Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Juan Jesús Dóniz Labrador

Funciones raras en Análisis Real

Pathological functions in Real Analysis

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2017

Dirigido por

Antonio Bonilla Ramírez

Antonio Bonilla Ramírez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de estas notas es mostrar diferentes funciones patológicas como funciones continuas y nulas en los números irracionales y positivas en números racionales, funciones continuas y no diferenciables en ninguna parte, funciones diferenciables nunca monótonas, funciones nunca analíticas de clase infinita, funciones singulares y funciones con derivada acotada y no integrable.

Abstract

The aim of this notes is to show different pathological functions as continuous and zero functions in irrational numbers and positives in rational numbers, continuous nowhere differentiable functions, nowhere monotone differentiable functions, infinitely differenctiable nowhere analytic functions, singular functions and functions with bounded derivative and no integrable.

Contenido

Introducción

Dirichlet da un ejemplo de una función que no es continua en ninguna parte.

$$D(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ \\ 1 \; si \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esta función es el ejemplo usual de función acotada que no es Riemann integrable en cualquier intervalo. Es natural preguntarse si es posible construir un función integrable Riemann que se anule en los irracionales y que sea positiva en los racionales. En el año 1875, K.J.Thomae modificó la *Función de Dirichlet* de la siguiente manera:

$$T(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \; x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \\ \\ \frac{1}{q} \;\; si \; x = \frac{p}{q} \text{ donde p y q son primos entre si} \\ \\ 1 \;\; si \; x = 0 \end{cases}$$

La Función de Thomae es continua en los números irracionales y discontinua en los racionales, es Riemann integrable, se anula en los irracionales y es positiva en los racionales.

Es un hecho establecido que, dado cualquier conjunto numerable $D \in \mathbb{R}$, se puede construir una función continua sobre $\mathbb{R}$ de tal modo que ella deja de ser diferenciable precisamente sobre dicho conjunto. Imaginarse la gráfica de una **función continua que no sea diferenciable en ningún punto** de su dominio es una tarea extremadamente difícil. Lagrange, en 1777, era uno de los que creía que toda función continua era diferenciable excepto para ciertos valores particulares. Compartiendo la misma opinión de Lagrange sobre este punto de vista se encontraba, el también matemático, Ampere y algunos otros. Riemann, sin embargo, sostenía puntos de vista diferente para ciertas funciones continuas representadas por series. De hecho, en una conferencia en 1861, afirmó, como conjetura, que la función R, definida por

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n^2 x)}{n^2}$$

era continua pero nunca diferenciable. La continuidad es, por supuesto, una consecuencia fácil de la *prueba M de Weierstrass*, pero la no-diferenciabilidad, si tal cosa es posible, no es trivial. Riemann jamás presentó prueba alguna de su conjetura.

Sin embargo, la afirmación de Riemann accionó la curiosidad y la duda de K. Weierstrass quien, en un intento por demostrarla, se encontró con su primer ejemplo de una función continua nunca diferenciable. Pero Weierstrass no era el único que dudaba de la afirmación de Riemann. En 1916 Hardy demostró que R no era diferenciable en todos los múltiplos irracionales de π, pero que era diferenciable en algunos números racionales.

Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **nunca monótona** si no existe un subintervalo cerrado $[a, b]$ con $a < b$, sobre el cual f es monótona.

Construir una función siempre discontinua y nunca monótona es muy fácil. Por ejemplo, la función característica en $\mathbb{Q}$, f= $\chi_{\mathbb{Q}}$, es de este tipo. Observemos que una función nunca monótona no debe confundirse con una función que no es monótona en $[0, 1]$. ¿Existen funciones continuas nunca monótonas? La respuesta, como ha de esperarse, es afirmativa. En efecto, teniendo en cuenta el *Teorema de diferenciabilidad de Lebesgue* , se sigue que toda función continua nunca diferenciable en $[0, 1]$ es una función continua nunca monótona. En particular, las funciones continuas nunca diferenciables son nunca monótonas.

En el transcurso del siglo XVII a los matemáticos les era imposible determinar si existían **funciones siempre diferenciables pero nunca monótonas**. Notemos que para que una tal f exista debe ocurrir que los conjuntos

$$\{x : f'(x) > 0\} \quad \text{y} \quad \{x : f'(x) < 0\}$$

sean densos en $[0, 1]$. Dini era uno de los que creía que dichas funciones podían existir, mientras que P. du Bois-Reymond tenía la presunción de que funciones nunca monótonas no podían ser diferenciables.

En 1887, Köpcke a fuerza de coraje y perseverancia dio a conocer, a través de una construcción extremadamente complicada, una función diferenciable nunca monótona. Nuevas funciones de este tipo fueron dadas por otros matemáticos, todas esas construcciones seguían siendo difíciles y largas (la más corta constaba de 10 páginas).

Casi 100 años después, en 1974, Katznelson y Stromberg reviven la investigación al construir otra función diferenciable nunca monótona pero mucho más simple que la dada por Köpcke.

Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es analítica en $x_0 \in \mathbb{R}$ si f admite un desarrollo en series de Taylor con radio de convergencia positivo en x_0, y es de clase C^∞ si f posee derivada continua de todos los órdenes; es decir, si $f^{(n)}$ existe y es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Debemos recordar que para que la función f de clase C^∞ en un intervalo de $\mathbb{R}$ sea analítica, no es suficiente que su serie de Taylor posea, en cada punto, un radio de convergencia positivo; es necesario, además, que la suma de dicha serie sea igual a f.

Por supuesto, toda función analítica es de clase C^∞; sin embargo, el recíproco no es, en general, válido.

Uno de los ejemplos más sencillos y relativamente simple de una función de **clase C^∞ sobre $\mathbb{R}$ que no es analítica en ningún punto**, fue construido por Mathias Lerch en el año 1888, y es el siguiente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{cos(a^k x)}{k!}$$

con a impar y mayor que 1.

Otro ejemplo, más reciente y debido a Kent G. Merryfield de una función infinitamente diferenciable que no es analítica en cualquier punto puede ser construido por medio de una serie de Fourier de la siguiente manera. Sea $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de las potencias de 2 y definamos $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \sum_{k \in A} e^{-\sqrt{k}} cos(kx).$$

Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **singular** si satisface:

a) f es continua en $[a, b]$.
b) f es creciente.
c) $f(a) = f(b)$.
d) Existe un conjunto de medida nula N tal que $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b] \backslash N$.

Un ejemplo estandar de función singular es la función de Cantor, también llamada la escalera del diablo.

El primer ejemplo de una **función derivable con derivada acotada pero no integrable** se debe a Volterra, el cual data de 1881. La construcción de la función de Volterra se basa esencialmente en la función f dada por $f(x) = x^2 sen(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$ cuya derivada está dada por $f'(x) = 2xsen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ y $f'(0) = 0$. Si se mira superficialmente la construcción de la función de Volterra, puede quedar la impresión de que la no integrabilidad de la derivada se debe a que la función en la que se basa la construcción, oscila infinitas veces alrededor del origen, por esta razón presentamos en este capítulo una función similar a la de Volterra, cuya función base, que se utiliza para su construcción tiene una derivada con mejor comportamiento. Las ideas que aplicamos son las mismas que las del ejemplo de Volterra.

Para construir las funciones anteriormente mencionadas usaremos un conjunto de Cantor generalizado. La no integrabilidad se probará usando la caracterización de las funciones integrables Riemann en términos de sus discontinuidades.

Las funciones que construiremos serán derivables en [0, 1] con derivada discontinua en un conjunto de Cantor generalizado de medida $\frac{1}{2.}$

1

Funciones nulas en los irracionales y positivas en los racionales.

1.1. La Función de Thomae

Dirichlet da un ejemplo de una función que no es continua en ninguna parte.

$$D(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \\ 1 \; si \quad x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esta función es el ejemplo usual de función acotada que no es Riemann integrable en cualquier intervalo. Es natural el preguntarse si es posible construir un función integrable Riemann que se anule en los irracionales y que sea positiva en los racionales. En el año 1875, K.J.Thomae modificó la *Función de Dirichlet* de la siguiente manera:

$$T(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \\ \frac{1}{q} \; si \; x = \frac{p}{q} \text{ donde p y q son primos entre si} \\ \\ 1 \; si \; x = 0 \end{cases}$$

Teorema 1.1. *La Función de Thomae es continua en los números irracionales y discontinua en los racionales.*

Demostración. Veamos, en primer lugar, que T es discontinua sobre $\mathbb{Q}$. Sea $x_0 = \frac{p}{q}$ un número racional irreducible arbitrario. Como el conjunto de los números irracionales es denso en $\mathbb{R}$, podemos elegir una sucesión de números irracionales, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_n \to x_0$ cuando $n \to \infty$.

Por definición, $T(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mientras que T(x_0)= $\frac{1}{q} \neq 0$, es decir, $\lim_{n\to\infty} T(x_n) \neq T(x)$. Esto prueba la discontinuidad de T en $x_0 \in \mathbb{Q}$ y como x_0 es arbitrario, concluimos que T es discontinua sobre $\mathbb{Q}$.

Para probar que T es continua sobre los irracionales, será suficiente demostrarlo en los irracionales positivos, $\mathbb{I}^+$. Tomemos cualquier $x_1 \in \mathbb{I}^+$ y sea $0 < \varepsilon < 1$. Elijamos un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Nuestro objetivo es determinar un intervalo abierto con centro en x_0, digamos J, que no contenga ningún racional de la forma

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{2}{5}, \quad \ldots, \quad \frac{N-1}{N}.$$

□

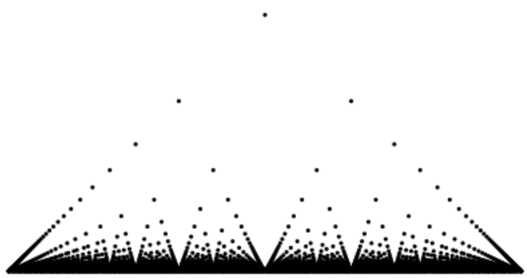


Figura 1.1. Función de Thomae

Supongamos que hemos obtenido el intervalo J y tomemos cualquier $x \in J$. Notemos ahora que:

- si x es irracional, entonces $T(x) = T(x_1) = 0$ y en consecuencia
$$|T(x) - T(x_1)| = 0 < \varepsilon.$$
- si x es racional, entonces dicho número no es ninguno de los que aparecen en la sucesión anterior y, en consecuencia, su denominador debe ser mayor que N, es decir, x es de la forma $\frac{p}{q}$ con $q > N$ y, por consiguiente,
$$|T(x) - T(x_1)| = |T(x)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Esto demuestra la continuidad de T en x_1 y la prueba finalizará una vez hayamos construido el intervalo J.

El procedimiento para obtener el intervalo abierto J es el siguiente: comenzamos escogiendo un $\delta_1 > 0$ de modo que el intervalo $(x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1)$ no contenga ningún número natural. De inmediato seleccionamos otro $\delta_2 > 0$ tal que el intervalo abierto $(x_1 - \delta_2, x_1 + \delta_2)$ no contenga ningún racional de la forma $\frac{m}{2}$ con m y 2 primos entre sí. Siguiendo con este procedimiento, podemos hallar un $\delta_k > 0$ tal que el intervalo $(x_1 - \delta_k, x_1 + \delta_k)$ no contenga ningún racional de la forma $\frac{m}{k}$, con m y k primos entre sí y $k = 1, 2, ..., N$.

Definiendo $\delta = min\{\delta_1, ..., \delta_N\}$, resulta que el intervalo $J = (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ no contiene ningún racional de los que aparecen en la anterior sucesión y la demostración concluye.

Corolario 1.2. *La Función de Thomae es Riemann integrable, se anula en los irracionales y es positiva en los racionales.*

Demostración. Su conjunto de discontinuidades es $\mathbb{Q}$ que tiene medida de Lebesgue cero.

Si bien es cierto que la función $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida anteriormente es únicamente continua en los irracionales, el siguiente resultado nos muestra que es imposible construir una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólamente en los racionales.

Teorema 1.3. *No existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua solamente en los racionales.*

Demostración. Supongamos que existe una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que es únicamente continua en los racionales y sea g la función definida como T anteriormente. Tomemos un número racional cualquiera x_0 en (0,1). Como f es continua en x_0, existe un $\delta > 0$ tal que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq$ (0,1) y,

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$$

siempre que

$$|x - x_0| < \delta.$$

Escojamos ahora a_1 y b_1 de modo que $[a_1,b_1] \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Entonces, para todo $x, y \in [a_1, b_1]$ se cumple que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

.

