Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Tiffany López Nicholson

La categoría de Lusternik-Schnirelmann

Lusternik-Schnirelmann category

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2017

Dirigido por

José Manuel García Calcines

José Manuel García Calcines
Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mi tutor José Manuel García Calcines, por su ayuda incondicional y por su paciencia para poder realizar este trabajo.

Por supuesto,agradecer a mi madre por haber estado siempre a mi lado, apoyándome desde que empecé a estudiar en el Grado de Matemáticas ya que sin ella, no podría haberlo hecho.

Por último, agradecer a todos mis amigos por su apoyo incondicional.

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria presentamos un estudio de la categoría de Lusternik-Schnirelmann. Este invariante numérico fue definido por Lusternik y Schnirelmann en su estudio del cálculo de variaciones en 1934. Originalmente se concibió para una variedad diferenciable, dando una aproximación sobre el número de puntos críticos de cualquier función diferenciable real definida en la variedad. Más tarde, Fox generalizó este invariante para cualquier espacio topológico y descubrió que tiene muchas propiedades, como que es un invariante homotópico. Después de estudiar estas versiones presentamos el cálculo de la categoría de Lusternik-Schnirelmann en algunos espacios, así como también varias aplicaciones de dicho invariante.

Palabras clave: *CW-complejo – anillo de cohomología – categoría de Lusternik-Schnirelmann – sistema dinámico – punto crítico – Teorema de Lusternik-Schnirelmann.*

Abstract

In this project we study the Lusternik-Schnirelmann category. This invariant was defined by Lusternik and Shcnirelmann in their studies in 1934. It was originally conceived for a smooth manifold, giving an lower bound to the number of critical points for any smooth real function defined on the smooth manifold. Later on, Fox generalized this invariant for any topological space and discovered that it has many properties, such as being a homotopy invariant. After studying these versions, we present the computation of some examples of the Lusternik-Schnirelmann category of certain spaces as well as some applications of this invariant.

Keywords: *CW complex – cohomology ring – Lusternik-Schnirelmann category – dynamical system – critical point – Lusternik-Schnirelmann theorem.*

Contenido

Introducción

La Topología es una de las ramas más importantes de las Matemáticas que ha conseguido un gran auge en poco tiempo y que, gracias a ella, se han encontrado numerosos resultados que han ayudado en otras áreas. El progenitor fue H. Poincaré, también conocido como el último universalista. Uno de sus mayores descubrimientos fue la relación entre la existencia y la forma de Ecuaciones Diferenciales y Topología donde podemos encontrar muchos problemas que a día de hoy aun no se han resuelto. Un ejemplo de estos problemas era el de aproximar el número de puntos críticos de funciones diferenciables en *variedades diferenciables*. Muchos intentaron encontrar estas cotas pero no fue tarea fácil.

(a) Lazar Lusternik

(b) Lev Schnirelmann

Durante los años 20 y 30, dos matemáticos soviéticos, L. Lusternik y L. Schnirelmann, describieron un invariante que llamaron *categoría* tal que proporcionaba una cota inferior al problema anterior. Aunque intentaron describirlo analíticamente, se dieron cuenta que tenía gran importancia en *Geometría*. Consiguieron probar un teorema análogo al *Teorema de Borsuk-Ulam* o al *Teorema del punto fijo de Brouwer*, llamado el *Teorema de Lusternik-Schnirelmann*, mucho antes de que estos se probaran. Estos teoremas son de gran importancia ya que han ayudado a probar numerosas conjeturas como, por ejemplo, que $\mathbb{R}^n$ no es homeomorfo a S^n.

En 1939, R. Fox presenta su tesis doctoral *On the Lusternik-Schnirelmann Category.* A partir de este momento la *categoría* pasa a denominarse *categoría de Lusternik-Schnirelmann.* En esta tesis doctoral se estudia la categoría como un objeto topológico y prueba varias propiedades tales como que se trata de un *invariante homotópico* y su relación con la *homología.* Durante los años posteriores, R. Fox publica algunos artículos sobre esto pero luego niega todo conocimiento sobre la categoría de Lusternik-Schnirelmann y no vuelve a publicar nada más sobre ello.

Figura 0.1. Ralph Fox

Aunque la categoría de Lusternik-Schnirelmann no es fácil de calcular, tiene varias aplicaciones y facilita el trabajo de muchos científicos hoy en día. Como mencionamos anteriormente, tiene una gran relación con la Topología Algebraica. Comprobaremos que la categoría de Lusternik-Schnirelmann está acotado superiormente por la nilpotencia del anillo graduado de cohomología.

La presente memoria se divide en tres capítulos. En el primero haremos un recordatorio de las nociones de *Topología General* y *Teoría de Homotopía*, además de describir una clase especial de espacios topológicos denominados *CW-complejos.* En el siguiente capítulo, estudiaremos el anillo graduado de cohomología, en el cual veremos la homología de un complejo de cadenas y de cocadenas para concluir con el estudio de la cohomología y su estructura de anillo graduado. En el último capítulo, y central, estudiaremos la categoría de Lusternik-Schnirelmann. Comenzaremos viendo la motivación de este invariante con la definición original dada por L. Lusternik y L. Schnirelmann y así probar el *Teorema de Lusternik-Schnirelmann.* Luego, veremos la definición dada por R. Fox y varias propiedades importantes como que se trata de un *invariante homotópico.* Además, estudiaremos dos caracterizaciones de la categoría de Lusternik-Schnirelmann y probaremos dos aproximaciones, que nos servirán para calcular ejemplos. Finalmente, demostraremos algunas aplicaciones de la categoría de Lusternik-Schnirelmann como la relación con los dos teoremas mencionados anteriormente: el *Teorema de Borsuk-Ulam* y el *Teorema del punto fijo de Brouwer*.

1

Preliminares

Hemos incluido un capítulo preliminar para poder ver todas aquellas nociones y resultados que nos harán falta para el estudio de la categoría de Lusternik-Schnirelmann. Expondremos cuestiones básicas de *Topología General* y *Teoría de Homotopía* de manera que la mayoría de resultados no precisan de demostración por ser muy elementales. El resto de cuestiones no han sido impartidas durante el Grado de Matemáticas, por lo que hemos incluido su demostración o, al menos, un esbozo de ellas. Para poder ver aquellas nociones de Topología General, referiremos al lector a [3] o [6] y aquellas de Teoría de Homotopía, a [2], [4] o [5]. Finalmente, estudiaremos un caso especial de espacios, denominados *CW-complejos*.

1.1. Herramientas de topología general.

La noción de *espacio topológico* será la estructura matemática con la cual trabajaremos. Éste se define dando un conjunto X junto con una colección distinguida de subconjuntos, que denominaremos *topología* y cuyos elementos denominaremos *abiertos*, de manera que cumplen:

- El conjunto total X y el conjunto vacío son abiertos.
- Cualquier unión de abiertos es abierta.
- La intersección finita de abiertos es abierta.

Si no hay lugar a confusión, escribiremos simplemente X para designar el espacio topológico sin necesidad de explicitar la topología. Los espacios topológicos se relacionan mediante el uso de aplicaciones continuas. Intuitivamente, una aplicación continua es una transformación de un espacio topológico en otro verificando que puntos cercanos del codominio proceden de puntos cercanos en el espacio dominio. Formalmente, una aplicación entre espacios topológicos es continua cuando la antimagen por f de cualquier abierto es abierto. Un resultado muy útil y que utilizaremos con cierta frecuencia será el siguiente lema:

Lema 1.1 (Lema de continuidad). *Sean A y B subconjuntos cerrados en un espacio topológico X tales que $X = A \cup B$ y sean $f : A \to Y$ y $g : B \to Y$ aplicaciones continuas tales que $f_{|A\cap B} = g_{|A\cap B}$. Entonces la aplicación $h : X \to Y$, definida como:*

$$h(x) := \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

es continua.

Un *homeomorfismo* es una aplicación continua, biyectiva y con inversa continua. Diremos que X e Y son *homeomorfos* cuando exista un homeomorfismo entre ellos. Usaremos la notación $X \cong Y$ para expresar que X e Y son homeomorfos. Esta noción es una correspondencia biyectiva entre los espacios X e Y tal que conserva la estructura topológica implicada. Además, algunas propiedades de X se dan, mediante el correspondiente homeomorfismo, en el espacio Y. Tales propiedades, es decir, las que se conservan por homeomorfismos, se denominan *propiedades topológicas*.

Figura 1.1. Ejemplo de espacios homeomorfos.

Entre las nuevas propiedades topológicas no vistas en el grado y que son necesarias para desarrollar este trabajo se encuentra la de *normalidad*. Recordemos que un subconjunto de un espacio topológico es *cerrado* si su complementario es abierto.

Definición 1.2. *Se dice que un espacio topológico X es* normal *si para todo par de cerrados disjuntos F_1, F_2, existen abiertos disjuntos A_1, A_2 tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$.*

No es difícil comprobar que la normalidad es una propiedad topológica ya que los homeomorfismos conservan abiertos, cerrados y conjuntos disjuntos; pero no es hereditaria. A pesar de no ser hereditaria, existe un resultado parcial en este sentido.

Proposición 1.3. *Sea X un espacio topológico normal y $F \subseteq X$ un cerrado. Entonces F es normal.*

Demostración. Sean $F_1, F_2 \subseteq F$ cerrados disjuntos. Entonces F_1 y F_2 también son cerrados en X. Además por ser X normal, existen A_1, A_2 abiertos disjuntos en X tales que $F_1 \subseteq A_1$ y $F_2 \subseteq A_2$. Tomando $B_1 = A_1 \cap F$ y $B_2 = A_2 \cap F$ se tiene que B_1 y B_2 son abiertos disjuntos en F tales que $F_1 \subseteq B_1$ y $F_2 \subseteq B_2$.

□

La siguiente proposición nos muestra diferentes caracterizaciones útiles de normalidad. La notación que usaremos para la clausura de un subconjunto A de un espacio topológico X será $\overline{A}$.

Proposición 1.4. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *X es normal.*
2. *Para todo cerrado F y para todo abierto A tales que $F \subseteq A$, existe V abierto tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A$.*
3. *Para todo par de cerrados F_1, F_2 tal que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, existe un abierto A tal que $F_1 \subset A$, $\overline{A} \cap F_2 = \emptyset$.*
4. *Para todo par de cerrados disjuntos F_1, F_2, existen abiertos A_1, A_2 tales que $F_1 \subset A_1, F_2 \subset A_2$ y $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que X es normal y sean F un cerrado y A un abierto de X tales que $F \subseteq A$. Tomando $F' = X \setminus A$ cerrado, tenemos que $F \cap F' = \emptyset$. Entonces, por ser X normal, existen abiertos disjuntos V y V' tales que $F \subseteq V$ y $F' \subseteq V'$. Además, como V y V' son disjuntos, V está contenida en el complementario de V' y que éste está contenido en el complementario de F' o, lo que es lo mismo, contenido en A. Por tanto, obtenemos que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A$. Por otro lado, supongamos que para todo cerrado F y todo abierto A, existe un abierto V tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq A$ y sean F_1 y F_2 cerrados disjuntos. Entonces definimos $B = X \setminus F_2$ abierto y observamos que F_1 está contenido en B. Por hipótesis, existe un abierto U tal que $F_1 \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq B$. Por tanto, como $\overline{A}$ está contenido en B, vemos que $\overline{A} \cap F_2 = \emptyset$. Supongamos nuevamente que F_1 y F_2 son cerrados disjuntos. Por hipótesis, existe un abierto A_1 tal que $F_1 \subset A_1$ y $\overline{A_1} \cap F_2 = \emptyset$. Entonces como $\overline{A_1}$ y $F_2 = \emptyset$ son cerrados disjuntos, por hipótesis existe un abierto A_2 tal que $F_2 \subset A_2$ y $\overline{A_1} \cap \overline{A_1} = \emptyset$. Finalmente, si para todo par de cerrados disjuntos F_1, F_2, existen abiertos A_1, A_2 tales que $F_1 \subset A_1, F_2 \subset A_2$ y $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \emptyset$; entonces, de forma trivial, X es normal.

□

Otra caracterización importante de normalidad viene dado por el *lema de Urysohn.* Lo enunciaremos sin demostración ya que nos extenderíamos demasiado y no entra dentro de los objetivos de la memoria. Para ver una demostración detallada, recomendamos [3, pág. 237]. Como es habitual, $[0,1]$ denota al intervalo unidad cerrado con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5 (Lema de Urysohn). *Sea X un espacio topológico. Entonces son equivalentes:*

1. *X es normal*
2. *Para todo par de cerrados A, B disjuntos, existe una aplicación continua $h : X \to [0,1]$ tal que $h(A) = \{0\}$ y $h(B) = \{1\}$*

Observación 1.6. Se comprueba que todo espacio compacto y de Hausdorff es normal (ver [3, Teorema 41.1]). Además todo espacio metrizable también es normal (ver [3, Teorema 32.2]).

Un tipo especial de espacios que surge de forma natural en topología son los *espacios cocientes*. Si tenemos R una relación de equivalencia en un conjunto X y $x \in X$, entonces el subconjunto:

$$[x] = \{y \in X \mid xRy\} \subset X$$

se denomina *clase de equivalencia de x*. El conjunto formado por todas las clases de equivalencia de los puntos de X se denomina *conjunto cociente* de X por R y suele denotar como X/R. Asimismo, si X es un espacio topológico la topología asociada al conjunto cociente es la topología final asociada a la proyección $\pi : X \to X/R$ (se define para todo $x \in X$ como $\pi(x) = [x]$), es decir, si T es una topología de X, entonces la topología en X/R viene dado como:

$$T_\pi = \{A \subseteq X/R \mid \pi^{-1}(A) \in T\}$$

El espacio topológico resultante se denomina *espacio cociente de X por la relación de equivalencia R*.

Un caso especial de espacio cociente que usaremos es el que resulta al colapsar un subconjunto dado en un punto. Esto es, dado $A \subseteq X$ se define la relación de equivalencia por xRy si y solo si $x = y$ ó $x, y \in A$. Usaremos la notación X/A para denotar dicho espacio cociente.

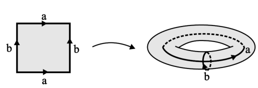

Figura 1.2. El toro T.

Un ejemplo clásico de espacio cociente es el *toro* T. Este espacio se puede describir, salvo homeomorfismos, como el cociente de identificar en $[0,1] \times [0,1]$ los lados opuestos dos a dos según la figura anterior.

Otro ejemplo es el *cilindro circular* $S^1 \times [0,1]$. Se puede definir, salvo homeomorfismo, como la relación de equivalencia R en $[0,1] \times [0,1]$ que identifica cada punto $(0,t)$ del lado izquierdo con el correspondiente a la misma altura $(1,t)$ del lado derecho. Para ver más ejemplos e información detallada, recomendamos al lector [6, Capítulo 4].

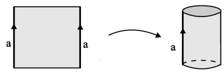

Figura 1.3. El cilindro circular.

1.2. Teoría de homotopía básica.

En esta sección expondremos brevemente algunos de los conceptos básicos de *Teoría de Homotopía*, que utilizaremos a lo largo de la memoria. Como mencionamos anteriormente, los resultados se expondrán sin demostración ya que la mayoría se han visto en el Grado de Matemáticas.

Denotaremos por I al intervalo unidad cerrado $[0,1]$ con la topología inducida por la usual de la recta real. Dadas dos aplicaciones continuas $f, g : X \to Y$ y $A \subseteq X$, diremos que f es *homótopa* a g *relativamente a* A si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x)$, $H(x,1) = g(x)$ y $H(a,t) = a$ para todo $x \in X$, $a \in A$ y $t \in I$. Usaremos la notación $f \simeq g$ rel. A para expresar que f es homótopa a g relativamente a A. Si queremos explicitar la homotopía, escribiremos $H : f \simeq g$ rel. A. Más generalmente, si consideramos $A = \emptyset$ el conjunto vacío entonces diremos que f es *homótopa* a g y lo denotaremos por $f \simeq g$. Observamos que la homotopía $H : f \simeq g$ se puede interpretar como una colección uniparamétrica de aplicaciones continuas

$$\{H_t : X \to Y\}_{t \in I}$$

que varía con continuidad en I tal que $H_0 = f$, $H_1 = g$ y donde $H_t(x) := H(x,t)$. Además, es fácil comprobar que la homotopía relativa es una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X a Y (véase [3, Lema 51.1.]). Por tanto, abusando del lenguaje y en virtud de la simetría, podemos decir que "f y g son homótopos relativamente a A"en vez de "f es homótopa a g relativamente a A".

