

Clara Rodríguez Pérez

Geometría diferencial en el estudio de imágenes médicas

Differential geometry for the study of medical
images

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2017

DIRIGIDO POR

*Juan Carlos Marrero González
Edith Padrón Fernández*

Juan Carlos Marrero González
Departamento de Matemáticas, Es-
tadística e Investigación Operativa.
Universidad de La Laguna.
38271 La Laguna, Tenerife.

Edith Padrón Fernández
Departamento de Matemáticas, Es-
tadística e Investigación Operativa.
Universidad de La Laguna.
38271 La Laguna, Tenerife.

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría dar las gracias a mis tutores Juan Carlos Marrero González y Edith Padrón Fernández por su paciencia y dedicación para realizar este trabajo de fin de grado, así como por todos los conocimientos que me han transmitido a lo largo de estos dos últimos años.

En segundo lugar, me gustaría dar las gracias al profesor Ximo Gual-Arnau por sugerirnos la temática que abordamos en esta Memoria, al profesor Antonio Lorenzo Bonilla Ramírez por su ayuda para demostrar qué tipo de espacio es $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ y a la profesora María Soledad Pérez Rodríguez por su colaboración en la creación del algoritmo.

En tercer lugar, me gustaría agradecer a mi familia y amigos todo el apoyo que me han dado, no sólo durante estos dos últimos años, sino también desde el primer día en que dio comienzo mi viaje por las Matemáticas.

Por último, quiero dedicar esta Memoria a mis abuelas, a mis padres y a mi hermana, ya que han sido mi inspiración en la elección de este trabajo. Sois un ejemplo a seguir.

Muchas gracias a todos.

Resumen · Abstract

Resumen

La teoría de variedades de Fréchet Riemannianas nos proporciona un marco teórico para abordar el estudio del espacio \mathbb{M} de curvas planas cerradas regulares, de modo que se puede introducir la distancia entre dos de estas curvas. En esta Memoria presentamos una noción de curva media extrínseca de una muestra finita de curvas planas cerradas regulares. El término “extrínseco” alude al hecho de que embebemos \mathbb{M} en un espacio euclídeo para poder calcular la media de forma natural y desde esta, dar la noción de curva media extrínseca en \mathbb{M} . Además, damos un algoritmo para el cálculo de la curva media extrínseca y lo aplicamos al estudio de imágenes médicas. Para ello, previamente lo discretizamos y lo implementamos en MATLAB. Este trabajo está basado en el artículo [8].

Palabras clave: *Variedades de Fréchet – Curvas planas cerradas regulares – Métricas Riemannianas – Distancia entre curvas – Curva media extrínseca – Aplicaciones a imágenes médicas.*

Abstract

The Riemannian Geometry on Fréchet manifolds gives us a theoretical framework in order to study the space \mathbb{M} of regular closed plane curves, so that we can introduce the distance between two such curves. In this Memory, we present a notion of the extrinsic mean curve of a finite sample of regular closed plane curves. The word “extrinsic” refers to the fact that we have embedded \mathbb{M} into an euclidean space in order to compute the mean in a natural way and from it, give the notion of an extrinsic mean curve. Furthermore, we develop an algorithm to calculate the extrinsic mean curve and we use it to study medical images. To do that, previously we discretize and implement the algorithm with MATLAB. This work is based on the paper [8]

Keywords: *Fréchet manifolds – Regular closed plane curves – Riemannian metrics – Distance between curves – Extrinsic mean curve – Applications to medical images.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Fundamento teórico	1
1.1. Espacios de Fréchet	1
1.2. Un ejemplo de espacio de Fréchet: el espacio de las curvas diferenciables cerradas en el plano	5
1.3. Variedades de Fréchet	7
1.4. La subvariedad de Fréchet de curvas diferenciables planas cerradas regulares	11
1.5. Una métrica Riemanniana en la variedad de curvas planas cerradas regulares	14
1.6. Embebimiento de la variedad \mathbb{M} en un espacio euclídeo	20
1.7. Media extrínseca de una muestra de n curvas planas cerradas regulares	28
2. Algoritmo	35
2.1. Descripción del algoritmo	35
2.2. Ejemplo matemático	37
2.3. Aplicación a una imagen médica	40
3. Conclusiones	43
Bibliografía	45

Introducción

Cuando un radiólogo se enfrenta con la decisión de radiar un tumor, su experiencia e intuición son dos herramientas fundamentales. Sobre la imagen computerizada en 2D, el médico señala la curva cerrada cuyo interior debe ser radiado. Sin embargo, puede ocurrir que los contornos señalados para un mismo tumor por profesionales diferentes de la medicina no sean iguales. Delimitar con la mayor exactitud posible estos contornos es significativamente importante. Es necesario radiar la mayor masa tumoral posible, mientras se intenta dañar la menor cantidad de tejido no afectado por el tumor. Durante los últimos años, distintos grupos de investigación han intentado crear herramientas más eficaces para enfrentarse a este problema (véase, por ejemplo, [2], [7], [10]).

