haciendo Matemáticas: “¿Para qué sirve?” El hecho de salir de la rutina de la teoría y sus demostraciones para tener la oportunidad de probar que todo ello explica fenómenos que se pueden describir “en nuestro lenguaje” es una motivación añadida.

Por último, al darse la circunstancia explicada anteriormente de tratarse de una materia tan conectada a otras, se abren las posibilidades de, una vez sentadas sus principales bases, tanto ampliar el presente trabajo como redirigir su fin hacia otras aplicaciones.

En lo referente a los objetivos, se pretende, por un lado, profundizar en un tema de investigación actual, y por el otro, interpretar, razonar y entender artículos y documentos de la literatura matemática, así como extraer información de manera adecuada logrando plasmar en este trabajo el resultado de los años de estudio y las capacidades adquiridas a través de ellos.

## Polinomios ortogonales clásicos.

En este primer capítulo se introduce la definición de polinomio ortogonal, así como algunas de las propiedades fundamentales que su conjunto verifica para, posteriormente, presentar las conocidas familias clásicas : Polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite.

### 1.1. Definición

**Definición 1.1.** *Considérese un intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  con  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  y sea  $w(x)$  una función peso que verifica lo siguiente:*

1.  $w(x) \geq 0$ .
2.  $w(x) > 0$  casi por todo el intervalo  $[a, b]$ .
3.  $w(x)$  es integrable en  $(a, b)$ , es decir,  $w(x) \in \mathcal{L}_1(x) : \int_a^b w(x)dx < \infty$ .

*A partir de esta función peso se define el producto escalar o producto interior para el espacio vectorial de los polinomios  $\mathbb{P}$  de la siguiente manera:*

Sean  $p(x), q(x) \in \mathbb{P}$ ,

$$\langle p, q \rangle_w := \int_a^b p(x)q(x)dx,$$

*y su norma asociada correspondiente*

$$\|p\|_w = \sqrt{\int_a^b p(x)^2 w(x)dx}$$

que resulta fundamental en la definición de polinomio ortogonal.

**Definición 1.2.** Se dice que un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definido en el espacio de polinomios  $\mathbb{P}$  con coeficientes reales es estándar si verifica que para cualquier par  $p, q \in \mathbb{P}$

$$\langle tp(t), q(t) \rangle = \langle p(t), tq(t) \rangle.$$

**Definición 1.3.** Se dice que  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a la función peso  $w(x)$  si verifica:

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(p_n(x)) = n.$
2.  $\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = 0 \iff m \neq n.$

Además, si  $\langle p_n(x), p_m(x) \rangle_w = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$ , se dice que son ortonormales.

Nótese que esta definición es equivalente a decir que una condición necesaria y suficiente para que la sucesión  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  sea ortogonal es

$$\langle p_n(x), x^k \rangle = \int_a^b x^k p_n(x) w(x) dx = 0, \quad \forall n, k : 0 \leq k < n.$$

Véase una breve prueba de ello.

“  $\Rightarrow$  ”

Si  $\int_a^b x^k p_n(x) w(x) dx = 0$ , dados  $p_m(x)$  y  $p_n(x)$  con  $n \neq m$  y supongamos  $m < n$  y  $p_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_a^b p_n(x) p_m(x) w(x) dx &= \int_a^b p_n(x) \sum_{k=0}^m a_k x^k w(x) dx = \sum_{k=0}^m a_k \underbrace{\int_a^b p_n(x) x^k w(x) dx}_{=0} = \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$



“ $\Leftarrow$ ”

Si  $\int_a^b p_m(x)p_n(x)w(x)dx = 0 \Rightarrow \forall k < n$ , entonces  $x^k = \sum_{m=0}^{\infty} a_m p_m(x)$ ,\*

y, por tanto,

$$\int_a^b x^k p_n(x)w(x)dx = \sum_{m=0}^k \left( a_m \int_a^b p_m(x)p_n(x)w(x)dx \right) = 0 ,$$

pues  $m \neq n$  ,  $m = 0, 1, 2, \dots, k$ .

**Teorema 1.4 (Existencia y unicidad de polinomios ortogonales).**

Para cada función peso  $w(x)$ , existe una única sucesión de polinomios ortonormales  $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$  con coeficiente principal positivo. Es decir:

1.  $\text{deg}(p_n(x)) = n, \forall n \in \mathbb{N}$ .
2.  $p_n(x) = \gamma_n x^n + \dots + \gamma_0$  , donde  $\gamma > 0$ .
3.  $\langle p_n, p_m \rangle_w = \int_a^b p_n(x)p_m(x)w(x)dx = \delta_{n,m}$ .

*Demostración.*

■ **EXISTENCIA.**

Se demostrará por inducción.

- $k = 0$ .

Basta tomar el polinomio constante  $\frac{1}{\sqrt{\int_a^b w(x)dx}}$  que verifica las tres propiedades del teorema.

- Supóngase esto cierto para  $k < n$ . Esto es,  $\forall k < n$ , existe  $p_k(x)$  cumpliendo las tres propiedades.

Considérese entonces el conjunto  $\{p_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x)\}$

---

\* Si  $p(x)$  es un polinomio de grado  $k$  ( $x^k$  en este caso) y  $p_m$  una familia de polinomios ortogonales, se puede expresar  $x^k$  como  $x^k = p(x) = \sum_{m=0}^k a_m p_m(x)$ , siendo  $a_m =$

$$\frac{\langle p_m, p \rangle}{\langle p_m, p_m \rangle}.$$

- $k = n$ .

Se construye el siguiente polinomio de grado  $n + 1$  :

$$p_{n+1}^*(x) = x^{n+1} - \sum_{i=0}^n a_i p_i(x), \text{ donde } a_i = \int_a^b x^{n+1} p_i(x) w(x) dx$$

Se puede ver fácilmente que verifica la primera condición, ya que el término de grado  $n + 1$  no se anula con los demás. Lo mismo sucede con la segunda, pues  $\gamma_n = 1 > 0$ . Queda ver que se cumple la tercera propiedad.

$$\begin{aligned} \langle p_{n+1}^*(x), p_i(x) \rangle_w &= \int_a^b p_{n+1}^*(x) p_i(x) w(x) dx \\ &= \int_a^b [x^{n+1} - \sum_{j=0}^n a_j p_j(x)] p_i(x) w(x) dx \\ &= \int_a^b x^{n+1} p_i(x) w(x) dx - \sum_{j=0}^n a_j \int_a^b p_j(x) p_i(x) w(x) dx \\ &= a_i - a_i = 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Además,  $\langle p_{n+1}^*(x), p_{n+1}^*(x) \rangle_w = \int_a^b (p_{n+1}^*(x))^2 w(x) dx = I > 0$ , por ser la integral de un polinomio no negativo y no nulo.

De aquí, tomando  $p_{n+1}(x) = \frac{p_{n+1}^*(x)}{\sqrt{I}}$ , se tiene un polinomio que cumple las tres condiciones. De este modo, queda verificada la existencia, como se quería ver.

#### ■ UNICIDAD

Supóngase que  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  es una sucesión de polinomios ortogonales que verifica las propiedades y sea  $\{q_n(x)\}_{n=0}^\infty$  otra sucesión de polinomios que también las satisface. Se trata de demostrar que  $p_n(x) = q_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , como  $\{q_0, q_1, \dots, q_n\}$  forma una base del subespacio  $\mathbb{P}_n$ , existen  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , tal que  $p_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i q_i(x)$ .

Además, al verificar la segunda propiedad se deduce que  $\forall j < n$ , se tiene

$$0 = \langle p_n(x), q_j(x) \rangle_w = \langle \sum_{i=0}^n a_i q_i(x), q_j(x) \rangle_w = a_j,$$

de donde

$$p_n(x) = a_n q_n(x).$$

Por otro lado,

$$1 = \langle p_n, p_n \rangle_w = \langle a_n q_n(x), a_n q_n(x) \rangle_w = a_n^2 \Rightarrow a_n = 1 ,$$

por ser una sucesión de polinomios que cumple la primera condición.

Por tanto se tiene que  $p_n(x) = q_n(x), \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty} = \{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , quedando así demostrada la unicidad.

## 1.2. Propiedades generales

Entre las propiedades que satisfacen los polinomios ortogonales, destacan las tres siguientes:

1. Relación de recurrencia a tres términos.

Sea  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  la sucesión de polinomios ortogonales mónicos respecto a un producto escalar estándar. Entonces se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x)$$

tomando  $p_1 = 0, p_0 = 1$ , y con  $\alpha_n = \frac{\langle xp_n(x), p_n(x) \rangle_n}{\|p_n(x)\|_w^2}$  y  $\beta_n = \frac{\|p_n(x)\|_w^2}{\|p_{n-1}(x)\|_w^2}$ .

**Teorema 1.5 (Teorema de Favard).** *Sea  $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$  una sucesión de polinomios que satisface la relación de recurrencia a tres términos:*

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + b_n p_n(x) + a_n p_{n-1}(x)$$

con  $a_0 > 0$  y con las condiciones iniciales  $p_0(x) = \frac{2}{a_0}, p_1(x) = \frac{1}{a_1 a_0}(x - b_0)$ . Entonces existe una función  $w(x)$  tal que la sucesión es ortonormal respecto a ésta.

