

Alba Crespo Pérez

Funciones armónicas

Harmonic functions

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2017

DIRIGIDO POR

Manuel T. Flores Mederos
Alejandro Sanabria García

Manuel T. Flores Mederos
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Alejandro Sanabria García
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Agradezco la inigualable labor de todo el profesorado de la Sección de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, cuya dedicación, esfuerzo y excelencia en su labor docente me ha permitido comenzar a adentrarme en el amplio universo de las Matemáticas y apreciar su belleza. En especial agradezco al Prof. Manuel Flores Mederos su inestimable apoyo y estímulo durante estos años, desde los primeros cursos del Grado hasta la realización de este trabajo, así como su inigualable capacidad para transmitirnos en sus clases la alegría de comprender las Matemáticas. Gracias también al Prof. Alejandro García Sanabria por haber colaborado con nosotros.

Por último, agradezco a mi madre su apoyo incondicional, que me ha proporcionado durante toda mi vida el ambiente más propicio para crecer, avanzar y hacer realidad mis sueños.

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria estudiamos en detalle el operador de Laplace Δ en el espacio Euclideo n -dimensional \mathbb{R}^n mediante algunos problemas clásicos en los que interviene. Entre otras presentamos las propiedades básicas de las funciones armónicas (aquellas $u \in C^2$ tales que $\Delta u = 0$) tales como la propiedad de la media, el principio de máximo, el problema de Dirichlet/Neumann, las desigualdades/principio de Harnack, el teorema de Bôcher y el problema de Poisson para terminar con el lema de regularidad de Weyl.

Palabras clave: *Funciones armónicas – Problema de Dirichlet – Problema de Neumann – Desigualdades/principio de Harnack – Teorema de Bôcher – Lema de Weyl – Problema de Poisson.*

Abstract

In this memoir we provide a detailed study for the Laplace operator in Euclidean n -dimensional space \mathbb{R}^n via some classical problems in which it intervenes. Among then we consider the basic properties of harmonic functions (those $u \in C^2$ so that $\Delta u = 0$) such as the mean value property, the maximum principle, the Dirichlet/Neumann problems, Harnack's inequalities/principle, Bôcher's theorem and Poisson's problem to finish with Weyl's regularity lemma.

Keywords: *Harmonic functions – Dirichlet's problem – Neumann's problem – Harnack's inequalities/principle – Weyl's lemma – Bôcher's theorem – Poisson's problem.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
Funciones armónicas en \mathbb{R}^n	1
1. El operador de Laplace	1
2. Propiedades básicas de las funciones armónicas	4
2.1. Integración sobre esferas	5
2.2. La propiedad del valor medio	7
2.3. El recíproco del teorema del valor medio	11
2.4. El Principio del Máximo	12
3. La solución fundamental	14
4. Los problemas de Dirichlet y Neumann	16
4.1. La transformada de Kelvin	17
4.2. La función de Green y el núcleo de Poisson	20
4.3. La función de Neumann	26
5. Mas propiedades de las funciones armónicas	27
5.1. La propiedad del valor medio revisada	27
5.2. Estimaciones locales. Analiticidad	32
5.3. El principio de reflexión	36
5.4. Singularidades aisladas	37
5.5. Funciones Armónicas Positivas	38
6. La ecuación de Poisson con soporte compacto	43
7. El lema de Weyl	45
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

En esta memoria hacemos un estudio detallado de las funciones armónicas en \mathbb{R}^n para $n \geq 2$. Esto constituye la continuación natural de los contenidos estudiados en la asignatura *Ecuaciones Diferenciales II* de tercero de Grado de Matemáticas, donde se hace un estudio somero (vía separación de variables) del Problema de Dirichlet en dos dimensiones. En el presente trabajo profundizaremos en las propiedades básicas de las funciones armónicas, es decir, aquellas que satisfacen $\Delta u = 0$ donde Δ es el operador de Laplace

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

entre las que se encuentran la propiedad de la media o el principio del máximo, este último en el que se ha basado la definición relativamente reciente de *soluciones viscosas* para operadores no lineales mas generales.

Tras caracterizar el operador de Laplace mediante sus propiedades de invarianza, en la sección 2, caracterizaremos las funciones armónicas via la propiedad del valor medio. Acto seguido computaremos su solución fundamental que, con algunas manipulaciones clásicas, permite caracterizar las funciones de Green y Neumann asociados a los problemas de valores de frontera correspondientes que estudiamos en el apartado 3.

Continuamos con el estudio del comportamiento tanto local como global que presentan las funciones armónicas. En particular se recoge un resultado sobre evitabilidad de singularidades, algunos teoremas clásicos que de rigidez, a saber, los teoremas de Harnack y Bôcher.

Nuestra memoria termina con el estudio del problema de Poisson para funciones de soporte compacto (sección 6), para culminar con el lema de Weyl, que refleja el carácter elíptico de Δ .

Funciones armónicas en \mathbb{R}^n

1. El operador de Laplace

El *operador de Laplace* o *Laplaciano* es quizás el operador diferencial más importante de todos los operadores en derivadas parciales, no sólo por sus aplicaciones sino por el papel que juega en fenómenos más generales. Está definido por

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

La electrostática permite un marco físico en el que presentar el operador de Laplace: de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell, un campo electrostático \vec{E} en el espacio (un campo que representa la fuerza sobre una unidad de carga positiva) está relacionado con la densidad de carga f por la ecuación $\nabla \cdot \vec{E} = f$ y también satisface $\nabla \times \vec{E} = 0$ (en n dimensiones $\nabla \times \vec{E}$ denota la matriz antisimétrica $(\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j})_{i,j}$). La última condición significa que, al menos localmente, $\vec{E} = -\nabla u$ para alguna función u llamada *potencial electrostático*. Así $-\Delta u = \nabla \cdot \vec{E} = f$ y, por tanto, el Laplaciano relaciona el potencial con la densidad de carga.

En este capítulo hemos seguido fundamentalmente los manuscritos de Axler-Bourdon-Ramey [1], Evans [6], Flores-Sadarangani [7], Folland [8] y John [15].

Propiedades de invarianza

Una de las propiedades fundamentales del Laplaciano es que conmuta con traslaciones/rotaciones y genera el anillo de operadores diferenciales con esta propiedad. De aquí que aparezca en procesos físicos cuya física subyacente sea homogénea (independiente de la posición) e isotrópica (independiente de la dirección).

Más precisamente, que un operador L en \mathbb{R}^n conmute con traslaciones/rotaciones significa que $L(u \circ \psi) = (Lu) \circ \psi$ para toda traslación/rotación ψ en \mathbb{R}^n .

Teorema 1.1. *Sea L un operador diferencial en derivadas parciales en \mathbb{R}^n . Entonces, L conmuta con traslaciones y rotaciones si y sólo si, L es un polinomio en Δ , ésto es, $L = \sum_j a_j \Delta^j$ donde la suma es finita y $a_j \in \mathbb{R}$.*

Los operadores considerados en este teorema son de la forma

$$L[u](x) = P(x, \partial)u(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) \quad (1.1)$$

donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ es una n -tupla de enteros no negativos y

$$\partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

con $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$. Aquí $m = 1, 2, \dots$ y además, para que el operador tenga orden m , suponemos que $a_\alpha \neq 0$ para algún α con $|\alpha| = m$.

Que el operador (1.1) sea invariante por traslaciones significa que tiene coeficientes constantes, i.e., $a_\alpha(x) \equiv a_\alpha$ no depende de x . En efecto, si $\tau_a(x) = x + a$ denota la traslación por $a \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$[L(u \circ \tau_a)](\cdot) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\cdot) [\partial^\alpha (u \circ \tau_a)](\cdot) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(\cdot) [(\partial^\alpha u) \circ \tau_a](\cdot)$$

mientras que

$$[(Lu) \circ \tau_a](\cdot) = \sum_{|\alpha| \leq m} [a_\alpha \circ \tau_a](\cdot) [(\partial^\alpha u) \circ \tau_a](\cdot).$$

Esto implica que $a_\alpha = a_\alpha \circ \tau_a$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$ y por tanto a_α es constante.

Demostración (del teorema 1.1). Un operador $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ con coeficientes constantes conmuta con rotaciones si

$$L(u \circ \rho_O) = (Lu) \circ \rho_O, \quad (1.2)$$

para todo $O \in \mathfrak{o}_n$ ($O^t O = I$) donde $\rho_O(x) = O(x)$. Pero si $\omega \in \mathbb{R}^n$, para $u = e_\omega$ donde $e_\omega(x) = e^{\omega \cdot x}$ tenemos

$$(Le_\omega) \circ \rho_O = (P(\omega)e_\omega) \circ \rho_O = P(\omega) [e_\omega \circ \rho_O]$$

y

$$\begin{aligned} L(e_\omega \circ \rho_O) &= L(e_{O^t(\omega)}) = P(O^t(\omega)) e_{O^t(\omega)} \\ &= P(O^t(\omega)) [e_\omega \circ \rho_O]. \end{aligned}$$

Así, que L sea \mathfrak{o}_n -invariante equivale a decir que $P(O^t(\omega)) = P(\omega)$ para todo $O \in \mathfrak{o}_n$ y $\omega \in \mathbb{R}^n$ (basta evaluar (1.2) en $x = 0$), esto es, P debe ser radial. Puesto que la acción de \mathfrak{o}_n conserva la descomposición homogénea de polinomios, podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $P = P_s$ es homogéneo de grado s . Esto implica que $P_s(x) = c|x|^s$ con s par ya que P_s es un polinomio, lo que quiere decir que el polinomio original es de la forma

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_k |x|^{2k} = Q(|x|^2)$$

con

$$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_j \lambda^j.$$

$$\text{Así } L = Q(\Delta) = \sum_{j=0}^{\lfloor m/2 \rfloor} a_j \Delta^j.$$

Para el recíproco será suficiente probar (1.2) para $L = \Delta$. Si $O = (o_{ij})_{i,j} \in \mathfrak{o}_n$ es ortogonal, entonces

$$\frac{\partial(u \circ \varrho_O)}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^n o_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j}(O(x))$$

y de igual forma

$$\frac{\partial^2(u \circ \varrho_O)}{\partial x_k^2}(x) = \sum_{j,\ell=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x)).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} [\Delta(u \circ \varrho_O)](x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(u \circ \varrho_O)}{\partial x_k^2}(x) = \sum_{j,\ell,k=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x)) \\ &= \sum_{j,\ell=1}^n \left(\sum_{k=1}^n o_{jk} o_{\ell k} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x)) \stackrel{\substack{\uparrow \\ O \in \mathfrak{o}_n}}{=} \sum_{j,\ell=1}^n \delta_{j\ell} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_\ell}(O(x)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(O(x)) = \Delta u(O(x)) = [(\Delta u) \circ \varrho_O](x). \quad \square \end{aligned}$$

Puesto que el Laplaciano conmuta con rotaciones, conserva la clase de las funciones radiales sobre la que se reduce a un operador diferencial ordinario llamado la *parte radial* del Laplaciano.

Proposición 1.2. Si $u(x) = f(r)$ donde $r = |x|$, entonces

$$\Delta u(x) = f''(r) + \frac{(n-1)}{r} f'(r).$$

Demostración. Puesto que $\partial r / \partial x_j = x_j / r$, tenemos

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{x_j}{r} f'(r) \right] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{x_j^2}{r^2} f''(r) + \left(\frac{1}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) f'(r) \right] \\ &= f''(r) + \left(\frac{n}{r} - \frac{1}{r} \right) f'(r) = f''(r) + \frac{(n-1)}{r} f'(r). \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 1.3. Si $u(x) = f(r)$ es radial entonces, u satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si, y sólo si,

$$f(r) = \begin{cases} a + b \ln r & \text{si } n = 2 \\ a + br^{2-n} & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

Demostración. $\Delta u = 0$ significa que $f''(r) + \frac{(n-1)}{r} f'(r) = 0$ por lo que, tras multiplicar por el factor integrante r^{n-1} , $\frac{d}{dr} [r^{n-1} f'(r)] = 0$. Así $f'(r) = cr^{1-n}$, y el corolario se deduce sin más que integrar tomando $b = \frac{c}{2-n}$ para $n > 2$ y $b = c$ si $n = 2$. \square

2. Propiedades básicas de las funciones armónicas

Una función $u \in C^2(\Omega)$ se dice *armónica* en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si $\Delta u = 0$ en Ω . Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado que suponemos con frontera regular y positivamente orientada, esto es, de modo que $\partial\Omega$ sea una hipersuperficie regular orientada por su normal unitaria exterior \vec{n} . Recordamos el teorema de Gauss [7, teorema 6.37]:

Teorema 2.1 (de la Divergencia). Si $\vec{V} \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{V} dv = \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

donde dv es el “elemento diferencial de volumen” y dS el “elemento diferencial de área”.

Teorema 2.2 (Identidades de Green). Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio acotado con frontera regular y u, v son dos funciones C^1 en $\overline{\Omega}$, entonces

$$\int_{\partial\Omega} v \partial_{\vec{n}} u dS = \int_{\Omega} (v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u) dv \quad (2.1)$$

y

$$\int_{\partial\Omega} (v \partial_{\vec{n}} u - u \partial_{\vec{n}} v) dS = \int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dv. \quad (2.2)$$

Demostración. La expresión (2.1) no es mas que el teorema 2.1 aplicado al campo $\vec{V} = v \nabla u$. Por su parte, (2.2) sigue de (2.1) restando tras intercambiar u y v . \square

Corolario 2.3 (Teorema integral de Gauss). Si u es armónica en Ω entonces

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\vec{n}} u dS = 0.$$

Demostración. Basta tomar $v = 1$ en (2.1) o (2.2). \square

2.1. Integración sobre esferas

En algunos de los apartados que siguen haremos uso explícito de la integración en hipersuperficies en \mathbb{R}^n y en particular de la que se refiere a la esfera unidad. Puesto que la integración se realiza en dimensiones superiores a tres (esta última es la que hemos estudiado en detalle durante el grado), creemos conveniente incluir aquí un estudio detallado para el caso esférico.

Sea ω_n el área de la esfera unidad en \mathbb{R}^n ,

$$\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \text{ (ver [7, ejemplo 4.28]),}$$

donde Γ denota la función de Euler

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, p > 0.$$

Utilizando el teorema de Fubini, veamos como es la expresión de la medida $d\sigma$ en coordenadas ambiente. Sabemos [3, ejercicio 4.3.1] que, como forma,

$$d\sigma(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \zeta_j d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \dots \wedge \widehat{d\zeta_j} \wedge \dots \wedge d\zeta_n^*,$$

por lo que, si para $1 \leq k \leq n-1$ denotamos por B_k a la bola unidad en \mathbb{R}^k y parametrizamos la esfera S^{n-1} mediante $\zeta = (x, (1 - |x|^2)^{1/2}\eta)$, con $x \in B_k$ y $\eta \in S^{n-k-1} \subset \mathbb{R}^{n-k}$, entonces para $\rho = (1 - |x|^2)^{1/2}$ tendremos

$$\omega_n d\sigma = \alpha \wedge \theta + dx \wedge \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{k+j-1} \zeta_{k+j} \theta^j$$

$\alpha = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_k$, $\theta = d\zeta_{k+1} \wedge \dots \wedge d\zeta_n$ y $\theta^j = d\zeta_{k+1} \wedge \dots \wedge \widehat{d\zeta_{k+j}} \wedge \dots \wedge d\zeta_n$. Puesto que $\zeta_{k+j} = \rho \eta_j$ nos queda

$$\begin{aligned} \theta &= (\eta_1 d\rho + \rho d\eta_1) \wedge \dots \wedge (\eta_{n-k} d\rho + \rho d\eta_{n-k}) \\ &= \rho^{n-k} \cancel{d\eta}^0 + \rho^{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} \eta_j d\eta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\rho}^j \wedge \dots \wedge d\eta_{n-k} \\ &= \omega_{n-k} \rho^{n-k-1} d\rho \wedge d\sigma(\eta) \end{aligned}$$

ya que $d\eta = d\eta_1 \wedge \dots \wedge d\eta_{n-k}$ es de orden $n - k > n - k - 1 = \dim S^{n-k-1}$. De forma similar,

$$\begin{aligned} \theta^j &= (\eta_1 d\rho + \rho d\eta_1) \wedge \dots \wedge \widehat{d\zeta_{k+j}} \wedge \dots \wedge (\eta_{n-k} d\rho + \rho d\eta_{n-k}) \\ &= \rho^{n-k} d\eta_1 \wedge \dots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \dots \wedge d\eta_{n-k} + d\rho \wedge \beta \end{aligned}$$

* En general, si $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad co-orientada por un campo ortonormal \tilde{n} , entonces se tiene que $d\sigma_\Sigma = \tilde{n} \lrcorner dx \lrcorner_\Sigma$ donde $dx = dx_1 \wedge dx_2 \wedge \dots \wedge dx_k$ denota la forma de volumen en \mathbb{R}^n y \lrcorner el operador de contracción definido por $\tilde{v} \lrcorner \omega(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k) = \omega(\tilde{v}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_k)$, si ω es una $(k+1)$ -forma [7, Apéndice D] (obérvase que $\tilde{v} \lrcorner \omega$ es una k -forma y por tanto $d\sigma$ es una $(n-1)$ -forma).

donde β es una $(n - k - 2)$ -forma en S^{n-k} . Así

$$\begin{aligned}\omega_n d\sigma &= \omega_{n-k} \varrho^{n-k-1} \alpha \wedge d\varrho \wedge d\sigma(\eta) + \varrho^{n-k+1} dx \\ &\quad \wedge \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^{k+j-1} \eta_j d\eta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \cdots \wedge d\eta_{n-k} + \cancel{dx \wedge d\varrho} \wedge \overset{0}{\beta} \\ &= \omega_{n-k} \left(\varrho^{n-k-1} \alpha \wedge d\varrho \wedge d\sigma(\eta) + (-1)^k \varrho^{n-k+1} dx \wedge d\sigma(\eta) \right),\end{aligned}$$

pero como

$$\begin{aligned}\alpha \wedge d\varrho &= - \left(\sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_k \right) \wedge \left(\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{\varrho} dx_j \right) \\ &= (-1)^k \varrho^{-1} |x|^2 dx\end{aligned}$$

tenemos

$$\omega_n d\sigma = (-1)^k \omega_{n-k} \varrho^{n-k-2} (|x|^2 + \varrho^2) dx \wedge d\sigma(\eta)$$

o

$$d\sigma = (-1)^k \frac{\omega_{n-k}}{\omega_n} \varrho^{n-k-2} dx \wedge d\sigma(\eta). \quad (2.3)$$

El posible signo que aparece en esta identidad se debe a que la parametrización de S^{n-1} considerada invierte orientación cuando k es impar y, por tanto, el factor $(-1)^k$ se debe eliminar en la identidad (2.3) cuando $d\sigma$ se entiende como la medida de Lebesgue normalizada en S^{n-1} (esto también se puede justificar recordando el teorema de cambio de variable en integración múltiple, donde en el cambio infinitesimal de medida aparece el valor absoluto del jacobiano del cambio de variables).