Las Matemáticas, de una manera transversal, juegan un papel fundamental en el estudio de esta problemática. El término transversal se justifica porque en la resolución del problema intervienen diferentes áreas:

- *La Geometría Diferencial* de variedades Riemannianas de Fréchet infinito dimensionales, ya que el espacio de estas curvas determina una variedad de este tipo.
- *El Análisis Funcional* de los espacios de Fréchet sobre los que se modelan estas variedades.
- *La Estadística* para hallar una media de las curvas cerradas consideradas.
- *El Análisis Numérico* para implementar computacionalmente el proceso.

Para estudiar este problema el primer elemento que debemos considerar es el espacio de *las formas planas*. Pero, ¿qué es matemáticamente una forma plana? En algunos trabajos (véase, por ejemplo, los textos [4], [11]) consideran una forma plana como un número finito de puntos del plano. La teoría matemática desarrollada en torno a esta descripción depende de la elección de puntos que se haya hecho, por lo que en muchas ocasiones es poco eficiente.

La otra opción (expuesta por Anzecott et al [1] y detallada por Younes [16]) es considerar una forma como una curva diferenciable cerrada, de modo que, podamos referirnos al objeto a través de su contorno. Para desarrollar esta perspectiva debemos trabajar con un concepto matemático complejo: las variedades de Fréchet Riemannianas infinito dimensionales (véase, por ejemplo, [9] y las referencias contenidas en dicho artículo).

Una de las desventajas de considerar variedades infinito dimensionales es la cantidad de problemas que plantea relacionados con el cálculo de herramientas estadísticas como la media. Si tomamos una muestra de puntos de un espacio euclídeo, es sencillo calcular la media. En cambio, en el caso del espacio de curvas planas cerradas regulares, al que denotamos por \mathbb{M} , la tarea no es tan simple.

El primer problema en estos espacios es cómo definir la distancia entre curvas. Un primer análisis muestra que \mathbb{M} es una variedad de Fréchet sobre la que se puede definir una métrica Riemanniana (véase, por ejemplo, [14]). Por lo tanto, una manera de establecer la distancia entre curvas es considerar la correspondiente distancia Riemanniana sobre \mathbb{M} . En este caso, obtenemos una media intrínseca como se muestra en [5] y [6].

Otra opción es embeber la variedad Riemanniana \mathbb{M} en un espacio euclídeo y desde allí, calcular la media de la muestra. En general, esta media no está en \mathbb{M} , así que se debe establecer un procedimiento para encontrar la curva de \mathbb{M} que minimice la distancia con la curva media. Esta nueva curva se denomina curva media extrínseca. Este tipo de medida es interesante cuando las curvas representan fronteras de superficies anatómicas donde las rotaciones, traslaciones o escalamientos son elementos que se deben tener en cuenta en las conclusiones médicas.

El objetivo de este trabajo es indagar respecto de la segunda posibilidad. Así, presentamos la construcción propuesta en [8] de una media extrínseca, detallando las demostraciones de cada uno de los resultados contenidos en el mismo y clarificando algunos conceptos. Además, creamos un algoritmo que se deriva de la fundamentación teórica y se aplica a un caso médico, con el fin de mostrar su posible aplicabilidad al mundo real.

La Memoria está estructurada en tres capítulos y esta introducción. El Capítulo 1 comienza con una breve presentación de los espacios de Fréchet, en la que mencionamos algunos conceptos que han formado parte de la formación del grado de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Éstos son los de métrica, sucesión de Cauchy, espacio normado, espacio vectorial topológico, espacio de Banach y seminorma.

Un espacio de Fréchet es un espacio vectorial topológico, de dimensión no necesariamente finita, Hausdorff, cuya topología viene definida por un conjunto numerable de seminormas respecto de las cuales es completo. Éste es el caso de uno de los espacios que ocupa la atención de esta Memoria: el espacio de curvas planas C^∞ -diferenciables cerradas, que denotamos por

$$C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2).$$

En la Sección 1.2 se prueba que este espacio es un espacio de Fréchet.

No obstante, estamos interesados en centrar nuestro estudio en el espacio \mathbb{M} de curvas planas cerradas regulares. Este espacio no es un espacio de Fréchet, sino un abierto del espacio vectorial $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Por lo tanto, es preciso introducir el concepto de variedad de Fréchet, esto es, la extensión infinito dimensional de la noción de variedad diferenciable modelada, en este caso, sobre espacios de Fréchet. En la Sección 1.3, mencionamos los principales resultados que se requieren sobre variedades de Fréchet sin precisar sus demostraciones. La geometría de estas estructuras es bastante diferente a la geometría de las variedades finito dimensionales. Cabe destacar que el Teorema de la función inversa no es cierto en general y que, sólo bajo ciertas condiciones, se puede emplear para generar subvariedades de Fréchet.