2. Norma cuadrática mínima.

De entre todos los polinomios mónicos de grado  $n$

$$q_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

el que tiene norma  $\|\cdot\|_w$  mínima es el polinomio ortogonal mónico de grado  $n$ . Es decir, denotando a este polinomio por  $p_n(x)$ ,

$$\|q_n(x)\|_w \geq \|p_n(x)\|_w \Leftrightarrow \|p_n(x)\|_w = \min_{q_n(x)=x^n+\dots+a_0} \|q_n(x)\|_w.$$

*Demostración.* Sea  $q_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$  un polinomio mónico de grado  $n$  y sea  $p_n(x)$  el polinomio ortogonal mónico del mismo grado. Es claro que  $\exists t_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1} : q_n(x) = p_n(x) + t_{n-1}(x)$ . Ahora bien,

$$\|q_n\|_w^2 = \langle q_n, q_n \rangle_w = \langle p_n, p_n \rangle_w + 2\langle p_n, t_{n-1} \rangle_w + \langle t_{n-1}, t_{n-1} \rangle_w.$$

Pero por ser ortogonales, se tiene que  $\langle p_n, t_{n-1} \rangle_{\mathcal{L}_2} = 0$ , luego

$$\|q_n\|_w^2 = \langle p_n, p_n \rangle_w + \langle t_{n-1}, t_{n-1} \rangle_w = \|p_n\|_w^2 + \|t_{n-1}\|_w^2 \geq \|p_n\|_w^2,$$

de donde es fácil intuir que al tomar raíces queda probada la propiedad enunciada.

### 3. Ceros de los polinomios ortogonales.

Sea  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  una familia de polinomios ortogonales en  $(a, b)$  respecto a la función peso  $w(x)$ , entonces se tiene que todas sus raíces (exactamente  $n$ ) son simples y reales y pertenecen al intervalo abierto de ortogonalidad  $(a, b)$ .

*Demostración.* Se probará este resultado procediendo por reducción al absurdo. Para ello, supóngase que  $p_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  y que solamente tiene  $m < n$  raíces de multiplicidad impar en el intervalo  $(a, b)$ , es decir, simples o de multiplicidad 5, 7, etc.

Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$  las raíces de  $p_n$ , y sea

$$q(x) = \prod_{i=1}^m (x - x_i), \quad \forall x \in (a, b).$$

Obsérvese que el producto  $p_n(x) \cdot q(x)$  tiene como resultado signo constante en  $(a, b)$ ,  $\forall x \in (a, b)$ , salvo los puntos  $x_i$  donde  $q(x)$  se anule, es decir,

$$\int_a^b p_n(x)q(x)w(x)dx \neq 0$$

Sin embargo, por ser  $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$  sucesión de polinomios ortogonales, se cumple que

$$\langle x^m, p_n(x) \rangle = 0, \quad \text{si } m < n.$$

Así, como  $\deg(q) = m < n$ , ocurre que  $\langle q(x), p_n(x) \rangle = 0$  y, por tanto,  $\int_a^b p_n(x)q(x)w(x)dx = 0$ , lo cual es una contradicción con lo visto anteriormente.

En consecuencia, se infiere que  $p_n(x)$  tiene exactamente  $n$  raíces de multiplicidad impar en  $(a, b)$ .

Queda por ver que éstas son simples, y para probarlo se empleará el mismo método.

Si  $\alpha$  es una raíz no simple de  $p_n(x)$ , se puede escribir de la forma

$$p_n(x) = (x - \alpha)^m s_{n-m}(x) \text{ para } m > 1.$$

Si  $m$  es par, considérese  $t(x) =: s_{n-m}(x)$ , y si  $m$  es impar,  $t(x) =: (x - \alpha)s_{n-m}(x)$  y supóngase por simplicidad que  $m$  es impar (para  $m$  par, la demostración es análoga).

En tal caso,

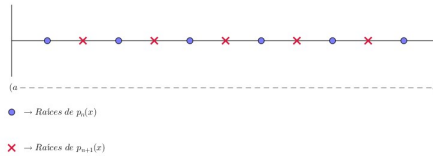
$$\begin{aligned} \langle p_n(x), t(x) \rangle &= \int_a^b p_n(x)t(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b (x - \alpha)^m s_{n-m}(x)(x - \alpha)s_{n-m}(x)w(x)dx \\ &= \int_a^b (x - \alpha)^{m+1}(s_{n-m}(x))^2w(x)dx \neq 0, \end{aligned}$$

pues los dos primeros términos son positivos al ser potencias pares ( $m$  impar, luego  $m + 1$  par) y, además,  $w(x)$  es positivo por definición. Pero  $\deg(t(x)) = n - m + 1 < n$ , ya que  $n > 1$ , luego  $\langle p_n(x), t(x) \rangle = 0$ , lo cual es una contradicción procedente de suponer que  $\alpha$  no es una raíz simple. Por consiguiente, las raíces son simples, como se quería demostrar.

Por último, se expondrá un resultado relacionado con la distribución de los ceros de dos polinomios ortogonales consecutivos.

**Proposición.** Sean  $p_n(x), p_{n+1}(x)$  dos polinomios ortogonales consecutivos respecto de la función peso  $w(x)$ , entonces entre dos ceros de  $p_n(x)$  siempre existe un cero de  $p_{n+1}(x)$ .

A continuación, un ejemplo gráfico de este resultado:



**Figura 1.1.** Ceros de dos polinomios ortogonales consecutivos.

### 1.3. Familias clásicas

Este apartado comprende la descripción de aquellos polinomios ortogonales clásicos, tan importantes en el desarrollo de la propia teoría que los envuelve, como en las aplicaciones posteriores en otros campos.

Se distribuyen en tres grandes familias atendiendo al tipo de intervalo de ortogonalidad en el que están definidos: Polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite.

Nótese que, aunque sus definiciones se centrarán en el intervalo acotado  $[-1, 1]$ , en el semi-infinito  $[0, \infty)$  y en toda la recta real  $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ , puede extenderse a todos los casos mediante transformaciones lineales simples cubriendo así también los intervalos  $[a, b]$  y  $[a, \infty)$  (recíprocamente  $(-\infty, a]$ ).

#### 1.3.1. Polinomios de Jacobi

Los polinomios de Jacobi constituyen una familia de polinomios ortogonales en el intervalo  $[-1, 1]$  respecto a la función peso  $w_{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , con  $x \in (-1, 1)$  y siendo los parámetros  $\alpha > -1$  y  $\beta > -1$ . En adelante, se denotará al  $n$ -ésimo polinomio de Jacobi por  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ .

Verifican las siguientes propiedades:

1. Fórmula de simetría.

La sucesión de polinomios ortogonales de Jacobi satisfice:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-1)P_n^{\alpha,\beta}(-x).$$

2. Fórmula de Rodrigues.

Están definidos mediante la fórmula de Rodrigues por:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-2)^{-n} (n!)^{-1} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}],$$

que en virtud de la fórmula de Leibniz para la  $n$ -ésima derivada de un producto

$$(f \cdot g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k} g^k$$

consigue escribirse como

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (1-x)^k (1+x)^{n-k}.$$

3. Coeficiente principal.

Del resultado anterior se deduce que el coeficiente principal de un polinomio de Jacobi de grado  $n$  es

$$K_n^{\alpha,\beta} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} = 2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n}.$$

4. Ortogonalidad.

Verifican la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle_w = \int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) w(x) dx = \begin{cases} \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

5. Ecuación diferencial.

Responden a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$(x^2 - 1)y''(x) + [(2 + \alpha + \beta)x + \alpha - \beta]y'(x) - n(n + 1 + \alpha + \beta)y(x) = 0.$$

Presentadas las propiedades generales de los polinomios de Jacobi, cabe distinguir algunos casos especiales pertenecientes a esta familia: los denominados polinomios ultraesféricos o polinomios de Gegenbauer, caracterizados porque en ellos los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  de la función peso son iguales ( $\alpha = \beta$ ). Resulta entonces

$$w(x) = (1 - x^2)^\alpha.$$

Según los valores que tomen dichos parámetros, pueden encontrarse casos relevantes como:

- Polinomios de Chebyshev de 1ª especie:  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ .

Se denotan por  $T_n(x)$  y la función peso referente es  $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

Verifican la relación de recurrencia siguiente:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),$$

siempre que  $T_0(x) = 1$  y  $T_1(x) = x$ .

De la misma manera, pueden representarse por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),$$

quedando, para el  $n$ -ésimo polinomio mónico,

$$t_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$$

por ser  $2^{n-1}$  el coeficiente principal de esta clase.

Respecto a la ortogonalidad, cumplen que

$$\langle T_n, T_m \rangle_w = \int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \begin{cases} \pi & \text{si } n = m = 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n = m > 0, \\ 0 & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

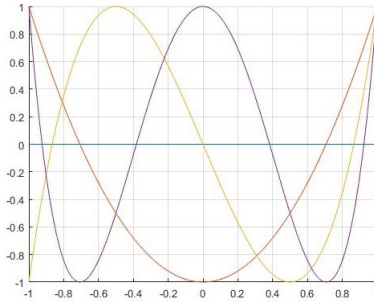
Por último, el  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$  tiene  $n$  ceros simples en los puntos

$$x_{n,k} = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right), \text{ con } k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

todos en el intervalo  $(-1, 1)$ .



La siguiente imagen muestra la representación de algunos de ellos:



**Figura 1.2.** Polinomios de Chebyshev.

- Polinomios de Chebyshev de 2ª especie:  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ .

Se denotan por  $U_n(x)$  y la función peso queda  $w(x) = (1 - x^2)^{1/2} = \sqrt{1 - x^2}$ . Cuando  $U_0(x) = 1$  y  $U_1(x) = 2x$  satisfacen la relación de recurrencia siguiente:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),$$

y cumplen la relación de ortogonalidad

$$\langle U_n, U_m \rangle_w = \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1 - x^2}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

- Polinomios de Legendre:  $\alpha = \beta = 0$ .