Un caso particular que utilizaremos con cierta frecuencia, lo constituyen las aplicaciones homótopas a una constante.

Definición 1.7. *Diremos que* $f : X \to Y$ *es* nulhomótopa *si es homótopa a una aplicación constante, es decir, existe* $y_0 \in Y$ *tal que* $f \simeq C_{y_0}$*. La homotopía entre* f *y* C_{y_0} *se denominará* nulhomotopía*.*

Gracias a las homotopías, podemos clasificar los espacios topológicos de una forma menos restrictiva que usando homeomorfismos. Diremos que una aplicación continua $f : X \to Y$ es una *equivalencia de homotopía* si existe una aplicación continua $g : Y \to X$ tal que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $g \circ f \simeq 1_X$. Se deduce que g también es una equivalencia de homotopía, el cual lo denominaremos *inverso homotópico* de f. Obviamente todo homeomorfismo es equivalencia de homotopía. No obstante, el recíproco no siempre es cierto. Por ejemplo, sea $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ el disco unidad cerrado. Entonces la aplicación constante $f : D^2 \to \{*\}$ es una equivalencia de homotopía y claramente no es un homeomorfismo. Un inverso homotópico de f viene dado por $g : \{*\} \to D^2$ como $g(*) = x_0$, siendo x_0 un punto cualquiera del disco D^2. Trivialmente se tiene que $f \circ g = 1_{\{*\}}$; además por convexidad se tiene una homotopía $H : g \circ f \simeq 1_{D^2}$, definida como $H(x, t) = (1 - t)x_0 + tx$.

Definición 1.8. *Diremos que dos espacios topológicos* X *e* Y *son* homotópicamente equivalentes*, o bien del* mismo tipo de homotopía*, si existe una equivalencia de homotopía entre ellos. Usaremos la notación* $X \simeq Y$ *para denotar que* X *e* Y *son homotópicamente equivalentes.*

Algunas propiedades topológicas se conservan por equivalencias de homotopía como, por ejemplo la conexidad y la conexidad por caminos. Veremos a continuación un caso especial de espacios topológicos.

Definición 1.9. *Un espacio topológico* X *es* contráctil *si es homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual.*

Una caracterización de gran utilidad de contractibilidad viene dada en la siguiente proposición.

Proposición 1.10. *Un espacio topológico* X *es* contráctil *si y solo si la aplicación identidad* $1_X : X \to X$ *es nulhomótopa.*

Hemos visto anteriormente que la aplicación $f : D^2 \to \{*\}$ es una equivalencia de homotopía, por lo que deducimos que D^2 es contráctil. Estamos interesados en un ejemplo genérico de espacios contráctiles pero para ello definiremos un nuevo espacio topológico. Si X es un espacio topológico cualquiera, entonces el *cono* de X es el espacio cociente $CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$. Por definición, para $t = 0$, los puntos de CX se contraen a un punto que denotaremos por $*$, es decir, para todo $x \in X$, $* = [x, 0]$.

Proposición 1.11. *Para cualquier espacio topológico* X*,* CX *es contráctil.*

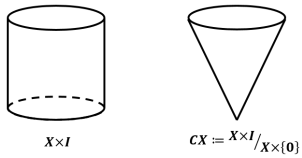

Figura 1.4. Cono de X.

Demostración. Definimos la aplicación $H : CX \times I \to CX$ como $H([x,t],s) := [x,(1-s)t]$ para todo $([x,t],s) \in X \times I$. Es fácil comprobar que H está bien definida y que es continua. Además, se observa que $H([x,t],0) = 1_{CX}([x,t])$ y $H([x,t],1) = [x,0] = *$, es decir, que H es una homotopía entre $1_{CX} \simeq C_*$. Entonces, por la proposición 1.10, CX es contráctil.

$\square$

Podemos definir la aplicación continua $k : X \to CX$ como $k(x) = [x,1]$. Obsérvese que en CX podemos encontrar una "copia"de X. En efecto, $k : X \to k(X)$ es claramente un homeomorfismo. Por lo que podemos considerar a X como un subespacio de CX con k como inclusión

Finalmente veremos un caso interesante que tiene lugar cuando un subespacio es del mismo tipo de homotopía que el espacio que lo contiene. Podremos encontrar condiciones más débiles o fuertes pero nos centraremos solamente en una de ellas, la de *retracto por deformación*. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Diremos que A es un *retracto* de X si existe una aplicación continua $r : X \to A$ tal que $r_{|A} = 1_A$. A la aplicación r se le denomina *retracción* de X en A. Normalmente la expresión $r_{|A} = 1_A$ se escribe equivalentemente como $r \circ i = 1_A$ siendo $i : A \hookrightarrow X$ la inclusión canónica. Una noción más fuerte es la que definimos a continuación:

Definición 1.12. *Sea $A \subseteq X$. Diremos que un subespacio A es un* retracto por deformación *de X si existe una retracción $r : X \to A$ tal que $i \circ r \simeq 1_X$.*

Nótese que todo retracto por deformación es retracto y que es sencillo de probar que si A es un retracto por deformación de X, entonces A es homotópicamente equivalente a X.

Observación 1.13. En Teoría de Homotopía podemos considerar, más generalmente, *parejas de espacios* en vez de espacios topológicos. Una pareja de espacios (X,A) está formada por un espacio topológico X junto con un subespacio $A \subseteq X$. Por otro lado, una aplicación continua entre parejas de espacios $f : (X,A) \to (Y,B)$ no es más que una aplicación continua $f : X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. Surge de forma natural, la noción de homotopía de parejas. En efecto, sean $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ aplicaciones continuas, se dice que f es

homótopa a g, denotado por $f \simeq g$, si existe una aplicación continua de parejas $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. De forma análoga al caso clásico, se puede definir las nociones de equivalencias de homotopía de parejas de espacios y contractibilidad. Observamos que todo espacio topológico X se puede considerar una pareja de espacios tomando la identificación de X con $(X, \emptyset)$.
En esta memoria, trabajaremos con un caso especial de parejas de espacios que se denominan *espacios punteados* donde A es el subespacio formado por un punto de nuestro espacio topológico X y tal punto lo denominaremos *punto base*. Para evitar notación engorrosa y tomando $A = \{x_0\}$, escribiremos (X, x_0) en vez de $(X, \{x_0\})$. Diremos que la aplicación $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es *continua punteada* si $f : X \to Y$ es continua y $f(x_0) = y_0$. Sean $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ aplicaciones continuas punteadas, se dice que f es *homótopa punteada* a g, denotado por $f \simeq g$, si existe una aplicación punteada $H : (X \times I, \{x_0\} \times I) \to (Y, y_0)$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$ y $t \in I$.

1.3. CW-complejos.

En está última sección presentaremos un tipo especial de espacio topológico, denominado *complejo celular* o *CW-complejo*. Este tipo de espacio facilita el estudio de la Topología Algebraica ya que podemos construirlos de forma inductiva y para probar muchas de las propiedades se hace normalmente por un sencillo proceso de inducción. Además, tiene propiedades homotópicas y topológicas interesantes (véase [2]). Para poder describir la construcción de estos espacios, necesitaremos recordar varias nociones como la de la *unión disjunta*.
Definimos la *unión disjunta* de dos espacios topológicos X e Y, que denotaremos por $X \sqcup Y$, como $X \sqcup Y = (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$. Es sencillo comprobar que podemos definir dos inclusiones (más exactamente, homeomorfismos sobre sus imágenes) $j_1 : X \hookrightarrow X \sqcup Y$ y $j_2 : Y \hookrightarrow X \sqcup Y$ dadas por $j_1(x) = (x, 0)$ y $j_2(y) = (y, 1)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$.

Dada una aplicación $f : X \to Y$, definimos la *cofibra homotópica* de f como el espacio cociente $C_f := Y \sqcup CX/\sim$ siendo $\sim$ la relación de equivalencia generada por las relaciones elementales $f(x) \sim [x, 1]$, para $x \in X$; aquí CX representa el cono de X.

Tomando $p : Y \to C_f$ como $p = \pi \circ j$ con $\pi : Y \sqcup CX \to C_f$ la proyección del espacio cociente y $j : Y \hookrightarrow Y \sqcup CX$ la inclusión, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "k"] & Y \arrow[d, hook, "p"] \\ CX \arrow[r] & C_f \end{tikzcd}$$

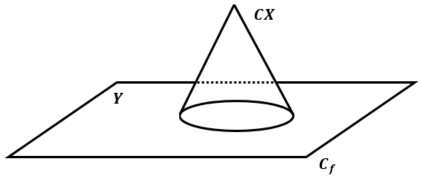

Figura 1.5. Cofibra homotópica.

Hacemos notar que p define un homeomorfismo de Y sobre su imagen, por lo que podemos considerar que $p : Y \to C_f$ es una inclusión. La *sucesión cofibrada* asociada a $f : X \to Y$ es la siguiente sucesión de aplicaciones continuas:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{p} C_f$$

Denotaremos por $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ al n-disco y $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ a la $(n-1)$-esfera, para $n \geq 0$ y tomando por convenio $S^{-1} = \emptyset$. Por definición, una n-celda es un espacio homeomorfo al disco abierto $D^n \setminus S^{n-1}$, para $n \geq 1$. Si $n = 0$, una 0-celda es homeomorfo a un punto. Diremos que un espacio topológico X es un *CW-complejo* si existe una colección de subespacios cerrados:

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset ... \subset X^n \subset ... \subset X$$

tal que $X = \cup_{n=0}^{\infty} X^n$ y se verifican las siguientes propiedades:

1. X^0 es un espacio discreto. Sus puntos se denominan 0-celdas.
2. X^n se obtiene de X^{n-1} adjuntándole una colección de n-celdas, es decir, X^n es una cofibra homotópica de la forma:

$$\begin{tikzcd} \sqcup_\alpha S_\alpha^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & X^{n-1} \arrow[d, hook] \\ \sqcup_\alpha D_\alpha^n \arrow[r] & X^n \end{tikzcd}$$

   Obsérvese que existe un homeomorfismo $C(\sqcup_\alpha S_\alpha^{n-1}) \cong \sqcup_\alpha D_\alpha^n$. Esto se obtiene del hecho de que $CS^{n-1} \cong D^n$ y de las definiciones de cono y de unión disjunta.
3. X tiene la topología débil respecto de $\{X^n\}_{n=0}^{\infty}$, es decir, $A \subseteq X$ es abierto (respectivamente cerrado) si y solo si $A \cap X^n$ es abierto en X^n (respectivamente cerrado), para todo $n \geq 0$.

Para cada $n \geq 0$, X^n se denomina el n-esqueleto de X. Diremos que X tiene *dimensión finita* si existe un n tal que $X = X^n$. El menor n tal que $X = X^n$ se denominará *dimensión de* X. A la dimensión la denotaremos por $dim(X)$.

Una clase de CW-complejos que manejaremos en la memoria viene dada por los *espacios proyectivos*. En el caso del espacio proyectivo real $\mathbb{R}P^n$, comenzamos tomando $\mathbb{R}P^0 = \{*\}$ y para n, obtenemos $\mathbb{R}P^n$ a partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ adjuntándole una única n-celda mediante la siguiente cofibra homotópica:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[d, hook] \\ D^n \arrow[r] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

siendo $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}P^{n-1}$ la aplicación cociente que define al espacio proyectivo cuando identificamos cada punto con su antipodal (ver nota 1.14). Evidentemente $dim(\mathbb{R}P^n) = n$. Para el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}P^n$ y cuaterniónico $\mathbb{H}P^n$ la construcción es similar pero en vez de utilizar $(n-1)$-esferas, utilizaremos la $(2n-1)$-esfera para el complejo y la $(4n-1)$-esfera para el cuaterniónico. Además, en estos casos se tiene que $dim(\mathbb{C}P^n) = 2n$ y $dim(\mathbb{H}P^n) = 4n$ Para poder ver una construcción más detallada de los espacios proyectivos, véase [2, págs. 6-7].

Observación 1.14. Obsérvese que los espacios proyectivos se pueden construir de varias maneras distintas equivalentes. Por un lado, si $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, entonces se puede considerar $KP^n := (K^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida como $x \sim y$ si y solo si existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tal que $y = \lambda x$. Otra forma de ver los espacios proyectivos reales es como un espacio cociente $\mathbb{R}P^n = D^n/\sim$ siendo $\sim$ la relación de equivalencia que identifica los puntos de la frontera S^n con sus antipodales. Equivalentemente, también tenemos el espacio cociente $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim$ con la relación de equivalencia $\sim$ que identifica los puntos de S^n con sus antipodales. Por tanto, podemos definir la aplicación cociente $f : S^n \to \mathbb{R}P^n$ como $f(s) := [s]$.

2

El anillo graduado de cohomología

En general, la categoría de Lusternik-Schnirelmann no es fácil de calcular y, por tanto, es necesario encontrar aproximaciones. Dentro de la teoría de la categoría de Lusternik-Schnirelmann existe un invariante algebraico que lo aproxima y que viene determinado por el anillo de cohomología del espacio. Gracias a esta aproximación, seremos capaces de calcular muchos ejemplos. Es por ello que hemos decidido incluir un capítulo sobre la *cohomología singular*, puesto que además es un tema que no se ha visto en el Grado de Matemáticas. Expondremos la noción de cohomología singular junto a sus propiedades más importantes como, por ejemplo, su estructura de anillo graduado mediante el *producto cup*.

2.1. Complejo de cadenas y de cocadenas.

Antes de comenzar, recordaremos la noción de homología en un complejo de cadenas. Un *complejo de cadenas* (de grupos abelianos) es una colección $C = \{C_q, \delta_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ tal que para cada $q \in \mathbb{Z}$, C_q es un grupo abeliano, denominado *grupo de las q-cadenas*, y $\delta_q : C_q \to C_{q-1}$ un homomorfismo de grupos, llamado *operador borde*, tales que para todo q la composición:

$$C_{q+1} \xrightarrow{\delta_{q+1}} C_q \xrightarrow{\delta_q} C_{q-1}$$

es el homomorfismo trivial. Además, si para $q < 0$ se cumple que $C_q = 0$ entonces diremos que C es *no negativo* y usaremos la notación $C = \{C_q, \delta_q\}_{q\geq 0}$. Definimos el grupo de los *q-ciclos* como $Z_q(C) := ker(\delta_q)$ y el grupo de los *q-bordes* como $B_q(C) := Im(\delta_{q+1})$ y observamos que $B_q(C) \subseteq Z_q(C)$ ya que $\delta_q \circ \delta_{q+1} = 0$. Podemos definir el *q-grupo de homología* de C como el grupo cociente $H_q(C) := Z_q(C)/B_q(C)$ y denotaremos $H_*(C) = \{H_q(C)\}_{q\in\mathbb{Z}}$. Cada elemento de $H_*(C)$ se denomina *clase de homología* y diremos que los elementos de $H_q(C)$ tienen *grado q*. Si z es un q-ciclo, denotaremos por $[z]$ a su clase de homología y cuando z_1 y z_2 q-ciclos están relacionados (es decir, $z_1 - z_2 \in B_q(C)$) se dice que son *homólogos*.

Dados C y C' dos complejos de cadenas, un homomorfismo de complejos de cadenas $f : C \to C'$ consiste en una colección de homomorfismos de grupos $f = \{f_q : C_q \to C'_q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ que hace el siguiente diagrama conmutativo para todo $q \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{tikzcd} C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\delta_q"'] & C'_q \arrow[d, "\delta'_q"] \\ C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"'] & C'_{q-1} \end{tikzcd}$$

Esto permite que f lleve ciclos en ciclos y bordes en bordes. Por consiguiente, para $q \in \mathbb{Z}$ se induce $H_q(f) : H_q(C) \to H_q(C')$ un homomorfismo de grupos definido por $H_q(f)([z]) = [f_q(z)]$.

Diremos que un complejo de cadenas C' es un subcomplejo de C si para todo $q \in \mathbb{Z}$, tenemos que $C'_q \subseteq C_q$ y la inclusión $i : C' \to C$ es un homomorfismo de complejos de cadenas. Se induce de forma natural un *complejo de cadenas cociente* C/C' definido como $(C/C')_q := C_q/C'_q$ para todo $q \in \mathbb{Z}$.