Así, si $u: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función (integrable) dada, entonces

$$\begin{aligned}&\int_S u(\zeta) d\sigma(\zeta) \\ &= \frac{\omega_{n-k}}{\omega_n} \int_{B_k} (1 - |x|^2)^{(n-k)/2-1} \left(\int_{S^{n-k-1}} u(x, (1 - |x|^2)^{1/2} \eta) d\sigma(\eta) \right) dx.\end{aligned} \quad (2.4)$$

En particular, si $u = u(x)$ ($x = (x_1, \dots, x_k)$) sólo depende de las k primeras variables,

$$\int_{S^{n-1}} u(\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{\omega_{n-k}}{\omega_n} \int_{B_k} (1 - |x|^2)^{(n-k)/2-1} u(x) dv(x).$$

Otra forma de probar este resultado es la siguiente: como antes, si $1 \leq k \leq n-1$, la aplicación $\Psi: B_k \times S^{n-k-1} \rightarrow S^{n-1}$ ($(x, \eta) \rightarrow (x, \varrho\eta)$) es uno a uno con imagen S^{n-1} salvo un subconjunto de medida cero (el conjunto de aquellos $\zeta \in S^{n-1}$ tales que $\zeta_{k+1} = \cdots = \zeta_n = 0$). Ahora pretendemos hallar una fórmula para el cambio de variables asociado a Ψ .

Observemos que $B_k \times S^{n-k-1}$ es una subvariedad $(n-1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n cuyo elemento de área es $dv(x) d\sigma(\eta)$. Para $x \in B_k$ fijo, Ψ cambia la medida de área sobre $\{x\} \times S^{n-k-1}$ por el factor ρ^{n-k-1} . Para η fijo, Ψ cambia la medida k -dimensional sobre $B_k \times \{\eta\}$ por el factor ρ^{-1} . Además, como se puede comprobar fácilmente, las subvariedades $\Psi(\{x\} \times S^{n-k-1})$ y $\Psi(B_k \times \{\eta\})$ son perpendiculares sobre sus puntos de intersección, por lo que Ψ cambia la medida $(n-1)$ -dimensional en $B_k \times S^{n-k-1}$ por el producto de estos factores, es decir, por $\rho^{n-k-2} = (1-|x|^2)^{(n-k)/2-1}$. Ajustando las constantes de normalización, esto implica (2.3).

Algunos casos particulares de (2.4) merecen mención especial. Por ejemplo, para $k=1$, que corresponde a la descomposición de S^{n-1} en esferas de una dimensión inferior intersectando S^{n-1} con hiperplanos ortogonales al primer eje coordenado, la bola B_1 es el intervalo $(-1, 1)$ y

$$\int_S u(\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{(n-3)/2} \left(\int_{S^{n-2}} u(x, (\sqrt{1-x^2})\eta) d\sigma(\eta) \right) dx.$$

En el otro extremo, el caso $k=n-1$ (que es el mayor valor admisible para k) corresponde a descomponer S^{n-1} como unión de pares de puntos intersectando S^{n-1} con rectas paralelas al último eje coordenado. La esfera S^0 es el conjunto de dos puntos $\{-1, 1\}$ y $d\sigma$ la medida contadora normalizada tal que cada punto tiene medida $1/2$. En este caso, (2.4) se escribe como

$$\int_S u(\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_{n-1}} \frac{u(x, \sqrt{1-|x|^2}) + u(x, -\sqrt{1-|x|^2})}{\sqrt{1-|x|^2}} dx.$$

Por último, si $n > 2$ y $k=n-2$, el término $(1-|x|^2)^{(n-k)/2-1}$ desaparece y la variable η varía en la circunferencia unidad en \mathbb{R}^2 que, por tanto, podemos parametrizar por $(\cos\theta, \sin\theta)$, lo que hace $d\sigma(\eta) = d\theta/2\pi$. Así, (2.4) se reduce a

$$\int_S u(\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_{n-2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(x, \sqrt{1-|x|^2} \cos\theta, \sqrt{1-|x|^2} \sin\theta) d\theta \right) dx.$$

2.2. La propiedad del valor medio

Si $d\sigma$ denota la medida de Lebesgue invariante por rotaciones en $S^{n-1} = \partial B$ y normalizada de modo que $\sigma(S^{n-1}) = 1$, el análogo multidimensional de la proposición 2.6 en [16] está dado por

Proposición 2.4. *Si $u \in C^2(B)$ entonces*

$$\Delta u(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2n}{r^2} \int_{S^{n-1}} (u(r\zeta) - u(0)) d\sigma(\zeta). \tag{2.5}$$

Demostración. Atendiendo al desarrollo de Taylor, para $\zeta \in S^{n-1}$ y $0 < r < 1$

$$u(r\zeta) = u(0) + r\nabla u(0) \cdot \zeta + \frac{r^2}{2} (\mathcal{H}u(0)\zeta) \cdot \zeta + o(r^2).$$

Integrando

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} u(r\zeta) \sigma(\zeta) &= u(0) + r \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(0) \int_{S^{n-1}} \zeta_j d\sigma(\zeta) \\ &\quad + \frac{r^2}{2} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(0) \int_{S^{n-1}} \zeta_j \zeta_k d\sigma(\zeta) + o(r^2) \\ &= u(0) + \frac{r^2}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(0) \int_{S^{n-1}} \zeta_j^2 d\sigma(\zeta) + o(r^2) \\ &= u(0) + \frac{r^2}{2n} \Delta u(0) + o(r^2) \end{aligned} \tag{2.6}$$

ya que

$$\int_{S^{n-1}} \zeta_j d\sigma(\zeta) = 0, \tag{2.7}$$

$$\int_{S^{n-1}} \zeta_j^2 d\sigma(\zeta) = \frac{1}{n} \tag{2.8}$$

si $j = 1, 2, \dots, n$ y

$$\int_{S^{n-1}} \zeta_j \zeta_k d\sigma(\zeta) = 0 \tag{2.9}$$

si $j \neq k$. Para ver esto, obsérvese que la función

$$\begin{aligned} Q(x) &= \int_{S^{n-1}} (\zeta \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) = \int_{S^{n-1}} \left(\sum_{j=1}^n \zeta_j x_j \right)^2 d\sigma(\zeta) \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_{S^{n-1}} \zeta_j^2 d\sigma(\zeta) \right) x_j^2 + 2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\int_{S^{n-1}} \zeta_j \zeta_k d\sigma(\zeta) \right) x_j x_k \end{aligned}$$

es radial, puesto que para toda transformación ortogonal $O \in o(n)$,

$$\begin{aligned} Q(Ox) &= \int_{S^{n-1}} (\zeta \cdot (Ox))^2 d\sigma(\zeta) = \int_{S^{n-1}} ((O^t \zeta) \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) \\ &= \int_{S^{n-1}} (\zeta \cdot x)^2 d\sigma(\zeta) = Q(x) \end{aligned}$$

porque σ es invariante por rotaciones. De aquí (2.9) es aparente. Además, como

$$\int_{S^{n-1}} \zeta_1^2 d\sigma(\zeta) = \int_{S^{n-1}} \zeta_2^2 d\sigma(\zeta) = \dots = \int_{S^{n-1}} \zeta_n^2 d\sigma(\zeta)$$

se tiene que

$$n \int_{S^{n-1}} \zeta_j^2 d\sigma(\zeta) = \sum_{k=1}^n \int_{S^{n-1}} \zeta_k^2 d\sigma(\zeta) = \int_{S^{n-1}} |\zeta|^2 d\sigma(\zeta) = \sigma(S^{n-1}) = 1$$

para todo $j = 1, 2, \dots$. Esto prueba (2.8). El razonamiento para ver (2.7) es similar: basta considerar la función

$$\widetilde{Q}(x) = \int_{S^{n-1}} \zeta \cdot x d\sigma(\zeta) = \sum_{j=1}^n \left(\int_{S^{n-1}} \zeta_j d\sigma(\zeta) \right) x_j$$

que, por la misma razón, también es radial. Puesto que \widetilde{Q} es lineal y $\widetilde{Q}(0) = 0$, se sigue que $\widetilde{Q} = 0$. Ahora (2.5) sigue haciendo $r \rightarrow 0^+$ en (2.6). \square

Ejemplo 2.5 (ver la Nota tras la solución del ejercicio 5.35 en [7]). En el caso particular $n = 3$ la medida $d\sigma$ en coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \text{sen } \varphi \cos \theta \\ y = \text{sen } \varphi \text{sen } \theta \\ z = \cos \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

tiene la expresión

$$d\sigma(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi} \det \begin{pmatrix} x & y & z \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\text{sen } \varphi}{4\pi} d\theta d\varphi.$$

La identidad (2.5) se convierte en

$$\Delta u(0) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{2\pi r^2} \int_0^\pi \text{sen } \varphi \left(\int_0^{2\pi} u(r \text{sen } \varphi \cos \theta, r \text{sen } \varphi \text{sen } \theta, r \cos \varphi) d\theta \right) d\varphi.$$

El siguiente teorema establece que el valor de una función armónica en un punto coincide con su valor medio sobre cualquier esfera centrada en dicho punto.

Teorema 2.6 (del valor medio). *Supongamos que la función u es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si $x \in \Omega$ y $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, entonces*

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\zeta-x|=r} u(\zeta) dS(\zeta) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) dS(\zeta) \\ &= \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) d\sigma(\zeta). \end{aligned}$$

Demostración. Primero obsérvese que la segunda igualdad sigue de la primera haciendo el cambio de variables $\zeta \rightarrow x+r\zeta$, que la tercera es otra forma de reescribir la segunda ($d\sigma = dS/\omega_n$) y que, componiendo con una traslación, podemos suponer

que $x = 0$. Para probar la primera usaremos el teorema integral de Gauss (corolario 2.3). Si

$$\Theta(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) dS(\zeta)$$

entonces

$$\Theta'(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} \zeta \cdot \nabla u(r\zeta) dS(\zeta) \underset{\substack{\uparrow \\ \eta=r\zeta}}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} \partial_{\vec{n}} u(\eta) dS(\eta) = 0.$$

Esto implica que Θ es constante, y por tanto

$$u(0) = \Theta(0) = \Theta(r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) dS(\zeta). \quad \square$$

Integrando en r podemos enunciar la siguiente versión del teorema 2.6 en volumen:

Corolario 2.7. Si u , Ω y $r > 0$ son como en el teorema 2.6, entonces

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{|y| \leq r} u(x+y) dv(y) = \frac{n}{\omega_n} \int_{|y| \leq 1} u(x+ry) dv(y).$$

Demostración. La última de estas igualdades se obtiene haciendo el cambio de variables $y \leftrightarrow ry$, y el resultado sigue sin más que multiplicar la relación

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x + \rho r \zeta) dS(\zeta)$$

por ρ^{n-1} e integrar para $0 \leq \rho \leq 1$. □

Observación 2.8. (a) Nótese que el factor n/ω_n en el corolario 2.7 coincide con $1/v(B)$ (el volumen n -dimensional de B).

(b) Puesto que $d\sigma = dS/\omega_n$, la fórmula (2.5) muestra que para funciones C^2 el recíproco del teorema 2.6 también es cierto. De hecho bastaría con que a cada $x \in \Omega$ correspondiera una sucesión de radios $0 < r_j < \text{dist}(x, \partial\Omega)$, $j = 1, 2, \dots$, tales que $r_j \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, para los que

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\zeta|=1} u(x + r_j \zeta) dS(\zeta), \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

El siguiente resultado es el análogo armónico del teorema 1.2.4 en [14] (ver también [16, teorema 1.10])

Corolario 2.9. Sea u armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo entorno abierto $U \subset \Omega$ de K existe $C > 0$ (que sólo depende de K y no de u) tal que

$$\sup_K |u| \leq C \|u\|_{L^1(U)}.$$

Demostración. Sea $\delta < \text{dist}(K, \partial U)/2$. Si $x_0 \in K$ y $|x - x_0| \leq \delta$, por el corolario 2.9 tenemos que

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{n}{\omega_n \delta^n} \int_{|y| \leq \delta} |u(x+y)| dv(y) \leq \frac{n}{\omega_n \delta^n} \int_U |u(y)| dv(y) \\ &= \frac{n}{\omega_n \delta^n} \|u\|_{L^1(U)}. \end{aligned} \quad \square$$

Observación 2.10. El corolario 2.9 muestra que, para sucesiones de funciones armónicas, la convergencia uniforme en compactos es equivalente a la convergencia en L^1_{loc} , es decir, en L^1 sobre compactos. Otra forma de decir esto es que las correspondientes topologías sobre el espacio de funciones armónicas coinciden.

De hecho, ¡cualquier topología ‘medianamente razonable’ que se considere en el espacio de funciones armónicas implica convergencia uniforme en compactos!

2.3. El recíproco del teorema del valor medio

El siguiente teorema muestra que la hipótesis de regularidad en la observación 2.8(b) puede relajarse sustancialmente:

Teorema 2.11. *Supongamos que u sea continua en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y que*

$$u(x) = \int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) d\sigma(\zeta) \tag{2.11}$$

si $x \in \Omega$ para todo $0 < r < \text{dist}(x, \partial\Omega)$. Entonces $u \in C^\infty(\Omega)$ y es armónica en Ω .

Demostración. De acuerdo con la observación 2.8(b), basta probar que $u \in C^\infty(\Omega)$. Sea $\phi \in C_c^\infty(B)$ radial tal que $\int_B \phi dv = 1$ y $\phi(x) = \psi(|x|)$ con $\psi \in C_c^\infty(0, 1)$. Para cada $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, sean $\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \phi(x/\varepsilon)$ y $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Entonces, si $x \in \Omega_\varepsilon$, la función $y \rightarrow \phi_\varepsilon(x-y)$ tiene soporte en Ω y

$$\begin{aligned} u * \phi_\varepsilon(x) &= \int_\Omega u(y) \phi_\varepsilon(x-y) dv(y) = \int_\Omega u(x-y) \phi_\varepsilon(y) dv(y) \\ &= \varepsilon^{-n} \int_{|y| \leq \varepsilon} u(x-y) \phi(y/\varepsilon) dv(y) = \int_{|y| \leq 1} u(x-\varepsilon y) \phi(y) dv(y) \\ &= \int_0^1 \varrho^{n-1} \psi(\varrho) \left(\int_{|\zeta|=1} u(x-\varepsilon\varrho\zeta) dS(\zeta) \right) d\varrho \\ &= \omega_n u(x) \int_0^1 \varrho^{n-1} \psi(\varrho) d\varrho = u(x) \int_B \phi(y) dv(y) = u(x). \end{aligned}$$

Puesto que $\phi \in C^\infty$, $u = u * \phi_\varepsilon$ también lo es en Ω_ε . Como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño, concluimos que $u \in C^\infty(\Omega)$. □

Corolario 2.12. *Si u es armónica en Ω entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de los teoremas 2.6 y 2.11 aplicados sucesivamente. □

Corolario 2.13. Si $\{u_k\}$ es una sucesión de funciones armónicas en Ω que converge uniformemente en compactos de Ω a una función u , entonces u es armónica en Ω .