Se denotan por  $P_n(x)$  y la función peso resultante es  $w(x) = (1 - x^2)^0 = 1$ . Para  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$  cumplen :

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0,$$

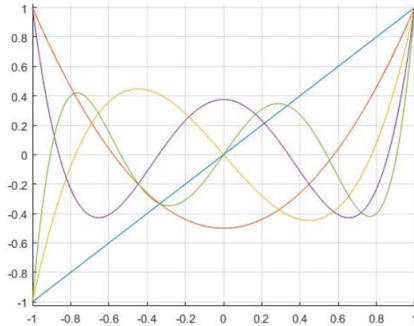
y la fórmula de Rodrigues permite escribirlos como

$$P_n(x) = 2^{-n}(n!)^{-1} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

Además, su relacion de ortogonalidad es :

$$\langle P_n, P_m \rangle_w = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

La siguiente figura muestra la representación de algunos de ellos :



**Figura 1.3.** Polinomios de Legendre.

### 1.3.2. Polinomios de Laguerre

Sobre los polinomios de Laguerre, se denotan por  $L_n^\alpha(x)$  y, en este caso, el intervalo de definición es el semieje real positivo  $(0, \infty)$ . La función peso vinculada es  $w(x) = x^\alpha e^{-x}$ , con  $\alpha > -1, x \in (0, \infty)$ .

Cumplen las siguientes propiedades:

1. Fórmula de Rodrigues.

Según la fórmula de Rodrigues, pueden escribirse como

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x}{n!x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}],$$

que, a partir de la fórmula de Leibniz, admiten la expresión

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

2. Coeficiente principal.

El coeficiente principal de un polinomio de Laguerre de orden  $n$  es

$$K_n^\alpha = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

3. Ortogonalidad.

Su relación de ortogonalidad es la siguiente:

$$\begin{aligned} \langle L_n^\alpha(x), L_m^\alpha(x) \rangle_w &= \int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) w(x) dx \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Relación de recurrencia.

Para  $L_0(x) = 1$  y  $L_1(x) = x - \alpha - 1$ , verifican la relación de recurrencia:

$$(n + 1)L_{n+1}^\alpha(x) = (2n + 1 + \alpha - x)L_n^\alpha(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) = 0.$$

5. Ecuación diferencial.

El  $n$ -ésimo polinomio de Laguerre es solución de la ecuación diferencial de segundo orden

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + ny(x) = 0,$$

donde  $y = L_n^\alpha$ .

Para cerrar el capítulo, se presentan las características principales de otra de las grandes familias de polinomios ortogonales:

**1.3.3. Polinomios de Hermite**

Cuando el intervalo de definición de los polinomios ortogonales se extiende por todo el eje real  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ , éstos se catalogan como polinomios de Hermite, denotándose por  $H_n(x)$  y con la función peso correspondiente a  $w(x) = e^{-x^2}$ .

Del mismo modo que las familias anteriores, los polinomios ortogonales de Hermite satisfacen determinadas propiedades:

1. Fórmula de Rodrigues.

Esta vez, la fórmula de Rodrigues permite identificar a los polinomios ortogonales por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}],$$

que, aplicando también en esta ocasión la regla de Leibniz, resulta:

$$H_n(x) = n! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2x)^{n-2k}}{(n-k)!k!}.$$

2. Coeficiente principal.

Su coeficiente principal es

$$k_n = 2^n.$$

3. Ortogonalidad.

Referente a su relación de ortogonalidad, en los polinomios de Hermite se cumple

$$\langle H_n, H_m \rangle_w = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) w(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{si } m = n. \end{cases}$$

4. Relación de recurrencia.

Verifican la fórmula

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0,$$

para  $H_0(x) = 1$  y  $H_1(x) = 2x$ .

5. Ecuación diferencial.

Tomando  $y = H_n(x)$ , los polinomios de Hermite son solución de la ecuación diferencial

$$y''(x) - 2xy(x) + 2ny(x) = 0.$$

El siguiente esquema recoge, a modo de síntesis, las propiedades principales de los polinomios ortogonales descritas en este primer capítulo:

Familia		Notación		Intervalo	Función peso	
Jacobi	Chevyshev 1	$P_n^{\alpha,\beta}(x)$	$T_n(x)$	$(-1, 1)$	$w_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$ $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Chevyshev 2		$U_n(x)$			$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ $w(x) = \sqrt{1-x^2}$
	Legendre		$P_n(x)$			$\alpha = \beta = 0$ $w(x) = 1$
Laguerre		$L_n^\alpha(x)$		$(0, +\infty)$	$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1$	
Hermite		$H_n(x)$		$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$	$w(x) = e^{-x^2}$	

**Tabla 1.1.** Familias clásicas de polinomios ortogonales.



## Aplicación física: interpretación electrostática de ceros. El problema de Stieltjes.

Los polinomios ortogonales clásicos y la teoría del potencial electrostático fue parte importante en los trabajos de Tomas Jan Stieltjes quien, a finales del siglo XIX, encontró una interpretación de los ceros de dichos polinomios en términos de un modelo electrostático.

Para poder describir el problema, será necesario aludir previamente a conceptos básicos asociados a este campo de la física.

La electrostática es la rama de la Física que estudia las interacciones entre cuerpos cargados eléctricamente que se encuentran en estado de reposo.

Fue el físico e ingeniero francés Augustin de Coulomb quien estableció que la fuerza eléctrica con la que se atraen o repelen dos cargas es directamente proporcional al producto de las mismas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa, actuando en la dirección de la recta que las une

$$\vec{F}_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|^2} = K \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

siendo

- F: fuerza eléctrica de atracción o repulsión medida en Newtons.
- $q_1, q_2$ : valores de dos cargas puntuales medidas en Culombios.
- r: distancia de separación de las cargas en unidades del Sistema Internacional.
- $K$  : constante de proporcionalidad de Coulomb. No se trata de una constante universal y depende del medio en el que se encuentren las cargas.

Del mismo modo, un cuerpo cargado que sufre la acción de una fuerza electrostática adquiere una energía potencial que viene dada por la expresión

$$E_{12} = K \frac{q_1 q_2}{|x_1 - x_2|} = K \frac{q_1 q_2}{r},$$

con los parámetros medidos en las unidades anteriores y la energía potencial en Julios.

Sin pérdida de generalidad, supóngase que el estudio se realiza en el plano complejo. En estas circunstancias, la fuerza debe expresarse en módulo y se manifiesta mediante

$$|\vec{F}_{12}| = K \frac{|q_1 q_2|}{|x_1 - x_2|}.$$

En el mismo contexto, puede decirse que la energía del potencial eléctrico entre dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  es proporcional al logaritmo de la distancia entre ambas, resultando

$$E_{12} = -K q_1 q_2 \log |x_1 - x_2|,$$

que, normalizando con el propósito de simplificar, se empleará en adelante como

$$E_{12} = -q_1 q_2 \log |x_1 - x_2|.$$

En adelante, se nombrará como potencial logarítmico.

Ahora bien, si en lugar de 2 cargas, se dispone de un sistema de  $n$  cargas  $q_i, i = 1, 2, \dots, n$  con sus respectivas posiciones asociadas  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , la energía mutua del sistema viene dada por:

$$\begin{aligned} E(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} E_{ij} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_i q_j \log \frac{1}{|x_i - x_j|} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} -q_i q_j \log |x_i - x_j| = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_i q_j \log |x_i - x_j|. \end{aligned}$$

Una vez establecidos estos aspectos físicos elementales, se pueden considerar suficientes para presentar el problema de Stieltjes y su relación con los polinomios ortogonales, comprendido en la siguiente sección.





Para probarlo, ha de definirse la energía total del sistema, que viene dada por:

$$\begin{aligned}
 E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) &= E(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n E_{iq_1} + \sum_{i=1}^n E_{iq_2} \\
 &= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log |x_i - x_j| - q_1 \sum_{i=1}^n \log |x_i - 1| - q_2 \sum_{i=1}^n \log |x_i + 1|.
 \end{aligned}$$

Se trata ahora de localizar las posiciones de equilibrio del sistema, es decir, aquellas  $n$ -uplas que hacen mínima la citada función  $E_T$ .

A tal efecto, será necesario corroborar previamente que ese mínimo existe y que además es único.

Si se toman las cargas ordenadas, resulta el subconjunto  $K \subset \mathbb{R}$  donde se busca la solución:

$$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / -1 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}.$$

Considerando

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = e^{-E_T(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j| \prod_{i=1}^n |x_i - 1|^{q_1} \prod_{i=1}^n |x_i + 1|^{q_2},$$

es equivalente probar que  $E_T$  alcanza un mínimo en  $K$  a que  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  obtiene un máximo, pues basta tomar  $\log(T^{-1})$ . En efecto, tal máximo existe por ser  $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$  continua en  $K$  y, además,  $K$  cerrado y acotado y, por tanto, compacto. De aquí, puede asegurarse que existe al menos una  $n$ -upla  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  que maximiza  $T$  (análogamente, minimiza  $E_T$ ). Es más, dicho máximo se alcanza en el interior de  $K$ , pues de ser en la frontera sucedería alguna de las siguientes circunstancias:

- $\exists i \neq j : x_i = x_j \Rightarrow T(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$
- $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\} : |x_i| = 1 \Rightarrow E_T = 0,$

lo cual es inviable en el problema que se aborda.