Éste es el caso de las curvas cerradas regulares sobre \mathbb{R}^2 con centroide localizado en el origen y de longitud 1. El espacio de estas curvas, al que denotamos por \mathbb{M}_d , es una subvariedad de \mathbb{M} , hecho que se prueba en la Sección 1.4. Esta subvariedad resulta de especial importancia, porque podemos identificar \mathbb{M} con el producto cartesiano

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}_d.$$

Por otro lado, en [14], los autores introducen una métrica sobre \mathbb{M} tal que este espacio es una variedad de Riemann. Así, esta métrica se traduce en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}_d$ como la inducida por las métricas estándares en \mathbb{R}^2, \mathbb{R} y una tipo Sobolev sobre \mathbb{M}_d . Esta identificación se realiza en la Sección 1.5. Además, con el objetivo de facilitar las operaciones, identificamos \mathbb{M}_d con

$$\mathbb{M}'_d = \{f \in \mathbb{M} / f(0) = (0, 0), L(f) = 1\},$$

donde $L(f)$ es la longitud de la curva f .

Con el fin de poder motivar la noción de curva media extrínseca, en la Sección 1.6 embebemos \mathbb{M}'_d en un espacio euclídeo infinito dimensional $V \times V$, donde V es el espacio de las curvas cerradas en \mathbb{R} . Este espacio V es un espacio euclídeo con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle_V = \int_0^{2\pi} f(\theta)g(\theta) d\theta.$$

La clave para construir el embebimiento de \mathbb{M}'_d en $V \times V$ es la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : St^0(2, V) &\rightarrow \mathbb{M}'_d \\ (a, b) &\rightarrow \Psi(a, b)(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta (a(s) + ib(s))^2 ds, \end{aligned}$$

donde

$$St^0(2, V) = \{(a, b) \in V \times V / \|a\|_V = 1, \|b\|_V = 1, \langle a, b \rangle_V = 0, (a(\theta), b(\theta)) \neq (0, 0) \forall \theta \in \mathbb{S}^1\}$$

es una subvariedad de $V \times V$. De hecho, $St^0(2, V)$ es un recubrimiento de dos hojas sobre \mathbb{M}'_d . Así, \mathbb{M}'_d es isométrico, vía Ψ , con cada una de las hojas $\left(St^0(2, V)\right)^+$ del recubrimiento. De esta manera, podemos considerar el embebimiento isométrico de $\mathbb{M} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}'_d$ en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$. Este embebimiento nos permite abordar la noción de curva media de una muestra de curvas de \mathbb{M} . Si vemos estas curvas como elementos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$ vía el embebimiento anterior, calcular su media en dicho espacio es simple. Sin embargo, esta media no tiene por qué pertenecer a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \left(St^0(2, V)\right)^+ \cong \mathbb{M}$. Para solucionar este problema buscamos el elemento de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \left(St^0(2, V)\right)^+$ que minimiza la distancia a la media calculada en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$.

Todo este desarrollo teórico nos permite elaborar un algoritmo que describimos en la Sección 2.1 del Capítulo 2. Además, con el fin de aplicarlo a imágenes médicas, discretizamos el proceso y lo implementamos en MATLAB. Esta implementación puede hallarse en este [enlace](#).

Asimismo, en este capítulo estudiamos dos ejemplos. Un primer ejemplo que es un juguete matemático: tres circunferencias concéntricas. Para ello, hacemos un análisis del problema continuo y, posteriormente lo discretizamos. El segundo es una aplicación del algoritmo a una imagen médica de un tumor neuroepitelial disembrionárico ([12]). En ambos casos se discretizan las curvas, se calculan sus longitudes y centroides y se presentan los dibujos de las curvas medias.

Seguidamente, en el Capítulo 3 desarrollamos las conclusiones y las posibles aplicaciones a problemas futuros relacionados con esta temática.

Por último, cerramos la Memoria con la Bibliografía referenciada en el texto.

Fundamento teórico

En este primer capítulo desarrollamos el fundamento teórico del problema que queremos plantear en esta Memoria: dar una noción de media extrínseca de una muestra finita de curvas planas cerradas regulares. Las herramientas principales serán las variedades de Fréchet Riemannianas.