La noción dual de complejo de cadenas es la de *complejo de cocadenas*. Un complejo de cocadenas es una colección $C = \{C^q, \delta^q\}_{q\in\mathbb{Z}}$ con C^q un grupo abeliano, denominado *grupo de cocadenas*, y $\delta^q : C^q \to C^{q+1}$ operador coborde es un homomorfismo de grupos tal que para todo $q \in \mathbb{Z}$, la composición

$$C^{q-1} \xrightarrow{\delta^{q-1}} C^q \xrightarrow{\delta^q} C^{q+1}$$

es el homomorfismo trivial. Como en el caso de complejos de cadenas, diremos que un complejos de cocadenas es *no negativo* si para todo $q < 0$, $C^q = 0$ y lo denotaremos por $C = \{C^q, \delta^q\}_{q\geq 0}$. También definimos el grupo de los *q-cociclos* como $Z^q(C) := ker(\delta^q)$ y el grupo de los *q-cobordes* como $B^q(C) := Im(\delta^{q+1})$. Denominamos al *q-grupo de cohomología* de C como el grupo cociente $H^q(C) := Z^q(C)/B^q(C)$ y denotaremos por $H^*(C)$ a la familia de grupos abelianos $\{H^q(C)\}_{q\in\mathbb{Z}}$ y diremos que cada elemento de $H^q(C)$ tiene *grado q*. Si z es un q-cociclo, denotaremos por $[z]$ a su clase de cohomología. Finalmente, de forma análoga, podemos definir homomorfismo de complejos de cocadenas y su cohomología, subcomplejos de cocadenas y complejos de cocadenas cocientes. A continuación, pasaremos a ver la homología y cohomología singular de un espacio topológico.

Definición 2.1. *Sea X un espacio topológico y $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. El n-símplice estándar se define como:*

$$\Delta_n := \{(t_0, t_1, ..., t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=0}^{n} t_i = 1, t_i \geq 0, \forall i = 0, 1, ..., n\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^{n+1}$. Un n-símplice singular de X es una aplicacion continua $f : \Delta_n \to X$. Denotaremos al conjunto de todos los n-símplices singulares de X por $Top(\Delta_n, X)$.

Además debemos recordar que un *grupo libre* generado por un conjunto arbitrario S, que denotaremos por $F(S)$, viene dado por los elementos σ que son sumas formales finitas $\sigma = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r$ donde $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ y $x_i \in S$. Observamos que existe una inclusión canónica $i : S \to F(S)$. Por otro lado, dada una aplicación $\phi : S \to A$ con A un grupo abeliano, existe un único homomorfismo de grupos $\phi' : F(S) \to A$ que extiende de forma natural a ϕ y viene dado por $\phi'(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_r x_r) := \lambda_1 \phi(x_1) + \lambda_2 \phi(x_2) + ... + \lambda_r \phi(x_r)$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & A \\
F(S) \arrow[ur, dotted, "\phi'"'] &
\end{tikzcd}$$

Obsérvese que para poder definir un homomorfismo de grupos de $F(S)$ en A, solo nos hace falta tener una aplicación de S en A. Esto será de gran utilidad para la siguiente definición:

Definición 2.2. *Definimos el complejo de cadenas singular de X como el complejo de cadenas no negativo $S_* := \{S_q(X), \delta_q\}_{q \geq 0}$ donde*

$$S_q(X) := F(Top(\Delta_q, X))$$

es el grupo abeliano libre generado por el conjunto de los q-símplices singulares de X y el operador borde $\delta_q : \Delta_q(X) \to \Delta_{q-1}(X)$ viene dado por:

$$\delta_q(\sigma) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma \circ d_i)$$

con $\sigma \in Top(\Delta_q, X)$ y siendo $d_i : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, llamado el operador i-cara, donde $d_i(t_0, t_1, ..., t_{q-1}) = (t_0, t_1, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{q-1})$, $i = 0, 1, ..., q-1$. El q-grupo de homología singular de X es el q-grupo de homología del complejo de cadenas singular de X y lo denotaremos por $H_q(X) := H_q(S_*(X))$.

Asimismo, dada una aplicación continua $f : X \to Y$, se define el homomorfismo de complejos de cadenas singular de X, $S_*(f) : S_*(X) \to S_*(Y)$, como $S_q(f)(\sigma) = f \circ \sigma$ para cada q-símplice singular $\sigma : \Delta_q \to X$. Por tanto, definimos la homología $H_q(f) : H_q(X) \to H_q(Y)$ como la homología de $S_*(f)$.

Más generalmente, si (X, A) es una pareja de espacios entonces $S_*(A) \subseteq S_*(X)$ es un subcomplejo de cadenas. Por consiguiente, definiremos el complejo de cadenas de (X, A) como:

$$S_*(X, A) := S_*(X)/S_*(A)$$

Por tanto, el q-grupo de homología singular de (X, A) es el q-grupo de homología del complejo de cadenas singular de (X, A) y lo denotaremos por $H_q(X, A) := H_q(S_*(X, A))$. Dada una aplicación continua $f : (X, A) \to (Y, B)$, definimos el homomorfismo de complejos de cadenas singular de (X, A) como la aplicación inducida en los cocientes $S_*(f) : S_*(X, A) \to S_*(Y, B)$ y la homología $H_q(f) : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ como la homología de $S_*(f)$.

2.2. Cohomología singular.

Para los cálculos de la categoría, nos interesará más la cohomología de un espacio topológico ya que nos proporcionará un cota superior de ésta. Dado un espacio topológico X y un grupo abeliano G, se define el *complejo de cocadenas singular de X con coeficientes en G*, y lo denotaremos por $S^*(X; G)$, como el grupo abeliano formado por todos los homomorfismos de grupos $S_q(X) \to G$, siendo $S_q(X)$ el *grupo de las q-cadenas singulares* de X. Así, para q tenemos:

$$S^q(X; G) := Hom(S_q(X), G)$$

La operación de grupo viene dada por $(\varphi + \psi)(\sigma) := \varphi(\sigma) + \psi(\sigma)$ y el operador coborde $\delta^q : S^q(X; G) \to S^{q+1}(X; G)$ se define como $\delta^q(\varphi) := \varphi \circ \delta_{q+1}$. Así podemos definir el *q-grupo de cohomología de X con coeficientes en G* como

$$H^q(X; G) := H^q(S^*(X; G))$$

Como ocurría anteriormente, dada una aplicación $f : X \to Y$, se define el homomorfismo de complejo de cocadenas $S^*(f) : S^*(Y; G) \to S^*(X; G)$ como $S^q(f)(\varphi) := \varphi \circ S_q(f)$ para cada $\varphi : S_q(Y) \to G$ q-cadena singular en Y. Entonces, de forma natural se obtiene la q-cohomología de f con coeficientes en G como $H^q(f) : H^q(Y; G) \to H^q(X; G)$. Si no hay lugar a confusión y para simplificar la notación, utilizaremos f^* para referirnos a $H^q(f)$.

Observación 2.3. Más generalmente, podemos definir el *complejo de cocadenas singular de (X, A) con coeficientes en G* como $S^q(X, A; G) := Hom(S_q(X, A; G))$. De la misma forma, definimos el *q-grupo de cohomología de (X, A) con coeficientes en G* como $H^q(X, A; G) := H^q(S^*(X, A; G))$. Análogamente, para aplicaciones continuas $f : (X, A) \to (Y, B)$ obtenemos la q-cohomología de f con coeficientes en G como $H^q(f) : H^q(Y, B; G) \to H^q(X, A; G)$.

La cohomología cumple una serie de propiedades muy importantes que vienen dadas por los denominados *Axiomas de Eilenberg-Steenrod*. Expondremos cada una de las propiedades sin demostración. Para ver una demostración, referimos al lector a [4]. Enumeramos a continuación dichas propiedades:

1. Funtorialidad. Sean $f : (X,A) \to (Y,B)$ y $g : (Y,B) \to (Z,C)$ aplicaciones continuas de parejas. Entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

$$\begin{tikzcd}
H^q(Z,C;G) \arrow[rr, "(g\circ f)^*"] \arrow[dr, "g^*"'] & & H^q(X,A;G) \\
& H^q(Y,B;G) \arrow[ur, "f^*"'] &
\end{tikzcd}$$

   Si $1_{(X,A)} : (X,A) \to (X,A)$ es la identidad en (X,A), entonces $1^*_{(X,A)} = 1_{H^q(X,A;G)}$ es el homomorfismo identidad en $H^q(X,A;G)$.
2. Homotopía. Sean $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ aplicaciones continuas de parejas. Si $f \simeq g$, entonces $f^* = g^* : H^q(Y,B;G) \to H^q(X,A;G)$.
3. Exactitud. Sea (X,A) una pareja de espacios y sean $i : A \to X$, $j : (X,\emptyset) \to (X,A)$ las correspondientes inclusiones. Entonces existe una sucesión exacta de grupos abelianos y homomorfismos:

$$\ldots \longrightarrow H^q(A;G) \xrightarrow{\Delta} H^{q+1}(X,A;G) \xrightarrow{j^*} H^{q+1}(X;G) \xrightarrow{i^*} H^{q+1}(A;G) \xrightarrow{\Delta} \ldots$$

   El homomorfismo Δ se denomina homomorfismo de conexión. Se trata de una transformación natural. Esto es, dada $f : (X,A) \to (Y,B)$ una aplicación continua de parejas arbitraria, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^q(B;G) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "(f_{|A})^*"'] & H^{q+1}(Y,B;G) \arrow[d, "f^*"] \\
H^q(A;G) \arrow[r, "\Delta"'] & H^{q+1}(X,A;G)
\end{tikzcd}$$

4. Dimensión. Si P denota el espacio unipuntual, entonces:

$$H^q(P) = \begin{cases} G, & q = 0 \\ 0, & q \neq 0 \end{cases}$$

5. Escisión. Sean (X,A) una pareja de espacios y U un abierto de X tal que $\overline{U} \subseteq Int(A)$. Entonces la inclusión $i : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ induce isomorfismos en cohomología

$$i^* : H^q(X,A;G) \xrightarrow{\cong} H^q(X \setminus U, A \setminus U;G)\ .$$

La cohomología de un espacio tiene estructura de anillo graduado, una estructura algebraica más rica que la de grupo abeliano, y la cual viene determinada por un producto denominado *producto cup*. A partir de ahora consideraremos la cohomología con coeficientes en un anillo R (los más comunes suelen ser $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ y $\mathbb{Q}$).

Antes de seguir, precisaremos la notación que utilizaremos más adelante. El n-símplice estandar Δ_n también se puede describir como el conjunto de todos los elementos en $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forma:

$$x = t_0 e_0 + t_1 e_1 + ... + t_n e_n$$

donde $\sum_{i=0}^{n} t_i = 1$ y $t_i \geq 0$ y $e_i = (0, 0, ..., 1^{(i}, ..., 0, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ para $i = 0, 1, ..., n$. Realmente, Δ_n es la *envolvente convexa* de los puntos $e_0, e_1, ..., e_n$, que son los vértices de Δ_n y podemos representarlo como $\Delta_n := [e_0, e_1, ..., e_n]$. Asimismo, con esta notación, el operador borde en el complejo de cadenas singular de X, $\delta_q : S_q(X; R) \to S_{q-1}(X; R)$, viene dado por la siguiente expresión (comparar con la definición 2.2):

$$\delta_q(\sigma) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \sigma_{|[e_0, ..., \widehat{e_i}, ..., e_q]}$$

donde $\widehat{e_i}$ denota que se retira el elemento e_i. Definiremos, en primer lugar, el producto cup a nivel de cocadenas.

Definición 2.4. *Sean X un espacio topológico y $\varphi \in C^p(X; R)$, $\psi \in C^q(X; R)$ cocadenas singulares de X de grados p y q respectivamente. El* producto cup *$\varphi \smile \psi \in C^{p+q}(X; R)$ es la cocadena cuyo valor en un símplice singular $\sigma : \Delta_{p+q} \to X$ viene dado por:*

$$(\varphi \smile \psi)(\sigma) = \varphi(\sigma_{|[e_0, e_1, ..., e_p]}) \cdot \psi(\sigma_{|[e_p, e_{p+1}, ..., e_{p+q}]})$$

donde en el miembro de la igualdad de la derecha se ha usado el producto del anillo R.

Ahora para ver que este producto en cocadenas induce un producto cup en clases de cohomología, debemos probar el siguiente lema. Para simplificar la notación, no haremos uso de los índices de los operadores borde y coborde correspondientes.

Lema 2.5. *Si $\varphi \in C^p(X; R)$ y $\psi \in C^q(X; R)$, entonces*

$$\delta(\varphi \smile \psi) = \delta(\varphi) \smile \psi + (-1)^p \varphi \smile \delta(\psi)$$

Demostración. Sea $\sigma : \Delta p + q + 1 \to X$ un $(p + q + 1)$-símplice singular de X. Entonces tenemos:

$$\delta(\varphi) \smile \psi = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \varphi(\sigma_{|[e_0,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{p+1}]}) \cdot \psi(\sigma_{|[e_{p+1},\ldots,e_{p+q+1}]})$$

$$(-1)^p(\varphi \smile \delta(\psi))(\sigma) = \sum_{i=p}^{p+q+1} (-1)^i \varphi(\sigma_{|[e_0,\ldots,e_p]}) \cdot \psi(\sigma_{|[e_p,\ldots,\widehat{e_i},\ldots,e_{p+q+1}]})$$

Sumando ambas expresiones obtenemos que el último término de la primera expresión se cancela con el primer término de la segunda expresión Además, como sabemos que:

$$\delta(\sigma) = \sum_{i=0}^{p+q+1} (-1)^i \sigma_{|[e_0,\ldots,e_i,\ldots,e_{p+q+1}]}$$

entonces los términos que quedan son $\delta(\varphi \smile \psi)(\sigma) = (\varphi \smile \psi)(\delta(\sigma))$. Luego el lema queda probado.

□

Dos consecuencias inmediatas del lema anterior son que el producto cup de dos cociclos es un cociclo y el producto cup de un cociclo con un coborde o de un coborde con un cociclo es un coborde. De esta manera, se induce el producto cup en cohomología:

$$\smile : H^p(X;R) \times H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R)$$

Observamos que este producto cup es asociativo y distributivo ya que el producto del anillo R verifica estas propiedades a nivel de cocadenas. También si el anillo R tiene un elemento identidad entonces existe un elemento identidad para el producto cup: la clase $1 \in H^0(X;R)$ definida por el 0-cociclo que toma el valor 1 en cada 0-símplice singular de X. Por otro lado, existe un producto cup relativo más general:

$$\smile : H^p(X,A;R) \times H^q(X,B;R) \to H^{p+q}(X,A \cup B;R)$$

cuando A y B son abiertos de X. Para más detalles sobre este producto relativo, referimos al lector [2].

Es fácil observar que la cohomología junto al producto cup forma un anillo, pero se puede comprobar que además es un *anillo graduado*. Generalmente, un *anillo graduado* consiste en un anillo A junto con una descomposición $A = \bigoplus_{k\geq 0} A_k$ de subgrupos tal que la multiplicación lleva $A_p \times A_q$ a A_{p+q}, es decir:

$$\cdot : A_p \times A_q \to A_{p+q}$$

Diremos que A es conmutativo, en el sentido graduado, si $a \cdot b = (-1)^{pq} b \cdot a$ para todo $a \in A_p$ y $b \in A_q$. Decimos que $a \in A$ tiene grado p, y lo denotaremos por $|a| = p$, para indicar que a está en A_p.

Como el producto es asociativo y distributivo, observamos que es fácil probar que:

$$H^*(X;R) = \bigoplus_{p\geq 0} H^p(X;R)$$

tiene estructura de anillo graduado donde los elementos de $H^*(X;R)$ son sumas finitas $\sum_i \alpha_i$ con $\alpha_i \in H^i(X;R)$ y el producto de dos tales sumas se define como $(\sum_i \alpha_i) \smile (\sum_j \beta_j) = \sum_{i,j} \alpha_i \smile \beta_j$. Además, si R es conmutativo entonces se puede comprobar que los anillos de cohomología son conmutativos en el sentido graduado. En la siguiente proposición, demostraremos que las aplicaciones inducidas son homomorfismos de anillos graduados.