Por otra parte, la posición de equilibrio es única. Para demostrarlo, supóngase que existen dos  $n$ -uplas que cubren ambas la posición de mínima energía:

$$\begin{aligned}
 -1 &< x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1, \\
 -1 &< x_1^* < x_2^* < \dots < x_n^* < 1.
 \end{aligned}$$

Si se toma  $y_i = \frac{|x_i - x_i^*|}{2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , entonces, teniendo en cuenta las propiedades de las medias aritmética y geométrica, se deduce

$$|y_i - y_j| = \frac{|x_i - x_j| + |x_i^* - x_j^*|}{2} \geq |x_i - x_j|^{\frac{1}{2}} |x_i^* - x_j^*|^{\frac{1}{2}}, \text{ y}$$

$$|1 \pm y_i| \geq |1 \pm x_i|^{\frac{1}{2}} |1 \pm x_i^*|^{\frac{1}{2}}.$$

Por tanto, atendiendo a la expresión de  $T$ , se tiene que  $T(y) \geq T(x)^{\frac{1}{2}} T(x^*)^{\frac{1}{2}}$ , donde la igualdad se cumple sí, y sólo sí,  $x_i = x_j$ . Así, queda demostrada la unicidad de la solución.

Así pues, bajo la certeza de la existencia y unicidad de ese máximo de  $T$  (respectivamente mínimo de  $E_T$ ), el siguiente propósito es hallarlo.

Tal y como se justificaba en párrafos anteriores, la solución se encuentra en el interior de  $K$ , por lo que es un extremo absoluto y local, lo que permite afirmar que en estas condiciones

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

y, en consecuencia,

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial e^{-E_T}}{\partial x_i} = -\frac{\partial E_T}{\partial x_i} \underbrace{e^{-E_T}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial E_T}{\partial x_i} = 0.$$

Pero atendiendo a la expresión de la energía total y teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{|x - y|} = -\frac{1}{x - y},$$

es claro que

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{q_1}{x_i - 1} + \frac{q_2}{x_i + 1} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n,$$

de donde se obtiene un sistema no lineal de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

El siguiente resultado ayuda relacionar la expresión anterior con los polinomios de Jacobi.

**Lema 2.1.** *Sea el polinomio  $p(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$  y sea  $k$  fijo y arbitrario,*

*$k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se verifica:*

$$\frac{p''(x_k)}{p'(x_k)} = 2 \sum_{j \neq k} \frac{1}{x_k - x_j}.$$

*Demostración. Para demostrar la igualdad, se procederá por inducción.*

- *Es trivial que para  $n = 2$  se verifica la igualdad, luego para  $n = 3$  se tiene  $x_1, x_2, x_3$ :*

$$\begin{aligned} \cdot \quad & p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \\ \cdot \quad & p'(x) = (x - x_2)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_3) + (x - x_1)(x - x_2). \\ \cdot \quad & p''(x) = (x - x_3) + (x - x_2) + (x - x_3) + (x - x_1) + (x - x_2) + (x - x_1) \\ & = 2[(x - x_1) + (x - x_2) + (x - x_3)]. \end{aligned}$$

*Luego, por ejemplo, para  $x_k = x_2$ :*

$$\begin{aligned} p'(x_2) &= (x_2 - x_1)(x_2 - x_3), \\ p''(x_2) &= 2[(x_2 - x_1) + (x_2 - x_3)], \text{ y por tanto,} \end{aligned}$$

$$\frac{p''(x_2)}{p'(x_2)} = 2 \left[ \frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_1} \right].$$

- *Supóngase que es cierto para  $n$ , esto es,*

$$\frac{p_n''(x_k)}{p_n'(x_k)} = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_j}.$$

- *Se demuestra que es cierto para  $n + 1$ :*

$$\begin{aligned} \cdot \quad & p_{n+1}(x) = p_n(x)(x - x_{n+1}). \\ \cdot \quad & p_{n+1}'(x) = p_n'(x)(x - x_{n+1}) + p_n(x). \\ \cdot \quad & p_{n+1}''(x) = p_n''(x)(x - x_{n+1}) + p_n'(x) + p_n'(x) = p_n''(x)(x - x_{n+1}) + 2p_n'(x). \end{aligned}$$

*Así, cuando  $x = x_k$ , se tiene:*

$$p_{n+1}'(x_k) = p_n'(x_k)(x_k - x_{n+1}) + \underbrace{p_n(x_k)}_{=0} = p_n'(x_k)(x_k - x_{n+1}),$$

$$p_{n+1}''(x_k) = p_n''(x_k)(x_k - x_{n+1}) + 2p_n'(x_k), \text{ luego}$$

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}''(x_k)}{p_{n+1}'(x_k)} &= \frac{p_n''(x_k)(x_k - x_{n+1}) + 2p_n'(x_k)}{p_n'(x_k)(x_k - x_{n+1})} = \frac{p_n''(x_k)}{p_n'(x_k)} + 2 \frac{1}{x_k - x_{k+1}} \\ &= 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_j} + 2 \frac{1}{x_k - x_{k+1}} = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n+1} \frac{1}{x_k - x_j}, \end{aligned}$$

*como se quería demostrar.*

Probada la igualdad, puede escribirse

$$\frac{1}{2} \frac{p''(x_k)}{p'(x_k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{1}{x_k - x_j},$$

de modo que la expresión que minimiza la energía resulta:

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{q_1}{x_i - 1} + \frac{q_2}{x_i + 1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{p''(x_k)}{p'(x_k)} + \frac{q_1}{x_k - 1} + \frac{q_2}{x_k + 1} = 0.$$

Sea  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  la  $n$ -upla que verifica el sistema, realizando operaciones elementales, para  $x_k^*$  se tiene

$$\frac{p''(x_k)}{2p'(x_k)} + \frac{q_1}{x_k - 1} + \frac{q_2}{x_k + 1} = [(x_k^*)^2 - 1]p''(x_k^*) + 2[q_1(x_k^* + 1) + q_2(x_k^* - 1)]p'(x_k^*) = 0.$$

Ahora bien, si se denota  $Q(x) = (x^2 - 1)p''(x) + 2[q_1(x + 1) + q_2(x - 1)]p'(x)$ , es análogo resolver  $[(x_k^*)^2 - 1]p''(x_k^*) + 2[q_1(x_k^* + 1) + q_2(x_k^* - 1)]p'(x_k^*) = 0$  y  $Q(x_k^*) = 0$  y, además, como  $\deg(p) = n$ , es evidente que  $\deg(Q) \leq n \Rightarrow Q \in \mathbb{P}_n$ . Por ende, puede decirse que  $Q$  es igual a  $p$  salvo un factor escalar  $\lambda$ . Esto es,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $Q = \lambda p$ , y de aquí se deduce que

$$(x^2 - 1)p''(x) + 2[q_1(x + 1) + q_2(x - 1)]p'(x) = \lambda p,$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes polinómicos que se asemeja a la siguiente

$$(x^2 - 1)y''(x) + [(2 + \alpha + \beta)x + \alpha - \beta]y'(x) - n(n + 1 + \alpha + \beta)y(x) = 0,$$

que no es otra que aquella para la cual los polinomios de Jacobi de orden  $n$  y coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $P_n^{\alpha, \beta}$ , constituyen una solución.

Ajustando los coeficientes de ambas ecuaciones de manera adecuada, queda probado que para

$$\begin{cases} \alpha = 2q_1 - 1 \geq -1 \\ \beta = 2q_2 - 1 \geq -1 \end{cases}$$

el polinomio ortogonal de Jacobi  $P_n^{2q_1-1, 2q_2-1}$  es la solución de la ecuación diferencial, de donde se deduce que sus ceros coinciden con aquella  $n$ -upla  $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , donde las cargas hallan su posición de equilibrio o mínima energía.

Faltaría probar únicamente que el extremo obtenido se corresponde a la  $n$ -upla que hace mínima la energía.

En párrafos anteriores se dedujo que

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{q_1}{x_i - 1} + \frac{q_2}{x_i + 1},$$

luego

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_j - x_i} - \frac{q_1}{x_i - 1} - \frac{q_2}{x_i + 1}.$$

De aquí se tiene la matriz Hessiana

$$H = \frac{\partial}{\partial x_i \partial x_k} E_T = \begin{cases} -\frac{1}{(x_k - x_i)^2} & \text{si } i \neq k, \\ \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_j - x_i)^2} + \frac{q_1}{(x_i - 1)^2} + \frac{q_2}{(x_i + 1)^2} & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Esta matriz  $H$  se puede expresar como  $H = H_1 + H_2$ , donde

- $H_1$  es la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \frac{q_1}{(x_1-1)^2} + \frac{q_2}{(x_1+1)^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & + \frac{q_1}{(x_2-1)^2} + \frac{q_2}{(x_2+1)^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 + \frac{q_1}{(x_n-1)^2} + \frac{q_2}{(x_n+1)^2} \end{pmatrix}$$

- $H_2$  es la matriz formada por

$$(H_2)_{i,i} = \sum_{i \neq j} \frac{1}{(x_j - x_i)^2} \text{ en los elementos correspondientes a su diagonal, y}$$

$$(H_2)_{i,k} = -\frac{1}{(x_k - x_i)^2} \text{ en el resto.}$$

Obviamente,  $H_1$  es una matriz definida positiva, pues  $q_1 > 0$  y  $q_2 > 0$ . Además, por el Teorema de Gerschgorin\*,  $H_2$  tiene todos sus valores propios no negativos. Luego puede concluirse que  $H$  es definida positiva por ser la suma de dos matrices definidas de la misma forma y, de aquí, que la posición de equilibrio se corresponde con un mínimo de  $E_T$ .

---

\* Teorema de Gerschgorin: se utiliza para encontrar una cota de los autovalores de una matriz cuadrada. Dada la matriz  $(H_2)_{i,k}$ , se definen los círculos  $D_1, \dots, D_n$  centrados en  $(H_2)_{i,i}$  de radio  $\sum_{i \neq k} H_{k,i}$ , entonces los autovalores se encuentran en la unión de los  $n$  círculos.