Demostración. Puesto que cada u_k satisface las hipótesis del teorema 2.11, u también. □

2.4. El Principio del Máximo

Teorema 2.14. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n . Si u es armónica real en Ω y

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = A < +\infty,$$

entonces $u(x) < A$ para todo $x \in \Omega$ o $u(x) = A$ para todo $x \in \Omega$.

Demostración. La prueba sigue la línea de la demostración del teorema 2.10 en [16]: claramente $\mathcal{U} := \{x \in \Omega \mid u(x) = A\}$ es relativamente cerrado en Ω . Pero por el teorema del valor medio, si $x_0 \in \mathcal{U}$ entonces $u(x) = A$ para todo x en cualquier bola cerrada centrada en x_0 y contenida en Ω , con lo que \mathcal{U} también es abierto. Como Ω es conexo, $\mathcal{U} = \emptyset$, y por lo tanto $u < A$ en Ω o $\mathcal{U} = \Omega$, en cuyo caso $u = A$ en Ω . □

Corolario 2.15. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y u es armónica real continua en $\overline{\Omega}$, entonces

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{\zeta \in \partial\Omega} u(\zeta) \quad \text{y} \quad \min_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \min_{\zeta \in \partial\Omega} u(\zeta).$$

Demostración. El máximo se alcanza en algún punto de $\overline{\Omega}$, pues si esto sucediese en un punto interior, como u es constante en la componente conexa que lo contiene (teorema 2.14), el máximo también se alcanzaría en $\partial\Omega$. La igualdad entre los mínimos sigue de la de los máximos sin más que reemplazar u por $-u$. □

Corolario 2.16 (Teorema de Unicidad). Sea Ω acotado y u, v armónicas complejas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Si $u = v$ en $\partial\Omega$, entonces $u = v$ en Ω .

Demostración. Las partes reales e imaginarias de $u - v$ y $v - u$ son armónicas reales en Ω y se anulan en $\partial\Omega$. Por el corolario 2.15, $u = v$ en Ω . □

Observación 2.17. Como hemos visto, la propiedad del valor medio es característica de las funciones armónicas, pero el principio del máximo y sus corolarios siguen siendo válidos para ecuaciones en derivadas parciales más generales.

El siguiente resultado generaliza el corolario 2.26 en [16] para $n \geq 3$:

Corolario 2.18 (Teorema de Liouville). Si u es armónica acotada en \mathbb{R}^n , entonces u es constante.

Demostración. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > |x|$, por el corolario 2.7 tenemos

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \frac{n}{\omega_n r^n} \left| \int_{|y| \leq r} u(x+y) dv(y) - \int_{|y| \leq r} u(y) dv(y) \right| \\ &\leq \frac{n}{\omega_n r^n} \|u\|_\infty \int_{D_r} dv(y) = \|u\|_\infty \frac{n v(D_r)}{\omega_n r^n} \end{aligned}$$

donde D_r denota la diferencia simétrica de las bolas $B_r(x)$ y $B_r(0)$. Pero como se cumple que $D_r \subset \mathcal{A}_r := \{y / r - |x| < |y| < r + |x|\}$ (figura 1.1),

$$\begin{aligned} v(D_r) &\leq v(\mathcal{A}_r) \leq \int_{\mathcal{A}_r} dv(y) = \omega_n \int_{r-|x|}^{r+|x|} \rho^{n-1} d\rho \\ &= \frac{\omega_n}{n} ((r + |x|)^n - (r - |x|)^n) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &\leq \frac{(r + |x|)^n - (r - |x|)^n}{r^n} \\ &= \left(1 + \frac{|x|}{r}\right)^n - \left(1 - \frac{|x|}{r}\right)^n \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por tanto $u(x) = u(0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y así u es constante. □

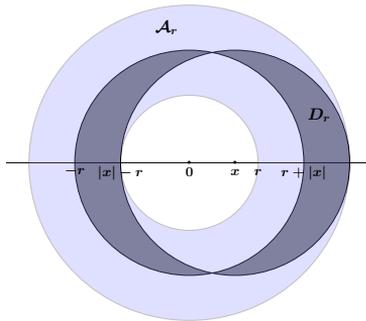


Figura 1.1. Diferencia simétrica $D_r \subset \mathcal{A}_r$

Observación 2.19. Cabe señalar que la misma demostración del teorema 2.18 permite relajar su hipótesis: basta con suponer que u sea positiva.

Corolario 2.20. *Toda función armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es constante.*

Demostración. Si u es armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la función $z \rightarrow u(e^z)$ es armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, y atendiendo a la observación 2.19, u es constante. □

El análogo del corolario 2.20 es falso cuando $n > 2$: la función $|x|^{2-n}$ es positiva y armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. En el apartado 5.5 clasificaremos, tras la demostración del teorema de Bôcher, las funciones armónicas positivas en \mathbb{R}^n para $n > 2$.

3. La solución fundamental

Una *solución fundamental* para un operador diferencial con coeficientes constantes $L = P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ es una “distribución” K tal que $LK = \delta$ (la delta de Dirac). En otros términos, K es una solución fundamental de L si

$$\langle K, L^* \varphi \rangle = \varphi(0) \quad (3.1)$$

para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)^*$. Aquí $L^* = P^*(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \bar{a}_\alpha \partial^\alpha$ denota el adjunto formal de L .

Las soluciones fundamentales son útiles para el estudio de la ecuación no homogénea $Lu = f$: si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces la convolución $u = K * f$ definida por

$$K * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dv(y)$$

satisface $Lu = f$.

Observación 3.1. De acuerdo al teorema de Malgrange-Ehrenpreis, todo operador lineal con coeficientes constantes tiene una solución fundamental.

El objetivo de esta sección será encontrar una solución fundamental explícita para el operador de Laplace. Puesto que éste conmuta con rotaciones buscaremos una radial que, por el corolario 1.3, debe ser de la forma $a + b|x|^{2-n}$ si $n > 2$ o $a + b \ln|x|$ si $n = 2$, y donde obviamente la constante a se puede omitir en ambos casos. Basta así con probar que existe una constante $b \in \mathbb{R}^n$ que nos permita construirla.

Teorema 3.2. *La función*

$$N(x) = \begin{cases} \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, & \text{si } n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

es una solución fundamental para Δ en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sea $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $r > 0$ lo suficientemente grande para garantizar que $\text{sop } \varphi \subset B_r(0)$. Si $\varepsilon > 0$, por (2.2) en $\Omega_\varepsilon = B_r(0) \setminus \overline{B_\varepsilon(0)}$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (N\Delta\varphi - \varphi\Delta N) dv &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (N\partial_{\bar{n}}\varphi - \varphi\partial_{\bar{n}}N) dS \\ &= \int_{\partial B_r(0)} (N\partial_{\bar{n}}\varphi - \varphi\partial_{\bar{n}}N) dS \\ &\quad - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (N\partial_{\bar{n}}\varphi - \varphi\partial_{\bar{n}}N) dS. \end{aligned}$$

Puesto que N es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\varphi = 0$ en $\partial B_r(0)$, resulta que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} N\Delta\varphi dv = \int_{\partial B_\varepsilon(0)} (\varphi\partial_{\bar{n}}N - N\partial_{\bar{n}}\varphi) dS. \quad (3.2)$$

* (3.1) es la definición distribucional basada en integración por partes de $LK = \delta$.

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el término de la izquierda tiende a

$$\int_{\mathbb{R}^n} N \Delta \varphi \, d\nu$$

ya que N es localmente integrable y, para el de la derecha,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} N \partial_{\bar{n}} \varphi \, dS \right| &= N(\varepsilon) \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_{\bar{n}} \varphi \, dS \right| \stackrel{\substack{\text{por (2.2)} \\ \text{con } \nu=1}}{=} N(\varepsilon) \left| \int_{B_\varepsilon(0)} \Delta \varphi \, d\nu \right| \\ &\leq \begin{cases} \frac{\varepsilon^2}{n(n-2)} \|\Delta \varphi\|_\infty, & \text{para } n > 2 \\ \frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{2} \|\Delta \varphi\|_\infty, & \text{para } n = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

por lo que en ambos casos tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por último, para todo $n \geq 2$

$$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi \partial_{\bar{n}} N \, dS = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varphi \, dS \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(0)$$

y (3.1) se sigue haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ en (3.2) (nótese que el adjunto formal cumple $\Delta^* = \Delta$, es decir, Δ es autoadjunto). \square

Observación 3.3. 1. Si no se desprecian los términos de frontera en el infinito, la demostración de este teorema permite concluir que

$$\varphi(0) = \int_{\Omega} N \Delta \varphi \, d\nu + \int_{\partial \Omega} (\varphi \partial_{\bar{n}} N - N \partial_{\bar{n}} \varphi) \, dS \tag{3.3}$$

si $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$.

Nótese además que, si $\Omega = B \subset \mathbb{R}^n$ es la bola unidad, (3.3) generaliza el teorema 2.4 en [16].

2. El caso $n = 2$ en el teorema 3.2 se puede deducir formalmente del teorema 1.2.1 en [14] (ver también [16, teorema 1.8]): por este último, la función $C(z) = 1/\pi z$ es una solución fundamental para el operador $\partial/\partial \bar{z}$, pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial z} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \ln |z| = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \ln |z|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \ln(z\bar{z}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} (\ln z + \ln \bar{z}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \ln z = \frac{1}{4\pi z} = \frac{1}{4} C(z) \end{aligned}$$

y puesto que $\Delta = 4\partial^2/\partial \bar{z} \partial z$, tendremos

$$\Delta N = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] = \frac{\partial C}{\partial \bar{z}} = \delta.$$

El siguiente resultado expresa funciones suficientemente regulares en términos de su Laplaciano en Ω y su dato de Cauchy en $\partial \Omega$.

Teorema 3.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera regular. Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$u(x) = \int_{\Omega} N(x-y) \Delta u(y) dv(y) + \int_{\partial\Omega} (u(\zeta) \partial_{\bar{n}\zeta} N(x-\zeta) - \partial_{\bar{n}} u(\zeta) N(x-\zeta)) dS(\zeta) \quad (3.4)$$

para todo $x \in \Omega$.

Demostración. Sea $x_0 \in \Omega$. Por (3.3)

$$\begin{aligned} u(x_0) = \varphi(0) &= \int_{\Omega_0} N(y) \Delta \varphi(y) dv(y) \\ &+ \int_{\partial\Omega_0} (\varphi(\eta) \partial_{\bar{n}} N(\eta) - N(\eta) \partial_{\bar{n}} \varphi(\eta)) dS, \end{aligned}$$

donde $\Omega_0 = \{y \in \mathbb{R}^n / x_0 - y \in \Omega\}$ y φ la función definida en Ω_0 dada por $\varphi(y) = u(x_0 - y)$. El teorema sigue haciendo el cambio de variables $y \in \Omega_0 \leftrightarrow x = x_0 - y \in \Omega$ y $\eta \in \partial\Omega_0 \leftrightarrow \zeta = x_0 - \eta \in \partial\Omega$ en el primer y segundo sumando de esta igualdad respectivamente. \square

Corolario 3.5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera regular. Si $u \in C^1(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω , entonces

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (u(\zeta) \partial_{\bar{n}\zeta} N(x-\zeta) - \partial_{\bar{n}} u(\zeta) N(x-\zeta)) dS(\zeta)$$

para todo $x \in \Omega$.

4. Los problemas de Dirichlet y Neumann

Dos de los problemas de valores frontera más importantes donde aparece el operador de Laplace son respectivamente el de Dirichlet y el de Neumann.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera regular.

El problema de Dirichlet: dadas dos funciones f en Ω y g en $\partial\Omega$, encontrar otra u en $\overline{\Omega}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

El problema de Neumann: dadas dos funciones f en Ω y g en $\partial\Omega$, encontrar otra u en $\overline{\Omega}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ \partial_{\bar{n}} u = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.2)$$

El teorema de unicidad (corolario 2.16) muestra que, si existe solución clásica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ al problema de Dirichlet, ésta será única en la clase $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Para el problema de Neumann no ocurre lo mismo, pues siempre podemos sumar a u cualquier constante para obtener otra solución. Además, si u es solución de (4.2), por (2.1) con $\nu = 1$

$$\int_{\Omega} f \, dv = \int_{\Omega} \Delta u \, dv = \int_{\partial\Omega} \partial_{\bar{n}} u \, dS = \int_{\partial\Omega} g \, dS$$

lo que impone una condición de compatibilidad entre f y g que, como veremos en el apartado 4.3, en ciertos casos resulta ser suficiente para la existencia de soluciones de (4.2).

El problema (4.1) se puede reducir a los casos en que $f = 0$ ó $g = 0$: si ν y w satisfacen

$$\begin{cases} \Delta \nu = f & \text{en } \Omega \\ \nu = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

y

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } \Omega \\ w = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

respectivamente, entonces $u = \nu + w$ satisface (4.1). Es más, los problemas (4.3) y (4.4) son equivalentes. En efecto, supongamos que podemos resolver (4.3) y sea una función $g \in C(\partial\Omega)$; entonces, si $\tilde{g} \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ es una extensión de g a $\bar{\Omega}$ y ν resuelve (4.3) con $f = \Delta \tilde{g}$, la función $w = \tilde{g} - \nu$ será solución de (4.4). Por otro lado, si podemos resolver (4.4), extendiendo f como nula fuera de Ω podemos tomar $\nu = N * f - w$, donde w es solución de (4.3) con dato $w|_{\partial\Omega} = (N * f)|_{\partial\Omega}$.

4.1. La transformada de Kelvin

Sea $\psi: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^∞ . Si $y = \psi(x)$, sean $J_\psi = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ y $J_{\psi^{-1}} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$ las matrices jacobianas de ψ y ψ^{-1} respectivamente. Consideremos en $\tilde{\Omega}$ la matriz

$$(g_{ij}(y)) = J_{\psi^{-1}}^t(y) \cdot J_{\psi^{-1}}(y) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \right),$$

y denotemos por (g^{ij}) su inversa

$$(g^{ij}(y)) = J_\psi(\psi^{-1}(y)) \cdot J_\psi^t(\psi^{-1}(y)) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \Big|_{\psi^{-1}(y)} \right).$$

Si $g = \det(g_{ij}) = (\det J_{\psi^{-1}})^2$, los elementos de volumen en Ω y $\tilde{\Omega}$ están relacionados por $dv(x) = |\det J_{\psi^{-1}}| dv(y) = \sqrt{g} dv(y)$.

Teorema 4.1. Si u es una función C^2 en Ω y $\tilde{u} = u \circ \psi^{-1}$, entonces

$$(\Delta u) \circ \psi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \right). \quad (4.5)$$

Demostración. Si $w \in C_c^\infty(\Omega)$ y $\tilde{w} = w \circ \psi$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u(x) w(x) dv(x) &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} w dv(x) = - \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} dv(x) \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\tilde{\Omega}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \sqrt{g} dv(y) \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\tilde{\Omega}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial y_j} g^{ij} \sqrt{g} dv(y) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\tilde{\Omega}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \right) \tilde{w} dv(y) \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_j} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_i} \right) \right] \circ \psi w dv(x). \end{aligned}$$

El resultado sigue inmediatamente puesto que w es arbitraria. \square

Observación 4.2. Si pensamos en y_1, y_2, \dots, y_n como nuevas coordenadas en Ω , (4.5) proporciona la expresión del Laplaciano en esas coordenadas. De forma más general, ésta es la expresión para el operador de Laplace-Beltrami en la variedad Riemanniana $(\Omega, (g_{ij}))$ con tensor métrico (g_{ij}) en coordenadas y_1, y_2, \dots, y_n .