El siguiente paso es elegir arbitrariamente un número irracional $y_0 \in (a_1, b_1)$ y usar la continuidad de T en y_0 para obtener, como en el paso anterior, puntos a_2 y b_2 tales que $[a_2,b_2] \subseteq (a_1, b_1)$ y

$$|T(x) - T(y)| < 1$$

para todo $x, y \in [a_2, b_2]$. En particular,

$$|f(x) - f(y)| < 1 \quad ; \quad |T(x) - T(y)| < 1$$

para todo $x, y \in [a_2, b_2]$.

Repitiendo el argumento anterior pero ahora con el intervalo (a_2, b_2) en lugar del (0,1), podemos construir ahora un intervalo $[a_3,b_3] \subseteq (a_2, b_2)$ tal que las desigualdades

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2} \quad ; \quad |T(x) - T(y)| < \frac{1}{2}$$

se cumplan para todo $x, y \in [a_3, b_3]$.

Continuando con este proceso indefinidamente, se construye una sucesión de intervalos cerrados $([a_n, b_n])_{n\to 1}^{\infty}$ tal que

1. $(0, 1) \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq ... \supseteq [a_n, b_n] \supseteq ...,$
2. $\lim_{n\to\infty}$ longitud $([a_n, b_n]) = 0, y$
3. $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2^{n-2}} \quad ; \quad |T(x) - T(y)| < \frac{1}{2^{n-2}}$ para todo $x, y \in [a_n, b_n]$.

Por el *Teorema de los intervalos encajados de Cantor*, existe un único punto $c \in (0, 1)$ tal que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}.$$

Como f y T son funciones continuas en ese punto, resulta que c debe ser, al mismo tiempo, tanto racional como irracional. Esta contradicción revela que dicha función f no existe.□

1.2. Diferenciabilidad de la Función de Thomae.

Teorema 1.4. *La Función de Thomae no es diferenciable en ningún punto.*

Demostración. Es suficiente ver que T no es una función diferenciable sobre los irracionales. Esto proviene del siguiente hecho: $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un término $j_n \in \mathbb{Z}$ tal que $|\frac{j_n}{n} - a| \leq \frac{1}{n}$. Por definición, $T(\frac{j_n}{n}) \geq \frac{1}{n}$. Entonces,

$$\frac{|T(\frac{j_n}{n}) - T(a)|}{|\frac{j_n}{n} - a|} = \frac{T(\frac{j_n}{n})}{|\frac{j_n}{n} - a|} \geq 1 \qquad \forall n$$

.

Puesto que $\frac{j_n}{n} \to a$ cuando $n \to \infty$, esta aproximación racional de a nos dice que la derivada no puede ser cero. Sin embargo, desde el punto de vista de una aproximación irracional, aseguramos que si existe debe ser cero. □

2

Funciones continuas nunca diferenciables.

2.1. Introducción

Es un hecho establecido que, dado cualquier conjunto numerable $D \in \mathbb{R}$, se puede construir una función continua sobre $\mathbb{R}$ de tal modo que ella deja de ser diferenciable precisamente sobre dicho conjunto. En efecto, sea $D = \{d_1, d_2, ...\}$ un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$ y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales positivos tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty.$$

Podemos tomar, por ejemplo, $x_n = \frac{1}{2^n}$ para n=1, 2, ... Para cada $x \in \mathbb{R}$, consideremos la función $h_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$h_x(t) = \begin{cases} 1 \; si \quad t < x, \\ \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ahora, la función $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n h_n(d_n)$$

que es continua excepto en los puntos de D y entonces la función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_0^x g(t)dt$$

es continua, acotada y, gracias al *Teorema Fundamental del Cálculo*, deja de ser diferenciable exactamente en los puntos de D.

Imaginarse la gráfica de una función continua que no sea diferenciable en ningún punto de su dominio es una tarea extremadamente difícil. Lagrange, en 1777, era uno de los que creía que toda función continua era diferenciable excepto para ciertos valores particulares. Compartiendo la misma opinión de Lagrange sobre este punto de vista se encontraba, el también matemático, Ampere y algunos otros. Riemann, sin embargo, sostenía puntos de vista diferente para ciertas funciones continuas representadas por series. De hecho, en una conferencia en 1861, afirmó, como conjetura, que la función R, definida por

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n^2 x)}{n^2}$$

era continua pero nunca diferenciable. La continuidad es, por supuesto, una consecuencia fácil de la *prueba M de Weierstrass*, pero la no-diferenciabilidad, si tal cosa es posible, no es trivial. Riemann jamás presentó prueba alguna de su conjetura.

Sin embargo, la afirmación de Riemann accionó la curiosidad y la duda de K. Weierstrass quien, en un intento por demostrarla, se encontró con su primer ejemplo de una función continua nunca diferenciable. Pero Weierstrass no era el único que dudaba de la afirmación de Riemann. En 1916 Hardy demostró que R no era diferenciable en todos los múltiplos irracionales de π, pero que era diferenciable en algunos números racionales.

2.2. Función de Weierstrass

Teorema 2.1. ***(K. Weierstrass)*** *Sea $b \in (0,1)$ y a un entero impar tal que $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Entonces la función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$$

es continua y no es derivable en ningún punto.

Demostración. Comencemos estudiando la continuidad de la función. Observemos que, como $0 < b < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} b^k = \frac{1}{1-b} < \infty$. Si a esto le sumamos que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |b^n cos(a^n \pi x)| \leq b^n$$

nos da, aplicando la prueba M de Weierstrass, que

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$$

converge uniformemente a la función $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$ sobre $\mathbb{R}$.

La continuidad de W proviene de la convergencia uniforme de series.

Ahora es el turno de estudiar la derivabilidad.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{cos(a^n\pi(x+h)) - cos(a^n \pi x)}{h} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} + \sum_{n=m}^{\infty} = S_m(h) + R_m(h). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Por el *Teorema del Valor Medio* tenemos:

$$|cos(a^n\pi(x+h)) - cos(a^n\pi x)| \leq a^n|h|\pi$$

por lo que si $|h| < 1$

$$|S_m(h)| \leq \sum_{n=0}^{m-1} \pi a^n b^n = \pi \frac{a^m b^m - 1}{ab-1} < \pi \frac{a^m b^m}{ab-1}.$$

En lo que resta estimaremos $|R_m(h)|$ por abajo.

Escribimos $a^m x = \alpha_m + \upsilon_m$ con α_m entero y $\frac{-1}{2} < \upsilon_m < \frac{1}{2}$ y sea $h = \frac{1-\upsilon_m}{a^m}$, entonces $0 < h < \frac{3}{2a^m}$ y

$$a^n\pi(x+h) = a^{n-m}a^m\pi(x+h) = a^{n-m}\pi(\alpha_m + 1).$$

Como a es impar se sigue que:

$$\begin{aligned} cos(a^n\pi x) = cos(a^{n-m}\pi(\alpha_m + \upsilon_m)) \quad &= cos(a^{n-m}\pi\alpha_m)cos(a^{n-m}\pi\upsilon_m) \\ = (-1)^{\alpha_m} cos(a^{n-m}\pi\upsilon_m) \end{aligned} \tag{2.2}$$

y

$$cos(a^n\pi(x+h)) = (-1)^{a^{n-m}(\alpha_m+1)} = (-1)^{\alpha_{m+1}}.$$

De este modo

$$R_m(h) = \frac{(-1)^{\alpha_{m+1}}}{h} \sum_{n=m}^{\infty} b^n\{1 + cos(a^{n-m}\pi\upsilon_m)\}$$

y como todos los términos de la serie son positivos, tenemos

$$|R_m(h)| > \frac{b^m}{|h|} > \frac{2}{3}a^m b^m$$

por lo que

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \geq |R_m(h)| - |S_m(h)| > \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) a^m b^m.$$

Pero

$$ab > 1 + \frac{2}{3}\pi$$

y como $m \to \infty$ entonces $h \to 0$, se sigue que $\left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}\right) a^m b^m$ tiende a ∞, de donde $f'(x)$ no existe.$\square$

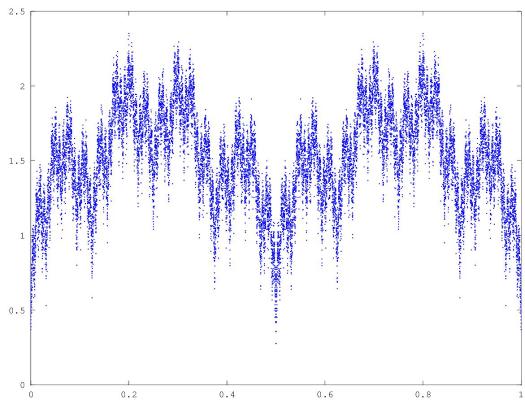


Figura 2.1. Función de Weierstrass

Remark: A principios del siglo XX, Hardy probó que se sigue obteniendo el mismo resultado para las conclusiones $b \in (0,1), a > 1$ y $ab > 1$.

2.3. Función de van der Waerden.

Tras la publicación de la función de Weierstrass, muchos matemáticos trabajaron en la búsqueda de más funciones continuas y nunca diferenciables.

Aparecen entonces las funciones de Takagi en 1903 y 27 años más tarde la función de van der Waerden, que aparentemente fue publicada sin que se percataran de la similitud con la anterior. Ambas funciones toman como punto de partida la función periódica ϕ definida por $\phi = dist(x, \mathbb{Z}), x \in \mathbb{R}$, esto es, $\min\{x - [x], [x] + 1 - x\}, x \in \mathbb{R}$. Aquí, [x] representa a la función parte entera.

Se define entonces la función $F_a, a > 1$, mediante la serie

$$F_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(a^k x)}{a^k}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cuando $a = 2$ se tiene la función de Takagi y en el caso de a = 10 hablamos de la función de van der Waerden.

Damos ahora una prueba de la continuidad y la no derivabilidad de la función de van der Waerden, que puede adaptarse a otros valores de a.

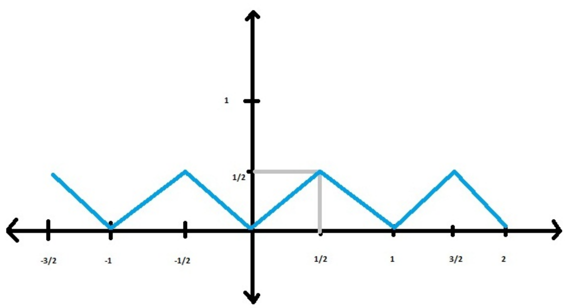


Figura 2.2. Función phi

Proposición 2.2. *Sea ϕ la función de la figura. Se tiene que la función de van der Waerden*

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(10^k x)}{10^k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

es continua en $\mathbb{R}$ y no derivable en ningún punto.

Demostración. La continuidad de V se sigue del hecho de que ϕ es continua, y la serie que define a V converge uniformemente en $\mathbb{R}$, pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi(10^k x)}{10^k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} < \infty.$$

Veamos que V no tiene derivada en ningún punto de $\mathbb{R}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, tomamos $\delta_m = \pm 10^{-m-1}$, donde el signo se elige de manera que ϕ sea lineal entre $10^m(x + \delta_m)$ y $10^m x$. Nótese que esto es posible pues $|10^m \delta_m)| = \frac{1}{10}$.

Tomamos $x_m = x + \delta_m, m \in \mathbb{N}$. Es claro que $x_m \longrightarrow x$, cuando $m \longrightarrow \infty$. Por otro lado, teniendo en cuenta que ϕ es periódica de periodo 1 y que si $k, m \in \mathbb{N}, k \geq m + 1$, entonces $10^k \delta_m \in \mathbb{Z}$, se sigue que

$$\phi(10^k x_m) - \phi(10^k x) = \phi(10^k x + 10^k \delta_m) - \phi(10^k x) = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}, k, \geq m + 1.$$

De aquí se obtiene entonces que

$$\frac{V(x_m) - V(x)}{x_m - x} = \frac{1}{\delta_m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} (\phi(10^k x_m) - \phi(10^k x)), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ya que ϕ es lineal(con pendiente 1 o -1) en el intervalo de extremos $10^k x$ y $10^k x_m, k = 1, ..., m, m \in \mathbb{N}$, se tiene que, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $k = 1, ..., m$,

$$\phi(10^k x_m) - \phi(10^k x) = 10^k \alpha_k (x_m - x) = 10^k \alpha_k \delta_m,$$

donde $\alpha_k \in \{-1, 1\}$.