## Extensiones del modelo de Stieltjes.

Tras probar la vigorosa relación existente entre el potencial electrostático en el intervalo acotado y los polinomios de Jacobi, T. J. Stieltjes extendió su investigación hacia otros posibles casos. Los modelos Laguerre y Hermite tratan el comportamiento de las cargas en intervalos no acotados, mientras que el problema de Heine-Stieltjes estudia la situación de varias cargas repulsivas fijas en el eje real.

Aunque tras los trabajos pioneros de Stieltjes sigue habiendo numerosos problemas abiertos en el campo de la interpretación electrostática de ceros de polinomios ortogonales, este capítulo comprenderá la descripción de los modelos previamente descritos.

### 3.1. Laguerre y Hermite: Intervalo no acotado.

Tal y como se ha mencionado, Stieltjes consideró interpretaciones similares a la de Jacobi para los ceros de los polinomios de Laguerre y Hermite. Puesto que en esta situación las cargas libres pueden moverse en un conjunto no acotado, ¿qué no impide que se escapen al infinito? Stieltjes encontró una solución inteligente estableciendo determinadas restricciones en cada caso.

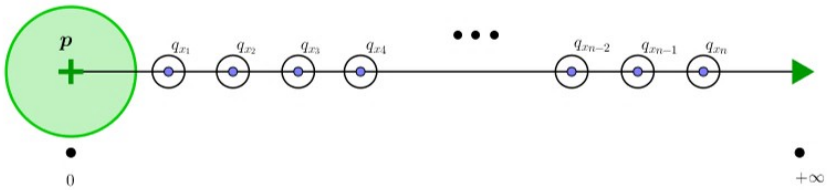
#### 3.1.1. Laguerre: $(0, \infty)$ .

Considérese una carga  $p$  positiva y fija en el origen, y  $n$  cargas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  situadas respectivamente en las posiciones variables  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  en el intervalo  $(0, +\infty)$ , con la restricción adicional de que su media aritmética está acotada por una constante positiva  $K$ , es decir,

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \leq K.$$

Entonces la posición de equilibrio de dichas cargas se logra si, y solo si,  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  son los ceros de ciertos polinomios ortogonales de Laguerre.

La siguiente imagen podría reflejar un ejemplo del problema:



**Figura 3.1.** Cargas distribuidas en el intervalo  $(0, \infty)$ .

Para este intervalo, la energía total del sistema asociada al potencial logarítmico de las  $n$  cargas viene dada por:

$$\begin{aligned} E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) &= E(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n E_{ip} \\ &= - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log |x_i - x_j| - p \sum_{i=1}^n \log x_i. \end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento que se utilizó para el caso de Jacobi, deben hallarse los valores que hacen mínima dicha energía, es decir, aquellos que verifican



$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_T = 0 \Leftrightarrow -\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} - \frac{p}{x_i} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el lema utilizado en el capítulo anterior, se puede reescribir esta condición como:

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} + \frac{p}{x_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} + \frac{p}{x_i} = 0, \quad \forall x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

donde  $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$  es el polinomio cuyos ceros satisfacen la condición de mínima energía.

Hallando mínimo común múltiplo en la expresión anterior e igualando a cero, queda:

$$f''(x_i)x_i + 2pf'(x_i) = 0$$

Sin embargo, este último polinomio es de grado  $n - 1$ , y se debe obtener exactamente  $n$  raíces. Luego la restricción  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \leq K$  debe quedar en igualdad para poder obtener la  $n$ -upla correspondiente al mínimo.

Para resolverlo, debe aplicarse el Teorema de los multiplicadores de Lagrange, considerando la función de la energía total  $E_T$  sujeta a la restricción

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = K \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i - nK = 0.$$

De aquí, la función lagrangiana resultante es

$$L_T(x, \lambda) = E_T(x) + \lambda \left( \sum_{i=1}^n x_i - nK \right)$$

Como procedimiento habitual en estos casos, se deriva la función respecto a ambas componentes y se iguala a cero, quedando

- $\frac{\partial}{\partial x_i} L_T(x, \lambda) = \frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x) + \lambda = \lambda + \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_j - x_i} - \frac{p}{x_i} = 0.$
- $\frac{\partial}{\partial \lambda} L_T(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i - nK = 0$

De la primera ecuación, se tiene

$$\lambda + \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_j - x_i} - \frac{p}{x_i} = \lambda - \frac{1}{2} \frac{f''(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{p}{x_i} = 0.$$

Y, operando,

$$x_i f''(x_i) + (-2\lambda x_i + 2p) f'(x_i) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Luego  $x_i$  es raíz de esta ecuación de grado  $n$ , y además también lo es de  $f(x)$ , por tanto, puede escribirse que

$$x f''(x) + (-2\lambda x + 2p) f'(x) = M f(x),$$

luego

$$x f''(x) + (-2\lambda x + 2p) f'(x) - M f(x) = 0,$$

para cierta constante  $M$ .

Ahora bien, la ecuación diferencial que cumplen los polinomios de Laguerre no es otra que:

$$x y''(x) + (\alpha + 1 - x) y'(x) + n y(x) = 0.$$

Igualando ambas, por ejemplo, para el término correspondiente a  $y'(x) y f'(x)$ , se obtiene una de las condiciones:  $\alpha = 2p - 1$ .

Utilizando la derivada parcial respecto de  $\lambda$  y comparando términos y coeficientes principales de los polinomios de Lagrange, se llega a que  $f(x)$  puede expresarse en términos de  $L_n^\alpha(cx)$ , donde  $\alpha$  es la citada anteriormente y  $c = \frac{n + \alpha}{K}$ .

Luego las raíces de  $f(x)$  están directamente relacionadas con  $n$ -ésimo polinomio de Lagrange en las circunstancias descritas.

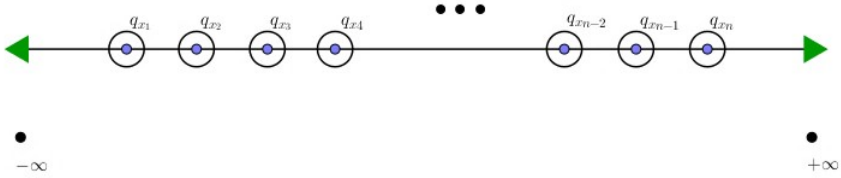
### 3.1.2. Hermite: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ .

En un razonamiento similar se encuentra el modelo de Hermite. En este caso, considérense  $n$  cargas positivas  $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  situadas libremente en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , cumpliendo esta vez la siguiente cota:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} \leq L,$$

siendo  $L$  una constante predeterminada. Entonces la única configuración que proporciona el mínimo global de la energía total del sistema de partículas, coincide con los ceros de determinados polinomios de Hermite  $H_n$ .

Como en apartados anteriores, se muestra la representación gráfica en la siguiente figura:



**Figura 3.2.** Cargas distribuidas en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

En esta ocasión, la energía total del sistema se ajusta simplemente a la expresión

$$E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = E(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log |x_i - x_j|.$$

Por ende, el mínimo se obtendrá a partir de

$$\frac{\partial}{\partial x_i} E_T = 0 \Leftrightarrow - \frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Atendiendo a los últimos resultados, no es difícil vaticinar que es paralelo encontrar aquellos valores que verifican

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_i - x_j} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} = 0, \quad \forall x_k \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

siendo  $f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$  el polinomio cuyos ceros satisfacen la condición de mínima energía.

De manera intuitiva, el problema se torna en un desarrollo similar al anterior, con la restricción considerada por Stieltjes para este caso tomada en su igualdad:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n} = L.$$

Tras su resolución, dedujo que  $f(x) = C' \cdot H_n(c'x)$ , siendo  $C'$  una constante y

$$c' = \sqrt{\frac{n-1}{2L}}.$$

Por tanto, la  $n$ -upla en la que tiene lugar la posición de mínima energía está en correspondencia con las raíces de ciertos polinomios de Hermite.

### 3.2. Heine-Stieltjes.

Stieltjes analizó una situación más generalizada relacionada con la posición de  $n$  cargas situadas libremente en el eje real y su equilibrio electrostático. El problema es el siguiente:

Dadas  $p + 1$  cargas positivas  $q_i$  situadas en posiciones iniciales  $a_i$ , donde  $a_0 < a_1 < \dots < a_p$ , encontrar todas las posibles posiciones de equilibrio  $x_k$  de  $n$  cargas unitarias distribuidas libremente en los intervalos  $[a_{i-1}, a_i]$ .

La solución del problema está ligada a la determinación de la ecuación diferencial

$$A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0,$$

donde  $A(x) = (x - a_0) \cdots (x - a_p)$ , y  $B(x)$  y  $C(x)$  son polinomios de grado  $p$  y  $p - 1$ , respectivamente, y además

$$\frac{B(x)}{A(x)} = \sum_{i=0}^p \frac{q_i}{x - a_i}.$$

Heine afirmó que, en general, dados  $A(x)$  y  $B(x)$ , existen exactamente

$$\sigma_{np} = \binom{n+p-1}{n}$$

determinaciones de  $C(x)$  para cada una de las cuales existe una solución  $y(x)$  de la ecuación diferencial anterior.