Para lo que nos concierne, estamos interesados en la transformación

$$x^* = \frac{x}{|x|^2}.$$

para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, obtenida por reflexión respecto de la esfera unidad $S = \partial B$. Puesto que $x = x^* / |x^*|^2$, tenemos

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_i^*} = \frac{\delta_{ik}}{|x^*|^2} - 2 \frac{x_i^* x_k^*}{|x^*|^4} \quad (4.6)$$

y

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\delta_{ik}}{|x^*|^2} - 2 \frac{x_i^* x_k^*}{|x^*|^4} \right) \left(\frac{\delta_{jk}}{|x^*|^2} - 2 \frac{x_j^* x_k^*}{|x^*|^4} \right) = \frac{\delta_{ij}}{|x^*|^4},$$

por lo que $g^{ij} = |x^*|^4 \delta_{ij}$ y $g = |x^*|^{-4n}$. Así, si u es C^2 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $\tilde{u}(x^*) = u(|x|^{-2}x)$, de (4.5)

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= |x^*|^{2n} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(|x^*|^{4-2n} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i^*} \right) = |x^*|^{2n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(|x^*|^{4-2n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j^*} \right) \\ &= |x^*|^{2n} \sum_{j=1}^n \left(|x^*|^{4-2n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_j^{*2}} + (4-2n) |x^*|^{2-2n} x_j^* \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j^*} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |x^*|^{n+2} \sum_{j=1}^n \left(|x^*|^{2-n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_j^{*2}} + 2 \frac{\partial |x^*|^{2-n}}{\partial x_j^*} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j^*} \right) \\
 &= |x^*|^{n+2} \sum_{j=1}^n \left(|x^*|^{2-n} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_j^{*2}} + 2 \frac{\partial |x^*|^{2-n}}{\partial x_j^*} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j^*} + \frac{\partial^2 |x^*|^{2-n}}{\partial x_j^{*2}} \tilde{u} \right) \\
 &= |x^*|^{n+2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^{*2}} (|x^*|^{2-n} \tilde{u})
 \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad hemos añadido $\Delta_{x^*} (|x^*|^{2-n})$ que es nulo para $x^* \neq 0$ (corolario 1.3). Así

$$\Delta u = |x^*|^{n+2} \Delta (|x^*|^{2-n} \tilde{u}),$$

es decir

$$\Delta u (x/|x|^2) = |x|^{n+2} \Delta (|x|^{2-n} u (x/|x|^2)) \tag{4.7}$$

si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definición 4.3. Si $u \in C^2$ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la transformada de Kelvin \mathcal{K} de u se define como

$$\mathcal{K}[u](x) = |x|^{2-n} u(x/|x|^2)$$

en $\tilde{\Omega} = \{x/|x|^2 \mid x \in \Omega\}$.

Observación 4.4. 1. La reflexión $x \mapsto \psi(x) = x^*$ es conforme, es decir, conserva ángulos. Esto a su vez equivale a que su matrix jacobiana $\psi'(x)$ sea un múltiplo de una transformación ortogonal. Para probar esta afirmación, si $O \in \mathfrak{o}_n$ es ortogonal entonces

$$\psi(Ox) = \frac{Ox}{|Ox|^2} = \frac{Ox}{|x|^2} = O(\psi(x))$$

es decir, ψ conmuta con cualquier $O \in \mathfrak{o}_n$. Así, para ver que en un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $\psi'(x_0)$ es un múltiplo de una matrix ortogonal, será suficiente probar que esto sucede si $x_0 = |x_0| \vec{e}_1 = (|x_0|, 0, \dots, 0)$. Ahora bien, de (4.6)

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}(x_0) = \begin{cases} -1/|x_0|^2, & \text{si } i = j = 1 \\ 1/|x_0|^2, & \text{si } i = j \geq 2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que quiere decir que $\psi'(x_0)$ es proporcional a la matrix ortogonal

$$O_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Nótese que (4.7) se puede reescribir como

$$\Delta(\mathcal{K}[u]) = \mathcal{K}[|x|^4 \Delta u]$$

ya que

$$\mathcal{K}[|x|^4 \Delta u](x) = |x|^{2-n} \left| \frac{x}{|x|^2} \right|^4 \Delta u(x/|x|^2) = |x|^{-2-n} \Delta u(x/|x|^2) = \Delta(\mathcal{K}[u]).$$

Con esta discusión hemos, en particular, probado:

Teorema 4.5. *Si u es armónica en $\Omega \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces su transformada de Kelvin $\mathcal{K}[u]$ lo es en $\tilde{\Omega}$.*

4.2. La función de Green y el núcleo de Poisson

En este apartado presentaremos una fórmula general para representar la solución del problema de Dirichlet (4.1).

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera regular y supongamos que $u \in C^2(\bar{\Omega})$. El teorema 3.4 permite recuperar la función u si se conocen Δu en Ω y $u, \partial u / \partial \bar{n}$ en $\partial\Omega$. Sin embargo, en el problema (4.1) la función $\partial u / \partial \bar{n}$ no es conocida y, por tanto, hemos de modificar esta expresión para eliminar dicho término. La idea consiste en corregir la solución fundamental N de tal forma que la función resultante siga siendo una solución fundamental y además se anule en $\partial\Omega$.

Para $x \in \Omega$ supongamos que exista una función $h_x: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ que resuelva el problema (4.4) con dato $g = N_x: = N(x - \cdot)$. Por la identidad de Green (2.2) tendríamos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h_x(y) \Delta u(y) dv(y) &= \int_{\partial\Omega} (h_x(\zeta) \partial_{\bar{n}} u(\zeta) - u(\zeta) \partial_{\bar{n}} h_x(\zeta)) dS(\zeta) \\ &= \int_{\partial\Omega} (N(x - \zeta) \partial_{\bar{n}} u(\zeta) - u(\zeta) \partial_{\bar{n}} h_x(\zeta)) dS(\zeta) \end{aligned}$$

y sumando con (3.4)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\bar{n}_\zeta} G(x, \zeta) u(\zeta) dS(\zeta) + \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dv(y) \quad (4.8)$$

donde $G(x, y): = N(x - y) - h_x(y)$ es la llamada *función de Green*. De ella observamos que cumple

- (i) Si $x \in \Omega$, $G(x, \cdot) - N(x - \cdot)$ es armónica en Ω y continua en $\bar{\Omega}$.
- (ii) $G(x, \zeta) = 0$ para todo $x \in \Omega$ y $\zeta \in \partial\Omega$.

Claramente G es única: para cada $x \in \Omega$, $G(x, \cdot) - N(x - \cdot)$ es la única solución al problema (4.4) con dato $g = -N(x - \cdot)$.

Proposición 4.6. *La función de Green tiene las siguientes propiedades*

(a) *es negativa:*

$$G(x, y) < 0$$

si $x, y \in \Omega, x \neq y$.

(b) *es simétrica:*

$$G(x, y) = G(y, x)$$

para todo $x, y \in \Omega, x \neq y$.

Demostración. (a) sigue de (i) y (ii) por el principio de máximo: para cada $x \in \Omega$, $G(x, \cdot)$ es armónica en $\Omega \setminus \{x\}$ y

$$\lim_{y \rightarrow x} G(x, y) = \lim_{y \rightarrow x} (N(x - y) - h_x(y)) = -\infty.$$

Para ver (b) sean $x, y \in \Omega, x \neq y$, y consideremos las funciones $u = G(x, \cdot)$ y $v = G(y, \cdot)$ definidas en $\Omega \setminus \{x, y\}$. Si $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, por (2.2) en $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))$ se tiene

$$\int_{B_\varepsilon(x)} v \partial_{\bar{n}} u - u \partial_{\bar{n}} v = \int_{B_\varepsilon(y)} u \partial_{\bar{n}} v - v \partial_{\bar{n}} u \tag{4.9}$$

ya que $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω_ε y $u = v = 0$ en $\partial\Omega$. Como en la demostración del teorema 3.2, por un lado

$$\left| \int_{B_\varepsilon(x)} u \partial_{\bar{n}} v \right| \leq C \varepsilon^{n-1} \sup_{\partial B_\varepsilon(x)} |v| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

puesto que v es regular cerca de x , y por otro

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon(x)} v \partial_{\bar{n}} u = \int_{B_\varepsilon(x)} v(\zeta) \partial_{\bar{n}_\zeta} N(x - \zeta) dS(\zeta) = v(x).$$

Así, el termino de la izquierda en (4.9) converge a $v(x)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y, de la misma forma, el de la derecha lo hace a $u(y)$. Consecuentemente

$$G(x, y) = u(y) = v(x) = G(y, x). \quad \square$$

La función de Green para el semiespacio

Consideremos el semiespacio

$$\mathbb{R}_+^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}.$$

La función $h_x(y) = N(x - \bar{y})$ donde \bar{x} es la reflexión de x sobre el hiperplano $\partial\mathbb{R}_+^n$ dada por

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, -x_n)$$

puede usarse como corrector para encontrar la función de Green, que en este caso tendrá la expresión

$$G(x, y) = N(x - y) - N(x - \bar{y}), \quad x, y \in \mathbb{R}_+^n, x \neq y.$$

Teniendo en cuenta la expresión para la solución fundamental dada en el teorema 3.2, para $\zeta \in \partial\mathbb{R}_+^n$ y $n > 2$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{n}_\zeta} G(x, \zeta) &= - \left. \frac{\partial G}{\partial y_n} \right|_{y=\zeta} = \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{x_n - y_n}{|x - y|^n} + \frac{x_n + y_n}{|x - \bar{y}|^n} \right]_{y=\zeta} \\ &= \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{|x - \zeta|^n} \end{aligned}$$

ya que $\zeta_n = 0$. De igual forma podemos comprobar que esta expresión sigue siendo válida para $n = 2$.

Si quisiéramos resolver el problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{en } \partial\mathbb{R}_+^n, \end{cases}$$

(4.8) sugiere que

$$u(x) = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\zeta)}{|x - \zeta|^n} d\zeta. \quad (4.10)$$

El núcleo

$$P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \zeta) = \frac{2}{\omega_n} \frac{x_n}{|x - \zeta|^n}$$

es el *núcleo de Poisson* para \mathbb{R}_+^n y (4.10) la correspondiente *fórmula de Poisson*. Dicho núcleo $P_{\mathbb{R}_+^n}$ tiene las siguientes propiedades

(P₁) $P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \zeta) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$ y todo $\zeta \in \partial\mathbb{R}_+^n$.

(P₂) $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \zeta) d\zeta = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}_+^n$.

(P₃) $\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x_n > 0}} \int_{|\eta - \zeta| > \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) d\eta = 0$ para todo $\zeta \in \partial\mathbb{R}_+^n$ y todo $\delta > 0$ fijo.

Tenemos que (P₁) es inmediato de la propia definición de $P_{\mathbb{R}_+^n}$ y (P₂) sigue de (4.8) tomando $u = 1$. Para ver (P₃), si $|x - \zeta| < \delta/2$ y $|\eta - \zeta| > \delta$ entonces

$$|x - \eta| \geq |\eta - \zeta| - |x - \zeta| > \delta/2$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \int_{|\eta - \zeta| > \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) d\eta &= \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{|x - \eta| > \delta/2} \frac{d\eta}{|x - \eta|^n} = \frac{2x_n}{\omega_n} \int_{|\eta| > \delta/2} \frac{d\eta}{|\eta|^n} \\ &= 2x_n \int_{\delta/2}^{+\infty} \rho^{n-2} \frac{d\rho}{\rho^n} = 2x_n \int_{\delta/2}^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{4x_n}{\delta} \xrightarrow{x \rightarrow \zeta} 0 \end{aligned}$$

ya que $\delta > 0$ está fijo y $x_n \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \zeta \in \partial\mathbb{R}_+^n$ (en la penúltima integral se ha efectuado el cambio a polares en \mathbb{R}^{n-1}).

Ahora podemos enunciar el siguiente

Teorema 4.7. *Supongamos que $g \in C(\mathbb{R}^{n-1})$ es acotada y definamos u en \mathbb{R}_+^n por (4.10). Entonces*

- (a) $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ y acotada,
- (b) $\Delta u = 0$ en \mathbb{R}_+^n

y

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x_n > 0}} u(x) = g(\zeta)$$

para todo $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Aquí se requiere que g esté acotada para que la integral (4.10) que define u sea absolutamente convergente.

Demostración. Que $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ sigue inmediatamente ya que $P_{\mathbb{R}_+^n}$ lo es en la variable x para $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$ y está acotada ya que, por (P_1) y (P_2) ,

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \zeta) |g(\zeta)| d\zeta \leq \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \zeta) d\zeta = \|g\|_\infty$$

si $x \in \mathbb{R}_+^n$. Puesto que $P_{\mathbb{R}_+^n}$ es armónica en x para todo $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$ fijo, concluimos que u es armónica en \mathbb{R}_+^n .

Para terminar, sea $\zeta \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $\varepsilon > 0$. Como g es continua en ζ , existe $\delta > 0$ tal que $|g(\zeta) - g(\eta)| < \varepsilon$ siempre que $|\zeta - \eta| < \delta$ y por tanto, de (P_1) y (P_2) , si $x \in \mathbb{R}_+^n$

$$\begin{aligned} |u(x) - g(\zeta)| &\leq \int_{|\eta - \zeta| < \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) |g(\zeta) - g(\eta)| d\eta \\ &\quad + \int_{|\eta - \zeta| \geq \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) |g(\zeta) - g(\eta)| d\eta \\ &\leq \varepsilon \int_{|\eta - \zeta| < \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) d\eta + 2\|g\|_\infty \int_{|\eta - \zeta| \geq \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) d\eta \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) d\eta + 2\|g\|_\infty \int_{|\eta - \zeta| \geq \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) d\eta \\ &= \varepsilon + 2\|g\|_\infty \int_{|\eta - \zeta| \geq \delta} P_{\mathbb{R}_+^n}(x, \eta) d\eta. \end{aligned}$$

Haciendo $x \rightarrow \zeta$, (P_3) implica que

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x_n > 0}} |u(x) - g(\zeta)| \leq \varepsilon.$$

Puesto que esta desigualdad es válida cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ concluimos que

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x_n > 0}} |u(x) - g(\zeta)| = 0$$

que equivale a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \zeta \\ x_n > 0}} |u(x) - g(\zeta)| = 0$$

según queríamos demostrar. □

Observación 4.8. Nótese que, aunque tenemos una fórmula para una solución del problema de Dirichlet en el semiespacio \mathbb{R}_+^n en términos del dato de frontera g , la solución no es única (esto es típico para el problema de Dirichlet en regiones no acotadas). Para comprobar esto, simplemente obsérvese que la función $v(x) = x_n$ es armónica en \mathbb{R}^n y se anula en $\mathbb{R}^{n-1} = \partial\mathbb{R}_+^n$, lo que implica que se puede sumar a cualquier solución para producir otra nueva. Por otro lado, como consecuencia del principio de reflexión 5.10 y el teorema de Liouville 2.18, es cierto que las soluciones acotadas del problema de Dirichlet son únicas.