De esta forma

$$\frac{V(x_m) - V(x)}{x_m - x} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k, \quad m \in \mathbb{N},$$

y, por tanto, V no es derivable en x, como queríamos demostrar. □

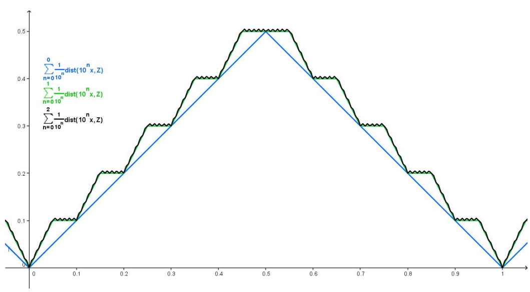


Figura 2.3. Función de van der Waerden

3

Funciones diferenciables nunca monótonas.

3.1. Introducción

Definición 3.1. *Una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice* ***nunca monótona*** *si no existe un subintervalo cerrado* $[a, b]$ *con* $a < b$*, sobre el cual* f *es monótona.*

Construir una función siempre discontinua y nunca monótona es muy fácil. Por ejemplo, la función característica en $\mathbb{Q}$, f= $\chi_{\mathbb{Q}}$, es de este tipo. Observemos que una función nunca monótona no debe confundirse con una función que no es monótona en $[0, 1]$. ¿Existen funciones continuas nunca monótonas? La respuesta, como ha de esperarse, es afirmativa. En efecto, teniendo en cuenta el *Teorema de diferenciabilidad de Lebesgue* , se sigue que toda función continua nunca diferenciable en $[0, 1]$ es una función continua nunca monótona. En particular, las funciones continuas nunca diferenciables de Weierstrass o de Van der Waerden son nunca monótonas.

En el transcurso del siglo XVII a los matemáticos les era imposible determinar si existían funciones siempre diferenciables pero nunca monótonas. Notemos que para que una tal f exista debe ocurrir que los conjuntos

$$\{x : f'(x) > 0\} \quad \text{y} \quad \{x : f'(x) < 0\}$$

sean densos en $[0, 1]$. Dini era uno de los que creía que dichas funciones podían existir, mientras que P. du Bois-Reymond tenía la presunción de que funciones nunca monótonas no podían ser diferenciables.

En 1887, Köpcke a fuerza de coraje y perseverancia dio a conocer, a través de una construcción extremadamente complicada, una función diferenciable nunca monótona. Nuevas funciones de este tipo fueron dadas por matemáticos como

Denjoy, Pereno, Hobson, etc. Todas esas construcciones seguían siendo difíciles y largas (la más corta constaba de 10 páginas).

Casi 100 años después, en 1974, Y. Katznelson y Stromberg reviven la investigación al construir otra función diferenciable nunca monótona pero mucho más simple que la dada por Köpcke.

3.2. La Función de Katznelson-Stromberg.

El objetivo de esta sección es el de presentar una función diferenciable en cualquier punto, pero que nunca es monótona.

Lema 3.2. *Sean* $r, s \in \mathbb{R}$.

1. *Si* $r > s > 0$, *entonces*
$$\frac{r-s}{r^2-s^2} \leq \frac{2}{r}.$$
2. *Si* $r > 1$ *y* $s > 1$, *entonces*
$$\frac{r+s-2}{r^2-s^2-2} \leq \frac{2}{s}.$$

Demostración. La demostración para la afirmación 1. es trivial puesto que $\frac{r-s}{r^2-s^2} = \frac{1}{r+s} < \frac{1}{r} < \frac{2}{r}$.. Veamos la implicación 2. directamente.

Si $r > 1$ y $s > 1$, entonces

$$5 < (r-s)^2 + (r-1)(s-1) + r^2 + 3s + r$$
$$5 < (r^2 - 2rs + s^2) + (rs - r - s + 1) + r^2 + 3s + r$$
$$5 < 2r^2 + s^2 - rs + 2s + 1$$
$$rs + s^2 - 2s < 2r^2 + 2s^2 - 4$$
$$s(r+s) < 2(r^2 + s^2 - 2)$$
$$\frac{r+s-2}{r^2+s^2-2} < \frac{2}{s}.$$

□

Lema 3.3. *Sea* $\phi(x) = (1+|x|)^{\frac{-1}{2}}$ *para* $x \in \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)dx < 4min\{\phi(a), \phi(b)\}$$

siempre que a *y* b *sean números reales diferentes.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos $0 \leq a < b$ entonces aplicando el lema 3.2 vemos que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)dx = \frac{2(\sqrt{1+b} - \sqrt{1+a})}{(1+b)-(1+a)} < \frac{4}{\sqrt{1+b}} = 4min\{\phi(a), \phi(b)\}.$$

Como ϕ es una función par, el caso en el que $a < b \leq 0$ queda igualmente probado con la misma demostración. Ahora bien, el caso en el que se verifica que $a < 0 < b$ se resuelve empleando la segunda parte del lema 3.2.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(x)dx = \frac{2(\sqrt{1+b} - \sqrt{1+a-2})}{(1+b)-(1+a)-2} < 4min\{\phi(a), \phi(b)\}.$$

□

Lema 3.4. *Sean $\phi(x) = (1+|x|)^{\frac{-1}{2}}$ y ψ cualquier función de la forma*

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \phi(\lambda_j(x-\alpha_j)),$$

donde $c_1, ..., c_n$ y $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son números reales positivos, y

$$\alpha_1, ..., \alpha_n$$

cualquier número real, entonces

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \psi(x)dx < 4min\{\psi(a), \psi(b)\},$$

cualesquiera que sean a y b números reales distintos entre sí.

Demostración. El resultado se obtiene haciendo uso del lema 3.3 que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(\lambda(x-\alpha)) = \frac{1}{\lambda(b-\alpha)-\lambda(a-\alpha)}\int_{\lambda_(a-\alpha)}^{\lambda(b-\alpha)} \phi(t)dt.$$

□

Lema 3.5. *Sea $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones como las del lema 3.4. Para $x \in \mathbb{R}$ y cada n definimos*

$$\Psi_n(x) = \int_0^x \psi_n(t)dt.$$

Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(a) = s < \infty$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Entonces la serie $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(x)$ converge uniformemente en cada subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, la función F es diferenciable en a y $F'(a) = s$.

En particular, si $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(t)$ y $\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n(t) = f(t) < \infty \forall t \in \mathbb{R}$, entonces F es diferenciable sobre todo $\mathbb{R}$ y $F' = f$.

Demostración. Sea b tal que $b \geq |a|$. entonces, haciendo uso del lema 3.4, $-b \leq x \leq b$, vemos que

$$|\Psi_n(x)| \leq \left| \int_0^a \psi_n(t)dt \right| + \left| \int_a^x \psi_n(t)dt \right| \leq 4|a|\psi_n(a) + 4|x-a|\psi_n(a) \leq 12b\psi_n(a).$$

Gracias a la *Prueba M de Weierstrass*, podemos afirmar que existe convergencia uniforme en $[-b, b]$. Para probar que $F'(a) = s$, tomemos $\varepsilon > 0$ y elijamos N tal que

$$10 \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} \psi_n(a) < \varepsilon.$$

Como cada ψ_n es continua en a, podemos afirmar que existen algunos $\delta > 0$ tales que

$$\left| \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \psi_n(t) - \psi_n(a) \right| < \frac{\varepsilon}{2N},$$

siempre que $0 < |h| < \delta$ y $1 \leq n \leq N$. Además, empleando el lema 3.4, $0 < |h| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} - s \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \psi_n(t) - \psi_n(a) \right\} \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \psi_n(t) - \psi_n(a) \right| \\ &\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{h} \int_a^{a+h} \psi_n(t) + \psi_n(a) \right\} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 5\psi_n(a) < \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.1}$$

□

Lema 3.6. *Sean $I_1, ..., I_n$ intervalos abiertos disjuntos, α_j el punto medio del intervalo I_j, y ε y $y_1, ..., y_n$ números reales positivos. Entonces existe una función ψ como la del lema 3.4 tal que para cada j,*

1. $\psi(\alpha_j) > y_j$
2. $\psi(x) < y_j + \varepsilon \quad si \quad x \in I_j$
3. $\psi(x) < \varepsilon \quad si \quad x \notin I_1 \cup ... \cup I_n$.

Demostración. Elijamos $c_j = y_j + \frac{\varepsilon}{2}$ y escribamos $\phi_j(x) = c_j\phi(\lambda_j(x-\alpha_j))$, donde λ_j es elegido suficientemente grande tal que $\phi_j(x) < \frac{\varepsilon}{2n}$ si $x \notin I_j$. Tomemos $\psi = \phi_1 + ... + \phi_n$. Las propiedades 1., 2., y 3. del lema se verifican porque $I_j \cap I_k = \emptyset, i \neq k$. $\square$

Teorema 3.7. *Sea* $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ *y* $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ *subconjuntos numerables disjuntos de* $\mathbb{R}$. *Entonces existe una función* F *diferenciable en cualquier punto sobre* $\mathbb{R}$ *verificando que* $F'(\alpha_j) = 1, F'(\beta_j) < 1 \quad \forall j, \quad y \quad 0 < F'(x) \leq 1 \quad \forall x.$

Demostración. Obtendremos nuestra función F como en el lema 3.5 construyendo primero $F' = f = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$, con sumas parciales $f_n = \sum_{k=1}^{n} \psi_k$, de tal manera que

$$A_n : f_n(\alpha_j) > 1 - \frac{1}{n} \quad (1 \leq j \leq n),$$

$$B_n : f_n(x) < 1 - \frac{1}{n+1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$C_n : \psi_n(\beta_j) < \frac{1}{2n \cdot 2^n} \quad (1 \leq j \leq n).$$

Suponiendo que esto es cierto, tendríamos que

$$F'(\alpha_j) = \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha_j) = 1,$$

$$0 < F'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq 1,$$

y, eligiendo $n < j$,

$$F'(\beta_j) = f_{n-1}(\beta_j) + \sum_{k=n}^{\infty} \psi_k(\beta_j)$$

$$< 1 - \frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k \cdot 2^k} < 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{2n} < 1,$$

obteniendo dicha función F.

Procedamos inductivamente para construir f_n. Elijamos un intervalo I abierto con punto medio α_1 tal que $\beta_1 \notin I$. Después hacemos uso del lema 3.6 con $\varepsilon = y_1 = \frac{1}{4}$ para obtener $f_1 = \psi_1$ que satisface A_1, B_1, y C_1. Ahora supongamos que $n > 1, f_{n-1}$ y ψ_{n-1} han sido elegidos de tal manera que satisfacen A_{n-1}, B_{n-1}, y C_{n-1}. Seleccionando intervalos abiertos disjuntos $I_1, ..., I_n$ tales que, para cada $j \in \{1, ..., n\}$, α_j es el punto medio de I_j, $I_j \cap \{\beta_1, ..., \beta_n\} = \emptyset$ y $f_{n-1}(x) < f_{n-1}(\alpha_j)$, donde

$$\delta = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2n \cdot 2^n} > 0.$$

Ahora, nuevamente aplicando el lema 3.6 y tomando $\varepsilon = \frac{1}{2n \cdot 2^n}$ y $y_j = 1 - \frac{1}{n} - f_{n-1}(\alpha_j)$, con $1 \leq j \leq n$, obtendremos ψ_n satisfaciendo C_n. También

$$f_n(\alpha_j) = f_{n-1}(\alpha_j) + \psi_n(\alpha_j) > f_{n-1}(\alpha_j) + y_j = 1 - \frac{1}{n},$$

para obtener así A_n. Para comprobar B_n, tengamos en cuenta que si $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \psi_n(x) < f_{n-1}(\alpha_j) + \delta + y_j + \varepsilon = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1};$$

mientras que si $x \notin \cup_{j=1}^{n} I_j$, entonces

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \psi_n(x) < 1 - \frac{1}{n} + \varepsilon < 1 - \frac{1}{n+1}.$$

□

Corolario 3.8. ***(La función de Katznelson - Stromberg.)*** *Existe una función diferenciable H sobre $\mathbb{R}$ con derivada acotada tal que H es nunca monótona.*

Demostración. Sea $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ subconjuntos densos disjuntos de $\mathbb{R}$. Haciendo uso del teorema anterior, obtenemos una función F diferenciable en cualquier punto y G sobre R tal que

$$F'(\alpha_j) = G'(\beta_j) = 1, \quad G'(\alpha_j) < 1, \quad F'(\beta_j) < 1,$$

$$0 < F'(x) \leq 1, \quad 0 < G'(x) \leq 1,$$

$\forall j$ y x. Pongamos $H = F - G$. Entonces,

$$H'(\alpha_j) > 0, H'(\beta_j) < 0 \quad -1 < H'(x) < 1,$$

$\forall j$ y x.