Proposición 2.6. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Entonces las aplicaciones inducidas $f^* : H^p(X;R) \to H^p(Y;R)$ satisfacen la fórmula $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$, es decir, son homomorfismos de anillos graduados. Similarmente en el caso relativo.*

Demostración. Esto es una consecuencia directa de la fórmula $S^*(f)(\varphi \smile \psi) = S^*(f)(\varphi) \smile S^*(f)(\psi)$ a nivel de cocadenas:

$$\begin{aligned}(S^*(f)(\varphi) \smile S^*(f)(\psi))(\sigma) &= S^*(f)(\varphi)(\sigma_{|[e_0,\ldots,e_p]}) \cdot S^*(f)(\psi)(\sigma_{|[e_p,\ldots,e_{p+q}]}) \\ &= \varphi(S^*(f)\sigma_{|[e_0,\ldots,e_p]}) \cdot \psi(S^*(f)\sigma_{|[e_p,\ldots,e_{p+q}]}) \\ &= (\varphi \smile \psi)(f\sigma) \\ &= S^*(f)(\varphi \smile \psi)(\sigma)\end{aligned}$$

□

Observación 2.7. Más generalmente, la proposición anterior se puede probar para pares de espacios. Es decir, dada $f : X \to Y$ una aplicación continua y dados A, A' subconjuntos de X y B, B' subconjuntos de Y tales que $f(A) \subseteq B$ y $f(A') \subseteq B'$, entonces $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$, para todo $\alpha \in H^p(Y,B;R)$ y $\beta \in H^q(Y,B';R)$.

Como hemos dicho anteriormente, este capítulo nos ayudará para poder definir una cota de la categoría de Lusternik-Schnirelmann y que, además, nos ayudará para poder calcular la categoría de los espacios proyectivos. La demostración del siguiente teorema puede encontrarse en [2, pág. 220].

Teorema 2.8. *Sea $n \geq 0$. Entonces:*

1. $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$ tal que $|x| = 1$
2. $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ tal que $|x| = 2$
3. $H^*(\mathbb{H}P^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ tal que $|x| = 4$

Aquí $\mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1})$ denota al anillo de polinomios truncado con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, al anillo de polinomios truncado con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

3

La categoría de Lusternik-Schnirelmann

En este capítulo analizaremos en profundidad la *categoría de Lusternik-Schnirelmann* o, para abreviar, *categoría LS*. Como hemos comentado, fue definido por *L. Lusternik* y *L. Schnirelmann* cuando intentaban encontrar el número de puntos críticos de una función definida en una variedad diferenciable, un problema planteado por H. Poincaré. Definieron analíticamente un invariante que sirvió para encontrar una aproximación a este problema pero se dieron cuenta que también tenía grandes consecuencias en Geometría. Más tarde, *R. Fox* reescribe en sus tesis doctoral *On the Lusternik-Schnirelmann category* la definición de la categoría LS y hace un extenso estudio sobre ella, dándose cuenta que tiene una gran importancia en Topología Algebraica. En la evolución de la categoría LS, se encontraron varias aproximaciones como, por ejemplo, el *cup-length* (o *longitud cup*) y el *cone-length* (o *longitud de cono*). Esto facilitó el cálculo de la categoría de muchos espacios ya que en general no es nada sencillo hacerlo. Aunque la categoría LS ha tenido un gran auge en *Topología Algebraica* como invariante homotópico, sigue siendo importante para el análisis de puntos críticos en *Geometría Diferencial*. Por lo tanto, en este capítulo haremos un estudio de la categoría LS donde mostraremos la definición dada originalmente por L. Lusternik y L. Schnirelmann y la dada por R. Fox. Además, probaremos algunas de las propiedades más importantes y haremos el cálculo preciso de algunos ejemplos notables.

3.1. Definición original y su relación con los puntos críticos.

Comenzaremos estudiando la definición original que Lusternik y Schnirelmann dieron para la categoría LS y demostraremos el *Teorema de Lusternik-Schnirelmann*. Necesitamos definir unas nociones previas, como la de *flujo o* *sistema dinámico* sobre un espacio topológico M. Esto es una aplicación continua $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ tal que:

(1) $\phi(x, 0) = x$ para todo $x \in M$
(2) $\phi(\phi(x, t), s) = \phi(x, t + s)$ para todo $x \in M$ y $t, s \in \mathbb{R}$

Si $x \in M$ es fijo, entonces la *órbita* de x (o *trayectoria* de x) es el conjunto $\{\phi(x, t)/t \in \mathbb{R}\}$. Además si fijamos $t \in \mathbb{R}$, entonces podemos definir la aplicación *transición* $\phi_t : M \to M$ como $\phi_t(x) := \phi(x, t)$ y si fijamos $x \in \mathbb{R}$, entonces definimos la aplicación *movimiento* $\phi^x : \mathbb{R} \to M$ como $\phi^x(t) := \phi(x, t)$. Notamos que ϕ_t es homeomorfismo ya que $(\phi_t)^{-1} = \phi_{-t}$ y que la órbita de x es la imagen de $\phi^x(\mathbb{R})$.

Diremos que un flujo ϕ sobre M es de *tipo gradiente* si existe una aplicación $f : M \to \mathbb{R}$, que llamaremos *función de Lyapunov*, de manera que para cada $x \in M$ cumple una de las siguientes propiedades:

1. $f(\phi_t(x)) < f(\phi_s(x))$ para $t, s \in \mathbb{R}$ tales que $t > s$; o bien
2. $\phi_t = x$, para todo $t \in \mathbb{R}$

Para un flujo ϕ sobre M, diremos que $x \in M$ es un *punto crítico* (o *estacionario*, o de *equilibrio*) si $\phi^x : \mathbb{R} \to M$ es constante, es decir $\phi^x(t) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$; y si ϕ es de tipo gradiente con una función de Lyapunov asociada f, podremos decir que x es un punto crítico de f. Si x no es un punto crítico, lo denominaremos *punto regular*.

Observación 3.1. En Geometría Diferencial, se parte de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ sobre una variedad diferenciable M cerrada. Consideraremos $grad(f)$, el gradiente de f, como el campo de vectores métricamente equivalente a a la 1-forma diferencial df de f. Al integrar $-grad(f)$ obtenemos un flujo global diferenciable $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ de tipo gradiente siendo f la función de Lyapunov asociada. Es este ámbito los puntos críticos de este flujo se corresponden exactamente con los puntos críticos de la función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$.

Supondremos que M es un espacio métrico y compacto y denotaremos por $K(f)$ el conjunto de los puntos críticos de f. Observamos que es un cerrado en M y, por tanto, es compacto. Efectivamente, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K(f)$ es una sucesión de puntos críticos tal que $x_n \to x$ con $x \in M$, entonces como ϕ es continua tendremos que $\phi_t(x_n) \to \phi_t(x)$ pero como x_n es un punto crítico entonces $\phi_t(x_n) = x_n$ para todo n. Por tanto, $\phi_t(x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y por la unicidad del límite $x \in K(f)$.

Los *valores críticos* de f son aquellos elementos de la imagen del conjunto de puntos críticos $f(K(f))$ y su complementario $\mathbb{R} \setminus f(K(f))$ es el conjuntos de los *valores regulares* de f. Así, si $c \in \mathbb{R}$, tenemos que c es un valor regular si $f^{-1}(c) = \emptyset$ o $f^{-1}(c)$ solo contiene puntos regulares.

Para todo $c \in \mathbb{R}$ consideramos:

$$K_c := K(f) \cap f^{-1}(c) \quad M_c := f^{-1}((-\infty, c])$$

donde denominaremos a K_c como el conjunto de puntos críticos de nivel c. Por tanto, $K_c \neq \emptyset$ si y solo si c es un valor crítico de f.

A continuación, veremos propiedades importantes para poder probar el *Teorema de Lusternik-Schnirelmann*, como el *Teorema de deformación* y el *Principio de minimax*. Pero antes deberemos probar el siguiente lema previo:

Lema 3.2. *Sea x_0 un punto regular de f con $f(x_0) = c$. Entonces existen $\epsilon > 0$ y un entorno abierto V de x_0 tal que $\phi_1(V) \subseteq M_{c-\epsilon}$.*

Demostración. Como x_0 es regular, entonces por la propiedad 2 tenemos que $f(\phi_1(x_0)) < f(x_0) = c$. Por tanto, podemos encontrar $\epsilon > 0$ tal que $f(\phi_1(x_0)) < c - \epsilon$ y, por continuidad, existe V un entorno de x_0 de manera que $f(\phi_1(x)) < \epsilon$ para todo $x \in V$. Así vemos que $\phi_1(V) \subseteq (-\infty, c] = M_{c-\epsilon}$.

□

Teorema 3.3 (Teorema de deformación). *Sean $c \in \mathbb{R}$ y U un entorno abierto de K_c en M. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $\phi_1(M_{c+\epsilon} \setminus U) \subseteq M_{c-\epsilon}$. En particular, si c es un valor regular entonces $\phi_1(M_{c+\epsilon}) \subseteq M_{c-\epsilon}$.*

Demostración. Por el lema 3.2, para todo $x \in X = f^{-1}(c) \setminus U$ podemos tomar V_x un entorno abierto de x y $\epsilon_x > 0$ tal que $\phi_1(V_x) \subseteq M_{c-\epsilon_x}$. Además como X es un cerrado en M y M es compacto, entonces X también lo es y, por tanto, existe un subrecubrimiento finito $V_{x_1}, ..., V_{x_n}$ de X. Si tomamos $\epsilon^* = \text{mín}\{\epsilon_{x_1}, ..., \epsilon_{x_n}\}$, entonces $\phi_1(V_{x_1} \cup ... \cup V_{x_n}) \subseteq M_{c-\epsilon^*}$. Definiendo el abierto $V := V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup ... \cup V_{x_n}$ entonces vemos que $f^{-1}(c) \subseteq V$ y así tenemos que $f(M \setminus V)$ es un compacto en $\mathbb{R}$ que no contiene a c. Se deduce la existencia de $0 < \epsilon < \epsilon^*$ tal que $[c - \epsilon, c + \epsilon] \cap f(M \setminus V) = \emptyset$ y, por tanto, $L := f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon]) \subseteq V$. Teniendo en cuenta lo razonado anteriormente, se tiene que:

$$L \setminus U \subseteq V \setminus U \subseteq V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup ... \cup V_{x_n}$$

Y también:

$$\phi_1(L \setminus U) \subseteq \phi_1(V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup ... \cup V_{x_n}) \subseteq M_{c-\epsilon^*} \subseteq M_{c-\epsilon}$$

Como $f \circ \phi^x$ es decreciente, entonces tenemos que $\phi_1(M_{c-\epsilon}) \subseteq M_{c-\epsilon}$. Finalmente teniendo en cuenta que $M_{c+\epsilon} \setminus U \subseteq M_{c-\epsilon} \cup (L \setminus U)$, deducimos que:

$$\phi_1(M_{c+\epsilon} \setminus U) \subseteq \phi_1(M_{c-\epsilon}) \cup \phi_1(L \setminus U) \subseteq M_{c-\epsilon}$$

□

Para poder enunciar el *principio de minimax* debemos tener en cuenta dos definiciones previas: el *minimax de f* e *invariantes por isotopías*.

Definición 3.4. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de M. Se define el* minimax *de f sobre $\mathcal{F}$ como:*

$$\begin{aligned} minimax(f, \mathcal{F}) &= inf_{F \in \mathcal{F}} \sup\{f(x) : x \in F\} \\ &= inf_{F \in \mathcal{F}}\{c \in \mathbb{R} : \exists F \in \mathcal{F}, F \subseteq M_c\} \end{aligned}$$

Definición 3.5. *Sea $G : M \times I \to M$ una aplicación continua. Diremos que G es una* isotopía *en M si verifica que $G_t : M \to M$ es un homeomorfismo para cada $t \in I$ y $G_0 = id_M$. Diremos que una familia de subconjuntos $\mathcal{F}$ de M es* invariante por isotopías *si para toda isotopía G y todo $F \in \mathcal{F}$, tenemos que $G_1(F) \in \mathcal{F}$.*

Nos encontramos en las condiciones para poder formular y probar la siguiente proposición:

Proposición 3.6 (Principio de minimax). *Si $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de M que es invariante por isotopías, entonces $minimax(f, \mathcal{F})$ es un valor crítico de f.*

Demostración. Tomamos $c = minimax(f, \mathcal{F})$ y supongamos que c es un valor regular de f. Entonces por el teorema 3.3, existe $\epsilon > 0$ tal que $\phi_1(M_{c+\epsilon}) \subseteq M_{c-\epsilon}$. Por definición de ínfimo, existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $F \subseteq M_{c+\epsilon}$ y como $\{\phi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ es una isotopía, tenemos que $\phi_1(F) \in \mathcal{F}$. Pero vemos que $\phi_1(F) \subseteq \phi_1(M_{c+\epsilon}) \subseteq M_{c-\epsilon}$ y, por tanto:

$$c = minimax(f, \mathcal{F}) \leq c - \epsilon < c$$

Esto es una contradicción y así queda probado que $c = minimax(f, \mathcal{F})$ es un valor crítico de f.

□

A continuación, veremos la definición original de la categoría LS dada por Lusternik y Schnirelmann. Para ello, necesitaremos la noción de *subconjunto categórico*. Sean M un espacio topológico y $A \subseteq M$. Diremos que A es *categórico* si la inclusión $A \hookrightarrow M$ es nulhomótopa. Nótese que A es categórico si y solo si existe un diagrama homotópicamente conmutativo de la forma:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, hook] \arrow[dr] & & M \\ & * \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Es decir, la inclusión $A \hookrightarrow M$ factoriza, salvo homotopía, a través de un espacio unipuntual. Es claro que todo subconjunto de un conjunto categórico es categórico.

Podemos denominar un subespacio categórico como un subespacio contráctil en M pero no nos referiremos a él de esta manera porque puede generar confusión con la definición 1.9 ya que ser contráctil en M no es lo mismo que ser contráctil. Por ejemplo, observamos que S^{n-1} no es contráctil pero S^{n-1} sí es categórico en D^n.

Definición 3.7. *Sean un espacio topológico M y $A \subseteq M$. Entonces se define la categoría de A en M, que denotaremos por $cat_M(A)$, como el menor entero $m \geq 0$ tal que A admite un recubrimiento por $m+1$ subconjuntos de M:*

$$A \subseteq F_0 \cup F_1 \cup ... \cup F_m$$

donde cada F_i es cerrado y categórico en M. Además, hacemos la convención de que si $A = \emptyset$, entonces $cat_M(\emptyset) = -1$ y si $A = M$ entonces denotaremos $cat(M) := cat_M(M)$. A $cat(M)$ se le denominará simplemente categoría de Lusternik-Schnirelmann de M.

Para simplificar, diremos que un recubrimiento $\{U_i\}_{i \in I}$ de M es cerrado y categórico cuando U_i es cerrado y categórico en M, para todo i. Teniendo esto en cuenta, a continuación veremos algunas propiedades importantes de $cat_M(-)$:

Proposición 3.8. *Sea M un espacio topológico y $A \subseteq M$. Entonces*

1. *$cat_M(A) = 0$ si y solo si $\overline{A}$ es categórico.*
2. *$cat_M(A) = cat_M(\overline{A})$.*
3. *Si A es cerrado en M, entonces $cat_M(A) \leq m$ si y solo si existen $\{F_i\}_{i=0}^m$ cerrados en M tal que $A = F_0 \cup F_1 \cup ... \cup F_m$ y cada F_i es contráctil en M.*
4. *Si $A \subseteq B \subseteq M$, entonces $cat_M(A) \leq cat_M(B)$.*
5. *Si $A, B \subseteq M$, entonces $cat_M(A \cup B) \leq cat_M(A) + cat_M(B) + 1$.*
6. *Si A es cerrado en M y es deformable a B en M (es decir, existe una homotopía $G : A \times I \to M$ tal que $G(a, 0) = a$ y $G(a, 1) \in B$ para todo $a \in A$), entonces $cat_M(A) \leq cat_M(B)$.*
7. *Si $h : M \to M$ homeomorfismo, entonces $cat_M(A) = cat_M(h(A))$ para cualquier $A \subseteq M$.*

Demostración. 1. Si $cat_M(A) = 0$, entonces $A \subseteq F$ siendo F cerrado y categórico. Aplicando clausuras, tenemos que $\overline{A} \subseteq F$ y como F es categórico, entonces $\overline{A}$ es categórico. Supongamos que $\overline{A}$ es categórico en M. Sabemos que cualquier subconjunto de X está contenido en su clausura, entonces $A \subseteq \overline{A}$ y $\overline{A}$ es categórico en M. Por lo tanto, $cat_M(A) = 0$.