La función de Green para la bola

Para construir la función de Green en la bola emplearemos como antes una reflexión, ahora por medio de la transformada de Kelvin y que, como allí, nos permitirá mover la singularidad de la solución fundamental N para así construir la función correctora adecuada. En lo que sigue necesitaremos el siguiente

Lema 4.9 (de simetría). Si $x, \zeta \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ y $|\zeta| = 1$, entonces

$$|x - \zeta| = \left| \frac{x}{|x|} - |\zeta| \right| \quad (\text{figura 1.2}).$$

Demostración.

$$|x - \zeta|^2 = 1 - 2x \cdot \zeta + |x|^2 = \left| \frac{x}{|x|} \right|^2 - 2\left(\frac{x}{|x|}\right) \cdot (|\zeta|) + |\zeta|^2 = \left| \frac{x}{|x|} - |\zeta| \right|^2. \quad \square$$

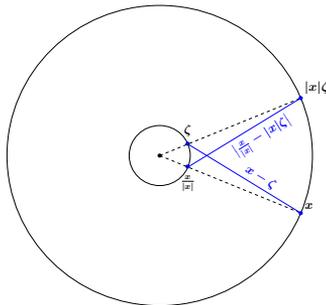


Figura 1.2. Simetría

La función $h_x(y) = |y|^{2-n}N(x - y^*) = |y|^{2-n}N(x - y/|y|^2)$ es, por el teorema 4.5, armónica para cada $x \in B$ y $h_x(\zeta) = N(x, \zeta)$, ya que $\zeta^* = \zeta$ si $|\zeta| = 1$. Consecuentemente, si $n > 2$, la función de Green para la bola es

$$\begin{aligned}
 G(x, y) &= N(x - y) - |y|^{2-n} N\left(x - \frac{y}{|y|^2}\right) \\
 &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|x-y|^{2-n} - |y|^{2-n} \left| x - \frac{y}{|y|^2} \right|^{2-n} \right) \\
 &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|x-y|^{2-n} - \left| |y|x - \frac{y}{|y|} \right|^{2-n} \right) \\
 &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \left(|x-y|^{2-n} - \left| \frac{x}{|x|} - |x|y \right|^{2-n} \right)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

que es válida si $x \neq 0$ (en la última igualdad hemos hecho uso del lema 4.9). Además, la cadena de igualdades en (4.11) sugiere definir

$$G(0, y) = \frac{|y|^{2-n} - 1}{(2-n)\omega_n}.$$

Cuando $n = 2$ la expresión análoga es

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left[\ln|x-y| - \ln\left|\frac{x}{|x|} - |x|y\right| \right], & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2\pi} \ln|y|, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Por último, pasamos a computar el núcleo de Poisson. Puesto que la derivada normal en la esfera es $\zeta \cdot \nabla_\zeta = \sum_j \zeta_j \partial/\partial \zeta_j$, derivando en (4.11) tenemos

$$\begin{aligned}
 P(x, \zeta) &= \partial_{\bar{n}_\zeta} G(x, \zeta) = \zeta \cdot \nabla_\zeta G(x, \zeta) = -\frac{1}{\omega_n} \zeta \cdot \left(\frac{x - \zeta}{|x - \zeta|^n} - \frac{|x| \left(\frac{x}{|x|} - |x|\zeta \right)}{\left| \frac{x}{|x|} - |x|\zeta \right|^n} \right) \\
 &\stackrel{\text{lema 4.9}}{=} -\frac{1}{\omega_n} \left(\frac{\zeta \cdot (x - \zeta)}{|x - \zeta|^n} - \frac{|x|\zeta \cdot \left(\frac{x}{|x|} - |x|\zeta \right)}{|x - \zeta|^n} \right) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n}.
 \end{aligned}$$

El resultado análogo al teorema 4.7, y cuya demostración omitiremos por su similitud con la de aquél (ver [16, teorema 2.18]), es:

Teorema 4.10. *Sea $g \in C(S)$ y*

$$P[g](x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \int_S \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n} g(\zeta) dS(\zeta), & \text{si } |x| < 1 \\ g(x), & \text{si } |x| = 1. \end{cases}$$

Entonces $P[g]$ es continua en \bar{B} y armónica en B .

Observación 4.11. Para $n = 2$, usando notación compleja, si $x = a$ e $y = z$ entonces

$$\begin{aligned}
 G(a, z) &= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{a - z}{a/|a| - |a|z} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{a(a - z)}{a - |a|^2 z} \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{\phi(a - z)}{\phi(1 - \bar{a}z)} \right| = \frac{1}{2\pi} \ln |\varphi_a(z)|,
 \end{aligned}$$

donde φ_a es el automorfismo del disco unidad que intercambia 0 con a (ver [19]). Ahora la identidad (4.8) se puede escribir como

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |a|^2}{|e^{i\theta} - a|^2} u(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| \leq 1} \ln \left| \frac{a - z}{1 - \bar{a}z} \right| \Delta u(z) dA(z).$$

Esto generaliza el teorema 2.4 en [16] (ver también [7]).

4.3. La función de Neumann

La idea utilizada para resolver el problema de Dirichlet por medio de la función de Green puede adaptarse al problema de Neumann (4.2). Como ya hemos indicado, para que este problema tenga solución los datos deben satisfacer

$$\int_{\Omega} f dv = \int_{\partial\Omega} g dS, \tag{4.12}$$

y en tal caso la solución está determinada salvo constantes.

Imitando lo que hemos hecho en la construcción de la función de Green,

$$u(x) = \int_{\Omega} \mathcal{N}(x, y) \Delta u(y) dv(y) + \int_{\partial\Omega} \mathcal{N}(x, \zeta) g(\zeta) dS(\zeta)$$

si $\mathcal{N}(x, y) = N(x - y) - \varphi(x, y)$, y

$$\begin{cases} \Delta \varphi_x = 0 & \text{en } \Omega \\ \partial_{\bar{n}_\zeta} \varphi_x(\zeta) = \partial_{\bar{n}_\zeta} N(x - \zeta) & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

donde $\varphi_x = \varphi(x, \cdot)$. Sin embargo, este problema no tiene solución ya que por el teorema 3.4 con $u = 1$

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\bar{n}_\zeta} N(x - \zeta) dS(\zeta) = 1,$$

y por ello nos vemos obligados a sustituir la condición de frontera en (4.13) por

$$\begin{cases} \Delta \varphi_x = 0 & \text{en } \Omega \\ \partial_{\bar{n}_\zeta} \varphi_x(\zeta) = \partial_{\bar{n}_\zeta} N(x - \zeta) - \frac{1}{S(\partial\Omega)} & \text{en } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

Suponiendo que este problema tenga solución, el análogo a (4.8) es

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \mathcal{N}(x, \zeta) \partial_{\bar{n}_\zeta} u(\zeta) dS(\zeta) + \int_{\Omega} \mathcal{N}(x, y) \Delta u(y) dv(y). \tag{4.15}$$

La función de Neumann para el disco

Aunque en general resulta difícil encontrar la expresión explícita para la función de Neumann, la estructura analítica de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ ayuda a hacerlo para el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$ [4]. Puesto que para todo $\zeta \in \mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{n}_\zeta} N(z - \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \left(w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \Big|_{w=\zeta} \ln |z - w| = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\zeta \frac{\partial}{\partial w} \Big|_{w=\zeta} \ln |z - w|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{\zeta}{\zeta - z} \right] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \bar{\zeta}z} \right], \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{n}_\zeta} N(z - \zeta) - \frac{1}{2\pi} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \bar{\zeta}z} - 1 \right] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{\bar{\zeta}z}{1 - \bar{\zeta}z} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(w \frac{\partial}{\partial w} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \Big|_{w=\zeta} \ln |1 - \bar{w}z| \\ &= \partial_{\bar{n}_\zeta} \varphi_z(\zeta). \end{aligned}$$

Así,

$$\varphi_z(w) = -\frac{1}{2\pi} \ln |1 - \bar{w}z|$$

es solución de (4.14) y

$$\mathcal{N}_{\mathbb{D}}(z, w) = \frac{1}{2\pi} (\ln |z - w| + \ln |1 - \bar{w}z|) = \frac{1}{2\pi} \ln |(z - w)(1 - \bar{w}z)|$$

es la función de Neumann para \mathbb{D} .

Dado que $\mathcal{N}_{\mathbb{D}}(z, \zeta) = \frac{1}{\pi} \ln |z - \zeta|$, atendiendo a (4.15) la solución del problema (4.2) viene dada por

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{|\zeta|=1} \ln |z - \zeta| g(\zeta) |d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \iint_{|w|<1} \ln |(z - w)(1 - \bar{w}z)| f(w) dA(w)$$

siempre que $\int_{|\zeta|=1} g(\zeta) |d\zeta| = \iint_{|w|<1} f(w) dA(w)$.

5. Mas propiedades de las funciones armónicas

Ahora que sabemos resolver el problema de Dirichlet en la bola, podemos probar algunos hechos interesantes para las funciones armónicas.

5.1. La propiedad del valor medio revisada

En la observación 2.8(b) se apuntaba que la propiedad (2.10) es suficiente para concluir que una función $u \in C^2(\Omega)$ es armónica en Ω . Siguiendo la demostración del teorema 11.13 en [19] veremos que, como en el teorema 2.11, la hipótesis de regularidad sobre u puede relajarse.

Teorema 5.1. *Si u es continua en Ω y satisface (2.10), entonces u es armónica en Ω .*

Demostración. Supongamos que $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ y sea

$$v = P \left[u \Big|_{\partial B(a, r)} \right]$$

la extensión armónica de $u|_{\partial B(a, r)}$ a $B(a, r)$ dada por el teorema 4.10. Probaremos el teorema viendo que $u = v$.

Supongamos que $w = v - u$ es positiva en algún punto de $B(a, r)$ y consideremos $E \subset \bar{B}(a, r)$ el conjunto donde w toma su valor máximo. Puesto que E es compacto, contiene un punto x más alejado de a . Claramente $x \in B(a, r)$ ya que $w = 0$ en $\partial B(a, r)$ y por tanto existe j tal que $B(x, r_j) \subset B(a, r)$ en donde $u(x)$ es el promedio de u sobre $\partial B(x, r_j)$. Ahora bien, como v es armónica en $B(a, r)$,

$$w(x) = \int_{|\zeta|=1} w(x + r_j \zeta) d\sigma(\zeta)$$

pero $w(x + r_j \zeta) \leq w(x)$ para todo $|\zeta| = 1$ y, por continuidad, $w|_{\partial B(x, r_j)} = w(x)$, lo que contradice nuestra elección de x . Así $v - u \leq 0$ en $\bar{B}(a, r)$. De forma similar $v - u \geq 0$ en $\bar{B}(a, r)$ (basta razonar con $-u$ en lugar de u). \square

Observación 5.2. Nótese que la demostración del teorema anterior proporciona un principio del máximo para la clase de funciones que satisfacen (2.10), es más, permite ver que el teorema 5.1 sigue siendo válido si u tiene la propiedad del valor medio para un solo radio, ya que tales funciones satisfacen el principio del máximo.

Generalizaciones

Sorprendentemente, para que una función continua u en \mathbb{R}^n sea armónica, basta que (2.11) se verifique para dos valores distintos de r (y todo $x \in \mathbb{R}^n$) siempre que estos radios no estén relacionados de una manera muy especial: más precisamente, si

$$j_n(z) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \sin^{n-1} \theta d\theta = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{z}\right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(z)$$

donde Γ es la función gamma de Euler y J_ν la función de Bessel de primera especie y orden ν , sea

$$H_n = \{z_1 / z_2 > 0 \mid j_n(z_1) = j_n(z_2) = 1\}$$

el conjunto de cocientes positivos de ceros de la función $j_n - 1$. Se debe a J. Delsarte [5] que si (2.11) se verifica para $r = r_1$ y $r = r_2$ y $r_1 / r_2 \notin H_n$, entonces u es armónica en \mathbb{R}^n (ver [20, 21, 22]). El desarrollo asintótico de las funciones de Bessel se puede usar para demostrar que, para $n > 1$, H_n es finito y, de hecho, $H_3 = \{1\}$ [5], por lo que en dimensión 3 es suficiente con dos radios distintos. El caso $n = 1$ es especial, ya que $j_1(z) = \cos z$ y el conjunto de cocientes excepcionales es $H_1 = \mathbb{Q}^+$ (rationales no negativos). Que el conjunto excepcional es no vacío para todo $n > 1$ continúa siendo una cuestión abierta [22].

También existen versiones locales de este teorema [2, 18]: si u es continua en $B(0, r)$ y satisface (2.11) para $r = r_1, r_2$ ($r_1 / r_2 \notin H_n$) y $x \in B(0, r)$ tal que $|x| + r_j < r$, entonces u es armónica en $B(0, r)$ siempre que $r_1 + r_2 < r$.

A este respecto hemos de mencionar el *problema de un radio de Littlewood* resuelto por W. Hansen y N. Nadirashvili: sea u continua y acotada en el disco unidad

abierto $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ y supongamos que para cada $z \in \mathbb{D}$ exista un radio $r = r(z) < 1 - |z|$ tal que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + r(z)e^{i\theta}) d\theta. \tag{5.1}$$

¿Debe u ser armónica en \mathbb{D} ? La respuesta resulta ser NO [11]. Por otro lado, la condición sobre un radio que se obtiene al reemplazar el promedio de línea por el de área sobre el disco de radio $r(z)$ SÍ que implica armonicidad [10]. Este último resultado se puede extender a funciones definidas en dominios acotados de \mathbb{R}^n (y a otros no acotados también) incluso rebajando la hipótesis de acotación sobre u a que ésta admita una mayorante armónica, es decir, que $|u| < h$ para alguna función armónica positiva h . Surveys de estos, y otros resultados relacionados, se pueden encontrar en [13] y [17].

Observación 5.3. 1. Sin embargo, si u es continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y tiene la propiedad de un radio (5.1), entonces u es armónica en \mathbb{D} . Para ver esto, sea $M = \max_{\overline{\mathbb{D}}} u$ y $E = \{z \in \overline{\mathbb{D}} / u(z) = M\}$ el conjunto de puntos de $\overline{\mathbb{D}}$ donde u alcanza su máximo. Como en la demostración del teorema 5.1, puesto que E es compacto, $E \cap \partial\mathbb{D} \neq \emptyset$ por lo que $\max_{\overline{\mathbb{D}}} u = \max_{\partial\mathbb{D}} u$. Así, $u = P[u|_{\partial\mathbb{D}}]$.

2. Aunque la respuesta al problema de Littelwood es negativa, para el caso del plano es afirmativa [12] si se imponen condiciones adicionales a r ; a saber, si r es una función estrictamente positiva en \mathbb{R}^2 tal que para alguna constante $M > 0$

$$r(z) \leq |z| + M \quad \text{siempre que} \quad |z| > M \tag{5.2}$$

entonces cualquier función continua y acotada u en \mathbb{R}^2 que satisfaga (5.1) debe ser constante. Esta conclusión falla si la condición (5.2) se reemplaza por $r(z) \leq 4|z| + M$.

En la recta ($n = 1$), el promedio (5.1) podría reemplazarse por $(f(x - r(x)) + f(x + r(x))) / 2$. Con $r(x) \equiv 2\pi$, la función $u(x) = \text{sen } x$ muestra que el resultado análogo falla en una dimensión.

Por último, cabe señalar que en \mathbb{R}^3 ya no se conoce si existe un análogo de este resultado.

Para ver como aparecen las funciones de Bessel, consideremos $n = 2$ y la función $u_0(z) = e^{iy}$ ($z = x + iy$). Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u_0(z + re^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(y+r\text{sen}\theta)} d\theta = e^{iy} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\text{sen}\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= u_0(z) \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{r}{2}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= u_0(z) \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(r) e^{i\nu\theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= J_0(r) u_0(z) \end{aligned}$$

ya que por la fórmula generatriz de Schlömilch

$$\exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} J_{\nu}(z) t^{\nu}.$$

Nótese que u_0 es una autofunción del Laplaciano; más precisamente, satisface la ecuación de Helmholtz $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ con $\kappa = 1$. Es más, si u es cualquier solución de esta ecuación y

$$\Theta(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta,$$

de la demostración del teorema 2.4 en [16] tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dr} &= \frac{1}{2\pi r} \iint_{|z|\leq r} \Delta u(z) dA(z) = -\frac{\kappa^2}{2\pi r} \iint_{|z|\leq r} u(z) dA(z) \\ &= -\frac{\kappa^2}{2\pi r} \int_0^r \varrho \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\varrho e^{i\theta}) d\theta \right) d\varrho = -\frac{\kappa^2}{r} \int_0^r \varrho \Theta(\varrho) d\varrho. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que Θ satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Theta}{dr} \right) + \kappa^2 r \Theta = 0$$

y, por tanto, la función $\Psi(t) = \Theta(t/\kappa)$ satisface

$$\frac{d\Psi}{dt} + \frac{1}{t} \frac{d\Psi}{dt} + \Psi = 0.$$

Esta última es la ecuación de Bessel de orden cero de la cual sabemos que sólo tiene a los múltiplos de J_0 como soluciones acotadas para $t \rightarrow 0^+$. Puesto que Θ (y por ende Ψ) está acotada cerca de 0 y $J_0(0) = 1$, deducimos que $\Theta(r) = J_0(\kappa r)\Theta(0) = J_0(\kappa r)u(0)$, es decir,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(re^{i\theta}) d\theta = J_0(\kappa r)u(0).$$

Además, como la ecuación de Helmholtz es invariante por traslaciones, también se tendrá

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = J_0(\kappa r)u(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ y $r > 0$.