Como $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ son ambos densos , H no puede ser monótona en ningún intervalo. □

4

Funciones nunca analíticas de clase C^∞.

4.1. Introducción.

Recordemos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es analítica en $x_0 \in \mathbb{R}$ si f admite un desarrollo en series de Taylor con radio de convergencia positivo en x_0, y es de clase C^∞ si f posee derivada continua de todos los órdenes; es decir, si $f^{(n)}$ existe y es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. Debemos recordar que para que la función f de clase C^∞ en un intervalo de $\mathbb{R}$ sea analítica, no es suficiente que su serie de Taylor posea, en cada punto, un radio de convergencia positivo; es necesario, además, que la suma de dicha serie sea igual a f.

Por supuesto, toda función analítica es de clase C^∞; sin embargo, el recíproco no es, en general, válido.

4.2. Funciones C^∞ y no analíticas en el origen.

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} exp(\frac{-1}{x}) & si \ \ x > 0 \\ 0 & si \ x \leq 0. \end{cases}$$

definida para todo número real x.

La función f tiene derivadas continuas de todos los órdenes en todos los puntos x de la recta real, dados por

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{p_n(x) f(x)}{x^{2n}} & si \ \ x > 0 \\ 0 & si \ x \leq 0. \end{cases}$$

donde $p_n(x)$ es un polinomio de grado $n-1$ que se obtiene recursivamente a partir de

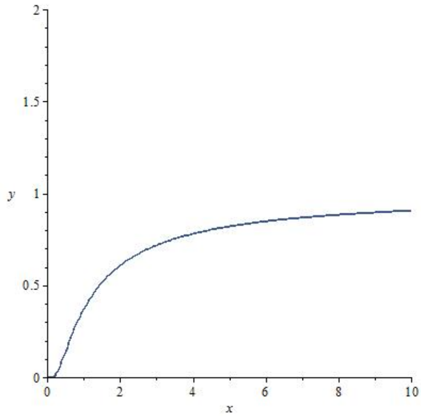


Figura 4.1. Función no analítica y de clase C^{∞}.

$$p_1(x) = 1$$
$$p_{n+1}(x) = x^{2n}p_n'(x) - (2nx-1)p_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que la fórmula se verifica para la primera derivada de la función f para todo $x > 0$ y que $p_1(x)$ es un polinomio de grado 0. En efecto, la derivada de f es cero para $x < 0$. Queda por demostrar que la derivada por la derecha de f evaluada en $x = 0$ es cero. Haciendo uso de la definición de derivada vemos que

$$f'(0) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x} = 0.$$

De acuerdo con la hipótesis de inducción, supongámoslo cierto para n y demostrémoslo para $n+1$.

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(\frac{p_n'(x)}{x^{2n}} - 2n\frac{p_n(x)}{x^{2n+1}} + \frac{p_n(x)}{x^{2n+2}} \right) f(x) \\ &= \frac{x^{2n}p_n'(x) - (2nx-1)p_n(x)}{x^{2n+2}} f(x) \\ &= \frac{p_{n+1}(x)}{x^{2(n+1))}} f(x), \end{aligned}$$

donde $p_{n+1}(x)$ is un polinomio de grado $n = (n+1) - 1$. Es fácil ver que la $(n+1)$ derivada de f es cero para $x < 0$ y que la derivada por la derecha de $f^{(n)}$ es

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{p_n(x)}{x^{2n+1}} e^{\frac{-1}{x}} = 0.$$

Como hemos visto antes, la función f tiene infinitas derivadas continuas, y todas estas derivadas en el origen valen 0. Además, la serie de Taylor de la función f en el origen en cualquier punto converge a la función cero,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} x^n = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

y así la serie de Taylor no es igual a $f(x)$ para $x > 0$. Consecuentemente, la función f no es analítica en el origen.

4.3. La función de Lerch.

Uno de los ejemplos más sencillos y relativamente simple de una función de clase C^{∞} sobre $\mathbb{R}$ que no es analítica en ningún punto, fue construido por Mathias Lerch en el año 1888, y es el siguiente:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{cos(a^k x)}{k!}$$

con a impar y mayor que 1.

La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es claramente C^{∞} debido a la convergencia uniforme de todas las series obtenidas diferenciando término a término. Para demostrar que la serie de Maclaurin diverge para todo $x \neq 0$ observemos primero que $f^{(4n)}(0) = expa^{4n}$. Por este motivo tenemos que $\lim_{n \to \infty} sup \left(\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = +\infty$. Hasta el momento sólo necesitábamos que $a > 1$.

Para probar que la serie de Maclaurin es divergente para cada $x \neq 0$ necesitamos que ese a fuera un entero positivo impar. Esta prueba se basa en el hecho de que un crecimiento similar de las derivadas $f^{(n)}(x)$ se produce en cualquier punto de la forma $\frac{b\pi}{a^m}$, con b impar y m un entero positivo.

4.4. La función de Merryfield.

Otro ejemplo, más reciente y debido a Kent G. Merryfield de una función infinitamente diferenciable que no es analítica en cualquier punto puede ser construido por medio de una serie de Fourier de la siguiente manera. Sea $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto de las potencias de 2 y definamos $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \sum_{k \in A} e^{-\sqrt{k}} cos(kx).$$

Ya que la serie $\sum_{k\in A} e^{-\sqrt{k}}k^n$ converge $\forall n \in \mathbb{N}$, esta función se ve fácilmente que es de clase C^{∞}, por una aplicación inductiva estándar de la *prueba M de Weierstrass.* Por otra parte, para cualquier múltiplo racional diádico de π, es decir, $x = \frac{p}{q}\pi$ con $p \in \mathbb{N}$ y $q \in A$, y para cualquier orden de derivación $n \in A, n \geq 4$ y $n > q$ tenemos que

$$\begin{aligned} F^{(n)}(x) &= \sum_{k\in A} e^{-\sqrt{k}}k^n cos(kx) \\ &= \sum_{k\in A, k>q} e^{-\sqrt{k}}k^n + \sum_{k\in A, k\leq q} e^{-\sqrt{k}}k^n cos(kx) \\ &\geq e^{-\sqrt{n}}n^n + O(q^n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

cuando $n \longrightarrow \infty$. Donde hemos usado que $cos(kx) = 1, \forall k > q$. Consecuentemente, en cualquiera de dichos x

$$\lim_{n\to\infty} sup \left(\frac{|F^{(n)}(x)|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} = +\infty,$$

por lo que el radio de convergencia del desarrollo en serie de Taylor de la función F en x vale 0 atendiendo a la *Fórmula de Cauchy - Hadamard.* Ya que el conjunto de analiticidad de una función es un conjunto abierto y que los racionales diádicos son densos, se concluye que esta función F no es analítica en ninguna parte de $\mathbb{R}$.

5

Funciones singulares.

5.1. Introducción.

Definición 5.1. *Una función* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *se dice* ***singular*** *si satisface:*

a) f *es continua en* $[a,b]$.
b) f *es creciente.*
c) $f(a) < f(b)$.
d) Existe un conjunto de medida nula N *tal que* $f'(x) = 0, \forall x \in [a,b] \backslash N$.

Un ejemplo estándar de función singular es la **Función de Cantor**, aunque no es la única. Si $f(x) = 0$ para $x \leq a$ y $f(x) = 1$ para $x \geq b$; entonces dicha función es la función de distribución de una variable aleatoria que no es discreta, (puesto que la probabilidad es cero para cada punto) ni es absolutamente continua (puesto que la función de densidad es cero en cada punto si existe).

5.2. El conjunto de Cantor

Sea C_0 el intervalo cerrado $[0\ ,\ 1]$ de la recta real. Dividimos este intervalo en tres subintervalos

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

El primer paso, para la construcción del conjunto de Cantor, consiste en eliminar el subintervalo abierto intermedio, o sea quitamos $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Sea C_1 la unión de los dos intervalos restantes, es decir $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

El segundo paso consiste en repetir el mismo proceso a cada uno de los intervalos que componen C_1. En otras palabras, a cada intervalo que conforma C_1 lo dividimos en tres partes de igual tamaño generándose los siguientes subintervalos

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \quad \text{y} \quad \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Como antes, ahora quitamos los subintervalos abiertos intermedios, quedando así la siguiente unión de intervalos

$$\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

que denotaremos como C_2.

Para obtener C_3 repetimos el proceso, es decir, a cada uno de los intervalos que componen C_2 (que tienen longitud de $\frac{1}{9}$), lo dividimos en tres partes de igual tamaño y quitamos los tercios medios. Con esto obtendríamos el tercer paso de la construcción que consiste en el conjunto:

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \cup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \cup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \cup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$

Este proceso se sigue indefinidamente, y así para obtener C_{m+1}, se dividen en tres partes iguales todos los intervalos que componen a C_m y se suprimen los intermedios.

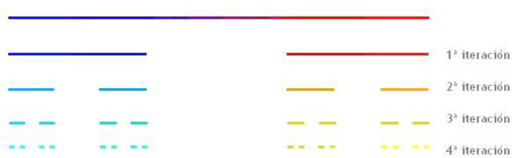


Figura 5.1. Construcción del conjunto de Cantor C

Finalmente **el conjunto de Cantor C** se define como la intersección de todos los conjuntos C_m. Esto es

$$C = \bigcap_{m=0}^{\infty} C_m.$$

Teorema 5.2. *El conjunto de Cantor tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración. Para calcular la medida de C, restaremos a la medida de [0, 1], la medida de los intervalos que quitamos en la construcción de C. Observamos que en el primer caso, eliminamos un intervalo de longitud $\frac{1}{3}$, en el segundo 2 intervalos de longitudes $\frac{1}{9}$, en el tercero 4 intervalos de longitudes $\frac{1}{27}$ y así sucesivamente. Entonces, usando propiedades de series geométricas obtenemos que

$$\begin{aligned} m(C) = m([0,1]\backslash(m([0,1]\backslash C))) &= 1 - (1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + ...) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \qquad (5.1) \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 5.3. *El conjunto C de Cantor es no vacío, perfecto y nunca denso.*

Demostración. Ya que $m(C) = 0$, no puede contener intervalos. Por lo que, C es nunca denso. Para probar que C es perfecto, debemos probar que cada punto de C es un punto límite. Cogemos $x \in C$ y $\delta > 0$. Elegimos un entero n tal que $3^{-n} < \delta$. Como $x \in C_n$, existe un intervalo cerrado I de longitud 3^{-n} tal que $x \in I \subseteq C_n$. Tomamos a un punto final de I que es distinto de x y tenemos que $a \in C$ y $0 < |x-a| < \delta$. Por tanto, x es un punto límite de C.□

Corolario 5.4. *C es no numerable.*

Demostración. Es consecuencia de que todo conjunto perfecto es no numerable.□

5.3. La función de Cantor.

Recordemos que el conjunto de Cantor $C \subset [0,1]$ y $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, donde C_k es una unión disjunta de 2^k intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$.