2. Nótese que todo recubrimiento finito cerrado de A también contiene a $\overline{A}$. Por tanto, $cat_M(A) = cat_M(\bar{A})$.
3. Observamos que la implicación para la izquierda es trivial utilizando la definición 3.7. Supongamos que $cat_M(A) \leq m$ y sea A cerrado, entonces existe un recubrimiento cerrado y categórico $\{F_i\}_{i=0}^m$ tal que $A \subseteq F_0 \cup F_1 \cup ... \cup F_m$. Tomando los cerrados $F_i' = A \cap F_i \subseteq F_i$, obtenemos que $A = F_0' \cup F_1' \cup ... \cup F_m'$. Nótese que cada F_i' es categórico al estar contenido en F_i.

4. Esta propiedad es trivial ya que todo recubrimiento de B también recubre a A.
5. Si $cat_M(A) = \infty$ o $cat_M(B) = \infty$, habremos terminado. Supongamos que $cat_M(A) = n$ y $cat_M(B) = m$ con $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces podemos encontrar $\{U_i\}_{i=0}^n$ y $\{V_j\}_{j=0}^m$ recubrimientos de A y de B respectivos cerrados y categóricos. Claramente $\{U_i\}_{i=0}^n \cup \{V_j\}_{j=0}^m$ es un recubrimiento de $A \cup B$ formado por $m+n+2$ cerrados categóricos. Por tanto, $cat_M(A \cup B) \leq m+n+1$.
6. Sea $G : A \times I \to M$ aplicación continua tal que $G(a, 0) = a$ y $G(a, 1) \in B$ para todo $a \in A$. Tomamos $cat_M(B) = n$ con $\{K_i\}_{i=0}^n$ un recubrimiento cerrado categórico de B y definimos $L_i = G_1^{-1}(K_i)$, siendo $G_1 : A \to M$ la aplicación definida por $G_1(a) := G(a, 1)$. Como G_1 es continua, entonces $G_1^{-1}(K_i) = L_i$ es cerrado en A y, como A es cerrado, L_i también lo es en M. Además, como cada L_i se deforma en K_i (mediante la restricción G) y como K_i es categórico, es sencillo comprobar que L_i también es categórico. Obtenemos así un recubrimiento cerrado y categórico $\{L_i\}_{i=0}^n$ de A. Entonces $cat_M(A) \leq n$.
7. Como h es un homeomorfismo y U cerrado y categórico en M, entonces $h(U)$ es también lo es ya que los homeomorfismos conservan los cerrados y los conjuntos categóricos. Por tanto, es fácil probar que $cat_M(A) = cat_M(h(A))$.

$\square$

Para poder enunciar y demostrar el *Teorema de Lusternik-Schnirelmann* debemos tener en cuenta varias observaciones. Para cada $0 \leq m \leq cat(M)$ se define la familia de subconjuntos de M:

$$\mathcal{F}_m = \{F \subseteq M \mid cat_M(F) \geq m\}$$

Vemos que por el apartado 7 de la proposición 3.8, $\mathcal{F}_m$ es invariante por isotopías. Por lo que podemos considerar el principio de minimax. Definimos:

$$c_m = c_m(f) = minimax(f, \mathcal{F}_m) = inf\{c \in \mathbb{R} \mid \exists F \subseteq M_c : cat_M(F) \geq m\}$$

Por el principio del minimax (proposición 3.6), tenemos que $c_m(f)$ es un valor crítico de f para cada $m \leq cat(M)$. Usando la propiedad 4 de la proposición 3.8, obtenemos una noción equivalente de $c_m(f)$ que viene dada por:

$$c_m(f) = inf\{c \in \mathbb{R} \mid cat_M(M_c) \geq m\}$$

Como $cat_M(M_c) \geq m + 1$ implica que $cat_M(M_c) \geq m$, entonces vemos que $c_m(f) \leq c_{m+1}(f)$. Es posible que se dé la igualdad ya que, por ejemplo, si f es constante entonces todos los valores $c_m(f)$ coincidirán.

Recordemos que un espacio M es *localmente contráctil* si todo punto admite una base de entornos contráctiles. Teniendo esto en cuenta, nos encontramos en las condiciones de enunciar y probar el *Teorema de Lusternik-Schnirelmann.*

Teorema 3.9 (Teorema de Lusternik-Schnirelmann). *Sea M un métrico, compacto y localmente contráctil y sea $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ un sistema dinámico de tipo gradiente con función de Lyapunov asociada $f : M \to \mathbb{R}$.Si $c = c_{n+1}(f) = c_{n+2}(f) = ... = c_{n+k}(f)$, entonces f tiene, al menos, k puntos críticos en K_c el nivel crítico de c (recordemos que $K_c := K \cap f^{-1}(c)$). Luego, f tiene al menos m puntos críticos en M_{c_m}, para cada $0 \leq m \leq cat(M)$. En particular f tiene al menos $cat(M) + 1$ puntos críticos. En otras palabras:*

$$cat(M) + 1 \leq card(K(f))$$

siendo $card(K(f))$ el cardinal del conjunto de puntos críticos de f.

Demostración. Podemos suponer que hay un número finito de puntos críticos en el nivel c y que denotaremos por $x_1, x_2, ..., x_r$. Por tanto, debemos probar que $r \geq k$. Como M es localmente contráctil y normal, es fácil encontrar un entorno abierto V_i para cada x_i tal que la clausura $\overline{V}_i$ sea contráctil. Ahora si tomamos $U = V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_r$, tenemos que $cat_M(U) \leq r - 1$ y, por el teorema de deformación (teorema 3.3), existe $\epsilon > 0$ tal que $\phi_1(M_{c+\epsilon} \setminus U) \subseteq M_{c-\epsilon}$. Además, como $c - \epsilon < c_{n+1}(f) = \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} | cat_M(M_a) \geq n+1\}$ entonces por la propiedad 6 de la proposición 3.8 se sigue que $cat_M(M_{c+\epsilon} \setminus U) \leq n$. Usando de nuevo la proposición 3.8, obtenemos que:

$$cat_M(M_{c+\epsilon}) \leq cat_M((M_{c+\epsilon} \setminus U) \cup U) \leq cat_M(M_{c+\epsilon} \setminus U) + cat_M(U) + 1 \leq n + r$$

Por tanto, $c < c + \epsilon \leq \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} \mid cat_M(M_a) \geq n + r + 1\} = c_{n+r+1}$. Entonces $n + r + 1 > n + k$ y, finalmente, obtenemos que $r \geq k$.

□

En el ámbito de la Geometría Diferencial, el teorema anterior se enunciará de la siguiente manera:

Corolario 3.10. *Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre una variedad diferenciable cerrada M. Entonces:*

$$cat(M) + 1 \leq card(K(f))$$

Demostración. Simplemente tener en cuenta la observación 3.1 y que toda variedad cerrada es un espacio métrico, compacto y localmente contráctil.

3.2. Definición de R. Fox y propiedades básicas.

En el apartado anterior enunciamos la definición original de Lusternik y Schnirelmann pero, posteriormente Fox expuso una definición equivalente, al menos, para una amplia clase de espacios topológicos. En vez de utilizar recubrimientos por cerrados categóricos, utilizó recubrimientos por abiertos categóricos. Para ver la relación existente con la definición 3.7, debemos probar los siguientes lemas:

Lema 3.11. *Sean X un espacio normal y $\{U_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento abierto de X. Entonces existen cerrados A_i, B_i y abiertos θ_i donde $i = 1, ..., n$ tales que $A_i \subseteq \theta_i \subseteq B_i \subseteq U_i$ y*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$$

Demostración. Usaremos el método de inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces es trivial ya que $U_1 = X$; y si $n = 2$, entonces tenemos que $X = U_1 \cup U_2$ con U_i abiertos. Por tanto, $F_i = X \setminus U_i$ son cerrados para $i = 1, 2$ donde $F_1 \cap F_2 = (X \setminus U_1) \cap (X \setminus U_2) = X \setminus (U_1 \cup U_2) = X \setminus X = \emptyset$. Además como X es normal, podemos encontrar dos abiertos G_1, G_2 de manera que $F_i \subseteq G_i$ y $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \emptyset$. Con esto definimos:

$$A_1 = \overline{(X \setminus \overline{G}_1)} \quad A_1 = \overline{(X \setminus \overline{G}_2)}$$

Observamos que $A_1 \cup A_2 = X$ y $A_i \subseteq U_i$ para $i = 1, 2$. Además existe abiertos θ_i tal que $A_i \subseteq \theta_i \subseteq \bar{\theta}_i \subseteq U_i$ con $B_i = \bar{\theta}_i$. Ahora suponemos cierto para $n - 1$ y tomamos $\{U_i\}_{i=1}^n$ un recubrimiento abierto de X. Entonces definimos:

$$U = \bigcup_{i=0}^{n-1} U_i \quad U' = U_n$$

donde U y U' son abiertos en X y por lo tanto, $F = X \setminus U$ y $F' = X \setminus U'$ son cerrados y $F \cap F' = (X \setminus U) \cap (X \setminus U') = X \setminus (U \cup U') = X \setminus X = \emptyset$. De nuevo, como X es normal, podemos encontrar G y G' abiertos disjuntos tales que $F \subseteq G$ y $F' \subseteq G'$. Así definimos:

$$V = X \setminus \overline{G} \subseteq X \setminus G \quad V' = X \setminus \overline{G'} \subseteq X \setminus G'$$

Por tanto, observamos que $V \cup V' = X$ y además obtenemos que $\overline{V} \subseteq X \bar{\setminus} G = X \setminus G \subseteq X \setminus F = U$ y $\overline{V'} \subseteq U'$. Sabemos que:

$$\overline{V} = (\bigcup_{i=0}^{n} U_i) \cap \overline{V} = \bigcup_{i=0}^{n} (U_i \cap \overline{V})$$

con $U_i \cap \overline{V}$ abiertos en $\overline{V}$ y, por tanto, $\overline{V}$ es normal. Por consiguiente, existen $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ cerrados en $\overline{V}$ (notemos que los cerrados A_i también son cerrados en X) que satisfacen $\overline{V} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ y $A_i \subseteq \overline{V} \cap U_i \subseteq U_i$ para todo $i = 1, 2, ..., n - 1$. Finalmente, considerando $A_n = \overline{V'} \subseteq U'$ obtenemos que $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = X$.

□

Un tipo de espacios topológicos bastante usado en Topología Algebraica es el de *ANR* y nos servirá para probar la igualdad de categorías.

Definición 3.12. *Un espacio topológico X es un* ANR *si verifica las siguientes propiedades:*

1. *X es metrizable*
2. *Para todo espacio metrizable Y, para todo cerrado A en Y y aplicación continua $f : A \to Y$ existe un abierto $U \supseteq A$ y una extensión $\tilde{f} : U \to X$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\ U \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Observación 3.13. Éste tipo de espacio se denomina *Retracto absoluto por entornos* o como se conoce más habitualmente *ANR*, siglas del nombre en inglés: *Absolute Neighbourhood Retract*. Como ejemplo importante tenemos que toda variedad topológica es un ANR (para una demostración de este hecho véase [11] o [12]).

Lema 3.14. *Sea X un ANR y A un subconjunto cerrado de X. Entonces A es categórico si y solo si existe un abierto $U \supseteq A$ tal que U es categórico.*

Demostración. Si A es categórico, podemos definir $G : A \times I \to X$ tal que $G(a, 0) = x_0$ y $G(a, 1) = a$ para todo $a \in A$. Definimos $H : (X \times \{x_0\}) \cup (A \times I) \cup (X \times \{1\}) \to X$ como $H(x, 0) = x_0$, $H(a, t) = G(a, t)$ y $H(x, 1) = x$ para todo $x \in X$ y $(a, t) \in A \times I$. Observamos que H está bien definida y por el lema de continuidad (lema 1.1), tenemos que H es continua.
Claramente $\mathcal{Q} := (X \times \{x_0\}) \cup (A \times I) \cup (X \times \{1\})$ es un cerrado en el espacio metrizable $X \times I$. Por tanto, existe un abierto $\mathcal{U}$ en $X \times I$ con $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U}$ y existe una extensión $\widetilde{H} : \mathcal{U} \to X$ de H,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q} \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook] & X \\ \mathcal{U} \arrow[ur, "\widetilde{H}"'] & \end{tikzcd}$$

Al ser $\mathcal{U}$ es abierto en $X \times I$, podemos escribirlo como unión de productos de abiertos en $X \times I$. Como $A \times I \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{U}$ entonces, para cada $a \in A$, tenemos que $\{a\} \times I \subseteq \cup_{i \in I}(W_i \times J_i) \subseteq \mathcal{U}$ con $a \in W_i$. Sabemos que $\{a\} \times I$ es compacto, por tanto podemos encontrar una subcolección finita de W_i tal que $\{a\} \times I \subseteq \cup_{k=1}^{n}(W_{i_k} \times J_{i_k})$. Definimos:

$$W_a = \bigcap_{k=1}^{n} W_{i_k}$$

con $a \in W_a$. Evidentemente W_a es abierto y $W_a \times I \subseteq \mathcal{U}$. Si $U := \cup_{a\in A} W_a$, entonces $A \subseteq U$ y $U \times I \subset \mathcal{U}$. Por tanto, se define $F = \tilde{H}_{|U\times I} : U \times I \to X$, entonces $F(x,0) = \tilde{H}(x,0) = x_0$ y $F(x,1) = \tilde{H}(x,1) = x$ para todo $x \in U$, es decir, U es categórico.
La otra implicación es trivial ya que para todo subconjunto de un conjunto categórico es categórico.

□

Debemos tener en cuenta que todo espacio ANR es metrizable y que, por consiguiente, también es normal (ver nota 1.6). Esto nos será de utilidad para demostrar la relación entre la definición original y la definición por abiertos de la categoría LS.

Proposición 3.15. *Sea X un ANR. Entonces la categoría LS de X es el menor n tal que X se puede recubrir por $n+1$ abiertos categóricos.*

Demostración. Para que la demostración sea más sencilla, utilizaremos la notación $cat^{cl}(X)$ para referirnos a la categoría LS de X por recubrimientos cerrados categóricos y $cat^{op}(X)$ a la categoría LS que por recubrimientos abiertos categóricos. Con esta notación queremos probar que $cat^{op}(X) = cat^{cl}(X)$.
En primer lugar, probaremos que $cat^{cl}(X) \leq cat^{op}(X)$. En efecto, si $cat^{op}(X) = n$, entonces tenemos un recubrimiento $\{U_i\}_{i=0}^n$ de X con U_i abierto categórico para cada i. Como X es normal, por el lema 3.11 existen A_i, B_i cerrados y θ_i abierto tales que $A_i \subseteq \theta_i \subseteq B_i \subseteq U_i$ con $\bigcup_{i=0}^n A_i = X$. Como $A_i \subseteq U_i$, por el lema 3.14, tenemos que A_i es categórico. Concluimos que $cat^{cl}(X) \leq n$.
Recíprocamente, si $cat^{cl}(X) = n$, entonces existe un recubrimiento $\{A_i\}_{i=0}^n$ de X con A_i cerrados categóricos.
Al ser X un ANR, por el lema 3.14 tenemos que existe un abierto categórico U_i tal que $A_i \subseteq U_i$ y, también, $\bigcup_{i=0}^n U_i = X$. Por tanto, $cat^{op}(X) \leq n$.

□

Observación 3.16. Para simplificar la notación y siempre que no dé lugar a confusión, escribiremos de aquí en adelante $cat(X)$ para referirnos a la definición de la categoría LS en el sentido de Fox, dada por recubrimientos abiertos. Además, todas las propiedades vistas en el apartado anterior, se verifican con esta nueva definición de la categoría LS.