Siguiendo la demostración del teorema 2.6, un razonamiento análogo prueba que en n dimensiones, si u es solución de la ecuación de Helmholtz y

$$\Theta(r) = \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) d\sigma(\zeta),$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dr} &= \int_{|\zeta|=1} \zeta \cdot \nabla u(r\zeta) d\sigma(\zeta) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|\eta|=r} \partial_{\bar{n}} u(\eta) dS(\eta) \\ &\stackrel{\dagger}{=} \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x|\leq r} \Delta u(x) dv(x) = \frac{-\kappa^2}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|x|\leq r} u(x) dv(x) \end{aligned}$$

(2.1) con $v=1$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-\kappa^2}{\omega_n r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) dS(\zeta) \right) d\varrho \\
 &= \frac{-\kappa^2}{r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \left(\int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) d\sigma(\zeta) \right) d\varrho = \frac{-\kappa^2}{r^{n-1}} \int_0^r \varrho^{n-1} \Theta(\varrho) d\varrho
 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{d}{dr} \left(r^{n-1} \frac{d\Theta}{dr} \right) + \kappa^2 r^{n-1} \Theta = 0.$$

Si $v = (n-2)/2$, con el cambio de función $\Psi(r) = r^v \Theta(r)$ esta ecuación se transforma en

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) \Psi = 0$$

que, a su vez, con el cambio de variable independiente $t = \kappa r$ se reduce a

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d\Psi}{dt} + \left(1 - \frac{v^2}{t^2} \right) \Psi = 0.$$

Como antes, ésta es la ecuación de Bessel de orden v y por tanto Ψ (que es continua en $t = 0$) debe ser proporcional a J_v . Desahaciendo los cambios y ajustando la constante de proporcionalidad deducimos que

$$\begin{aligned}
 \Theta(r) &= \frac{1}{\Gamma(v+1)} \left(\frac{2}{\kappa} \right)^v r^{-v} J_v(\kappa r) \Theta(0) \\
 &= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{\kappa r} \right)^{(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(\kappa r) \Theta(0) = j_n(\kappa r) \Theta(0)
 \end{aligned}$$

puesto que

$$J_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(v+k+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{v+2k}, \tag{5.3}$$

y por tanto, $\left(\frac{z}{2}\right)^v J_v(z) \rightarrow \Gamma(v+1)$ cuando $z \rightarrow 0^+$.

Consecuentemente hemos probado que, si u es solución de la ecuación de Helmholtz (que sigue siendo invariante por traslaciones), entonces

$$\int_{|\zeta|=1} u(x+r\zeta) d\sigma(\zeta) = j_n(\kappa r) u(x) \tag{5.4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

Recíprocamente, de (5.3) vemos que

$$j_n(z) = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Así, $j_n(0) = 1$, $j'_n(0) = 0$ y $j''_n(0) = -1/2n$. Ahora la proposición 2.5 implica que si la función $u \in C^2$ satisface (5.4) entonces

$$\Delta u(x) = 2n \frac{d^2}{dr^2} \Big|_{r=0} j_n(\kappa r) u(x) = -\kappa^2 u(x).$$

Por tanto, y como ocurre con la propiedad del valor medio para funciones armónicas, al menos para funciones C^2 , (5.4) caracteriza las soluciones de la ecuación de Helmholtz.

5.2. Estimaciones locales. Analiticidad

Como hemos visto en el corolario 2.9, las fórmulas del valor medio se pueden usar para establecer estimaciones locales finas para las funciones armónicas. La misma idea [6] proporciona el siguiente

Teorema 5.4 (Estimaciones para las derivadas). *Si u es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ entonces*

$$|\partial^\alpha u(a)| \leq \frac{C_{nk}}{\alpha_n r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B(a,r))} \quad (5.5)$$

para toda bola $B(a,r) \subset \Omega$ y todo multi-índice α con $|\alpha| = k$. Aquí $\alpha_n = \omega_n/n$ es la medida de la bola unidad, y $C_{nk} = n^k(k+1)^{n+k}$ ($k = 0, 1, \dots$).

Demostración. Probaremos este teorema por inducción en k . El caso $k = 0$ es consecuencia inmediata de la demostración de la propiedad del valor medio en volumen (corolario 2.7). Para $k = 1$, teniendo en cuenta que $\partial u / \partial x_i$ es armónica (basta derivar con respecto a x_i en la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$), por el corolario 2.7 y el teorema de la divergencia (para el campo $\vec{V} = u \vec{e}_i$), si $0 < \gamma < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(a) \right| &= \frac{1}{\alpha_n (\gamma r)^n} \left| \int_{B(a,\gamma r)} \frac{\partial u}{\partial x_i} dv \right| = \frac{1}{\alpha_n (\gamma r)^n} \left| \int_{\partial B(a,\gamma r)} u \vec{n}_i dS \right| \\ &\leq \frac{1}{\alpha_n (\gamma r)^n} \int_{\partial B(a,\gamma r)} |u| dS \leq \frac{n}{\gamma r} \|u\|_{L^\infty(\partial B(a,\gamma r))}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Ahora, si $x \in \partial B(a, \gamma r)$ entonces $B(x, (1-\gamma)r) \subset B(a, r)$ y por tanto

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\alpha_n (1-\gamma)^n r^n} \|u\|_{L^1(B(a,r))}$$

por (5.5) para $k = 0$. Combinando estas desigualdades con $\gamma = 1/2$ obtenemos (5.5) para $k = 1$.

Supongamos ahora que $k \geq 2$ y que (5.5) es cierto en cualquier bola en Ω para todo multi-índice α de orden $|\alpha| = k-1$. Fijemos una bola $B(a, r) \subset \Omega$ y sea α un multi-índice de orden $|\alpha| = k$. Entonces $\partial^\alpha u = \partial(\partial^\beta u) / \partial x_i$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ y $|\beta| = k-1$. Con $\gamma = 1/(k+1)$, (5.6) implica que

$$|\partial^\alpha u(a)| \leq \frac{n(k+1)}{r} \left\| \partial^\beta u \right\|_{L^\infty(\partial B(a, \frac{r}{k+1}))}.$$

Si $x \in \partial B(a, r/(k+1))$, entonces $B\left(a, \frac{k}{k+1}r\right) \subset B(a, r) \subset \Omega$ y (5.5) para $k-1$ implica

$$|\partial^\beta u(x)| \leq \frac{C_{nk-1}}{\alpha_n \left(\frac{k}{k+1}r\right)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B(a,r))},$$

pero

$$n(k+1) \frac{C_{nk-1}}{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+k-1}} = n(k+1) \frac{n^{k-1} k^{n+k-1}}{\left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+k-1}} = n^k (k+1)^{n+k} = C_{nk}.$$

Esto prueba (5.5) en cualquier bola contenida en Ω y todo multi-índice de orden k . □

Estas estimaciones permiten generalizar el corolario 2.9 y proporcionan el análogo al teorema 1.10 en [16].

Corolario 5.5. *Sea u armónica en Ω . Para todo compacto $K \subset \Omega$ y todo entorno abierto $U \subset \Omega$ de K existe una constante C (que no depende de u) tal que*

$$\max_K |\partial^\alpha u| \leq C \|u\|_{L^1(U)}.$$

De hecho

$$\max_K |\partial^\alpha u| \leq \frac{n^{|\alpha|} (1+|\alpha|)^{n+|\alpha|}}{d^k} \|u\|_{L^\infty(U)} \tag{5.7}$$

donde $d := \text{dist}(K, \partial U)$.

Demostración. Sea $r < d$. Si $a \in K$ y $|x-a| < r$, por el teorema 5.4 tenemos, con $C = n^k (k+1)^k / r^{n+k}$, que

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq C \|u\|_{L^1(U)}$$

para todo multi-índice α . Si usamos la expresión explícita para esta constante podemos escribir

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq \frac{n^k (k+1)^{n+k}}{\alpha_n r^{n+k}} \|u\|_{L^1(U)} \leq \frac{n^k (k+1)^{n+k}}{r^k} \|u\|_{L^\infty(U)}.$$

para todo multi-índice α de orden $|\alpha| = k$. Puesto que $r < d$ es arbitrario, esto implica (5.7). □

Ahora podemos fortalecer el corolario 2.12.

Teorema 5.6 (Analiticidad). *Si u es armónica en Ω entonces u es analítica en Ω , es decir, la serie de Taylor en cualquier punto de Ω converge uniformemente en algún entorno de dicho punto.*

Demostración. Fijemos $a \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{B(a, r)} \subset \Omega$. Entonces, por (5.7) tenemos que

$$|\partial^\alpha u(a)| \leq (1 + |\alpha|)^n \left(\frac{n}{r}\right)^{|\alpha|} (1 + |\alpha|)^{|\alpha|}.$$

Ahora, la fórmula de Stirling [7, teorema 2.28] afirma que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^{k+1/2}}{k!e^k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ y por tanto

$$(1 + |\alpha|)^{1+|\alpha|} \leq M(1 + |\alpha|)^{-1/2} e^{|\alpha|} (1 + |\alpha|)!$$

para alguna constante $M > 0$ y todo multi-índice α . Además, el teorema multinomial de Newton implica

$$n^k = (1 + 1 + \dots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$$

por lo que $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \alpha!$. Combinando estas desigualdades tenemos

$$|\partial^\alpha u(a)| \leq M(1 + |\alpha|)^{n-1/2} \left(\frac{en^2}{r}\right)^{|\alpha|} \alpha!. \quad (5.8)$$

El desarrollo de Taylor en a es $\sum_{\alpha} \frac{\partial^\alpha u(a)}{\alpha!} (x - a)^\alpha$, donde la suma se extiende a todos los multi-índices $\alpha \geq 0$ ($\alpha_j \geq 0$ si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$). Afirmamos que esta serie de potencias converge absolutamente en $B(a, \frac{r}{2en^2})$. En efecto, si $x \in B(a, \frac{r}{2en^2})$ entonces

$$\frac{|\partial^\alpha u(a)|}{\alpha!} |(x - a)^\alpha| \leq \frac{|\partial^\alpha u(a)|}{\alpha!} |x - a|^{|\alpha|} \leq M(1 + |\alpha|)^{n-1/2} 2^{-|\alpha|},$$

y por tanto

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{|\partial^\alpha u(a)|}{\alpha!} |(x - a)^\alpha| \leq M k^n (1 + k)^{n-1/2} 2^{-k} \lesssim k^{2n} 2^{-k}.$$

Así, la serie de Taylor de u en a está absolutamente mayorada por la serie $\sum_{k \geq 0} k^{2n} 2^{-k}$, que es convergente. \square

Axler et al., basándose en el teorema 4.10, presentan otra prueba de este resultado [1, teorema 1.28]. Obviamente es suficiente probar que si u es armónica en un entorno de la bola unidad cerrada \bar{B} entonces la serie de Taylor converge a u en $x = 0$ en algún entorno de 0. La idea aquí es la misma que se usa en una variable compleja para el mismo menester –usamos la representación integral de Poisson de u dada en el teorema 4.10 y desarrollamos el núcleo de Poisson en serie de potencias–.

Si $|x| < \sqrt{2} - 1$ y $|\zeta| = 1$, entonces $0 < |x - \zeta|^2 < 2$ y

$$P(x, \zeta) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{(|x - \zeta|^2)^{n/2}} = \frac{1}{\omega_n} \sum_{k=0}^{\infty} c_m (|x|^2 - 2x \cdot \zeta)^k$$

donde $\sum_{m \geq 0} c_m (t-1)^m$ es la serie de potencias de $t^{-n/2}$ en $(0,2)$, centrada en $t = 1$. Tras desarrollar los términos $(|x|^2 - 2x \cdot \zeta)^k$ y reordenar (factible pues disponemos de convergencia absoluta), resulta que

$$P(x, \zeta) = \sum_{\alpha} q_{\alpha}(\zeta) x^{\alpha}$$

para $|x| < \sqrt{2} - 1$ y $|\zeta| = 1$ donde cada q_{α} es un polinomio. Puesto que esta última serie converge uniformemente sobre $S = \partial B$ para cada $|x| < \sqrt{2} - 1$,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_S P(x, \zeta) u(\zeta) dS(\zeta) = \sum_{\alpha} \left(\int_S q(\zeta) u(\zeta) dS(\zeta) \right) x^{\alpha}$$

para $|x| < \sqrt{2} - 1$. Este es el desarrollo deseado.

Observación 5.7. 1. Desafortunadamente, la serie de potencias múltiple en $x = 0$ de una función armónica en B no necesariamente converge en B . Por ejemplo, la función $u(z) = 1/(1-z)$ es holomorfa y por tanto armónica en el disco unidad abierto del plano complejo. Pero si escribimos $z = x + iy$ tenemos

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (x + iy)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j (iy)^{m-j}$$

para $|z| < 1$. Como serie de potencias múltiple, esta serie converge absolutamente si, y sólo si, $|x| + |y| < 1$, y por tanto no converge en todo el disco unidad.

2. Si u fuese armónica en un entorno de $\bar{B}(0, r)$, la serie anterior convergería en la bola de radio $(\sqrt{2} - 1)r$ (basta aplicar el resultado a la dilatada $u_r(\cdot) = u(\cdot/r)$). En comparación con el resultado obtenido en el teorema 5.6 donde el radio de convergencia tiende a cero cuando la dimensión $n \nearrow +\infty$, aquí es proporcional a r con constante de proporcionalidad independiente de la dimensión. En particular, el desarrollo de Taylor en $x = 0$ de una función armónica ‘entera’ (armónica en todo \mathbb{R}^n) converge uniformemente en compactos de \mathbb{R}^n a dicha función.

Para funciones analíticas tenemos la siguiente

Proposición 5.8 (Principio de identidad). *Supongamos que Ω sea conexo, u analítica en Ω y $u = 0$ en algún subconjunto abierto de Ω . Entonces $u \equiv 0$ en Ω .*

Demostración. Sea ω el interior del conjunto $\{a \in \Omega / u = 0\}$. Si $a \in \Omega$ es un punto de acumulación de ω entonces, por continuidad, $\partial^{\alpha} u(a) = 0$ para todo multi-índice α , y esto implica que la serie de potencias de u en a es idénticamente cero: así $a \in \omega$. Por tanto ω es cerrado en Ω . Puesto que por hipótesis ω no es vacío y Ω es conexo concluimos que $\omega = \Omega$. Esto equivale a que $u \equiv 0$ en Ω . □

Este teorema nos permite obtener una versión local del principio del máximo:

Teorema 5.9 (Principio local del máximo). *Supongamos que Ω sea conexo, u armónica real en Ω y que u tenga un máximo local en Ω . Entonces u es constante.*

Demostración. Si u tiene un máximo local en $a \in \Omega$, entonces existe $r > 0$ tal que $u(x) \leq u(a)$ para todo $x \in B(a, r) \subset \Omega$. Por el teorema 2.14, u es constante en $B(a, r)$. Dado que u es analítica en Ω , $u \equiv u(a)$ por la proposición 5.8. □

5.3. El principio de reflexión

El siguiente teorema permite, bajo ciertas circunstancias, extender funciones armónicas, y representa una generalización del teorema de reflexión de Schwarz (teorema 11.14 en [19]).

Teorema 5.10 (Principio de reflexión). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ (con coordenadas $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$) simétrico al hiperplano $t = 0$, es decir, $(x, -t) \in \Omega$ si $(x, t) \in \Omega$. Sea $\Omega_+ := \{(x, t) \in \Omega / t > 0\}$ y $\Pi_0 := \{(x, t) \in \Omega / t = 0\}$ (figura 1.3). Si u es continua en $\Omega_+ \cup \Omega_0$, armónica en Ω_+ y $u = 0$ en Π_0 , entonces u puede ser extendida armónicamente a Ω haciéndola impar en t , es decir, de modo que $u(x, -t) = -u(x, t)$.*

Demostración. Si seguimos denotando por u la extensión impar de u a Ω , está claro que entonces u es armónica en $\Omega \setminus \Pi_0$. Dado $(x_0, 0) \in \Pi_0$, veremos que u es armónica cerca de $(x_0, 0)$. Sea B una bola centrada en $(x_0, 0)$ cuya clausura esté contenida en Ω . Trasladando y dilatando (operaciones que conservan armonicidad) podemos suponer que $x_0 = 0$ y que B es la bola unidad, y puesto que u es continua en \bar{B} podemos, por el teorema 4.10, resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{en } B \\ v = u & \text{en } \partial B \end{cases}$$

con $v \in C(\bar{B})$. La expresión de v dada allí muestra que v es impar en t ya que u lo es y, en particular, $v(x, 0) = 0$, lo que a su vez permite ver que v coincide con u en las fronteras de las semibolas superior e inferior. Por el corolario 2.16 $v = u$ en cada semibola y por tanto $v = u$ en B . En particular u es armónica en B . □

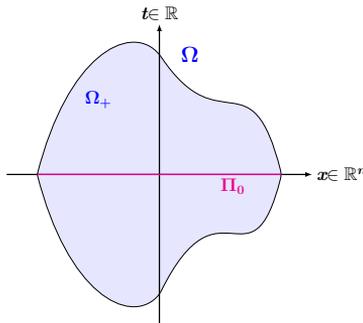


Figura 1.3. Dominio simétrico

Observación 5.11. Nótese que, para cada $|\zeta| = 1$, la transformada de Kelvin del núcleo de Poisson $P(x, \zeta)$ para la bola es

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[P(\cdot, \zeta)](x) &= |x|^{2-n} P(x/|x|^2, \zeta) = \frac{|x|^{2-n} \left(1 - \left|\frac{x}{|x|^2}\right|^2\right)}{\omega_n \left|\frac{x}{|x|^2} - \zeta\right|^n} \\ &\stackrel{\text{lema 4.9}}{=} \frac{|x|^{2-n} \frac{|x|^2-1}{|x|^2}}{\omega_n \left(\frac{|x-\zeta|}{|x|}\right)^n} = -P(x, \zeta). \end{aligned}$$

Así, la integral de Poisson de una función $g \in C(S)$ satisface $\mathcal{K}[P[g]] = -P[g]$ y la prueba del principio de reflexión es válida para funciones u que se anulen en S y dominios \mathcal{K} -simétricos respecto de la esfera, es decir, dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\mathcal{K}(\Omega) = \Omega$ (comparar con la discusión en el apartado 14.4 en [19]).