Consideremos las sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ cuyos términos generales vienen dados por $f_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}$ y $F_n(t) = \int_0^x f_n(t)dt$ respectivamente. Así por ejemplo $f_0 = 1, F_0(x) = x, F_1(x)$ es una función continua creciente en [0, 1] que viene dada por

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, x & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & si\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3x-2), & si\ \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

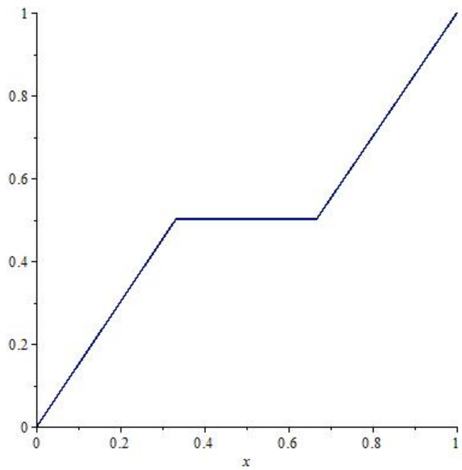


Figura 5.2. Función F1

De la misma manera, $F_2(x)$ es continua, creciente y viene dada por

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x & si\ 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4}, & si\ \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(9x-2), & si \leq \frac{2}{9} \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}, & si\ \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(9x-6), & si \leq \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{9} \\ \frac{3}{4}, & si\ \frac{7}{9} \leq x \leq \frac{8}{9} \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(9x-8), & si\ \frac{8}{9} \leq x < 1. \end{cases}$$

Observemos que si $\left[\frac{a_j}{3^n}, \frac{a_{j+1}}{3^n}\right]$ es uno de los intervalos que forman C_n:

$$\int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_{j+1}}{3^n}} f_{n+1}(t)dt = \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_{j+1}}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t)dt = \frac{1}{2^n} =$$

$$\int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_{j+1}}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \chi_{C_n}(t)dt = \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_{j+1}}{3^n}} f_n(t)dt.$$

Por tanto obtenemos que $F_{n_{n=1}}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas y crecientes donde su término general verifica

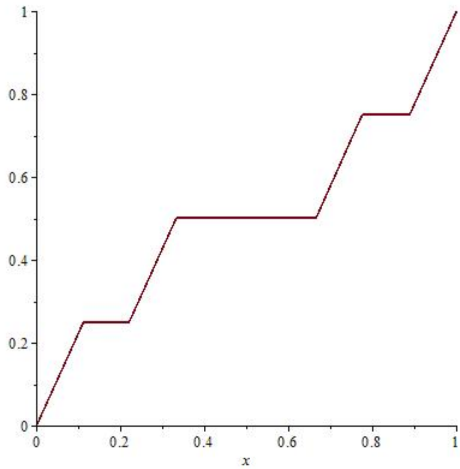


Figura 5.3. Función F2

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ \frac{j+1}{2^n}, & si\ \frac{a_j+1}{3^n} \leq x \leq \frac{a_{j+1}}{3^n} \text{ para } j = 0, ..., 2^n - 2 \\ 1, & si\ x = 1 \end{cases}$$

y los escalones de la función los unimos de forma lineal. Notemos también que si $x \in [0, 1] \backslash C_{n-1}$ entonces $F_n(x) = F_{n-1}(x)$.

Proposición 5.5. *Sean $F_n(x)$ las funciones que acabamos de definir. Entonces existe $F(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} F_n(x)$.*

Demostración. Es suficiente probar que $F_n(x)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy uniforme en [0, 1].

$$\begin{aligned} |F_{n+1}(x) - F_n(x)| &= \left| \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\frac{a_j}{3^n}}^x \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t) - \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t) dt + \int_{\frac{a_j}{3^n}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t) dt \\ &= \frac{1}{2^n}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Sea $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$, se tiene que $|F_m(x) - F_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$. Fijemos $\varepsilon > 0$, y tomemos n_0 de forma que $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$. Sean $m, n > n_0$, y supongamos que $m > n$, entonces, aplicando el apartado anterior,

$$\begin{aligned} |F_m(x) - F_n(x)| =& |F_m(x) - F_{m-1}(x) + F_{m-1}(x) - F_{m-2}(x) + ... + F_{n+1}(x) - F_n(x)| \\ &\leq |F_m(x) - F_{m-1}(x)| + |F_{m-1}(x) - F_{m-2}(x)| + ... + |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &\leq \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Hemos demostrado por tanto que $F_n(x)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy uniforme.□

Teorema 5.6. *La función de Cantor, $F : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, es singular.*

Demostración. Como $F_n(x)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones crecientes, tenemos que, para cualquier n y todo $x, y \in [0,1]$, con $x < y, F_n(x) \leq F_n(y)$. Tomando límites cuando $n \to \infty$ a ambos lados, llegamos a que $F(x) < F(y)$. Por tanto, F es creciente. Además, como $F_n(x)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión uniformemente de Cauchy y $F_n(x)_{n=1}^{\infty}$ son funciones continuas, tenemos que $F(x)$ es una función continua.□

También, por construcción de la función de Cantor, es fácil observar que:

- $F(0) = 0$.
- $F(1) = 1$.
- F es constante en cada intervalo del complementario del conjunto de Cantor. Por tanto, $F' = 0$ en casi todo punto.

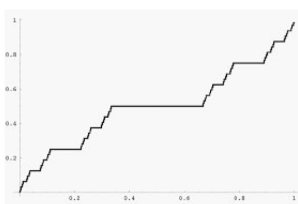


Figura 5.4. La función de Cantor F

6

Funciones cuya derivada es acotada y no integrable.

6.1. Introducción.

El primer ejemplo de una función derivable con derivada acotada pero no integrable se debe a Volterra, el cual data de 1881. La construcción de la función de Volterra se basa esencialmente en la función f dada por $f(x) = x^2 sen(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$ cuya derivada está dada por $f'(x) = 2xsen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ y $f'(0) = 0$. Si se mira superficialmente la construcción de la función de Volterra, puede quedar la impresión de que la no integrabilidad de la derivada se debe a que la función en la que se basa la construcción, oscila infinitas veces alrededor del origen, por esta razón presentamos en este capítulo una función similar a la de Volterra, cuya función base, que se utiliza para su construcción que tiene una derivada con mejor comportamiento. Las ideas que aplicamos son las mismas que las del ejemplo de Volterra.

Para construir las funciones anteriormente mencionadas usaremos un conjunto de Cantor generalizado. La no integrabilidad se probará usando la caracterización de las funciones integrables Riemann en términos de sus discontinuidades.

Las funciones que construiremos serán derivables en [0, 1] con derivada discontinua en un conjunto de Cantor generalizado de medida $\frac{1}{2.}$

6.2. El conjunto de Smith - Cantor - Volterra.

Construyamos un conjunto de Cantor generalizado contenido en [0, 1] de medida $\frac{1}{2}$, llamado *Conjunto de Cantor -Smith- Volterra*. El primer paso de esta construcción consiste en eliminar del intervalo un subintervalo abierto E_0^1 centrado en [0, 1] de longitud $\frac{1}{4}$. Ese intervalo es $E_0^1 = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$.

Sea C_1 el conjunto compacto que resulta de la unión de los $2 = 2^1$ intervalos cerrados restantes
$$C_1 = \left[0, \frac{3}{8}\right] \cup \left[\frac{5}{8}, 1\right].$$

El segundo paso consiste en eliminar $2 = 2^1$ intervalos abiertos, uno de cada uno de los subintervalos compactos que componen C_1, ambos intervalos abiertos centrados en sus respectivos intervalos compactos y de longitud $\frac{1}{4^2}$. Sean E_1^1 y E_1^2 estos intervalos abiertos.

En general, habiendo construido el conjunto compacto C_k constituido por 2^k intervalos cerrados, construimos C_{k+1} mediante la eliminación de 2^k intervalos abiertos, cada uno de ellos centrado en el intervalo correspondiente que compone C_k. Cadas uno de estos intervalos abiertos, que denotamos por E_k^i, tiene longitud $\frac{1}{4^{k+1}}$.

Para cada entero no negativo k, sea U_k la unión de los intervalos abiertos E_k^i
$$U_k = \bigcup_{i=1}^{2^k} E_k^i.$$

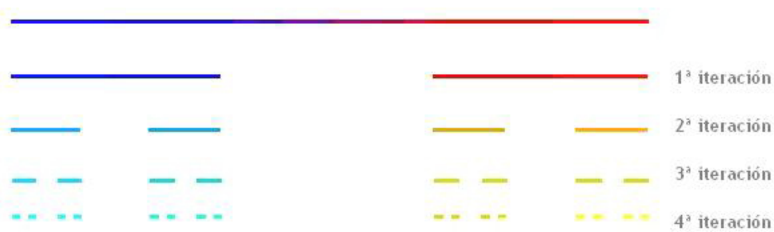


Figura 6.1. Representación de los intervalos

Como los 2^k intervalos abiertos E_i^k son disjuntos dos a dos, la $\mathrm{m}(U_k) = \frac{2^k}{4^{k+1}}$.

Para cada entero no negativo n, sea
$$V_n = \bigcup_{k=0}^{n} U_k.$$

Como V_n es la unión de intervalos abiertos disjuntos, su medida viene dada por

$$m(V_n) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{2^2}{4^3} + ... + \frac{2^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Puesto que $(V_n)_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente de conjuntos abiertos, tenemos que la medida de la unión de ellos

$$U = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$$

es $m(U) = \lim_{n\to\infty} m(V_n) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto el conjunto de Cantor

$$H = [0,1] \backslash U = [0,1] \backslash \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\cup_{i=1}^{2^k} E_k^i\right)$$

también es de medida $\frac{1}{2}$.

Observemos que SCV es la intersección infinita de los conjuntos compactos C_k, es decir

$$SCV = \bigcap \{C_k | k \in \mathbb{N}\},$$

así que SCV es un conjunto compacto. De hecho, el conjunto de Cantor SCV es infinito no numerable, cerrado, sin puntos interiores y sin puntos aislados. Un conjunto cuya adherencia tiene interior vacío se llama *denso en ninguna parte*, y si el conjunto no tiene puntos aislados se llama *perfecto*, así que el conjunto de Cantor SCV es denso en ninguna parte y perfecto.

6.3. Función de Volterra.

Nuestra construcción de la función de Volterra será paralela a la del conjunto de SVC. En la primera etapa de la construcción del SVC , hemos eliminado el intervalo $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ en $[0,1]$. Con el tiempo vamos a colocar una función especialmente diseñada basada en $x^2 sen(\frac{1}{x})$ en este intervalo que hemos eliminado. En primer lugar, sin embargo, vamos a comenzar la construcción de esa función en el intervalo $(0,1)$, de modo que los paralelismos entre la construcción de la función de Volterra y la construcción de la SVC se pueden ver en su totalidad.

Comenzaremos considerando la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 sen\frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

en el intervalo $(0, \frac{1}{4})$. En primer lugar, buscamos el mayor x entre 0 y $\frac{1}{8}$ tal que $g'(x) = 0$ y denotamos este punto como a_1. Limitaremos g al intervalo $(0,\, a_1)$, y en $[a_1, \frac{1}{4} - a_1]$ vamos a insertar la función constante $g(a_1)$. Por último , en el intervalo $(\frac{1}{4} - a_1, \frac{1}{4})$ colocamos la función g reflejada, $g(\frac{1}{4} - 1)$. Vamos a llamar a esta función definida a trozos como f_1 , de la forma siguiente

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ g(x) & si \quad 0 < x < a_1 \\ g(a_1) & si \; a_1 \leq x \leq \frac{1}{4} - a_1 \\ g(\frac{1}{4} - x) & si \; \frac{1}{4} - a_1 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & si \quad \frac{1}{4} < x. \end{cases}$$

Podemos ver tanto de la definición de f_1, así como de su gráfica en la figura 6.2 que f_1 es diferenciable en $(0, \frac{1}{4})$, pero su derivada f_1' será discontinua en 0 y en $\frac{1}{4}$.

Nuestro paso siguiente es colocar esta función en el intervalo eliminado en la primera fase de construcción de la SVC . Para ello, se define una nueva función h_1 para trasladar la función f_1, $\frac{3}{8}$ de unidad a la derecha. Por tanto, h_1 se define como:

$$h_1(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < \frac{3}{8} \\ g(x - \frac{3}{8}) & si \quad \frac{3}{8} < x < \frac{3}{8} + a_1 \\ g(a_1) & si \; \frac{3}{8} + a_1 \leq x \leq \frac{5}{8} - a_1 \\ g(\frac{5}{8} - x) & si \quad \frac{5}{8} - a_1 \leq x \leq \frac{5}{8} \\ 0 & si \quad \frac{5}{8} < x. \end{cases}$$

La creación de h_1 es el primer paso en la construcción de la función de Volterra. Repetiremos este proceso para crear h_2, h_3 , y así sucesivamente, colocando cada función en los intervalos correctos. Tengamos en cuenta que mientras h_1 se coloca en un solo intervalo, h_n consistirá en f_n función diferenciable sinusoidal colocada en el 2^{n-1} intervalos que retiramos en el paso enésimo de la construcción del SVC.

Para dar un mejor sentido del procedimiento general para la construcción de cada h_n, ahora vamos a construir h_2 . Desde la segunda etapa de la construcción de SVC quitamos los intervalos $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$ y $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$, cada uno de longitud $\frac{1}{16}$, y vamos a empezar a definir a_2 como el mayor x menor de $\frac{1}{32}$ donde $g'(x) = 0$.