Obviamente decir que $cat(X) = 0$ es equivalente a que X sea contráctil. Otro ejemplo sencillo, es el cálculo de la categoría LS de la n-esfera. Observamos que S^n no es contráctil, por lo que necesariamente $cat(S^n) \geq 1$. Por otro lado, tomando $U = S^n \backslash \{(0,...,0,1)\}$ y $V = S^n \backslash \{(0,...,0,-1)\}$ se tiene que $U \cup V = S^n$

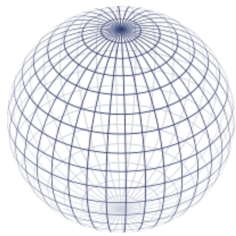

Figura 3.1. Ejemplo de una n-esfera: una 2-esfera

y como $U, V \cong \mathbb{R}^n$, entonces son contráctiles, luego categóricos en S^n. Esto demuestra que $cat(S^n) \leq 1$. Por tanto, $cat(S^n) = 1$.

Antes de probar que la categoría es un invariante homotópico, necesitamos definir un noción previa que nos facilitará su demostración. Dados dos espacios topológicos X e Y, diremos que X *domina a* Y si existen aplicaciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq 1_Y$.

Proposición 3.17. *Sean X e Y espacios topológicos donde X domina a Y. Entonces $cat(Y) \leq cat(X)$.*

Demostración. Si $cat(X) = \infty$, entonces queda demostrado trivialmente.
Supongamos ahora que $cat(X) = n$. Primero vamos a ver que si U es abierto categórico en X entonces $g^{-1}(U)$ es abierto categórico en Y. Teniendo en cuenta el siguiente diagrama, el cual es de modo evidente conmutativo salvo homotopía:

$$\begin{tikzcd}
g^{-1}(U) \arrow[r, "g_{|g^{-1}(U)}"] \arrow[dd, hook, "j"'] & U \arrow[dd, hook, "i"] \arrow[dr] & \\
 & & * \arrow[dl] \\
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_Y"'] & X \arrow[d, "f"] & \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

se demuestra que la inclusión $g^{-1}(U) \hookrightarrow Y$ factoriza, salvo homotopía, a través del espacio unipuntual $*$, es decir, $g^{-1}(U)$ es categórico. Por tanto como $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$, entonces $Y = g^{-1}(X) = \bigcup_{i=0}^n g^{-1}(U_i)$ tal que para cada i, $g^{-1}(U_i)$ es categórico. Concluimos que $cat(Y) \leq n$.

$\square$

Observamos que $X \simeq Y$ si y solo si X domina a Y e Y domina a X. Por lo que, es fácil observar la siguiente consecuencia:

Corolario 3.18. *Sean X e Y espacios topológicos homotópicamente equivalentes. Entonces $cat(X) = cat(Y)$.*

Observación 3.19. Obsérvese que el recíproco no siempre es cierto. Veremos que la categoría del plano proyectivo real $\mathbb{R}P^2$ y del toro coinciden. Sin embargo no son homotópicamente equivalentes (una forma de ver este hecho es considerar los grupos fundamentales del plano proyectivo real y del toro, que no son isomorfos ya que el grupo fundamental de $\mathbb{R}P^2$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ y el del toro T isomorfo a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

Un resultado muy interesante viene dada en la siguiente proposición la cual nos demuestra una relación de la categoría LS con el producto de dos espacios. Diremos que un espacio topológico X es *completamente normal* si todo subconjunto de X es normal. Un ejemplo de espacio *completamente normal* viene dado por los espacios metrizables (véase [1]). Para poder ver la estimación de la categoría LS del producto debemos tener en cuenta la noción de *sucesión categórica de longitud* $k + 1$ de un espacio topológico X. Se define como una sucesión de abiertos $O_0, O_1, ..., O_{k+1}$ con $O_0 = \emptyset$ y $O_{k+1} = X$ tal que cada diferencia $O_{i+1} \setminus O_i$ está contenida en un abierto categórico U_{i+1} en X.

Lema 3.20. *Sea X un espacio topológico. Entonces X tiene una sucesión categórica de longitud $k + 1$ si y solo si $cat(X) \leq k$.*

Demostración. Supongamos que X tiene una sucesión categórica de longitud $k + 1$. Observamos que la sucesión categórica O_i, las diferencias $O_{i+1} \setminus O_i$ y, por tanto, los abiertos U_i recubren a X. Por consiguiente, U_i son categóricos. Entonces $\{U_i\}_{i=0}^{k+1}$ forman un recubrimiento abierto y categórico de X. Entonces $cat(X) \leq k$.
Finalmente, supongamos que $cat(X) \leq k$. Entonces existe un recubrimiento abierto y categórico $\{U_i\}_{i=1}^{k+1}$ de X. Definimos:

$$V_m = \bigcup_{j=1}^{m} U_j$$

Nótese que $V_{i+1} \setminus V_i \subseteq U_{i+1}$ tal que es abierto y categórico. Por tanto, $\{V_m\}_{i=1}^{k+1}$ forman una sucesión categórica de longitud $k + 1$.

□

Por tanto, podemos estimar la categoría LS del producto de la siguiente manera:

Proposición 3.21. *Sean X e Y dos espacios topológicos tal que $X \times Y$ es completamente normal. Entonces:*

$$cat(X \times Y) \leq cat(X) + cat(Y)$$

Demostración. Supongamos que $cat(X) = n$ y $cat(Y) = m$ con sus respectivas sucesiones categóricas $O_0 \subseteq O_1 \subseteq ... \subseteq O_{n+1}$ y $P_0 \subseteq P_1 \subseteq ... \subseteq P_{m+1}$, dadas por el lema 3.20 anterior. Denotaremos a los abiertos categóricos que contienen las diferencias por:

$$O_{i+1} \setminus O_i \subseteq U_{i+1} \quad P_{j+1} \setminus P_j \subseteq W_{j+1}$$

A continuación definimos los subconjuntos de $X \times Y$, para $r \geq 1$, como:

$$Q_r = \bigcup_{j=1}^{r} O_j \times P_{r+1-j}$$

donde para $j \geq n+1$, $O_j = \emptyset$ y para $t \geq m+1$, $P_t = \emptyset$. Si tomamos $Q_0 = \emptyset$, entonces observamos que $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq ... \subseteq Q_{n+m+1}$ con $Q_{n+m+1} = X \times Y$. Además, vemos que:

$$Q_{j+1} \setminus Q_j = \bigcup_{k=1}^{j+1} (O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})$$

donde $(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k}) \subseteq U_k \times W_{j+2-k}$ tal que es abierto y categórico, pero pueden haber intersecciones para j fijo y k variando. Como $j + 2 - k$ decrece cuando k crece y los subconjuntos O y P están anidados, entonces nos encontramos en el caso de que, para $k \neq l$:

$$\overline{(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})} \bigcap (O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l}) = \emptyset$$

$$(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k}) \bigcap \overline{(O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l})} = \emptyset$$

Como $X \times Y$ es completamente normal, entonces podemos encontrar entornos abiertos y disjuntos para los conjuntos $(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})$ y $(O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l})$. Intersecamos con $U_k \times W_{j+2-k}$ y $U_l \times W_{j+1-l}$ para obtener entornos abiertos, disjuntos y categóricos de $(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})$ y $(O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l})$, para $k \neq l$. Además, como los entornos categóricos son disjuntos, entonces la unión de estos también es categórico. Por lo tanto:

$$(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k}) \cup (O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l})$$

está contenido en un subconjunto abierto y categórico. Si repetimos este proceso un número finito de veces, probaremos que $Q_{j+1} \setminus Q_j$ está contenido en un subconjunto abierto y categórico. De esta manera, obtenemos que $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq ... \subseteq Q_{n+m+1}$ es una sucesión categórica de longitud $n + m + 1$ y, por el lema 3.20, obtenemos que $cat(X \times Y) \leq n + m = cat(X) + cat(Y)$.

□

Corolario 3.22. *Si X e Y son espacios metrizables, entonces:*

$$cat(X \times Y) \leq cat(X) + cat(Y)$$

Demostración. Como vimos anteriormente, todo espacio metrizable es completamente normal. Teniendo esto en cuenta, queda demostrado.

Observación 3.23. En 1971, *T. Ganea* conjeturó que si tenemos un espacio topológico X entonces $cat(X \times S^n) = cat(X) + 1$. Gracias al teorema anterior, obtenemos una desigualdad pero nos faltaría ver que $cat(X \times S^n) \geq cat(X) + 1$. Durante años se intentó demostrar pero recientemente se han encontrado contraejemplos que desmienten la igualdad (ver ejemplo en [1, pág 19]). Aun así, gracias a la *conjetura de Ganea* se ha conseguido un estudio extenso de la categoría LS en Topología Algebraica.

3.3. Otras versiones de la categoría de Lusternik-Schnirelmann.

En las secciones anteriores estudiamos la definición original y la definición con la que se suele trabajar de la categoría de Lusternik-Schnirelmann. En este apartado, trabajaremos con dos versiones, a priori diferentes: una para *espacios punteados* y otra donde no es necesario usar recubrimientos. Comenzaremos con los espacios punteados:

3.3.1. Para espacios punteados.

En Topología Algebraica se suele trabajar con espacios punteados. Por lo que, también existe una versión punteada de la categoría de Lusternik-Schnirelmann que denominaremos la *categoría Lusternik-Schnirelmann punteada*. En esta sección introduciremos tal versión y compararemos con la vista en el apartado anterior. Debemos tener en cuenta qué significa que un subespacio sea *categórico punteado*. Dado (X, x_0) un espacio punteado y dado $x_0 \in U \subseteq X$, diremos que U es *categórico punteado* si existe una aplicación continua $H : U \times I \to X$ tal que $H(x, 0) = x$, $H(x, 1) = x_0$ y $H(x_0, t) = x_0$ para todo $x \in X$ y $t \in I$.

Definición 3.24. *Sean (X, x_0) un espacio punteado. Entonces la categoría LS punteada de (X, x_0), que denotaremos por $cat_*(X, x_0)$, es el menor n tal que X admite un recubrimiento formado por $n + 1$ abiertos categóricos punteados.*

Es fácil observar que si un subconjunto de (X, x_0) es categórico punteado, entonces también es categórico en X. En consecuencia, $cat(X) \leq cat_*(X, x_0)$. A continuación veremos bajo qué condiciones obtenemos la igualdad $cat(X) = cat_*(X, x_0)$. El siguiente resultado previo nos dice que si el espacio X es conexo por caminos y $A \subseteq X$ es categórico, entonces A se puede deformar a un punto prefijado $x_0 \in X$.

Proposición 3.25. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos y $x_0 \in X$ un punto fijo arbitrario. Si $A \subseteq X$, entonces A es categórico si y solo si existe una aplicación $H : A \times I \to X$ continua de manera que $H(a, 0) = a$ y $H(a, 1) = x_0$.*

Demostración. Observamos que si tenemos una homotopía $H : A \times I \to X$ continua tal que $H(a, 0) = a$ y $H(a, 1) = x_0$, entonces trivialmente A es categórico. Recíprocamente, si A es categórico entonces existen $x \in X$ y una homotopía $F : A \times I \to X$ tal que $F(a, 0) = a$ y $F(a, 1) = x$. Como X es conexo por caminos, existe un camino $\alpha : I \to X$ donde $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = x_0$. Definimos la aplicación $H : A \times I \to X$ como:

$$H(x,t) := \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Por el lema de continuidad (lema 1.1), se prueba que H es continua. Además $H(x, 0) = a$ y $H(x, 1) = x_0$, para todo $x \in X$.

□

Teorema 3.26. *Sea (X, x_0) un espacio punteado donde X es normal, conexo por caminos y tal que $\{x_0\}$ es un cerrado que admite un entorno abierto categórico punteado. Entonces $cat(X) = cat_*(X, x_0)$.*

Demostración. Sabemos que siempre es cierto que $cat(X) \leq cat_*(X, x_0)$. Por tanto, nos falta ver que $cat_*(X, x_0) \leq cat(X)$. Supongamos que $cat(X) = n$ y tomemos $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ un recubrimiento abierto categórico de X. Haciendo una reordenación de índices si fuera necesario, podemos suponer que $x_0 \in U_i$ para $1 \leq i \leq k$ y $x_0 \notin U_i$ para $k \leq i \leq n+1$, para algún k.
Como X es conexo por caminos y por la proposición 3.25, podemos suponer que cada U_i se deforma a x_0 en X. De esta manera, podemos tener una aplicación continua $H_i : U_i \times I \to X$ tal que $H_i(x, 0) = x$ y $H_i(x, 1) = x_0$, para todo $x \in U_i$. Ademas, como X es normal, existe una colección de abiertos $\{\theta_i\}_{i=1}^{n+1}$ tales que $\theta_i \subseteq \overline{\theta}_i \subseteq U_i$ y $\bigcup_{i=1}^{n+1} \theta_i = X$.
Sea N el abierto categórico punteado tal que $x_0 \in N$ y por la proposición 3.25 existe una homotopía $G : N \times I \to X$ con $G(x, 0) = x$, $G(x, 1) = x_0$ y $G(x_0, t) = x_0$, para todo $x \in N$ y $t \in I$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $N \subseteq U_i$ para $1 \leq i \leq k$ y $N \cap U_i = \emptyset$ para $k \leq i \leq n+1$. Si esto no fuera cierto, tomaríamos $N' = N \cap U_1 \cap ... \cap U_k \cap (X \setminus \overline{\theta}_{k+1}) \cap ... \cap (X \setminus \overline{\theta}_{n+1})^c$ y entonces $N' \subseteq N$.
Como $\{x_0\} \subseteq N$ y por el apartado 2 de la proposición 1.4, existe un abierto M tal que $\{x_0\} \subseteq M \subseteq \overline{M} \subseteq N$. Ahora definimos $V_i := [U_i \cap (X \setminus \overline{M})] \cup M$ para $1 \leq i \leq k$ y $V_i = \theta_i \cup N$ para $k \leq i \leq n+1$. Observamos que:

1. Para todo i, V_i es abierto y $\bigcup_{i=1}^{n+1} V_i = X$.
2. Como $\{x_0\} \subseteq M$ y $x_0 \in N$, entonces $x_0 \in V_i$, para todo i. Ademas podemos definir las siguientes homotopías $\widetilde{H_i} : V_i \times I \to X$:

- Para $1 \leq i \leq k$,
$$\widetilde{H_i}(x,t) := \begin{cases} H_i(x,t) & x \in U_i \cap (X \setminus \overline{M}) \\ G(x,t) & x \in M \end{cases}$$
- Para $k \leq i \leq n+1$,
$$\widetilde{H_i}(x,t) := \begin{cases} H_i(x,t) & x \in \theta_i \\ G(x,t) & x \in N \end{cases}$$

Nótese que por el lema de continuidad (lema 1.1), $\widetilde{H_i}$ es continua, para todo i. Dichas homotopías demuestran que V_i es categórico punteado. Esto prueba que $cat_*(X, x_0) \leq n$.

□

Observación 3.27. Las condiciones del teorema anterior no son tan restrictivas como se puede llegar a pensar. Por ejemplo, si X es un CW-complejo conexo (incluso una variedad conexa), entonces X es normal, conexo por caminos y si $x_0 \in X$ es un punto cualquiera, siempre se puede encontrar un entorno abierto categórico punteado. Por lo tanto, para X un CW-complejo siempre se tendrá la igualdad $cat(X) = cat_*(X, x_0)$.