Por su parte, Stieltjes obtuvo el siguiente resultado:

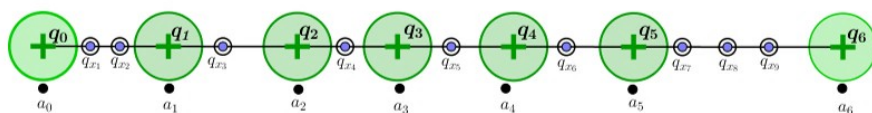
**Teorema 3.1.** Sean  $A(x)$  y  $B(x)$  polinomios dados de grado  $p + 1$  y  $p$ , respectivamente, y sean los coeficientes principales de  $A(x)$  y  $B(x)$  del mismo signo. Si los ceros de  $A(x)$  y  $B(x)$  son reales, distintos, y se alternan entre sí, entonces hay exactamente  $\sigma_{np}$  polinomios  $C(x)$  de grado  $p - 1$  de modo que la ecuación diferencial

$$A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

tiene una solución  $y(x)$  por cada determinación de  $C(x)$  que es un polinomio de grado  $n$ .

Para la demostración Stieltjes utiliza una parte de la afirmación de Heine, concretamente, que  $\sigma_{np}$  es una cota superior para el número de polinomios  $C(x)$  en cuestión. Además, independientemente de probar la existencia de esas  $\sigma_{np}$  soluciones, obtiene una caracterización sobre ellas: resulta que los  $n$  ceros de esas soluciones  $y(x)$  están distribuidos de todas las maneras posibles en los  $p$  intervalos definidos por los  $p + 1$  ceros de  $A(x)$  y, obviamente, el número de posibles distribuciones sigue siendo  $\sigma_{np}$ .

Supóngase, por ejemplo, que se tienen 9 cargas y se quieren distribuir en 6 intervalos  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], [a_2, a_3], [a_3, a_4], [a_4, a_5], [a_5, a_6]$ . Una posible combinación de ese reparto podría ser la siguiente:



**Figura 3.3.** Ejemplo de distribución de cargas para el modelo de Heine-Stieltjes.

Para esta opción existirán, por tanto, un par de polinomios  $C(x)$  e  $y(x)$  que cumplan la ecuación diferencial inicial. Pero además, existirán otros pares asociados a cada posible combinación de estas 9 cargas en los 6 intervalos. Exactamente, habrían  $\sigma_{9,6} = \binom{9+6-1}{9} = \binom{14}{9} = 2002$  pares .

*Demostración.* Se tratará de manera precedente de establecer ciertos aspectos relevantes para, en una segunda etapa de la demostración, probar la existencia y unicidad de las soluciones.

Asumiendo las condiciones anteriores  $A(x) = (x - a_0)(x - a_1) \cdots (x - a_p)$  y  $\frac{B(x)}{A(x)} = \sum_{i=0}^p \frac{q_i}{x - a_i}$ , es equivalente suponer que los ceros de  $A(x)$  alternan con los de  $B(x)$  y que los coeficientes principales tienen el mismo signo.

Sea  $C(x)$  un polinomio dado, entonces la ecuación

$$A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

no puede tener dos soluciones  $y(x)$  y  $z(x)$  linealmente independientes para un único  $C(x)$ . De no ser así, para  $x \neq a_i$  se tendría

$$A(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))' + 2B(x)((y'(x)z(x) - y(x)z'(x))) =$$

$$A(x)(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))' + 2B(x)((y'(x)z(x) - y(x)z'(x))) = 0.$$

Al resolver la ecuación diferencial,

$$\frac{(y'(x)z(x) - y(x)z'(x))'}{y'(x)z(x) - y(x)z'(x)} = \frac{-2B(x)}{A(x)}.$$

Integrando,

$$\ln(y'(x)z(x) - y(x)z'(x)) = \int \frac{-2B(x)}{A(x)} dx + K.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 y'(x)z(x) - y(x)z'(x) &= M \cdot e^{-\int \frac{2B(x)}{A(x)} dx} \\
 &= M \cdot e^{-2 \int \sum_{i=0}^p \frac{q_i}{x - a_i} dx} \\
 &= M \cdot e^{\sum_{i=0}^p \log |x - a_i|^{-2q_i}} \\
 &= M \cdot \prod_{i=0}^p |x - a_i|^{-2q_i}, \text{ con } M \text{ constante.}
 \end{aligned}$$

Sin embargo, como este último producto tiende a  $\infty$  cuando  $x \rightarrow a_i$ , conlleva una contradicción, que viene de suponer que  $y(x)$  y  $z(x)$  son dos soluciones independientes. Por tanto  $y(x) = Qz(x)$ , siendo  $Q$  una constante de manera que las funciones son linealmente dependientes.

Expuesto esto, considérese  $y(x)$  una solución polinómica de la ecuación distinta de la trivial,  $y(x) \neq 0$ . Debe ocurrir, además, que  $y(x) \neq 0$  en  $x = a_i$ , pues de lo contrario, sustituyendo en la ecuación diferencial, se tendría que

$$A(a_i)y''(a_i) + 2B(a_i)y'(a_i) + C(a_i)y(a_i) = 0.$$

Pero, por definición,  $A(a_i) = 0$  y por hipótesis  $y(a_i) = 0$ , luego

$$\underbrace{A(a_i)}_{=0} y''(a_i) + 2B(a_i)y'(a_i) + C(a_i) \underbrace{y(a_i)}_{=0} = 0,$$

lo cual implica que  $y'(a_i) = 0$ ,  $\forall i \in \{0, 1, \dots, p\}$ .

Derivando  $A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$   $k$  veces, resulta una ecuación diferencial de orden  $k + 2$  en  $y(x)$  que tiene la forma

$$A(x)y^{k+2}(x) + [KA'(x) + 2B(x)]y^{k+1}(x) + \dots = 0$$

cuyos coeficientes son nuevamente polinómicos. Sin embargo, de la expresión de  $\frac{B(x)}{A(x)}$ , se deduce  $B(a_i) = q_i A'(a_i)$ , pues:

$$\begin{aligned}
B(x) &= A(x) \cdot \left( \frac{q_0}{x - a_0} + \frac{q_1}{x - a_1} + \dots + \frac{q_p}{x - a_p} \right) \\
&= [q_0(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_p) + q_1(x - a_0)(x - a_2)\dots(x - a_p) + \dots + \\
&\quad + q_p(x - a_0)(x - a_1)\dots(x - a_{p-1})].
\end{aligned}$$

Por tanto, para  $x = a_i$ , se tiene lo propuesto.

Luego  $KA'(a_i) + 2B(a_i) \neq 0$ , de modo que  $y(x) = y'(x) = y''(x) = \dots = y^k(x) = 0$ ,  $x = a_i$ , lo que implicaría que  $y^{k+1}(x) = 0$ .

A continuación, se probará que los ceros de  $y(x)$  descansan en el intervalo  $[a_0, a_p]$ .

Reescribiendo  $y(x)$  tal que  $y(x) = f(x) = M \cdot (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n)$ ,  $M$  constante. Para  $x = x_k$ ,  $\forall k \in 1, 2, \dots, n$  resulta:

$$\begin{aligned}
A(x_k)f''(x_k) + 2B(x_k)f'(x_k) + C(x_k)\underbrace{f(x_k)}_{=0} &= 0 \Leftrightarrow \\
A(x_k)f''(x_k) + 2B(x_k)f'(x_k) &= 0.
\end{aligned}$$

Pero recordando el lema utilizado en secciones anteriores,

$$\sum_{i \neq j} \frac{1}{x_k - x_j} = \frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \forall x_k \in \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

ya la definición de  $\frac{B(x)}{A(x)}$ , resulta que  $A(x_k)f''(x_k) + 2B(x_k)f'(x_k) = 0$  se puede expresar, dividiendo por  $2f'(x_k)A(x_k)$ , como

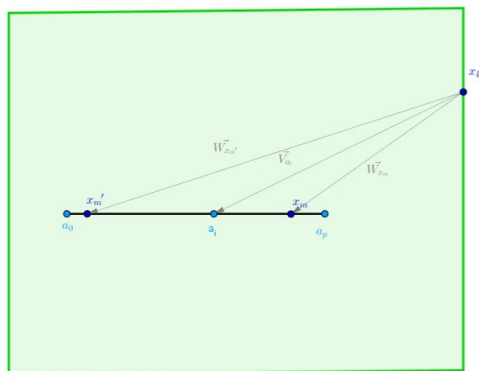
$$\frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{B(x_k)}{A(x_k)} = 0,$$

o lo que es equivalente,

$$\sum_{k \neq j} \frac{1}{x_k - x_j} + \sum_{i=0}^p \frac{q_i}{x_k - a_i} = 0.$$



Supóngase ahora que alguno de los ceros de  $f(x)$  yace fuera del intervalo  $[a_0, a_p]$  y sea  $x_k$  uno de esos ceros de manera que el segmento  $[a_0, a_p]$  y los restantes ceros ( $x_m, m \neq k$ ), permanecen ambos en un semiplano cerrado con  $x_k$  como punto frontera y el propio  $[a_0, a_p]$  en el interior abierto del semiplano. Entonces los vectores complejos  $\vec{W}_{x_m} = x_k - x_m$  y  $\vec{V}_{a_i} = x_k - a_i$  que, obsérvese, están directamente relacionados con la última expresión, forman un ángulo no mayor que  $\pi$ .



Como puede verse en la ilustración, los vectores  $\vec{V}_{a_i} = x_k - a_i$  forman un ángulo directamente menor que  $\pi$ , lo cual supone una contradicción con la última ecuación. Para argumentar esta última conclusión, debe consultarse la bibliografía del matemático Pòlya, quien realizó trabajos relacionados con ello.

Sea  $n_1, n_2, \dots, n_p$  el número de ceros de  $y(x)$  en  $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_{p-1}, a_p]$ , respectivamente, entonces se dice que  $y(x)$  es del tipo  $\{n_1, n_2, \dots, n_p\}$ , donde  $n_1 + n_2 + \dots + n_p = n$  y  $\sigma_{np}$  es el número de todas las posibles combinaciones.