A este respecto, obsérvese también que el núcleo de Poisson para el semiespacio \mathbb{R}_+^n es trivialmente impar respecto a la simetría $(x, t) \mapsto (x, -t)$ usada en el teorema 5.10 que, por cierto, fue la misma que se usó para construir la función de Green para el semiespacio.

5.4. Singularidades aisladas

Definición 5.12. *Se dice que una función armónica u definida en un entorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$, salvo quizás en x_0 , tiene una singularidad evitable en x_0 si u se puede extender a x_0 como armónica en tal entorno.*

El siguiente teorema establece que cualquier singularidad “más débil” que la de la solución fundamental es evitable (comparar con el teorema 1.20 en [19]).

Teorema 5.13. *Supongamos que u es armónica en $\Omega \setminus \{x_0\}$. Si*

$$|u(x)| = o(|x - x_0|^{2-n}) \quad \text{para } n > 2$$

o

$$|u(x)| = o(\ln|x - x_0|^{-1}) \quad \text{para } n = 2$$

cuando $x \rightarrow x_0$, entonces u tiene una singularidad evitable en x_0 .

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x_0 = 0$ y que u es armónica en la bola unidad cerrada $\overline{B} \setminus \{0\}$ salvo en 0. Como antes, sea $v \in C(\overline{B})$ la extensión armónica de $u|_S$ a B . Seguidamente veremos que $v = u$ en $B \setminus \{0\}$, con lo que podemos evitar la singularidad haciendo $u(0) := v(0)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $0 < \delta < 1$. Con $w = u - v$ consideremos la función

$$w(x) - \varepsilon(|x|^{2-n} - 1)$$

para $n > 2$ y

$$w(x) + \varepsilon \ln|x|$$

si $n = 2$ definida en $\overline{B} \setminus B_\delta(0)$. Esta función es armónica en $B \setminus \overline{B_\delta(0)}$, continua en su clausura, cero en S y, por hipótesis, negativa en $\partial B_\delta(0)$ para todo δ suficientemente pequeño. Por el principio del máximo, es negativa en $B \setminus \{0\}$, y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ concluimos que $u \leq v$ en $B \setminus \{0\}$. Por último, el mismo argumento muestra que $u \geq v$, por lo que $u = v$ en $B \setminus \{0\}$. \square

5.5. Funciones Armónicas Positivas

La Desigualdad y el Principio de Harnack

Las funciones armónicas positivas no pueden oscilar demasiado sobre subconjuntos compactos $K \Subset \Omega$ si Ω es conexo. Para el caso de la bola el resultado se recoge en el siguiente

Teorema 5.14 (Desigualdad de Harnack en la bola). *Si u es una función armónica no negativa en B , entonces*

$$\frac{1 - |x|}{(1 + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + |x|}{(1 - |x|)^{n-1}} u(0)$$

para todo $x \in B$.

Demostración. El núcleo de Poisson verifica

$$\frac{1 - |x|}{(1 + |x|)^{n-1}} \leq P(x, \zeta) \leq \frac{1 + |x|}{(1 - |x|)^{n-1}} \quad (5.9)$$

para todo $x \in B$ y $\zeta \in S$. Si u es positiva y armónica en \bar{B} y como antes $d\sigma(\zeta) = dS(\zeta)/\omega_n$ es la medida normalizada de área en S , multiplicando (5.9) por $u(\zeta)$ e integrando tenemos

$$\frac{1 - |x|}{(1 + |x|)^{n-1}} \int_S u(\zeta) d\sigma(\zeta) \leq \int_S P(x, \zeta) u(\zeta) d\sigma(\zeta) \leq \frac{1 + |x|}{(1 - |x|)^{n-1}} \int_S u(\zeta) d\sigma(\zeta)$$

por lo que

$$\frac{1 - |x|}{(1 + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{1 + |x|}{(1 - |x|)^{n-1}} u(0).$$

Si u es positiva y armónica en B , el teorema sigue sin más que aplicar lo que hemos probado a las dilatadas $u_r(x) = u(rx)$ ($r < 1$) y tomar límite cuando $r \nearrow 1^-$. \square

Sean $c_*(t) = (1 - t)/(1 + t)^{n-1}$ y $c^*(t) = (1 + t)/(1 - t)^{n-1}$. Después de trasladar y dilatar, el teorema 5.14 asegura que si u es armónica y positiva en $B_r(a)$ y $|x - a| \leq \rho < r$ entonces

$$c_*(\rho/r) u(a) \leq u(x) \leq c^*(\rho/r) u(a). \quad (5.10)$$

Teorema 5.15 (Desigualdad de Harnack). *Si Ω es un dominio en \mathbb{R}^n y $K \Subset \Omega$ es un subconjunto relativamente compacto en Ω , entonces existe una constante $C \geq 1$ que sólo depende de Ω, K y la dimensión n tal que*

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(y)}{u(x)} \leq C$$

para todo $x, y \in K$ y toda función armónica positiva u en Ω .

Demostración. Es suficiente probar que existe $C \geq 1$ tal que $u(y)/u(x) \leq C$ para todo $x, y \in K$, ya que la otra desigualdad sigue intercambiando los papeles de x e y .

Para $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ definamos

$$s(x, y) = \sup \{u(y)/u(x) \mid u \text{ es positiva y armónica en } \Omega\}.$$

Primero veremos que $s < +\infty$ en $\Omega \times \Omega$: fijemos $x \in \Omega$ y consideremos el conjunto

$$E = \{y \in \Omega \mid s(x, y) < +\infty\}.$$

Sea u cualquier función positiva y armónica en Ω . Si $y \in E$ y $r > 0$ es suficientemente pequeño para que $B_{2r}(y) \subset \Omega$, por (5.10), $u \leq c^*(1/2)u(y)$ en $B_r(y)$. Esto implica que $B_r(y) \subset E$, lo que prueba que E es abierto. Si $z \in \Omega$ es un punto límite de E , existe $r > 0$ e $y \in E$ tales que $z \in B_r(y) \subset B_{2r}(y) \subset \Omega$ y, de nuevo por (5.10), $u(z) \leq c^*(1/2)u(y)$. Así $z \in E$ y E es relativamente cerrado en Ω . La conexidad de Ω implica que $E = \Omega$ ya que $E \neq \emptyset$ (trivialmente $x \in E$).

Ahora veremos que $s: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ es de hecho semicontinua superiormente, esto es, que para todo $a, b \in \Omega$

$$\limsup_{(x,y) \rightarrow (a,b)} s(x, y) \leq s(a, b).$$

En efecto, si $x \in B_\rho(a) \subset B_r(a) \subset \Omega$ e $y \in B_\rho(b) \subset B_r(b) \subset \Omega$, (5.10) implica que

$$s(x, y) = \frac{u(y)}{u(x)} \leq \frac{c^*(\rho/r)}{c_*(\rho/r)} s(a, b),$$

y entonces

$$\limsup_{(x,y) \rightarrow (a,b)} s(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sup_{\substack{x \in B_\rho(a) \\ y \in B_\rho(b)}} s(x, y) \leq \left[\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{c^*(\rho/r)}{c_*(\rho/r)} \right] s(a, b) = s(a, b)$$

ya que $\lim_{t \rightarrow 0^+} c_*(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} c^*(t) = 1$. Puesto que toda función semicontinua superiormente alcanza su máximo en compactos, s lo hará en $K \times K$. □

Que existe $C = C_u \geq 1$ dependiente de u tal que $1/C \leq u(x)/u(y) \leq C$ para todo $x, y \in K$ es consecuencia del teorema de Weierstrass que la función $(x, y) \rightarrow u(y)/u(x)$ es continua en $\Omega \times \Omega$ si $u > 0$. Lo importante en este teorema es que C se puede elegir independiente de u , esto es,

$$C = \sup_{\substack{u \text{ armónica} \\ u > 0}} \left[\sup_{x,y \in K} \frac{u(y)}{u(x)} \right] < +\infty.$$

Observación 5.16. La hipótesis sobre las funciones consideradas en el teorema 5.15 puede relajarse: puesto que para n fijo la constante C sólo depende de K y Ω , para todo $\varepsilon > 0$ podemos concluir que si u es armónica no negativa en Ω

$$\frac{1}{C} \leq \frac{u(x) + \varepsilon}{u(y) + \varepsilon} \leq C.$$

Haciendo $\varepsilon \searrow 0$ concluimos que

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$$

para todo $x, y \in K \subset \Omega$. En particular

$$\max_{x \in K} u(x) \leq C \min_{x \in K} u(x). \quad (5.11)$$

Nótese que esto implica que si u se anula en un punto $x_0 \in K$ entonces $u = 0$ en Ω pues, por (5.11), para cualquier otro punto $x \in \Omega$, $0 \leq u(x) \leq C u(x_0) = 0$. Pero esto también es consecuencia del principio del mínimo y, de hecho, no es difícil ver que el teorema 5.15 implica el teorema 2.14.

Teorema 5.17 (Principio de Harnack). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ una sucesión no decreciente de funciones armónicas en Ω . Entonces*

- (i) $u_k \rightarrow +\infty$ cuando $k \rightarrow \infty$, o
- (i) $\{u_k\}$ converge uniformemente en compactos de Ω a una función u que, por el corolario 2.13, también debe ser armónica en Ω .

Demostración. Supongamos que para algún $x_0 \in \Omega$ $u(x_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x_0) < +\infty$. Sea $K \Subset \Omega$ compacto. Añadiendo x_0 a K siempre podemos suponer que $x_0 \in K$, y (5.11) implica que

$$\sup_{x \in K} (u_m(x) - u_k(x)) \leq C (u_m(x_0) - u_k(x_0)).$$

Esto a su vez implica que la sucesión $\{u_k\}$ es uniformemente de Cauchy en K . Así, $u_k \rightarrow u$ para cierta función u . \square

El teorema de Bôcher

Siguiendo [1], en este apartado probaremos el teorema de Bôcher que caracteriza el comportamiento local de las funciones armónicas positivas en un entorno de una singularidad aislada. A este respecto recordemos que, para $n = 2$, $\ln(1/|x|)$ es positiva y armónica en $B \setminus \{0\}$, mientras que $|x|^{2-n}$ lo es para $n > 2$. El teorema de Bôcher establece que esencialmente estos son los únicos ejemplos.

Teorema 5.18 (Bôcher). Si u es una función armónica positiva en $B \setminus \{0\}$, entonces existe una función armónica v en B y una constante $b \geq 0$ tal que

$$u(x) = \begin{cases} v(x) + b \ln(1/|x|), & \text{si } n = 2 \\ v(x) + b|x|^{2-n}, & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

para todo $x \in B \setminus \{0\}$.

Basaremos la demostración del teorema 5.18 en tres lemas. Para empezar, si u es una función definida en $B \setminus \{0\}$, el promedio esférico o radialización de u se define como

$$u^\sharp(x) = \int_{|\zeta|=1} u(|x|\zeta) d\sigma(\zeta)$$

para $x \in B \setminus \{0\}$.

Lema 5.19. Si u es armónica en $B \setminus \{0\}$, entonces existen constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tales que

$$u^\sharp(x) = \begin{cases} a + b \ln(1/|x|), & \text{si } n = 2 \\ a + b|x|^{2-n}, & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

para todo $x \in B \setminus \{0\}$. En particular u^\sharp es armónica en $B \setminus \{0\}$.

Demostración. Si

$$f(r) = \int_{|\zeta|=1} u(r\zeta) d\sigma(\zeta)$$

está claro que $u^\sharp(x) = f(|x|)$. Derivando respecto a r obtenemos

$$f'(r) = \int_{|\zeta|=1} \zeta \cdot \nabla u(r\zeta) d\sigma(\zeta) = r^{-n} \int_{|\eta|=r} \eta \cdot \nabla u(\eta) d\sigma(\eta).$$

Si $r_0 < r_1 < 1$ y $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / r_0 < |x| < r_1\}$, el corolario 2.3 implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0} \int_{|\eta|=r_0} \eta \cdot \nabla u(\eta) d\sigma(\eta) &= \int_{|\eta|=r_0} \partial_{\bar{n}} u(\eta) d\sigma(\eta) = \int_{|\eta|=r_1} \partial_{\bar{n}} u(\eta) d\sigma(\eta) \\ &= \frac{1}{r_1} \int_{|\eta|=r_1} \eta \cdot \nabla u(\eta) d\sigma(\eta) \end{aligned}$$

lo que quiere decir que $f'(r)$ es un múltiplo constante de r^{n-1} , $f'(r) = cr^{n-1}$. Integrando vemos inmediatamente que f tiene la forma deseada. \square

Observación 5.20. La función u es armónica radial si, y sólo si $u = u^\sharp$ y por tanto, el corolario 1.3 es una consecuencia inmediata del lema 5.19.

El siguiente lema es una versión de la desigualdad de Harnack en conjuntos no compactos.

Lema 5.21. *Existe una constante $c > 0$ tal que, para cualquier función armónica positiva en $B \setminus \{0\}$,*

$$cu(y) < u(x)$$

siempre que $0 < |y| = |x| \leq 1/2$.

Demostración. La desigualdad de Harnack con $\Omega = B \setminus \{0\}$ y $K = \frac{1}{2}S$ (teorema 5.15) muestra que existe $c > 0$ tal que para toda función armónica positiva en $B \setminus \{0\}$ tenemos $cu(y) \leq u(x)$ para $|x| = |y| = 1/2$. Aplicando esto a las dilatadas $u_r(\cdot) = u(r \cdot)$ ($0 < r < 1$) concluimos el lema. \square

Finalmente, el próximo resultado caracteriza a las funciones armónicas en $B \setminus \{0\}$ que se anulan en S y está en el corazón de la prueba del teorema de Bôcher.

Lema 5.22. *Supongamos que u sea armónica positiva en $B \setminus \{0\}$ y $u(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow 1^-$. Entonces existe una constante $b > 0$ tal que*

$$u(x) = \begin{cases} b \ln(1/|x|), & \text{si } n = 2 \\ b(|x|^{2-n} - 1), & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

para todo $x \in B \setminus \{0\}$.

Demostración. Por el lema 5.19 es suficiente ver que $u = u^\sharp$ en $B \setminus \{0\}$. Si $0 < |x| \leq 1/2$ y $|\zeta| = 1$, por el lema 5.21 existe $c > 0$ tal que $cu(|x|\zeta) < u(x)$, y por tanto $cu^\sharp(x) < u(x)$. Así, $u_1 = u - cu^\sharp$ es armónica en $B \setminus \{0\}$, $u_1 > 0$ en $\frac{1}{2}B \setminus \{0\}$ y $u_1(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow 1^-$, por lo que, en virtud del principio del mínimo para funciones armónicas (corolario 2.15), $u_1 > 0$ en $B \setminus \{0\}$. Iterando este proceso tenemos que $u > c_k u^\sharp$ para $k = 0, 1, 2, \dots$ donde $c_{k+1} = c + (1 - c)c_k$ y $c_0 = 0$. En efecto, el caso $k = 0$ lo acabamos de probar en las líneas anteriores, y si lo suponemos cierto para k , entonces

$$\begin{aligned} u - c_{k+1}u^\sharp &= u - (c + (1 - c)c_k)u^\sharp = u - c_k u^\sharp - c(1 - c_k)u^\sharp \\ &= (u - c_k u^\sharp) - c(u - c_k u^\sharp)^\sharp > 0. \end{aligned}$$

Puesto que $c_k \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$, esto implica que $u \geq u^\sharp$ en $B \setminus \{0\}$, pero si en algún $x_0 \in B \setminus \{0\}$ se tuviera la desigualdad estricta $u(x_0) > u^\sharp(x_0)$, entonces $u(x_0) > u^\sharp(x)$ si $|x| = |x_0|$ lo que implica que $u(x_0) > (u^\sharp)^\sharp(x_0) = u^\sharp(x_0)$. \square

Ahora estamos preparados para la demostración del teorema de Bôcher.