3.3.2. Caracterización de Whitehead.

Hasta ahora hemos definido la categoría LS con recubrimientos abiertos categóricos (o categóricos punteados). Sin embargo, usaremos una definición alternativa más manejable usando únicamente espacios topológicos y aplicaciones continuas. Dicha noción permitió un avance importante en el estudio de la categoría LS. Para la *caracterización de Whitehead* necesitamos definir un concepto previo denominado el *fat-wedge* de orden n de un espacio punteado $(X, *)$. Esto se define como el subespacio de X^{n+1}:

$$T^{n+1}(X) := \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in X^{n+1} \mid \text{existe } \ i = \{0, 1, ..., n\} \ \text{ con } \ x_i = *\}$$

Teorema 3.28 (Caracterización de Whitehead). *Sea X un espacio punteado conexo por caminos, normal y tal que el punto base tiene un entorno abierto categórico. Entonces son equivalentes:*

1. *$cat(X) \leq n$*
2. *Existe una aplicación continua $f : X \to T^n(X)$ haciendo homotópicamente conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & T^{n+1}(X) \arrow[d, "j_n"] \\ X \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que $cat(X) \leq n$ y sea $\{U_i\}_{i=1}^{n+1}$ un recubrimiento abierto categórico de X. Como X es normal, existen A_i, B_i cerrados y θ_i abiertos tal que $A_i \subseteq \theta_i \subseteq B_i \subseteq U_i$ y $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$ (por el lema 3.11). Observamos que para todo i, $A_i \cap (X \setminus \theta_i) = \emptyset$. Ademas, el lema de Urysohn (lema 1.5) nos asegura la existencia de una aplicación continua $h_i : X \to I$ tal que $h_i(A_i) = \{1\}$ y $h_i(X \setminus \theta_i) = \{0\}$. También tenemos que, como U_i es categórico y X conexo por caminos, existe una aplicación continua $H_i : U_i \times I \to X$ tal que $H_i(x, 0) = x$ y $H_i(x, 1) = *$ para todo $x \in U_i$ siendo $*$ el punto base. Definimos, para cada i, la aplicación $K_i : X \times I \to X$ como:

$$K_i(x,t) := \begin{cases} x, & x \in X \setminus B_i \\ H_i(x, th_i(x)), & x \in U_i \end{cases}$$

Por el lema de continuidad (lema 1.1), es sencillo ver que K_i es continua. Con esto, definimos una nueva aplicación $K : X \times I \to X^{n+1}$ como:

$$K(x,t) = (K_0(x,t), K_1(x,t), ..., K_n(x,t))$$

Podemos ver que, para cualquier $x \in X$, tenemos que $K(x, 0) = (x, x, ..., x) = \varDelta_{n+1}(x)$, pero no sabemos que ocurrirá con $K(x, 1)$. Por tanto, definimos la aplicación $f : X \to T^n(X)$ como $f(x) = K(x, 1)$ y deberemos probar que para todo $x \in X$, $f(x) \in T^n(X)$. En efecto, sea $x \in X = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Entonces existe $i_0 \in 0, 1, ..., n$ tal que $x \in A_{i_0}$ y, por tanto, $K_{i_0}(x, 1) = *$. Como $K(x, 1) = (K_0(x, 1), K_1(x, 1), ..., K_n(x, 1))$ y teniendo en cuenta lo anterior, vemos que $K(x, 1) = f(x)$ pertenece a $T^n(X)$. Esto demuestra que $K : \varDelta_{n+1} \simeq j_n \circ f$.

Recíprocamente, sea una aplicación continua $f : X \to T^n(X)$ y sea la aplicación continua $K : X \times I \to X^{n+1}$ tal que $K : \varDelta_{n+1} \simeq j_n \circ f$, es decir, $K(x, 0) = (x, x, ..., x)$ y $K(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in X$. Podemos escribir $j_n \circ f : X \to X^{n+1}$ como $j_n \circ f = (f_0, f_1, ..., f_n)$ donde $f_i : X \to X$ continua, para todo i y también $K : X \times I \to X^{n+1}$, $K = (K_0, K_1, ..., K_n)$ donde $K_i : X \times I \to X$ continua, para todo i.

Por hipótesis, el punto base tiene un entorno abierto categórico U y como X es conexo por caminos, tenemos que existe $H : U \times I \to X$ continua con $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = *$, para todo $x \in X$. Definimos $U_i := f_i^{-1}(U)$. Entonces U_i es abierto en X. Además, tenemos lo siguiente:

- Por un lado, $X = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$.
  Efectivamente, si $x \in X$, como $f(x) \in T^n(X)$ y $j_n(f(x)) = (f_0(x), f_1(x), ..., f_n(x)) \in X$, entonces existe $i \in \{0, 1, ..., n\}$ tal que $f_i(x) = * \in U$. Por tanto, $x \in f_i^{-1}(U) = U_i$.
- Para cada i, U_i es categórico.
  Esto se demuestra mediante la homotopía $G_i : U_i \times I \to X$ definida como:

$$G_i(x,t) := \begin{cases} K_i(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H(f_i(x), 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nótese que por el lema 1.1, G_i es continua.

Por tanto, $\{U_i\}_{i=0}^n$ forma un recubrimiento abierto y categórico de X y por tanto, $cat(X) \leq n$.

□

Como vimos anteriormente que podemos definir la categoría LS para espacios punteados, por lo que también encontramos una caracterización de Whitehead para este tipo de espacios. La demostración es muy similar, sólo hay que tener en cuenta que estamos trabajando con aplicaciones y homotopías punteadas.

Teorema 3.29. *Sea X un espacio punteado conexo por caminos, normal y tal que el punto base tiene un entorno abierto categórico punteado. Entonces son equivalentes:*

1. $cat_*(X, x_0) \leq n$
2. *Existe una aplicación continua punteada $f : X \to T^n(X)$ haciendo homotópicamente conmutativo, en el sentido punteado, el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & T^{n+1}(X) \arrow[d, "j_n"] \\ X \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

3.4. Cálculos.

Finalmente, calcularemos algunos ejemplos de la categoría LS. Como se podrá observar el cálculo de la categoría LS no es sencillo. Necesitaremos encontrar aproximaciones que nos puedan ayudar. En esta memoria incluiremos dos cotas que se suelen utilizar: el *cup-length* y el *cone-length*. Para el cup-length (también denominado *longitud cup*), necesitamos definir la *cohomología reducida* de un espacio punteado (X, x_0) y la *nilpotencia* de un anillo. La q-cohomología reducida $\widetilde{H}^q(X;R)$ se define como $\widetilde{H}^q(X;R) := \ker(H^q(X;R) \to H^q(\{x_0\};R))$. Además, si X es conexo por caminos, es fácil comprobar que:

$$\widetilde{H}^q(X;R) = \begin{cases} H^q(X;R) & q \neq 0 \\ 0 & q = 0 \end{cases}$$

Definición 3.30. *Sea R un anillo. Entonces la* nilpotencia *(o el* índice de nilpotencia*) de R, denotado por nil R, es el menor n tal que cualquier producto de longitud $n+1$ es nulo. Equivalentemente, es el mayor n tal que existe un producto de longitud n no nulo.*

La *R-longitud cup* de un espacio punteado X conexo por caminos, con R un anillo conmutativo, se define como

$$cup_R(X) := \text{nil } \widetilde{H}^*(X;R)$$

Esto es el menor n tal que todos los productos cup de longitud $n+1$ son nulos en la cohomología reducida $\tilde{H}^*(X;R)$; o si no existe tal n, entonces $cup_R(X) = \infty$. Teniendo en cuenta eso, podremos encontrar una cota de la categoría LS pero para poder demostrarlo, primero debemos ver un lema previo.

Lema 3.31. *Sean $A_i \subseteq X$ subconjuntos de X con $i = 0, 1, ..., n$ y se consideran las inclusiones $q_i : (X, \emptyset) \to (X, A_i)$ para $i = 0, 1, ..., n$ y $q : (X, \emptyset) \to (X, \cup_{i=0}^n A_i)$. Entonces:*

$$q^*(x_0 \smile x_1 \smile ... \smile x_n) = q_0^*(x_0) \smile q_1^*(x_1) \smile ... \smile q_n^*(x_n)$$

para todo $x_i \in H^*(X, A_i; R)$.

La demostración de este lema es sencilla y se deduce de la nota 2.7. Para poder ver una demostración más detallada ver [9]. Por tanto, podemos probar que el cup-length es una cota inferior de la categoría LS, es decir:

Teorema 3.32. *Sea X un espacio punteado y conexo por caminos. Entonces para cualquier anillo de coeficientes R se tiene que:*

$$cup_R(X) \leq cat(X)$$

Demostración. Si $cat(X) = \infty$, habremos terminado.
Si $cat(X) = n$, entonces existe un recubrimiento $\{U_i\}_{i=0}^n$ tal que U_i es abierto y categórico en X, para todo i. Al ser X conexo por caminos podemos suponer que U_i se deforma al punto x_0. Así tenemos triángulos homotópicamente conmutativos:

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[rr, hook, "in_i"] \arrow[dr] & & X \\ & \{x_0\} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Aplicando cohomología al triángulo anterior, obtenemos triángulos conmutativos para $p > 0$:

$$\begin{tikzcd} H^p(U_i;R) & & H^p(X;R) \arrow[ll, "(in_i)^*"'] \arrow[dl] \\ & H^p(\{x_0\};R) \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

Pero como $H^p(\{x_0\};R) = 0$, tenemos que $(in_i)^*$ es el homomorfismo trivial. Sean $x_0, x_1, ..., x_n \in \widetilde{H}^*(X;R)$ arbitrarios y supongamos que $x_i \in \widetilde{H}^{p_i}(X;R)$, para $p_i > 0$. Para cada i consideramos la sucesión exacta en cohomología del par (X, U_i):

$$... \longrightarrow H^{p_i}(X, U_i; R) \xrightarrow{q_i^*} H^{p_i}(X;R) \xrightarrow{(in_i)^*} H^{p_i}(U_i;R) \longrightarrow ...$$

donde $q_i : (X, \emptyset) \to (X, U_i)$ es la inclusión canónica. Como $(in_i)^* = 0$, se deduce por la exactitud que q_i^* es sobre. Sea $\overline{x}_i \in H^{p_i}(X, U_i; R)$ tal que $q_i^*(\overline{x}_i) = x_i$ para $i = 0, 1, ..., n$. Entonces, utilizando el lema anterior (lema 3.31), tenemos que:

$$\begin{aligned} x_0 \smile x_1 \smile ... \smile x_n &= q_0^*(\overline{x}_0) \smile q_1^*(\overline{x}_1) \smile ... \smile q_n^*(\overline{x}_n) \\ &= q^*(\overline{x}_0 \smile \overline{x}_1 \smile ... \smile \overline{x}_n) \in H^p(X, \bigcup_{i=0}^n U_i; R) = H^p(X, X; R) = 0 \end{aligned}$$

con $p = \sum_{i=0}^n p_i$. Por tanto, $x_0 \smile x_1 \smile ... \smile x_n = 0$ y concluimos que $cup_R(X) \leq n$.

$\square$

Teniendo en cuenta los ejemplos del capítulo 2 de los espacios proyectivos, podemos calcular fácilmente su cup-length. Para el caso real y por el teorema 2.8, como $x^n = x \smile x \smile ...^{(n} \smile x \neq 0$ tenemos que $cup_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}P^n)$ =nil $\widetilde{H}^*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ =nil $\mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1}) = n$. Además, con el mismo razonamiento, obtenemos que $cup_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}P^n) = cup_{\mathbb{Z}}(\mathbb{H}P^n) = n$. Por tanto, por el teorema 3.32 obtenemos que:

$$n \leq cat(\mathbb{R}P^n), \qquad n \leq cat(\mathbb{C}P^n), \qquad n \leq cat(\mathbb{H}P^n)$$

Otro cota importante se obtiene gracias al *cone-length*.

Definición 3.33. *Dado un espacio conexo por caminos X, definiremos el* cone-length *de X, que denotamos por $cl(X)$, como el menor natural n tal que existen sucesiones cofibradas:*

$$Z_{i-1} \longrightarrow Y_{i-1} \longrightarrow Y_i$$

con $1 \leq i \leq n$, $Y_0 \simeq *$ e $Y_n \simeq X$. Si X es contráctil, entonces $cl(X) = 0$.

Proposición 3.34. *Sea $f : Y \to X$ una aplicación continua. Entonces*

$$cat(C_f) \leq cat(X) + 1$$

Demostración. Sea $A = \{[x,t] \in CY \mid t < \frac{2}{3}\}$ tal que formamos el abierto $B = X \cup_f A$ en CX. Observamos que $B \simeq X$ tienen el mismo tipo de homotopía, por tanto, $cat(B) = cat(X)$.
Definimos $C = \{[x,t] \in CY \mid t > \frac{1}{3}\}$ abierto en CY y vemos que $C \simeq CY$ son homotópicamente equivalentes. Luego, por la proposición 1.11, C es contráctil, o lo que es lo mismo, $cat(C) = 0$.

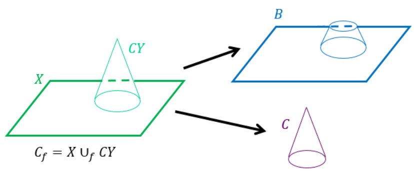

Figura 3.2. CW-complejo C_f y los abiertos B y C.

Además, tenemos que $B \cup C = C_f$ y, al ser abiertos, podemos aplicar el teorema 3.8 (apartado 5). Así:

$$cat(C_f) = cat(B \cup C) \leq cat(B) + cat(C) + 1 = cat(X) + 0 + 1 = cat(X) + 1$$

□

Proposición 3.35. *Sea X un espacio conexo por caminos. Entonces $cat(X) \leq cl(X)$.*

Demostración. Supongamos que $cl(X) = n$. Entonces, para $1 \leq i \leq n$ tenemos que existe una sucesión cofibrada:

$$Z_{i-1} \xrightarrow{f_i} Y_{i-1} \longrightarrow Y_i$$

con $Y_i = C_{f_i} = Y_{i-1} \cup_{f_i} CZ_{i-1}$, $Y_0 \simeq *$ e $Y_n \simeq X$. Por el teorema 3.34, obtenemos que $cat(Y_i) \leq cat(Y_{i-1}) + 1$. Como $Y_0 \simeq *$, por el corolario 3.18 sabemos que $cat(Y_0) = cat(*) = 0$ y, por tanto, $cat(Y_1) \leq cat(Y_0) + 1 = 1$. Supongamos cierto para $i - 1$, es decir, $cat(Y_{i-1}) \leq i - 1$. Entonces:

$$cat(Y_i) \leq cat(Y_{i-1}) + 1 = (i - 1) + 1 = i$$

Teniendo en cuenta que para $Y_n \simeq X$, obtenemos por inducción que $cat(X) = cat(Y_n) \leq n$.

□

Observamos que la dimensión de un CW-complejo constituye una cota superior del cone-length (véase 1.3).

Proposición 3.36. *Sea X un CW-complejo tal que $X^0 = *$. Entonces $cl(X) \leq dim(X)$.*

Demostración. Si $dim(X) = \infty$, habremos acabado. Supongamos que $dim(X) = n$. Entonces $X = X^n$ y tenemos una sucesión cofibrada de la forma:

$$\sqcup_\alpha S^{i-1}_\alpha \to X^{i-1} \to X^i$$

donde $X^0 = *$. Por tanto, $cl(X) \leq n$.

$\square$

Observación 3.37. La mayoría de CW-complejos con los trabajamos comienzan con $X^0 = *$. Aún así, también podemos demostrar la proposición anterior para cualquier CW-complejo conexo X teniendo en cuenta que siempre se puede encontrar otro CW-complejo Y homotópicamente equivalente a X tal que $Y^0 = *$. Esta propiedad se puede ver probada en [10] y no la incluiremos en la memoria ya que sería demasiado extenso.

Teniendo en cuenta la estructura celular, es claro que el cone-length de los n-espacios proyectivos, ya sean reales, complejos o cuaterniónicos, es menor o igual a n y por la proposición 3.35, obtenemos que:

$$cat(\mathbb{R}P^n) \leq n, \qquad cat(\mathbb{C}P^n) \leq n, \qquad cat(\mathbb{H}P^n) \leq n$$

Teniendo en cuenta el cup-length de los espacios proyectivos, queda demostrado que $cat(\mathbb{R}P^n) = cat(\mathbb{C}P^n) = cat(\mathbb{H}P^n) = n$.

El siguiente ejemplo que calcularemos es el de la categoría LS de cualquier *superficie compacta y conexa* y probaremos que es igual a 2, salvo en el caso concreto de la 2-esfera que sabemos que es 1. Recordemos que una superficie no es más que una 2-variedad topológica. No obstante, también es conocido que son CW-complejos de dimensión 2. Además, toda superficie compacta y conexa se genera a partir de un proceso denominado *suma conexa*. Coloquialmente, dadas dos superficies A y B, la suma conexa $A\#B$ es una superficie que se obtiene tras eliminar un disco abierto en A y en B y pegar los espacios resultantes a través de las fronteras que estas eliminaciones producen.

Por tanto, mediante el siguiente teorema podemos ver cómo se construyen las superficies conexas y compactas. La demostración queda omitida y referimos al lector a [3] o [8]. Recordemos que denotamos por T al toro, $\mathbb{R}P^2$ al plano proyectivo real y S^2 a la 2-esfera.