Se trata de demostrar que existe exactamente una solución polinómica para cada combinación que corresponde a cada una de las  $\sigma_{np}$  determinaciones del polinomio  $C(x)$  de grado  $p - 1$ .

■ EXISTENCIA

Para probar la existencia, considérense  $x_1, x_2, \dots, x_n$  puntos variables, todos diferentes de  $a_i$  y distribuidos en el segmento  $[a_0, a_p]$ , de manera que en cada subintervalo  $[a_{i-1}, a_i]$ ,  $i \in \{1, \dots, p\}$ , se encuentre una cierta cantidad  $n_i$  de esos puntos verificando  $\sum_{i=1}^p n_i = n$ . Entonces para cada  $x_k$  variando en un intervalo fijo, la expresión de la energía de ese estado vendría dada por

$$E_T = - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \log|x_k - x_j| - \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ k=1, \dots, n}} q_i \log|x_k - a_i|,$$

y utilizando un argumento análogo al de los casos anteriores, la posición de equilibrio se obtendría de la solución de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} E_T = 0 &\Leftrightarrow - \frac{\partial}{\partial x_i} E_T(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{|x_k - x_j|} + \sum_{\substack{i=1, \dots, p \\ k=1, \dots, n}} \frac{q_i}{|x_k - a_i|} = 0. \end{aligned}$$

Ahora bien, por lo visto anteriormente, esto es equivalente a que

$$\frac{1}{2} \frac{f''(x_k)}{f'(x_k)} + \frac{B(x_k)}{A(x_k)} = 0 \Leftrightarrow A(x_k) f''(x_k) + 2B(x_k) f'(x_k) = 0,$$

siendo  $f(x)$  el polinomio cuyos ceros son los  $x_k, k \in \{1, \dots, n\}$  y que, por tanto, divide a esta última ecuación. Es decir, que para  $x = x_k$ , denotando por  $-C(x)$  al polinomio que establece la proporción, queda

$$A(x_k) f''(x_k) + 2B(x_k) f'(x_k) = 0 \Leftrightarrow A(x_k) f''(x_k) + 2B(x_k) f'(x_k) = -C(x_k) f(x_k),$$

verificando así la ecuación que responde al problema.

Por otro lado, utilizando el argumento para la demostración de la interpretación electrostática en el caso de Jacobi, es claro que el sistema  $\{x_1, \dots, x_n\}$  está únicamente determinado. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no es lo mismo probar que para cierto  $\{x_k\}$  se tiene la energía mínima, a que esto sea cierto para todas las posibles combinaciones en las que se pueden distribuir las cargas unitarias. A pesar de ello, puede afirmarse que las  $\sigma_{np}$  determinaciones aportan mínimos energéticos relativos.

■ UNICIDAD

Para probar la unicidad, considérense los pares  $\{C(x), y(x)\}$  y  $\{D(x), z(x)\}$ ,  $C(x) \neq D(x)$ , de modo que ambos son soluciones del problema para la misma distribución de  $x_k$  en los intervalos  $[a_{i-1}, a_i]$ . Supóngase también que sendos polinomios  $y(x)$  y  $z(x)$  tienen coeficientes principales positivos. Entonces, la ecuación

$$A(x)y''(x) + 2B(x)y'(x) + C(x)y(x) = 0$$

también la verifica el par  $\{D(x), z(x)\}$  y queda

$$A(x)z''(x) + 2B(x)z'(x) + D(x)z(x) = 0.$$

Combinando ambas, resulta

$$A(x)(y'z - yz')' + 2B(x)(y'z - yz') + (C(x) - D(x))yz = 0,$$

y dividiendo entre  $A(x)$  se tiene

$$(y'z - yz')' + 2\frac{B(x)}{A(x)}(y'z - yz') + \frac{C(x) - D(x)}{A(x)}yz = 0.$$

Análogamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}(y'z - yz') + 2\sum_{i=0}^p \frac{q_i}{x - a_i}(y'z - yz') + \frac{C(x) - D(x)}{A(x)}yz = 0.$$

Definiendo una nueva función  $H(x) = \prod_{i=0}^p |x - a_i|^{2q_i}$  se tiene, para  $x \neq a_i$ ,

$$H(x)\frac{\partial}{\partial x}(y'z - yz') + 2H(x)\sum_{i=0}^p \frac{q_i}{x - a_i}(y'z - yz') + H(x)\frac{C(x) - D(x)}{A(x)}yz = 0,$$

luego

$$H(x)\frac{\partial}{\partial x}(y'z - yz') + \frac{\partial}{\partial x}H(x)(y'z - yz') = H(x)\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}yz.$$

En definitiva, queda

$$\frac{\partial}{\partial x}[H(x)(y'z - yz')] = H(x)\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}yz.$$

Fijado el intervalo  $[a_{i-1}, a_i]$ , supóngase que en él, la función  $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}$  es no negativa para  $x \in (a_{i-1}, a_i)$ . Entonces, entre dos ceros consecutivos de  $y(x)$  en el intervalo,  $z(x)$  debe cambiar de signo al menos una vez. De no ser así,  $y(x)z(x)$  debe permanecer positivo o negativo y consecuentemente  $H(y'z - yz')$  ser creciente o bien decreciente para  $\alpha < x < \beta$ , siendo  $\alpha$  y  $\beta$ ,  $\alpha < \beta$ , las dos raíces de  $y(x)$  mencionadas.

Sin embargo, para  $x = \alpha + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , la última expresión toma el signo de  $y'z$  o de  $yz$ , mientras que para  $x = \beta - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  hace lo propio con  $y'z$  o  $-yz$ . De aquí, si  $yz > 0$ ,  $H(y'z - yz')$  cambia de signo positivo a negativo, y si  $yz < 0$  de negativo a positivo, siendo ambas situaciones incoherentes con la monotonía de la expresión definida anteriormente.

Bajo la suposición anterior para  $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}$ , debe ocurrir que  $z(x)$  cambie de signo también en  $[a_{i-1}, \gamma]$  y en  $[\delta, a_i]$ , siendo  $\delta$  y  $\gamma$  el primer y último cero, respectivamente, de  $y(x)$  en  $[a_{i-1}, a_i]$ . En otro caso,  $y(x)$  y  $z(x)$  deberían tener cada una signo constante en esos intervalos y, además, coincidir en signo en determinado intervalo por ser funciones cuyos ceros pertenecen a la misma combinación (una de las posibles  $\sigma_{np}$ ). Entonces,  $H(y'z - yz')$  debería ser creciente. Sin embargo, se anula cuando  $x \rightarrow a_{i-1}^+$  y también cuando  $x \rightarrow a_i^-$ , luego  $y'z - yz'$  debería ser positivo en  $[a_{i-1}, \gamma]$  y negativo en  $[\delta, a_i]$ . Ahora bien, para  $x = \gamma$ , el signo de  $y'z - yz'$  se reduce al signo de  $y'z$  por ser  $\gamma$  raíz de  $y(x)$ , que además es el mismo que  $y'y$  en  $x = \gamma - \epsilon$ ,  $\epsilon >$ , donde es negativo. Por tanto, es una contradicción al igual que lo sería razonando de la misma manera para  $x = \delta$ .

Finalmente, nótese que, sin olvidar la suposición para  $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}$  de que la función  $z(x)$  debe anularse en  $[a_{i-1}, a_i]$ , debería hacerlo incluso si  $y(x)$  no tuviese ceros en el intervalo. De no ser así, a partir de la expresión

$$\frac{\partial}{\partial x} [H(x)(y'z - yz')] = H(x) \frac{D(x) - C(x)}{A(x)} yz$$

se concluye que la función  $H(x)(y'z - yz')$  debería ser monótona, lo cual es imposible dado que  $H(x)$  se anula para  $x = a_{i-1}$  y  $x = a_i$ .

En definitiva, este argumento proporcionaría al menos un cero más para  $z(x)$  que para  $y(x)$  en el intervalo  $[a_{i-1}, a_i]$ , lo cual es imposible pues se ha asumido que las raíces de ambas funciones pertenecen a la misma combinación.

Por consiguiente,  $\frac{D(x) - C(x)}{A(x)}$  debe ser negativa para algunos valores de  $x$ ,  $x \in (a_{i-1}, a_i)$ , pero intercambiando  $\{C(x), y(x)\}$  con  $\{D(x), z(x)\}$  es claro que la misma función puede ser también positiva para algunos  $x$ ,  $x \in (a_{i-1}, a_i)$ . De aquí,  $D(x) - C(x)$  debe variar de signo en el intervalo al menos una vez, y como esto es válido  $\forall i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , resulta que  $D(x) - C(x)$  cambia de signo al menos  $p$  veces en el intervalo  $[a_0, a_p]$ , hecho incompatible con la definición de la función, pues  $\deg(D(x) - C(x)) = p - 1$ .

Queda probado de esta manera que existen polinomios  $y(x)$  soluciones de la ecuación diferencial inicial, cuyos ceros  $x_i$  se corresponden con las posiciones que satisfacen el equilibrio electrostático para este problema. Además, cada polinomio se asocia únicamente con otro  $C(x)$  verificando dicha ecuación, siendo estos pares únicos y habiendo tantos como posibles maneras de distribuir las cargas en los intervalos.



## Conclusión y cuestiones abiertas.

En este trabajo se pretendía relacionar la teoría de polinomios ortogonales clásicos con el campo de la electrostática.