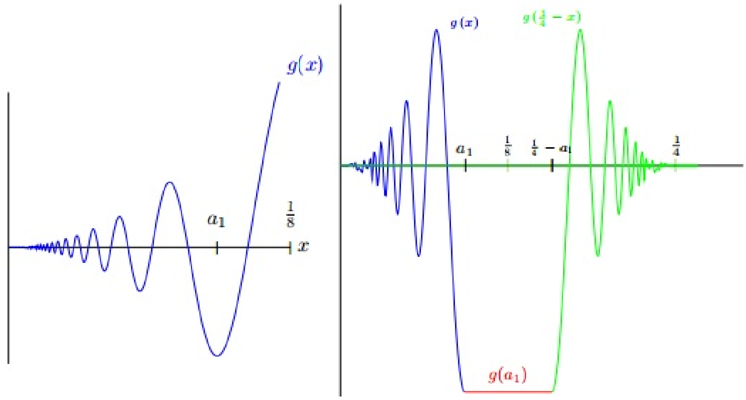


Figura 6.2. Izquierda : Se define a_1 como el mayor x menor de $\frac{1}{8}$ de tal manera que $g'(x) = 0$. **Derecha**: Las tres piezas que componen la función f_1: la función g , su valor constante en a_1, y g reflejada. Podemos ver que esta función f_1 es diferenciable (y continua), pero su derivada f_1' tiene discontinuidades en los extremos 0 y $\frac{1}{4}$

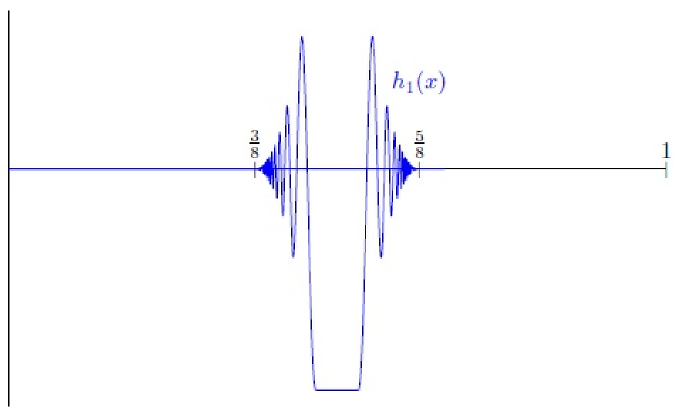


Figura 6.3. Nuestro primer paso en la construcción de la función de Volterra es crear la función h_1 definida en $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, el intervalo eliminado en la primera etapa de construcción del SVC. Observe cómo h_1 es simplemente f_1 trasladado al intervalo deseado

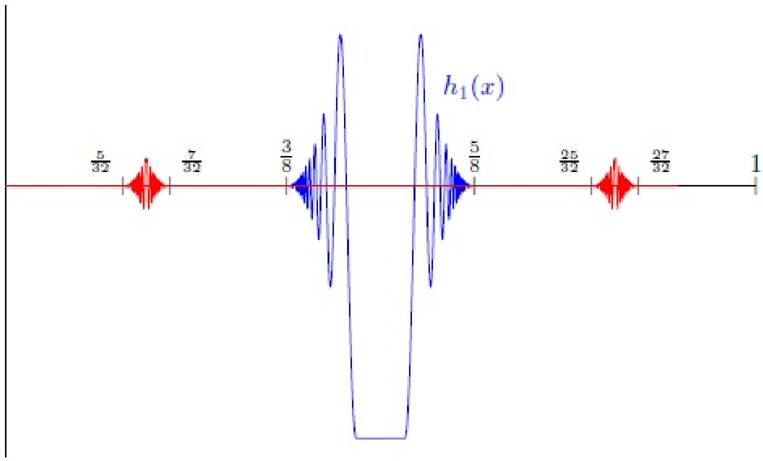


Figura 6.4. Un dibujo de h_1 (azul) y H_2 (rojo). La derivada de h_1 tiene dos discontinuidades, que se producen en los puntos $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{8}$. La derivada de la h_2 tiene cuatro discontinuidades, que se producen en los puntos $\frac{5}{32}$, $\frac{7}{32}$, $\frac{25}{32}$ y $\frac{27}{32}$. De esto, podemos suponer que, en general, la derivada de h_n tendrá discontinuidades en los 2n puntos, que en virtud de ser puntos finales de los intervalos eliminados en la construcción del SVC, son ellos mismos los elementos del SVC.

Entonces construimos la función f_2 en el intervalo $(0, \frac{1}{16})$, definida como

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ g(x) & si \quad 0 < x < a_2 \\ g(a_2) & si \; a_2 \leq x \leq \frac{1}{16} - a_2 \\ g(\frac{1}{16} - x) & si \; \frac{1}{16} - a_2 \leq x \leq \frac{1}{16} \\ 0 & si \quad \frac{1}{16} < x. \end{cases}$$

Ahora tenemos una función diferenciable cuya derivada es discontinua en 0 y $\frac{1}{16}$. Nuestro último paso es definir h_2 para crear dos copias de f_2 trasplantadas en los intervalos $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$ y $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$ respectivamente. Por lo tanto, h_2 es diferenciable y su derivada h_2' es discontinua precisamente en los cuatro puntos finales de los dos intervalos. Recordemos que estos puntos finales son en sí mismos puntos del SVC.

Ahora estamos listos para definir la función general f_n y h_n. Para empezar, observamos que en el enésimo paso de la construcción de la SVC , quitamos 2^{n-1} intervalos abiertos de longitud 4^{-n} . A continuación, definimos a_n para que sea el x más grande de longitud menor que $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n}$ donde $g'(x) = 0$. La función f_n quedará definida a trozos como:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \\ g(x) & si \quad 0 < x < a_n \\ \\ g(a_n) & si \quad 0 < a_n \\ \\ g(4^{-n} - x) & si \quad 4^{-n} - a_n \leq x \leq 4^{-n} \\ \\ 0 & si \quad 4^{-n} < x. \end{cases}$$

La función h_n se define entonces como la función a trozos que consiste en f_n llevada a los 2^{n-1} intervalos que retiramos en el paso n de la construcción del SVC .

Por último, podemos definir a continuación de Volterra función V.

Definición 6.1. *La función de Volterra es una función* $V : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x),$$

donde h_n *es la función definida a trozos consistente en las* 2^{n-1} *copias de la función sinusoidal* f_n *que se coloca en los* 2^{n-1} *intervalos de longitud* 4^{-n} *que proceden del intervalo* $[0, 1]$ *en el enésimo paso de la construcción del conjunto de Smith-Cantor.*

Ahora buscamos demostrar realmente que la función de Volterra V es diferenciable y que su derivada está acotada y no es integrable Riemann. Para demostrar que V es diferenciable, es más fácil si reformulamos nuestra definición de V ligeramente.

Recordemos que el SVC es un conjunto perfecto, denso en ninguna parte formado por los extremos de los intervalos que se retiraron en el proceso de construcción y de los puntos límite de los puntos finales. Debido a esto, podemos dividir el intervalo $[0, 1]$ en dos conjuntos disjuntos: el SVC y los intervalos abiertos eliminadas en el proceso de construcción (es decir, los intervalos cerrados, menos los puntos finales). Entonces, tenemos

$$[0, 1] \backslash S = \bigcup_{k=1}^{\infty} (u_k, v_k).$$

Elijamos uno de estos intervalos y denotémoslo por (u_n, v_n). Sea a_n un número contenido en $(u_n, \frac{u_n+v_n}{2})$ tal que $g'(a_n) = 0$. Debe quedar claro que se trata de un punto similar al a_n empleado en una sección anterior. Definimos entonces $b_n = u_n + v_n - a_n$, por lo que $a_n - u_n = v_n - b_n$. Por último, llega el momento de definir la función $f_n : (u_n, v_n) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} (x-u_n)^2 sen(\frac{1}{x-u_n}) & u_n < x < a_n \\ \\ (a_n-u_n)^2 sen(\frac{1}{a_n-u_n}) & a_n \leq x \leq b_n \\ \\ (v_n-x)^2 sen(\frac{1}{v_n-x}) & b_n < x < v_n \\ \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Podemos ver que:

$$\text{para} \quad u_n < x < a_n, \quad |f_n(x)| \leq |x-u_n|^2 \leq |x-v_n|^2$$

$$\text{para} \quad a_n \leq x \leq b_n, \quad |f_n(x)| \leq |a_n-u_n|^2 \leq |x-u_n|^2$$
$$\text{para} \quad a_n \leq x \leq b_n, \quad |f_n(x)| \leq |b_n-v_n|^2 \leq |x-v_n|^2$$
$$\text{para} \quad b_n < x < v_n, \quad |f_n(x)| \leq |x-v_n|^2 \leq |x-u_n|^2$$

Así, $|f_n(x)|$ está acotada por ambos $|x-u_n|^2$ y $|x-v_n|^2$.

Ahora, ya que tenemos $[0,1]\backslash S = \cup_{k=1}^{\infty}(u_k, v_k)$, para cada intervalo (u_k, v_k) sea f_k una función definida de igual forma que la anterior. Entonces podemos ver que la función de Volterra puede ser definida, de manera alternativa, como:

$$V(x) = \begin{cases} f_k(x) \; si & x \in (u_k, v_k) \\ \\ 0 \qquad si & x \in S, \end{cases}$$

donde S es el SVC. Teniendo en cuenta la definición de cada f_n , podemos ver que V será diferenciable para cualquier $c \notin S$. Entonces vayamos a elegir un elemento $c \in S$. Para ver que V es diferenciable en c, veamos que

$$\lim_{x \to c^-} \frac{V(x) - V(c)}{x - c} = 0.$$

La demostración se puede modificar de una forma fácil para adaptarla al caso del límite por la derecha. Sea $\varepsilon > 0$, y elijamos $\delta = \varepsilon$. Supongamos que $x \in (c-\delta, c)$. Percatémonos de que el resultado es trivial si consideramos $x \in S$, por lo que sea $x \in u_n, v_n$ para algún valor de n. Entonces de aquí se sigue que

$$\left| \frac{V(x) - V(c)}{x - c} \right| \leq \frac{|f_n(x)|}{-(x - v_n)} \leq \frac{|x - v_n^2|}{|x - v_n|} = |x - v_n| < \varepsilon.$$

Así, $V'(c) = 0$, por lo que concluimos que V es diferenciable en todo $c \in S$ y, de este modo, diferenciable en todo el intervalo $[0, 1]$.

Para ver que la función V' no es integrable Riemann, vamos a ver que V' tiene una discontinuidad en cada $c \in S$, esto es, en cada punto del SVC. Sea $c \in S$, como c es un punto límite del conjunto de los extremos de los intervalos quitados durante la construcción del SVC. Entonces, ya que c es un punto de ese conjunto E límite, existe una sucesión a_k de puntos en E que converge a c. Para cada n, existe un entero $a_n > n$ tal que

$$|V'(x_n)| = |f'_{k_n}(x_n)| = 1 \quad donde \quad x_n = a_{k_n} + \frac{1}{q_n \pi}.$$

Entonces la sucesión x_n converge a c pero la sucesión $V'(x_n)$ converge a $1 \neq 0 = V'(c)$, de lo que se obtiene que V' es discontinua en c. Entonces concluimos que V' no es continua en ningún punto de S. En otras palabras, V' toma valores 0 y 1 arbitrariamente cerca de cualquier punto en el SVC, y por lo tanto no es continua allí. Dado que la medida del conjunto de discontinuidades de V' es igual a la medida de S y que su medida es positiva, llegamos a la conclusión por el *Criterio de Lebesgue para Integrabilidad Riemann* que la función de Volterra V tiene una derivada acotada que no es integrable Riemann.

6.4. Función tipo Volterra no oscilante.

Ahora construimos una función $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable, con derivada acotada y discontinua en el conjunto de Cantor SVC. Para cada intervalo $(a, b) = E^i_k$, montamos la restricción de una función derivable $f_{a,b} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que ella y su derivada $f'_{a,b}$ tomen el valor cero en sus extremos a y b. Cuidamos que siempre haya un punto en (a, b) donde la derivada $f'_{a,b}$ tome el valor 1. En los puntos de $SVC = [0, 1]\backslash U$, a F la hacemos igual a cero.

Para construir $f_{a,b}$ en un intervalo $[a, b]$, partimos de la función

$$h(x) = \frac{2}{1 + x^2}.$$

Primero tomamos de esta función la parte correspondiente al intervalo $[-1, 1]$, luego extendemos esta parte al intervalo $[-2, 2]$ tomando los trozos en los intervalos $[0, 1]$ y $[-1, 0]$ debidamente reflejados y trasladados. Dado que $h'(-1) = 1$ y $h'(1) = -1$, con los tres trozos obtenemos una curva suave. Observemos que la gráfica de la función resultante tiene tangentes horizontales en los puntos (-2,0), (0, 2) y (2,0). Véase figura 6.