Demostración del teorema 5.18. Supongamos primero que $n > 2$. Considerando las dilataciones podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que u es armónica positiva en $\bar{B} \setminus \{0\}$. Sea w la función

$$w(x) = u(x) - P[u|_S](x) + |x|^{2-n} - 1.$$

Por el teorema 4.10, $w(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow 1$ y $w(x) \rightarrow +\infty$ si $x \rightarrow 0$ ya que u es positiva y $P[u|_S]$ está acotada en $B \setminus \{0\}$. Por el principio del mínimo concluimos que w es positiva en $B \setminus \{0\}$. Por el lema 5.22, $u(x) = v(x) + b|x|^{2-n}$ para alguna función armónica v en B y alguna constante b . Haciendo $x \rightarrow 0$, la positividad de u implica que $b \geq 0$, esto prueba el teorema de Bôcher para $n > 2$.

La prueba para el caso bidimensional es la misma, excepto que $|x|^{2-n}$ se debe reemplazar por $\ln(1/|x|)$. □

Observación 5.23. (a) Atendiendo a la observación 5.16 vemos que el teorema de Bôcher sigue siendo válido para funciones armónicas no negativas en $B \setminus \{0\}$.

(b) Nótese que, siguiendo la demostración del teorema 5.13, éste es un corolario del teorema de Bôcher.

Concluimos este apartado con una caracterización de la funciones armónicas positivas en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (recuérdese que por el corolario 2.20, toda función armónica positiva en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ es constante).

Corolario 5.24. *Sea $n > 2$. Si u es armónica positiva en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, entonces existen constantes $a, b \geq 0$ tales que $u(x) = a + b|x|^{2-n}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.*

Demostración. Por el teorema de Bôcher, $u(x) = v(x) + b|x|^{2-n}$ donde v es armónica en $B \setminus \{0\}$ y $b \geq 0$. La función v tiene una extensión armónica a $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (basta hacer $v(x) = u(x) - b|x|^{2-n}$ para $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$). Puesto que $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} v(x) \geq 0$, el principio del mínimo implica que $v \geq 0$ en \mathbb{R}^n , y por la observación 2.19, $v = a = \text{cte}$. □

6. La ecuación de Poisson con soporte compacto

La ecuación $\Delta u = f$ en \mathbb{R}^n se denomina *ecuación de Poisson* y para ella se tiene:

Teorema 6.1. *Si $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto, la función*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y)f(y)dv(y) \tag{6.1}$$

es solución de la ecuación de Poisson.

Demostración. Puesto que el núcleo N es localmente integrable, haciendo el cambio de variables $y \leftrightarrow x - y$, $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(y)f(x-y)dv(y)$ se puede derivar bajo el signo integral y las integrales así obtenidas son absolutamente integrables. Puesto que f tiene soporte compacto, si $r \gg 1$ es suficientemente grande (para que $\text{sop } f \subseteq B_r(0)$), para todo $0 < \varepsilon < r$

$$\int_{\varepsilon \leq |y| \leq r} N(y)\Delta f(x-y)dv(y) = \int_{|\zeta|=\varepsilon} (f(x-\zeta)\partial_{\bar{n}}N(\zeta) - N(\zeta)\partial_{\bar{n}}f(x-\zeta))dS(\zeta).$$

Como en la demostración del teorema 3.2 tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |y| \leq r} N(y) \Delta f(x-y) dv(y) = \int_{\mathbb{R}^n} N(y) \Delta f(x-y) dv(y),$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta|=\varepsilon} N(\zeta) \partial_{\bar{n}} f(x-\zeta) dS(\zeta) = 0,$$

y

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\zeta|=\varepsilon} f(x-\zeta) \partial_{\bar{n}} N(\zeta) dS(\zeta) = f(x).$$

Esto implica (6.1). □

Como se menciona en [16], si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto y $f \in C^\infty(\Omega)$, que la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ tiene solución $u \in C^\infty(\Omega)$ sigue como en la demostración del teorema 1.16 en [16] usando un teorema tipo Runge [9, teorema 1.10]. Como allí, ahora consideramos el problema de encontrar soluciones $u \in C^\infty$ con soporte compacto de la ecuación de Poisson en \mathbb{R}^n . Si h es cualquier función armónica en \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \Delta u(x) dv(x) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq r} h(x) \Delta u(x) dv(x) \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|\zeta|=r} h(\zeta) \partial_{\bar{n}} u(\zeta) dS(\zeta) = 0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

por (2.2).

Proposición 6.2. *Si $n \geq 3$ y $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, cualquier solución acotada $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación de Poisson es de la forma $u = N * f + c$ para alguna constante c .*

Demostración. Del teorema 6.1 sabemos que $v = N * f$ resuelve la ecuación de Poisson en \mathbb{R}^n . Además, puesto que $|N(x)| \rightarrow 0$ y f tiene soporte compacto, $u - v$ está acotada en \mathbb{R}^n y, por el teorema de Liouville, debe ser constante. Así $u = N * f + c$ para alguna constante c . □

Ahora podemos demostrar el siguiente análogo del teorema 1.27 en [16].

Teorema 6.3. *Sea $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Son equivalentes*

- (a) *La ecuación de Poisson $\Delta u = f$ admite solución $u \in C^\infty$ con soporte compacto.*
- (b) *Para todo polinomio armónico p en \mathbb{R}^n*

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(x) f(x) dv(x) = 0.$$

Demostración. Por (6.2), solo hemos de probar que (b) \Rightarrow (a). Ahora veremos que $u = N * f$ tiene soporte compacto (de la proposición anterior ésta es la única candidata). Como en el apartado 5.2, para $|z| < (\sqrt{2} - 1)/|y|$,

$$|z - y|^{2-n} = \sum_{k=0}^{\infty} c_m (|z|^2 - 2y \cdot z)^k = \sum_{\alpha} q_{\alpha}(y) z^{\alpha}$$

donde q_α son polinomios homogéneos armónicos (la función $x \rightarrow |x|^{2-n}$ es armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$). Así, si $\text{sop } f \subseteq B_r(0)$ y $|x| > r/(\sqrt{2}-1)$ entonces $|x| > |y|/(\sqrt{2}-1)$ para todo $y \in \text{sop } f$. Por el teorema 4.5, la transformada de Kelvin es

$$\begin{aligned} \mathcal{K}[u](x) &= |x|^{2-n} u(x/|x|^2) = |x|^{2-n} \int_{\mathbb{R}^n} N(x/|x|^2 - y) u(y) dv(y) \\ &= \frac{1}{(2-n)\omega_n} \sum_{\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} q_{\alpha}(y) u(y) dv(y) \right) \frac{x^{\alpha}}{|x|^{n+2(|\alpha|-1)}} = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que u tiene soporte compacto. \square

Observación 6.4. Que la ecuación de Poisson con dato $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es única (cuando existe) es consecuencia inmediata de la proposición 5.8; la diferencia de dos soluciones sería armónica con soporte compacto y por tanto idénticamente nula.

7. El lema de Weyl

La sección 2.5 de [16] está, como aquí, dedicada al aspecto de regularidad para las funciones armónicas. Maciá prueba el teorema 7.2 para el caso del plano \mathbb{R}^2 pero, como bien indica en [16, observación 2.37], no hay nada particular en la prueba que no permita su generalización al caso multidimensional. Como en [16], empezamos recordando las definiciones pertinentes.

Si u es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, de (2.2) (con $v = \varphi$)

$$\langle u, \Delta\varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\Delta\varphi(x) dv(x) = \int_{\Omega} \varphi(x)\Delta u(x) dv(x) = 0.$$

Esta condición tiene sentido incluso para funciones que no sean continuas en Ω , como por ejemplo si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es localmente integrable. Esto sugiere la siguiente definición:

Definición 7.1. Una función localmente integrable u en un abierto Ω de \mathbb{R}^n se dice armónica en sentido débil o que satisface la ecuación $\Delta u = 0$ en sentido débil si

$$\langle u, \Delta\varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\Delta\varphi(x) dv(x) = 0$$

para toda función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Obsérvese que no sigue de la definición 7.1 que si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es armónica en sentido débil lo sea en sentido usual (para ello u debe ser al menos C^2).

Este hecho se recoge, y es parte de un resultado más general, en el siguiente

Teorema 7.2 (Lema de Weyl). Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\Delta u = 0$ en sentido débil, entonces u es armónica, esto es, $\Delta u = 0$ en sentido clásico en Ω .

Para ser más precisos, en la conclusión se debe entender que u es armónica posiblemente tras una modificación en un conjunto de medida nula.

Demostración. Sean Ω_ε y ϕ como en la demostración del teorema 2.11. Si $\varphi \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ tenemos que $\varphi * \phi_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ y $u_\varepsilon := u * \phi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Por (2.2) se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u_\varepsilon(x) \varphi(x) dv(x) &= \int_{\Omega} u_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x) dv(x) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} u(y) \phi_\varepsilon(x-y) dv(y) \right) \Delta \varphi(x) dv(x) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x-y) \Delta \varphi(x) dv(x) \right) u(y) dv(y) \\ &= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x+y) dv(x) \right) u(y) dv(y) \\ &= \int_{\Omega} u(y) \left(\Delta_y \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x) \varphi(x+y) dv(x) \right) dv(y) \\ &= \int_{\Omega} u(y) \Delta \chi(y) dv(y) = 0 \end{aligned}$$

ya que la función

$$\chi(y) := \int_{\Omega} \phi_\varepsilon(x) \varphi(x+y) dv(x)$$

es $C_c^\infty(\Omega)$ y u es armónica en sentido débil en Ω . Por tanto u_ε es armónica en sentido clásico en Ω .

Por último observemos que, como consecuencia de la demostración del teorema 2.11

$$\begin{aligned} u_\varepsilon &= u_\varepsilon * \phi_\delta = (u * \phi_\varepsilon) * \phi_\delta = u * (\phi_\varepsilon * \phi_\delta) \\ &= u * (\phi_\delta * \phi_\varepsilon) = (u * \phi_\delta) * \phi_\varepsilon = u_\delta * \phi_\varepsilon = u_\delta \end{aligned}$$

en $\Omega_{\min\{\varepsilon, \delta\}}$, y puesto que $u_\varepsilon \rightarrow u$ en $L_{loc}^1(\Omega)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, del corolario 2.9 (o la observación 2.10), u_ε converge uniformemente en subconjuntos compactos de Ω a una función u_* que, por el corolario 2.13, es armónica en Ω y coincide con u en casi todo punto. \square

Bibliografía

- [1] AXLER, S., BOURDON, P., RAMEY, W. *Harmonic Function Theory*. 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics 137. Springer Verlag, New York (2001).
- [2] BERENSTEIN, C. A., GAY, R. *A local version of the two-circles theorem*. Israel J. Math. 55, 267-288 (1986).
- [3] BOTT, R., LORING, W. T. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics 82. Springer Verlag, Nuew York-Berlin (1982).
- [4] BRUNA, J., CUFÍ, J. *Complex Analysis*. European Mathematical Society (2013).
- [5] DELSARTE, J. *Lectures on topics in mean periodic functions and the two-radius theorem*. Tata Instutute, Bombay (1961).
- [6] EVANS, L.C. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, 19. Amer. Math. Soc. (1998).
- [7] FLORES, M., SADARANGANI, K. *Cálculo Diferencial e Integral*. Servicio de Publicaciones Universidad de La Laguna (2013).
- [8] FOLLAND, G. B. *Introduction to partial differential equations*. 2nd ed., Princeton University Press (1995).
- [9] GARDINER, S. J. *Harmonic approximation*, London Mathematical Society Lecture Note Series 221. Cambridge University Press (1995).
- [10] HANSEN, W., NADIRASHVILI, N. *A converse to the mean value theorem for harmonic functions*. Acta Math. 171, 139-163 (1993).
- [11] HANSEN, W., NADIRASHVILI, N. *Littlewood's one circle problem*. J. London Math. Soc. 50, 349-360 (1994).
- [12] HANSEN, W. *A Strong Version of Liouville's Theorem*. Amer. Math. Monthly 115, 583-595 (2008).
- [13] HANSEN, W. *Restricted mean value property and harmonic functions* in J. Kral et al. (eds). Potential Theory – ICPT 94 (Proc. Intern. Conf., Konty), de Gruyter, 67-90 (1996).
- [14] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. 3rd ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1990).

- [15] JOHN, F. *Partial Differential Equations* 3rd ed., Applied Mathematical Sciences I. Springer Verlag, New York (1978).
- [16] MACIÁ MEDINA, V. J. *Análisis Complejo: la ecuación $\bar{\partial}$ y funciones armónicas en el plano*. Trabajo Fin de Grado, Sección de Matemáticas – Universidad de la Laguna (2017).
- [17] NETUKA, J., VASELÝ, J. *Mean value property and harmonic functions*. Classical and modern potential theory and applications (Chateau de Bonas, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 430, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 359-398 (1994).
- [18] VOLCHKOV, V. V. *The final version of the mean value theorem for harmonic functions*. Math. Notes 59, 247-252 (1996).
- [19] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3ª Edición. McGraw-Hill (1987).
- [20] ZALCMAN, L. *Analyticity and the Pompeiu Problem*. Arch. Rat. Mech. Anal. 47, 237-254 (1972).
- [21] ZALCMAN, L. *Complex Proofs or Real Theorems (and vice versa)*. Amer. Math. Monthly 81, 115-137 (1974).
- [22] ZALCMAN, L. *Offbeat integral geometry*. Amer. Math. Monthly 87, 161-175 (1980).

Resumen

IN THIS MEMOIR we provide a detailed study for the Laplace operator in Euclidean n -dimensional space \mathbb{R}^n via some classical problems in which it intervenes. Among them we consider the basic properties of harmonic functions, those $u \in C^2$ so that $\Delta u = 0$, such as the mean value property, the maximum principle, the Dirichlet/Neumann problems, Harnack's inequalities/principle, Bôcher's theorem and Poisson's problem to finish with Weyl's regularity lemma.

1. Introduction

IN this manuscript we focus in the study of the so called harmonic funciones in Euclidean space \mathbb{R}^n ; these are those functions $u: \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ of class C^2 in Ω such that

$$\Delta u = (\nabla \cdot \nabla)u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

We mainly center our attention in their qualitative properties such as the maximum principle and the mean value theorem, present and solve the classical Dirichlet problem for the ball and the upper half space. The monograph will finish up with a closer look at its local behavior near isolated singularities, the rigidity assumptions that sign constrains puts on them (Harnanck's inequalities/principle and Bôcher's theorem), the Poisson problem with compact supports and the Weyl's regularity theorem to the extend that weak harmonic functions are in fact classical harmonic functions.

2. Outline

AFTER introducing the Laplace operator we will characterize it via its invariance properties with respect to the isometry group of real Euclidean n space \mathbb{R}^n . We will go on with the main properties for harmonic functions, its characterization via the Gauss mean value property and the maximum principle which, among other things will give uniqueness in the Dirichlet problem. Green's and Neumann's functions, as well as the Poisson's kernel, are presented and explicit formulas are given for some particular but important cases, the ball and the upper half space (for the Neumann

case, this formula will be given just in the case of the unit disc in \mathbb{R}^2). Harnack's inequalities essentially say that positive harmonic functions can not oscillate too much on compact subsets and, as a consequence, an increasing sequence of harmonic functions on a region on \mathbb{R}^n either, converges uniformly on compact sets to a harmonic function, or diverges to $+\infty$. We will prove Bôcher's theorem which describes the local form of positive harmonic functions near isolated singularities and give the analog of the Schwarz reflection principle. We also take a closer look at Poisson's problem on the hole space \mathbb{R}^n . Finally we finish with a astonishing (but easily proven) regularity result known as Weyl's lemma.

Referencias

- [1] AXLER, S., BOURDON, P., RAMEY, W. *Harmonic Function Theory*. 2nd ed., Graduate Text in Math. 137. Springer Verlag, New York (2001).
- [2] BRUNA, J., CUFÍ, J. *Complex Analysis*. European Mathematical Society (2013).
- [3] FLORES, M., SADARANGANI, K. *Cálculo Diferencial e Integral*. Servicio de Publicaciones Universidad de La Laguna (2013).
- [4] FOLLAND, G. B. *Introduction to partial differential equations*. 2nd ed., Princeton University Press (1995).
- [5] GARDINER, S. J. *Harmonic approximation*, London Mathematical Society Lecture Note Series 221. Cambridge University Press (1995).
- [6] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. 3rd ed., North-Holland Publishing Co., Amsterdam (1990).
- [7] JOHN, F. *Partial Differential Equations* 3rd ed., Applied Mathematical Sciences I. Springer Verlag, New York (1978).
- [8] MACIÁ MEDINA, V. J. *Análisis Complejo: la ecuación $\bar{\partial}$ y funciones armónicas en el plano*. Trabajo Fin de Grado, Sección de Matemáticas – Universidad de la Laguna (2017).
- [9] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. 3ª Edición. McGraw-Hill (1987).