Efectivamente, se ha conseguido establecer una relación directa entre los polinomios cuyos ceros se corresponden con la posición de equilibrio electrostático de un número finito de cargas en un recinto y los polinomios ortogonales clásicos asociados a dicho lugar.

Además, se ha presentado en una situación más generalizada respecto al modelo de Jacobi: el de "Heine-Stieltjes", cuyas soluciones también obedecen a una ecuación diferencial con coeficientes polinómicos. Sin embargo, esta última ya no se escribe en términos de las verificadas por los polinomios ortogonales clásicos, lo cual da lugar a cuestionarse si es posible extender el problema a otras familias de polinomios.

De hecho, tras estudiar los modelos anteriores, surgen de forma natural determinadas cuestiones que derivan en nuevas investigaciones acerca de las aplicaciones electrostáticas. Por un lado, se desencadenan trabajos relacionados con polinomios distintos a los clásicos, mientras que, por otro, emergen estudios que consideran la posibilidad de tratar con ceros complejos cuando estos existan. También aparecen preguntas como "¿qué otros tipos de equilibrio pueden estar relacionados con los polinomios ortogonales?"

Asimismo, se investigan nuevos e interesantes problemas relacionados con los modelos electrostáticos que tienen su origen en polinomios de ortogonalidad no-estándar o con distintas aplicaciones físicas.

Sin ir más lejos, se ha estudiado que determinados sistemas de la mecánica cuántica de múltiples partículas, especialmente ciertos tipos conocidos como CSM (Calogero-Sutherland-Moser), describen sus posiciones de equilibrio a través de los polinomios ortogonales clásicos.

En definitiva, aunque estas son solamente algunas cuestiones y ejemplos sobre los que aún se están realizando estudios e investigaciones que relacionan las propiedades de los polinomios ortogonales con numerosos campos de distintas materias, es evidente que se trata de una disciplina que ofrece gran posibilidad de líneas futuras de investigación.



---

## Bibliografía

- [1] G.SZEGO. *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society. Vol 23, fourth edition, 1975.
- [2] GALLIANO VALENT, WALTER VAN ASSCHE. *The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials: additional material*.
- [3] F. MARCELLÁN, A.MARTÍNEZ-FINKERSHTEIN, P.MARTÍNEZ-GONZÁLEZ. *Electrostatic models for zeros of polynomials: old, new, and some open problems*.
- [4] DIMITAR K. DIMITROV, WALTER VAN ASSCHE. *Lamé differential equations and electrostatics*.
- [5] LUIS ALEJANDRO MOLANO MOLANO. *An electrostatic model for zeros of classical Laguerre polynomials perturbed by a rational factor*.
- [6] THEODORE SEIO CHIHARA. *An introduction to orthogonal polynomials. Vol 13. Mathematics and its Applications*.
- [7] CHENEY, E.W. *Introduction to approximation theory. Providence: American Mathematical Society. 1998*.
- [8] MOURAD E.H. ISMAIL. *An electrostatic model for zeros of general orthogonal polynomials*.
- [9] RECURSO WEB [https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/5619/Tesis\\_Herbert\\_ALonso\\_Duenas.pdf](https://e-archivo.uc3m.es/bitstream/handle/10016/5619/Tesis_Herbert_ALonso_Duenas.pdf) .

- [10] RECURSO WEB: <http://fernandorevilla.es/blog/2017/01/04/teorema-de-los-circulos-de-gershgorin/> .
- [11] RECURSO WEB: [http://riull.ull.es/xmlui/bitstream/915/179/1/ PO-LINOMIOS +ORTOGONALES.+PROPIEDADES+Y+APLICACIONES.pdf](http://riull.ull.es/xmlui/bitstream/915/179/1/PO-LINOMIOS+ORTOGONALES.+PROPIEDADES+Y+APLICACIONES.pdf) .





---

## Lista de Figuras

1.1. Ceros de dos polinomios ortogonales consecutivos.....	8
1.2. Polinomios de Chebyshev. ....	11
1.3. Polinomios de Legendre.....	12
2.1. Cargas distribuidas en el intervalo $(-1,1)$ . ....	19
3.1. Cargas distribuidas en el intervalo $(0, \infty)$ . ....	26
3.2. Cargas distribuidas en el intervalo $(-\infty, \infty)$ . ....	29
3.3. Ejemplo de distribución de cargas para el modelo de Heine-Stieltjes. ....	31



# Orthogonal Polynomials. Electrostatic Application.

**Cristina Desirée Praena Pacheco**  
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas  
Universidad de La Laguna  
alu0100531039@ull.edu.es

## Abstract

This paper is devoted to classical orthogonal polynomials and their relation to the field of electrostatics.

In a first contact, the definition of orthogonal polynomial is introduced, as well as the classic families: Jacobi, Laguerre and Hermite. The second chapter covers "The Problem of Stieltjes". Its name is in honor to the Dutch mathematician Thomas Joannes Stieltjes, who showed that  $n$  unit charges reach their equilibrium position within a closed interval, governed by two positive charges at their boundaries, just where the Jacobi polynomials are equal to zero.

Several extensions of the previous model are described in the third chapter. In the case of non-bounded intervals, the same happens for Laguerre's orthogonal polynomials: by placing a positive charge at the origin and leaving  $n$  free unit charges in the positive real half-axis, it turns out that its minimum energy is given in the zeros of these polynomials. Similarly, it happens in the case of taking as reference interval the real axis. In this case there are no charges that limit the enclosure and the main polynomials are the Hermite type. Finally, the "Heine-Stieltjes" model is presented, which studies where  $n$  charges reach equilibrium distributed in  $p$  intervals considering all possible ways of dispersing in them.

## 1. Introduction

The Orthogonal Polynomial Theory concerns a relevant role in the field of Applied Mathematics, not only in relation to the theoretical framework but also to offer a wide range of applications.

The relationship between the classical families of orthogonal polynomials and a known specialty of physics, the electrostatics, was investigated by Thomas Jan Stieltjes (1856-1894). Their works were valid not only to establish an irrefutable correspondence between the two disciplines, but also opened several fronts of research.

## 2. Classical Orthogonal Polynomials.

The orthogonal polynomials are associated with a weight function  $w(x)$  that must satisfy certain conditions. From this function the scalar product for polynomials  $p(x), q(x)$  is defined as follows:

$$\langle p, q \rangle_w := \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx.$$

With these basic concepts can be defined the sequence of orthogonal polynomials  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  respect of the weight  $w(x)$  as polynomials that fulfill:

- $\forall n \in \mathbb{N}, \text{deg}(p_n(x)) = n.$
- $\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = 0 \iff m \neq n.$

In addition, it is shown that all orthogonal polynomials verify certain properties:

- Recurrence. Orthogonal polynomials satisfy the next "three terms" relation:

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)p_n(x) - \beta_n p_{n-1}(x)$$

- Minimal norm. Of all the monic polynomials, the orthogonal ones are those that have minimum norm.

- Zeros. All roots of a family of orthogonal polynomials are simple, real, and into the weight function definition segment  $(a, b).$

There are three big classic families: Jacobi, Laguerre and Hermite. They are differentiated by their weight function and their definition interval.

The Jacobi family is defined in  $(-1, 1),$  is denoted by  $P_n^{\alpha, \beta}(x),$  and for  $\alpha > -1$  and  $\beta > -1, w_{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta.$  Meanwhile, the Laguerre polynomials lie in the interval  $(0, +\infty)$  and are known in literature as  $L_n^\alpha(x),$  whose weight function is  $w(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1.$

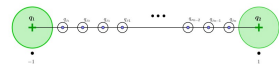
Finally, the Hermite family, which covers the real axis and is denoted by  $H_n(x),$  with weight function  $w(x) = e^{-x^2}.$

## 3. Physical Application. Electrostatic interpretation of zeros. Stieltjes.

It was Stieltjes, who at the end of the 19th century found an interpretation of the zeros of the orthogonal classical polynomials in terms of an electrostatic model. He interpreted the following:

"Let  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$   $n$  points of the interval  $(-1, 1)$  in which are located  $n$  unit charges of the same sign and two positive charges  $q_1$  and  $q_2$  in the ends  $-1$  and  $1$  respectively. Then, if the interaction of the charges is defined by a logarithmic potential, the total energy of the system obeys the electrostatic equilibrium in  $x_1, x_2, \dots, x_n$  precisely when these points are just the zeros of the orthogonal polynomials of Jacobi."

The following image show an example:



## 4. Extensions of the Stieltjes model.

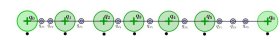
Stieltjes considered similar interpretations to Jacobi's for the zeros of the Laguerre and Hermite polynomials.

Considering a positive and fixed at the origin charge  $p,$  and  $n$  charges  $\{q_i\}_{i=1}^n$  located respectively in the variable positions  $\{x_i\}_{i=1}^n$  in the interval  $(0, +\infty),$  with the restriction that its arithmetic mean is bounded by a positive constant  $K.$  Then the equilibrium position of these charges is achieved if and only if  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  are the zeros of the orthogonal polynomials of Laguerre. The following image might reflect it:



For the case of Hermite, he obtained expected results:  $n$  free charges on the real axis reach their equilibrium just at those points  $x$  where the Hermite polynomial vanishes.

Finally, the Heine-Stieltjes model studies the analogous situation for a special case:  $n$  charges distributed in  $p$  intervals in every possible way. It is shown that there are exactly  $\binom{n+p-1}{n}$  solutions, each one associated with the equilibrium position of each combination.



## References

- [1] G.SZEGO. *Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, Vol 23, fourth edition, 1975.*
- [2] GALLIANO VALENT, WALTER VAN ASSCHE. *The impact of Stieltjes' work on continued fractions and orthogonal polynomials: additional material.*