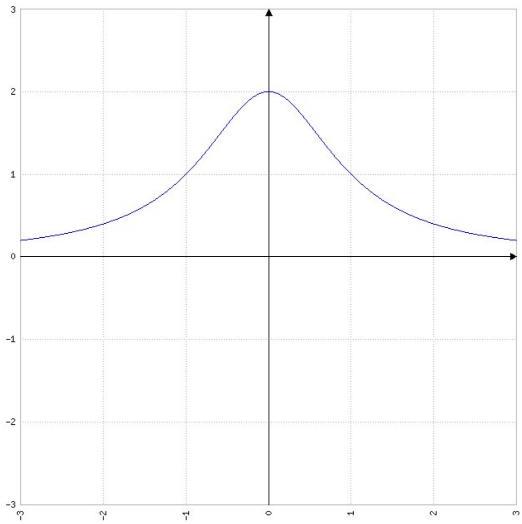


Figura 6.5. Representación de la función h(x)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2(x+2)^2}{(x+2)^2+1} & si \ -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{2}{1+x^2} & si \quad -1 < x < 1 \\ \frac{2(x-2)^2}{(x-2)^2+1} & si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

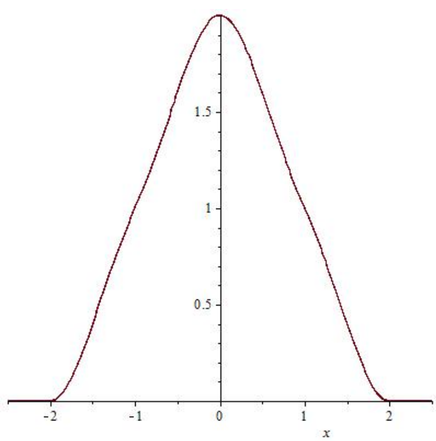


Figura 6.6. Gráfica de la función g

La derivada de g está dada por

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{4(x+2)}{(x^2+4x+5)^2} \; si \; -2 \leq x \leq -1 \\ \\ \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \quad si \quad -1 < x < 1 \\ \\ \frac{4(x-2)}{(x^2-4x+5)^2} \; si \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Observe que $g'(-2) = g'(0) = g'(2) = 0, \quad g'(-1) = 1$ y $\quad g'(1) = -1.$

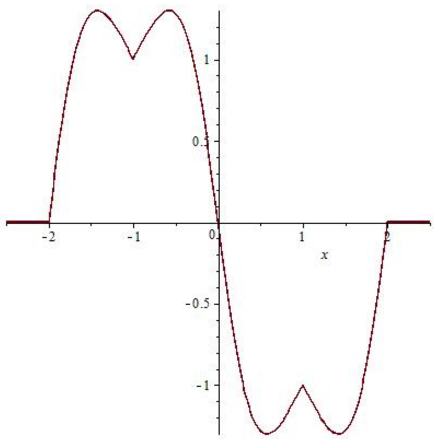


Figura 6.7. Gráfica de la función g'(x)

Mediante una composición adecuada, obtenemos una función $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, con las mismas cualidades de g específicamente si $f(x) = g(4x-2)$ obtenemos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{32x^2)}{16x^2+1} \quad si \; 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \\ \frac{2}{1+(4x-2)^2} \; si \; \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ \\ \frac{32(x-1)^2)}{16(x-1)^2+1} \; si \; \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

La derivada de f se anula en los extremos del intervalo $[0,1]$ y toma el valor 1 en el punto $x = \frac{1}{4.}$

Si $[a,b]$ es cualquier intervalo cerrado y acotado, definimos $f_{a,b} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ como $f_{a,b}(x) = (b-a)^2 f\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$, es decir

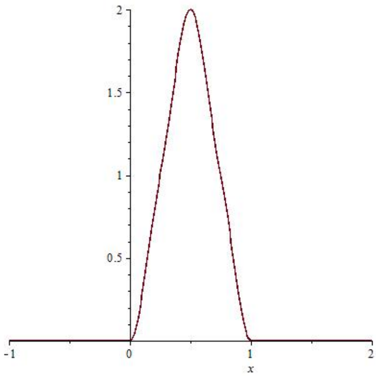


Figura 6.8. Gráfica de la función f(x)

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} (b-a)^2 \frac{32(\frac{x-a}{b-a})^2}{16(\frac{x-a}{b-a})^2+1} & si \quad a \leq x \leq a + \frac{b-a}{4} \\ \\ (b-a)^2 \frac{2}{1+(4\frac{x-a}{b-a}-2)^2} & si \ a + \frac{b-a}{4} < x < b + \frac{b-a}{4} \\ \\ (b-a)^2 \frac{32(\frac{b-x}{a-b})^2}{16(\frac{b-x}{a-b})^2+1} & si \quad b - \frac{b-a}{4} \leq x \leq b \end{cases}$$

Esta función se anula en los extremos a y b y su derivada satisface $f_{a,b}(a) = f_{a,b}(b) = 0$ y $f'_{a,b}(\frac{3a+b}{4}) = 1$. Esencialmente hemos llevado la función f definida en $[0,1]$ al intervalo $[a,b]$. El factor $(b-a)^2$ tiene la finalidad de comprimirla suficientemente, para cuando la longitud del intervalo $[a,b]$ es pequeña. Esto lo necesitamos para que la función F que vamos a definir resulte diferenciable.

Ahora definimos la función $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

1. Si $x \in U$, sea E_k^i el único intervalo de esta familia de intervalos, al cual pertenece x. Denotemos por (a,b) este intervalo. Definimos entonces
$$F(x) = f_{a,b}(x).$$
2. Si $x \in H$, definimos $F(x) = 0$.

Observemos que si $(a,b) \in \{E_k^i\}$ y $x \in (a,b)$, entonces

$$|F(x)| \leq 32(x-a)^2 \quad \text{si} \quad a \leq x \leq \frac{b-a}{4}$$

$$|F(x)| \leq 2(a-b)^2 \quad \text{si} \quad a + \frac{b-a}{4} < x < b - \frac{b-a}{4}$$

$$|F(x)| \leq 32(x-b)^2 \quad \text{si} \quad b - \frac{b-a}{4} \leq x \leq b$$

Probemos que F es derivable en todo punto $t \in [0,1]$.

Primero consideremos $t \in U$. Sea $(a,b) \in E_k^i$ tal que $t \in (a,b)$. En todo punto x de este intervalo F es derivable y

$$F'(x) = f'_{a,b}(x) = (b-a)f'\left(\frac{x-a}{b-a}\right).$$

En particular F es derivable en t.

Sea ahora $t \in H$. Por definición $F(t) = 0$. Probemos que

$$F'(t) = \lim_{x \to t} \frac{F(x) - F(t)}{x - t} = \lim_{x \to t} \frac{F(x)}{x - t} = 0.$$

Mostraremos que para cualquier $\epsilon > 0$, existe una δ-entorno del punto t tal que

$$\left|\frac{F(x}{x-t}\right| < \epsilon$$

para todo $x \in [0,1]$ que cumpla $0 < |x-t| < \delta$.

Sea entonces $\epsilon > 0$ arbitrario. Consideremos cualquier δ-entorno de t. Sea $x \in [0,1]$ tal que $0 < |x-t| < \delta$. Si $x \in H$, entonces $\frac{F(x)}{x-t} = 0$.

Si $x \in U$, entonces x pertenece a algún intervalo abierto $(a,b) \in E_k^i$. Necesariamente uno de los extremos del intervalo (a,b) pertenece al δ-entorno de t. Este extremo está entre t y x. Se puede probar que si este extremo es a, entonces $\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| \leq \left|\frac{F(x)}{x-a}\right| \leq 32|x-a|$.

Por otra parte, si b está entre t y x tenemos que $\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| \leq \left|\frac{F(x)}{x-b}\right| \leq 32|x-b|$.

En cualquier caso tenemos que $\left|\frac{F(x)}{x-t}\right| < \epsilon$.

Esto prueba que $F'(x) = \lim_{x \to t} \frac{F(x)-F(t)}{x-t} = 0$.

Hemos probado que F es derivable en $[0,1]$ y que en todo punto x del conjunto de Cantor H, $F'(x) = 0$.

Observemos que F' está acotada en el intervalo [0, 1], de hecho $|F'(x)| \leq 2 \quad \forall x \in [0,1]$.

Probemos ahora que F' es discontinua en H. Sea $x \in H$. Como H es perfecto, todo entorno $I_\delta = (x-\delta, x+\delta)$ de x tiene un punto y de H diferente de x. Por otra parte, en el intervalo cerrado con extremos en x e y, por ejemplo $[x, y]$, necesariamente existe un punto $\alpha \in U$, pues en caso contrario H contendría al intervalo con extremos x y y, en consecuencia tendría puntos interiores, pero esto no puede ser posible ya que H es denso en ninguna parte.

Supongamos $\alpha \in (a, b) \in E_k^i$. Entonces $(a, b) \subset (x, y)$, pues en caso contrario uno de los puntos x e y estaría en (a, b). Como la derivada de la función $f_{a,b}$ toma el valor 1 en algún punto, entonces existe un punto z en el δ-entorno de x tal que $F'(z) = 1$. Esto implica que F' es discontinua en x ya que $F'(x) = 0$.

Hemos probado que F' es discontinua en el conjunto de Cantor H., el cual es de medida $\frac{1}{2}$, luego F' no es integrable Riemann.

Las siguientes figuras muestran las gráficas de algunas funciones $f_{a,b}$ y sus derivadas $f'_{a,b}$ con lo cual podemos tener una idea del aspecto que va adquiriendo la gráfica de F durante su construcción, así como la de su derivada.

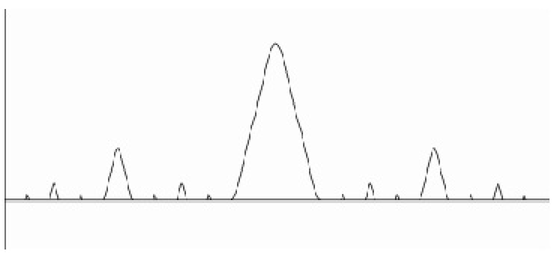


Figura 6.9.

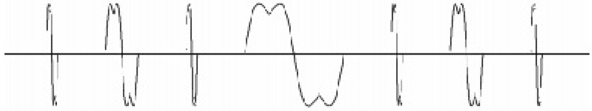


Figura 6.10.

7

Apéndice.

A continuación se expone una lista con las definiciones, proposiciones, teoremas y corolarios que se han ido usando a lo largo de este trabajo:

7.1. Los números reales.

Definición 7.1. *Sea A un subconjunto de R.*

i) El conjunto A es perfecto si es cerrado y cada punto de A es un punto límite.
ii) A es nunca denso si su clausura $\overline{A}$ no contiene intervalos abiertos.

Proposición 7.2. *Todo conjunto perfecto es no numerable.*

Teorema 7.3. ***Teorema de los intervalos encajados de Cantor***
Dada una sucesión de intervalos cerrados tal que:

1. $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq ... \supseteq [a_n, b_n]$
2. $\lim_{n\to\infty} long[a_n, b_n] = 0$

Entonces existe un único $c \in [a_0, b_0]$ tal que

$$\bigcap [a_n, b_n] = \{c\}.$$

7.2. Funciones derivables.

Definición 7.4. ***Función derivable***
Sea $f : (a, b) \to R$ y $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es derivable en x_0 si existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ y es finito. En ese caso denotaremos por $f'(x_0)$ el límite anterior.

Se dice que f es derivable por la izquierda en x_0 *si existe* $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *y es finito. En ese caso denotaremos por* $f'_+(x_0)$ *el límite anterior.*

Se dice que f es derivable por la derecha en $x_0 siexiste \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)?f(x_0)}{h}$ *y es finito. En ese caso denotaremos por* $f'_+(x_0)$ *el límite anterior.*

Así, f *es derivable en* x_0 *si y sólo si es derivable por la derecha y por la izquierda en* x_0 *y* $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.

Teorema 7.5. ***Teorema del Valor Medio***
Dada cualquier función f *continua en el intervalo* $[a, b]$ *y diferenciable en el intervalo abierto* (a, b) *entonces existe al menos algún punto* c *en el intervalo* (a, b) *tal que la tangente a la curva en* c *es paralela a la recta secante que une los puntos* $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$. *Es decir:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Proposición 7.6. ***Propiedades analíticas de la función*** $x^2 sen(\frac{1}{x})$
Sea $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida a trozos*

$$g(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) \ si \ x \neq 0 \\ \\ 0, \qquad si \ x = 0 \end{cases}$$

g es derivable (y continua)en [0, 1] pero su derivada g' *es acotada pero no continua en* $x = 0$.