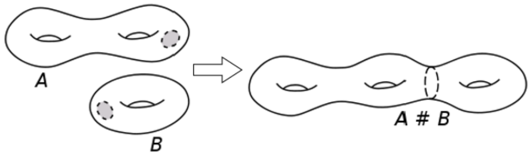

Figura 3.3. Construcción de la suma conexa de A y B.

Teorema 3.38 (Teorema de clasificación de superficies). *Toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una y una sola de las siguientes superficies:*

$$S^2\#T\#T\#...^{(g}...\#T(g \geq 0)$$
$$\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#...^{(h}...\#\mathbb{R}P^2(h \geq 1)$$

A la superficie $X_g = S^2\#T\#T\#...^{(g}...\#T$ se le denomina superficie orientable estándar de género g y a $X_h = \mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#...^{(h}...\#\mathbb{R}P^2$, superficie no orientable estándar de género h. Obsérvese que si $g = 0$, entonces $X_0 = S^2$ es la 2-esfera.

Con esta clasificación de las superficies, podremos encontrar la categoría LS de éstas. El siguiente lema, cuya demostración se puede encontrar en [2], describe el anillo de cohomología de toda superficie compacta y conexa, tomando $\mathbb{Z}$ como anillo de coeficientes para el caso orientable y $\mathbb{Z}_2$ para el caso no orientable.

Lema 3.39. *Si X es una superficie compacta y conexa orientable de género $g \geq 1$, entonces el anillo de cohomología de X con coeficientes en $\mathbb{Z}$ viene determinado por la siguiente descomposición:*

$$H^0(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ generado por } 1 \in H^0(X;\mathbb{Z})$$
$$H^1(X;\mathbb{Z}) \text{ tiene como base } a_1, a_2, b_1, b_2 \in H^1(X;\mathbb{Z})$$
$$H^2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \text{ con clase fundamental } c \in H^2(X;\mathbb{Z})$$

Además el producto cup viene dado por $a_i \smile a_j = 0$, $b_i \smile b_j = 0$ y

$$a_i \smile b_j = -b_i \smile a_j = \begin{cases} c, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Si X una superficie compacta y conexa no orientable de género $g \geq 1$, entonces el anillo de cohomología de X con coeficientes en $\mathbb{Z}_2$ viene determinado de la siguiente manera:

$$H^0(X;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \text{ generado por } 1 \in H^0(X;\mathbb{Z}_2)$$
$$H^1(X;\mathbb{Z}_2) \text{ tiene como base } A_1, A_2, A_3, A_4 \in H^1(X;\mathbb{Z}_2)$$
$$H^2(X;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \text{ con clase fundamental } B \in H^2(X;\mathbb{Z}_2)$$

Además el producto cup viene dado por

$$A_i \smile A_j = \begin{cases} B, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Proposición 3.40. *Sea X una superficie compacta y conexa de género $g \geq 1$. Entonces $cat(X) = 2$.*

Demostración. Supongamos que X es orientable. Por el lema 3.39 y como $a_1 \smile b_1 = c \neq 0$, entonces $cup_{\mathbb{Z}}(X) \geq 2$. Además, por el teorema 3.32 tenemos que $cat(X) \geq 2$. Supongamos que X es no orientable. Por el lema 3.39 y por $A_i \smile A_i = B \neq 0$, entonces $cup_{\mathbb{Z}_2}(X) \geq 2$. Por lo tanto, $cat(X) \geq 2$.
Al ser X un CW-complejo de dimensión 2, entonces por la proposición 3.36, obtenemos que $cat(X) \leq 2$.

□

3.5. Aplicaciones.

En este último apartado estudiaremos una de las aplicaciones más utilizadas de la categoría LS: la demostración del *Teorema de Borsuk-Ulam* y sus equivalentes como, por ejemplo, el *Teorema del punto fijo de Brouwer*. Este teorema es uno de los más utilizados en Topología pero también lo podemos encontrar en resultados de *Ecuaciones Diferenciales*, *Económicas*, etc. Es aceptado que *S. Ulam* fue el primero en conjeturar el teorema y que posteriormente *K. Borsuk* lo demostró en 1933; pero en 1930 Lusternik y Schnirelmann dieron una demostración a un problema equivalente, denominado el *Teorema de Lusternik-Schnirelmann* (no confundir con el teorema visto en la sección 3.1 de este capítulo). Denominaremos el *punto antipodal* de un punto $x \in S^n$ como el opuesto a x, es decir, $-x \in S^n$.

Teorema 3.41 (Teorema de Lusternik-Schnirelmann). *Si S^n tiene un recubrimiento formado por $n+1$ abiertos (o cerrados), entonces al menos uno de los abiertos (o cerrados) contiene un par $(x, -x)$ de puntos antipodales.*

Demostración. Supongamos que $\{C_i\}_{i=0}^n$ es un recubrimiento abierto de S^n, donde ningún C_i tiene puntos antipodales. Tomamos $S^n \subset D^{n+1}$ y sea $A_i \subset D^{n+1}$ sea el cerrado definido por segmentos desde el origen hasta cada punto de C_i. Observamos que A_i se puede contraer al origen.

Además, sabemos que $\mathbb{R}P^{n+1} = D^{n+1}/\sim$ donde $\sim$ identifica los puntos de la frontera S^n con sus antipodales y según las hipótesis, $A_i \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ es inyectivo. Entonces A_i es contráctil en $\mathbb{R}P^{n+1}$ y, por tanto, $\mathbb{R}P^{n+1}$ se recubre por

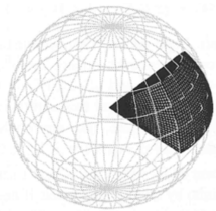

Figura 3.4. Construcción de A_i.

$A_0, A_2, ..., A_n$. Entonces $cat(\mathbb{R}P^{n+1}) \leq n$ pero por el apartado anterior, sabemos que $cat(\mathbb{R}P^{n+1}) = n + 1$. Por consiguiente, existe al menos un C_i que contiene puntos antipodales.

$\square$

Demostraremos el *Teorema de Borsuk-Ulam* utilizando el teorema anterior, aunque podemos encontrar diferentes demostraciones sin tener que usarlo. Además, debemos recordar que la *aplicación antipodal* es aquella aplicación que envía cada punto de la esfera a su punto antipodal.

Teorema 3.42 (Teorema de Borsuk-Ulam). *No existen aplicaciones antipodales $f : S^n \to S^{n-1}$.*

Demostración. Supongamos que existe $f : S^n \to S^{n-1}$ antipodal. Podemos representar S^{n-1} como la frontera de un n-símplice y tomaremos $F_1, F_2, ..., F_{n+1}$ las caras del símplice. Observamos que ningún F_j contiene puntos antipodales. Sea $G_j = f^{-1}(F_j)$, entonces $\{G_j\}_{j=1}^{n+1}$ recubre a S^n. Por el teorema 3.41, existe un G_j que contiene puntos antipodales $x, -x$. Por lo que $f(x), f(-x) = -f(x) \in F_j$, que es una contradicción.

$\square$

Finalmente veremos otra variante de los teoremas 3.41 y 3.42 que mencionamos anteriormente: el *Teorema del punto fijo de Brouwer*. Para ello, necesitamos demostrar un lema previo.

Lema 3.43. *Sea $f : D^n \to D^n$ continua. Si f no tiene un punto fijo, entonces existe un retracto en D^n sobre su frontera S^{n-1}.*

Demostración. Definimos la retracción $r : D^n \to S^{n-1}$ como:

$$r(x) = \frac{x - f(x)}{\| x - f(x) \|}$$

Como $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^n$, la aplicación r está bien definida y es continua. Además observamos que para todo $s \in S^{n-1}$, tenemos que $r(s) = s$.

□

Por tanto, nos encontramos en las condiciones para demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.44 (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Toda aplicación $f : D^n \to D^n$ tiene un punto fijo.*

Demostración. Supongamos que f no tiene punto fijo y tomamos la retracción $r : D^n \to S^{n-1}$ del lema 3.43. Entonces definimos la aplicación $g : S^n \to S^{n-1}$ como:

$$g(x_0, ..., x_n) = \begin{cases} r(x_0, ..., x_n) & x_n \geq 0 \\ -r(-x_0, ..., -x_n) & x_n \leq 0 \end{cases}$$

Observamos que $g(-x) = -g(x)$, es decir, g es antipodal pero esto contradice el teorema 3.42.

□

Bibliografía

[1] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea y D. Tanré. *Lusternik-Schnirelmann Category.* American Mathematical Society. 103º edición, 2003

[2] A. Hatcher. *Algebraic topology.* Cambridge University Press. 1ª edición, 2001

[3] J. Munkres. *Topología.* Prentice Hall. 2ª edición, 2000

[4] J.W. Vick. *An Introduction to homotopy theory.* Springer-Verlag New York, 1994

[5] W. Massey *Introducción a la topología algebraica.* Reverté, 1972

[6] J.M. García Calcines y F.J. Díaz Díaz. *Curso de topología general.* Visión Net, 2005

[7] J. Oprea. *Applications of Lusternik-Schnirelmann category and its generalizations.* Institute of Biophysics and Biomedical Engineering at the Bulgarian Academy of Sciences. ISSN 1312-5192. 2004

[8] C. Kosniowski. *Topoogía algebraica.* Reverté, 1989

[9] E. Spanier. *Algebraic topology (corrected reprint of the 1966 original).* Springer, 1981

[10] J.P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology.*

[11] S.T. Hu. *Theory of retracts.* Wayne State University Press, 1965

[12] O. Hanner. *Some theorems on absolute neighborhood retracts.* Arkiv för Matematik, 1950

Lusternik-Schnirelmann category

Tiffany López Nicholson
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100760125@ull.edu.es

Abstract

In this project we study the Lusternik-Schnirelmann category. This invariant was defined by Lusternik and Schnirelmann in their studies in 1934. It was originally conceived for a smooth manifold, giving an lower bound to the number of critical points for any smooth real function defined on the smooth manifold. Later on, Fox generalized this invariant for any topological space and discovered that it has many properties, such as being a homotopy invariant. After studying these versions, we present the computation of some examples of the Lusternik-Schnirelmann category of certain spaces as well as some applications of this invariant.

1. Original definition of the Lusternik-Schnirelmann category

We say that the continuous map $\phi : M \times \mathbb{R} \to M$ is a dynamical system if it verifies that $\phi(x,0) = x$ and $\phi(\phi(x,t),s) = \phi(x,t+s)$, for all $x \in M$ and $t,s \in \mathbb{R}$. We say that the dynamical system ϕ is gradient-like if there exists a map $f : M \to \mathbb{R}$, called Lyapunov function, such that for each $x \in M$ it verifies that $f(\phi(x,t)) < f(\phi(x,s))$, for all $t,s \in \mathbb{R}$ such that $t > s$; or $\phi(t,x) = x$, for all $t \in \mathbb{R}$.
For a dynamical system ϕ on M, we say that $x \in M$ is a critical point if $\phi^x : \mathbb{R} \to M$, where $\phi^x(t) := (x,t)$, is constant. If ϕ is gradient-like with f the Lyapunov function, then we may say that x is a critical point of f. So, $K(f)$ will denote the set of critical points of f. An important particular case occurs when we start from a differentiable map $f : M \to \mathbb{R}$, M being a closed smooth manifold. When we integrate the vector field $-grad(f)$, we obtain a gradient-like dynamical system whose Lyapunov function is precisely f. Let M be a topological space and $A \subseteq M$. Then A is categorical if the inclusion map $A \hookrightarrow M$ is nulhomotopic.
We define the Lusternik-Schnirelmann category of A on M, expressed as $cat_M(A)$, as the least integer $m \geq 0$ such that A has a covering with $m+1$ subsets of M:

$$A \subseteq F_0 \cup F_1 \cup ... \cup F_m$$

where each F_i is closed and categorical in M. If $A = \emptyset$, then $cat_M(\emptyset) = -1$ and if $A = M$, then we write $cat(M) := cat_M(M)$.
Using these notions, we can state the Lusternik-Schnirelmann theorem. Let $f : M \to \mathbb{R}$ be a differentiable map defined on a smooth closed manifold M, then:

$$cat(M) + 1 \leq card(K(f))$$

where $card(K(f))$ denotes the cardinality of the set of critical points $K(f)$.

2. Definition given by Fox and other versions

Fox rewrote the definition of the Lusternik-Schnirelmann category using open coverings of the space X instead of closed coverings. In most of the interesting cases, these definitions are equivalent like, for example, if X is a manifold (or more generally, an ANR). So, from now on, we will use the notation $cat(X)$ to refer the Lusternik-Schnirelmann category using open coverings.
One of the most important properties that Fox proved was that the Lusternik-Schnirelmann is a homotopy invariant. In other words, if X and Y are homotopy equivalent, then:

$$cat(X) = cat(Y)$$

But in Algebraic Topology, we normally use pointed spaces. So we can define the Lusternik-Schnirelmann category for these type of spaces, called the pointed Lusternik-Schnirelmann category. So for a pointed space (X, x_0), the pointed Lusternik-Schnirelmann category of (X, x_0), denoted as $cat_*(X, x_0)$, is the least integer n such that X has a covering with $n+1$ pointed categorical open subsets. If our space X verifies that it is a normal path-connected space with non-degenerate basepoint x_0, then we can prove the equality:

$$cat(X) = cat_*(X, x_0)$$

The last version that we study is the Whitehead definition of the Lusternik-Schnirelmann category. To see this, we need a previous notion called fat-wedge of a space $(X,*)$ and defined as the subspace of X^{n+1}:

$$T^{n+1}(X) = \{(x_0, x_1, ..., x_n) \in X^{n+1} \mid \text{there exists } i \in \{0,1,...,n\} \text{ where } x_i = *\}$$

For a normal path-connected space X with non-degenerate basepoint $*$, the following are equivalent:

1. $cat(X) \leq n$
2. There exists a continuous map $f : X \to T^n(X)$ which makes the following diagram commutative up to homotopy:

$$\begin{tikzcd} & T^{n+1}(X) \arrow[d, "j_n"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\Delta_{n+1}"'] & X^{n+1} \end{tikzcd}$$

3. Important bounds

Let R be a ring and (X, x_0) a pointed space. Then the q-reduced cohomology $\widetilde{H}^q(X;R)$ is defined as $\widetilde{H}^q(X;R) = \ker(H^q(X;R) \to H^q(\{x_0\};R))$. Also, if X is path-connected then it is easy to see:

$$\widetilde{H}^q(X;R) = \begin{cases} H^q(X;R), & q \neq 0 \\ 0, & q = 0 \end{cases}$$

The cup-length of X with coefficients in R is the least integer k (or ∞) such that all $(k+1)$-fold cup products vanish in the reduced cohomology $\widetilde{H}^*(X;R)$; we denote this by $cup_R(X)$. Taking this into consideration, we can find an lower bound of $cat(X)$. It is proved that if X is path-connected, then:

$$cup_R(X) \leq cat(X)$$

The cone-length of a path-connected X, denoted $cl(X)$, is 0 if X is contractible and, otherwise, equal to the least integer n such that there are cofibration sequences:

$$Z_{i-1} \to Y_{i-1} \to Y_i$$

where $i \leq i \leq n$ and with $Y_0 \simeq *$ and $Y_n \simeq X$. So we can prove a upper bound of $cat(X)$ when X is path-connected.

$$cat(X) \leq cl(X)$$

Using these bounds, we can compute the Lusternik-Schnirelmann category of the projective space KP^n, with $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$, i.e.:

$$cat(KP^n) = n$$

4. Applications

The Lusternik-Schnirelmann category is used to prove the Borsuk-Ulam Theorem and its equivalents, like the Brouwer's fixed-point Theorem. To do this, first we must see the Lusternik-Schnirelmann Theorem which states that if S^n is covered by open sets $C_0, C_1, ... C_n$, then at least one C_i contains antipodal points.
Using the Lusternik-Schnirelmann Theorem, we can prove Borsuk-Ulam Theorem, i.e., there are no antipodal maps $f : S^n \to S^{n-1}$; and also Brouwer's fixed-point Theorem which states that every map $f : D^n \to D^n$ has a fixed point.

References

[1] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea y D. Tanré. *Lusternik-Schnirelmann Category.*

[2] A. Hatcher. *Algebraic topology.*

[3] J.W. Vick. *An Introduction to homotopy theory.*

[4] J. Oprea. *Applications of Lusternik-Schnirelmann category and its generalizations.*

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de Septiembre, 2017