Recordemos que g es derivable en 0 si el limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$$

existe. La definición de g parece indicar que la función g es diferenciable en 0 y que $g'(0) = 0$. *Para demostrar esto veamos que*

$$g'(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{n\to\infty} x sen(\frac{1}{x}) = 0.$$

Por tanto, g es diferenciable en 0 y, de este modo, también es continua.

También podemos ver que la derivada de la función g, $g' : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *está definida de la forma*

$$g'(x) = \begin{cases} 2x sen(\frac{1}{x}) - cos(\frac{1}{x}) \ si \ x \neq 0 \\ \\ 0, \qquad si \ x = 0 \end{cases}$$

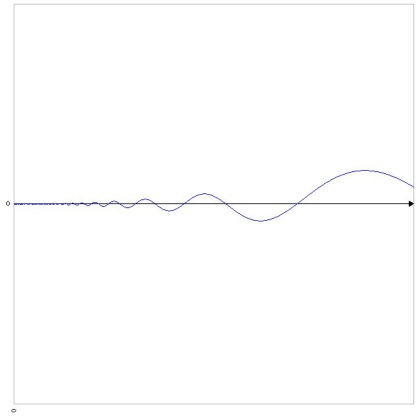


Figura 7.1. La función oscila vertiginosamente a medida que se acerca al origen

Además, podemos observar que g' no es continua en 0 ya que la sucesión x_n definida en [0,1] por

$$x_n = \frac{1}{\pi n}$$

converge a 0 pero la serie $\{|g'(x_n)|\}$ no converge a $\{|g'(0)|\} = 0$ ya que $\{|g'(x_n)|\} = 1, \forall n$. En lo referente a la acotación, la expresión que define g' revela que es acotada en [0, 1].

Entonces, g es una función cuya derivada existe y está acotada en cualquier parte del intervalo [0, 1], pero g' no es continua en 0. Deberíamos notar que la función $g'(1-x)$ está acotada pero es discontinua en 1.

Teorema 7.7. ***Teorema de Diferenciación de Lebesgue***
Toda función monótona es derivable en ctp.

7.3. Funciones integrables Riemman.

Definición 7.8. ***Partición de un intervalo*** *Sea [a,b] un intervalo cerrado sobre los números reales. Entonces una partición de [a,b] es un subconjunto finito $P = \{x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b\}$ tal que $x_{i-1} < x_i$, con $i = 1, ..., n$. La norma de la partición es el intervalo más grande:*

$$\|P\| = \text{máx}\{x_i - x_{i-1} : i = 1, ..., n\}$$

Lo que estamos haciendo en pocas palabras es cortar al intervalo en subintervalos disjuntos, cuya unión forma el intervalo original, la norma es el valor del intervalo de mayor longitud.

Definición 7.9. ***Suma de Riemann*** *Sea f una función en [a, b] y tomemos una partición del intervalo [a, b], que denotaremos por* $P = x_0 = a, x_1, ..., x_n = b$ *entonces llamamos suma de Riemann a una suma de la forma:*

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}), \quad con \quad x_{k-1} \leq t_k \leq x_k$$

De manera intuitiva esta suma representa la suma de áreas de rectángulos con base $x_k - x_{k-1}$ *y altura* $f(t_k)$*. Simbolizamos esta suma como S(P, f), también se utiliza la notación más extensa pero más explícita:*

$$S(P, f, \{t_i\}_{i=1}^{n})$$

Definición 7.10. ***Integrable Riemann***
Una función f acotada definida en un intervalo $[a, b]$ *se dice que es Riemann integrable en* $[a, b]$ *si existe un número* I *en los reales tal que, para todo número real positivo* ε *existe una* δ *positivo tal que si* P *es una partición de* $[a, b]$ *con* $||P|| < \delta$ *y* $S(P, f)$ *es cualquier suma de Riemann entonces* $|S(P, f) - I| < \varepsilon$.

Teorema 7.11. ***Criterio de Lebesgue para la integrabilidad Riemann***
Sea f una función definida y acotada en [a,b] y sea $\triangle$ *el conjunto de las discontinuidades de f en [a,b]. entonces f es integrable Riemann si, y sólo si, la medida de Lebesgue de* $\triangle$ *es cero.*

Proposición 7.12. *Todo conjunto numerable tiene medida de Lebesgue cero.*

Teorema 7.13. ***Teorema Fundamental del Cálculo***
Dada una función f *integrable sobre el intervalo* $[a, b]$*, definimos* F *sobre* $[a, b]$ *por* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$*. Si* f *es continua en* $c \in (a, b)$*, entonces* F *es derivable en* c *y* $F'(c) = f(c)$.

7.4. Sucesiones y series funcionales.

Definición 7.14. ***Convergencia puntual y uniforme***
Una sucesión de funciones S_n *sobre el intervalo* I *se dice que converge puntualmente a una función* S *sobre* I *si* $\forall x \in I$

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = S(x),$$

esto es,

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

La convergencia es uniforme sobre I *si*

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n(x) - S(x)||_{\infty,I} = 0,$$

esto es,

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \sup_{x\in I} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Teorema 7.15. *Prueba M de Weierstarss*
Sea $f_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una sucesión de funciones tales que* $\sup_{x\in I} |f_k(x)| \leq M_k, \forall k \in \mathbb{N}$. *Si* $\Sigma_{k=1}^{n} M_k < \infty$*, entonces la serie* $\Sigma_{k=1}^{n} f_k(x)$ *es uniformemente convergente en I.*

Teorema 7.16. *Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones continuas sobre I y* f_n *converge uniformemente a* f *en I, entonces* f *es una función continua en todo I.*

Corolario 7.17. *Si* $f_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función continua* $\forall k \in \mathbb{N}$ *y* $\Sigma_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *converge uniformemente a S(x) en I, entonces S es una función continua en todo I.*

Corolario 7.18. *Sea* $\{f_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ *una sucesión de funciones continuas diferenciables en* $\mathbb{R}$. *Si* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ *converge puntualmente a* $f(x)$ *y* $\sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)$ *converge uniformemente en* $\mathbb{R}$ *entonces* $f(x)$ *es diferenciable y su derivada* $f'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j'(x)$.

Proposición 7.19. *Fórmula de Cauchy - Hadamard* *Dada la serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

donde $a, c_n \in \mathbb{R}$. *Entonces el radio de convergencia de* f *en el punto* a *estará dado por*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sup(|c_n|^{\frac{1}{n}})$$

Bibliografía

[1] K. Bealand, J.W.Roberts and C. Stevenson. *Modifications of Thomae's function and differentiability Amer. Math. Montly,* ***116*** *(2009), 531-535.*

[2] W. Brito. *El teorema de la categoría de Baire y aplicaciones, Consejo de Publicaciones de La Universidad de Los Andes, Venezuela, 2011.*

[3] G. Gabinsky. *La función continua no diferenciable de Weierstrass, Miscelánea Matemática 25 (1997), 29-38.*

[4] P. Hardman. *Pathological applications of Lebesgue measure to the Cantor set and non-integrable derivatives, https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Hardman.pdf*

[5] *Non-analytic smooth function, https://en.wikipedia.org/wiki/Non-analytic-smooth-function.*

[6] A.B. Kharazishvili. *Strange functions in Real Analysis, Taylor and Francis, 2006.*

[7] L. Moreno Armella. *Weierstrass: Cien años después, Miscelánea Matemática, 25 (1997), 11-27.*

[8] J.C. Ponce Campuzano y A. Rivera Figueroa. *Casos en los que no es aplicable la fórmula* $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. *Miscelánea Matemática, 48(2009), 59 - 74.*

[9] K.D. Schmidt. *The Cantor set in probability theory,* $http://ub-madoc.bib.uni-mannheim.de/1670/1/121_1991.pdf$

[10] J. Thim. *Continuous nowhere differentiable functions, Master Thesis, 2003.*

Pathological functions in Real Analysis

Juan Jesús Dóniz Labrador
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100531060@ull.edu.es

Abstract

The aim of this notes is to show different pathological functions as continuous and zero functions in irrational numbers and positives in rational numbers, continuous nowhere differentiable functions, nowhere monotone differentiable functions, infinitely differenctiable nowhere analytic functions, singular functions and functions with bounded derivative and no integrable.

1. Continuous and zero functions in irrational numbers and positives in rational numbers.

Dirichlet gives an example of a function that is not continuous anywhere.

$$D(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1 \;\; si \;\; x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Thomae modifies the Dirichlet funtion the following way:

$$T(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \;\; si \;\; x = \frac{p}{q} \text{ donde p y q son primos entre si} \\ 1 \;\; si \;\; x = 0 \end{cases}$$

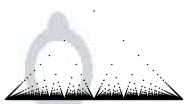


Figure 1: *Thomae's function*

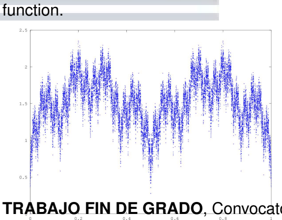
The Thomae's function is continuous in irrational numbers and discontinuous in the rationals. Moreover, it is integrable Riemann, zero in the irrationals and positive in the rationals.

2. Continuous nowhere differentiable functions.

(Theorem: K. Weierstrass) Let $b \in (0,1)$ be and a odd integer such that $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Then, the function

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n cos(a^n \pi x)$$

is a continuous nowhere differentiable function.



3. Nowhere monotone differentiable functions.

A function $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is said **nowhere monotone** if there is no closed subinterval $[a,b]$ with $a < b$, on the f which is monotone.

Building a discontinuous always and nowhere monotone function is very easy. For example, the characteristic function in $\mathbb{Q}$, f $= \chi_{\mathbb{Q}}$, is of this type. Observe a monotonic function never be confused with a function that is not monotone in $[0,1]$. Are there nowhere monotone continuous functions? The answer, as expected, is yes. Indeed, given the *differentiability theorem Lebesgue*, it follows that every continuous nowhere differentiable function in $[0,1]$ is a continuous function nowhere monotone.

(Theorem: Katznelson - Stromberg's function.) There is a differentiable function H on $\mathbb{R}$ with bounded derivative such that H is nowhere monotone.

4. Infinitely differenctiable nowhere analytic functions.

One of the simplest examples of a function $C^{\infty}(\mathbf{R})$, that is not analytic at any point, was built by Mathias Lerch in 1888, and it is as follows:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{cos(a^k x)}{k!}$$

with a odd and greater than 1.

Kent and Merrifield give another more recent example of an infinitely differentiable function of which is not analytic at any point, constructed by means of a Fourier series as follows. Let $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$ the set of powers of 2 and define $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \sum_{k \in A} e^{-\sqrt{k}} cos(kx)$$

.

5. Singular functions.

A function $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ is said **singular** if it satisfies:

a) f is continuous on $[a,b]$.

b) f is increasing.

c) $f(a) < f(b)$.

d) There is a set of measure zero N such that $f'(x) = 0, \forall x \in [a,b] \backslash N$.

A standard example of singular function is the function of Cantor, also called the devil's staircase.

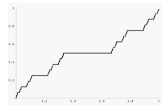


Figure 3: *Cantor's function.*

6. Functions with bounded derivative and no integrable.

The first example of a **differentiable function with derivative bounded but not integrable** is due to Volterra, which dates back to 1881. If the surface looks the construction of the function of Volterra, may be under the impression that the nonintegrability of the derivative is because the function in which the construction is based, ranging countless times around the origin, for this reason we present in this chapter similar to that of Volterra, base whose function, which is used for its construction has a better performance derivative function.

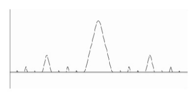


Figure 4: *Volterra non-oscillating function.*

References

[1] K. Bealand, J.W.Roberts and C. Stevenson. *Modifications of Thomae's function and differentiability Amer. Math. Montly,* ***116*** *(2009), 531-535.*

[2] G. Gabinsky. *La función continua no diferenciable de Weierstrass, Miscelánea Matemática 25 (1997), 29-38.*

[3] P.Hardman. *Pathological applications of Lebesgue measure to the Cantor set and non-integrable derivatives, https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/Hardman.pdf*

[4] A.B. Kharazishvili. *Strange functions in Real Analysis, Taylor and Francis, 2006.*

[5] J.C. Ponce Campuzano y A. Rivera Figueroa. *Casos en los que no es aplicable la fórmula $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$. Miscelánea Matemática, 48(2009), 59 - 74.*

[6] J. Thim. *Continuous nowhere differentiable functions, Master Thesis, 2003.*