1.1. Espacios de Fréchet

‘Ahora estoy cerca’, ‘Ahora estoy lejos’. Así nos explicaba *Coco* en *Barrio Sésamo* la noción de distancia, al tiempo que se acercaba o se alejaba de la cámara. Pero para usarla matemáticamente, conviene explicarla de manera más rigurosa. Para ello, introducimos una función que a cada par de objetos distintos, por ejemplo la cámara y *Coco*, le asigna un número real positivo, esto es, su separación. Sin embargo, esta función no puede ser arbitraria, pues pasarían cosas extrañas. Si permitimos que la distancia en \mathbb{R} sea $d(x, y) = (x - y)^2$, ocurriría que para ir de 0 a 2 tendríamos que desplazarnos 4 unidades pero de 0 a 1 y de 1 a 2 caminaríamos menos, ya que $d(0, 1) + d(1, 2) = 2$. ¿Cómo es posible que una guagua tarde menos haciendo un recorrido mayor? Por eso, debemos dar una definición que se ajuste a las necesidades intuitivas y matemáticas, evitando así casos raros como el anterior.

Definición 1.1.1 *Sea X un conjunto. Se dice que $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ define una distancia o métrica, en X si se cumplen las siguientes propiedades:*

- (a) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$ y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
- (b) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$
- (c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

En estas condiciones, se dice que el par (X, d) es un espacio métrico.

Sobre este tipo de espacios podemos definir una topología donde los siguientes subconjuntos determinan una base de la misma

$$\mathfrak{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\},$$

con $x \in X$ y ε un número real positivo. Así, respecto de la topología correspondiente, d es una aplicación continua.

En estos espacios, podemos introducir la noción de completitud.

Definición 1.1.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X es una sucesión de Cauchy si dado un número real $\varepsilon > 0$ y un número natural $N > 0$, se cumple que

$$\forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

De este modo, un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Un ejemplo particular de espacio métrico es un espacio normado.

Definición 1.1.3 Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial. Llamaremos norma sobre V a una aplicación

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface las siguientes propiedades:

- i) $\|u\| \geq 0$ para todo $u \in V$ y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$
- ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$, para todo $u \in V, \lambda \in \mathbb{R}$
- iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, para todo $u, v \in V$.

De este modo, como comentábamos, un espacio vectorial normado, $((V, +, \cdot), \|\cdot\|)$ es un espacio métrico, donde la distancia se define como

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

para todo $u, v \in V$. Además, si este espacio es completo respecto de la norma asociada a la distancia, se denomina espacio de Banach.

Algunos ejemplos de espacios de Banach son los que a continuación describimos.

Ejemplo 1.1.1 \mathbb{R} con la norma dada por el valor absoluto.

Ejemplo 1.1.2 \mathbb{C} con la norma usual de \mathbb{R}^2 : sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ejemplo 1.1.3 El espacio de las curvas diferenciables cerradas en el plano hasta el orden n , $C^n(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, con la norma

$$\|f\|_n = \sum_{i=0}^n \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \|f^{(i)}(\theta)\|.$$

En un espacio vectorial normado $((V, +, \cdot), \|\cdot\|)$ se puede probar que las operaciones ‘suma’ y ‘producto por un escalar’ definen aplicaciones continuas respecto de la topología inducida por la correspondiente métrica. Es decir, la estructura topológica es compatible con la estructura algebraica de espacio vectorial. Pero esta compatibilidad no tiene que estar asociada únicamente a un espacio normado, ni siquiera a un espacio métrico.

Definición 1.1.4 *Un espacio vectorial topológico (e.v.t.) es una pareja (V, T) , donde T es una topología sobre el espacio vectorial V tal que la suma y la multiplicación por escalares sobre el espacio vectorial son funciones continuas.*

Está claro que todos los espacios normados son espacios vectoriales topológicos. Sin embargo, existen e.v.t. que no son espacios vectoriales normados. Por ejemplo, aquellos espacios vectoriales sobre los que hay definido un conjunto de seminormas.

Definición 1.1.5 *Una seminorma es una función $\mathfrak{p} : V \rightarrow \mathbb{R}$ sobre un espacio vectorial V que satisface las siguientes propiedades:*

- i) $\mathfrak{p}(u + v) \leq \mathfrak{p}(u) + \mathfrak{p}(v)$
- ii) $\mathfrak{p}(\lambda u) = |\lambda|\mathfrak{p}(u)$,

donde $u, v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Usando las propiedades anteriores, obtenemos de ii) que $\mathfrak{p}(0) = 0$ y de i) y ii), que $\mathfrak{p}(u) \geq 0$ para todo $u \in V$; sin embargo, $\mathfrak{p}(u) = 0$ no implica que $u = 0$. Por tanto, toda norma es una seminorma, pero el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, en \mathbb{R}^2 podemos definir la seminorma $\mathfrak{p}((x, y)) = |y|$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Claramente, para todo $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, se tiene que $\mathfrak{p}((x, 0)) = 0$, por lo que \mathfrak{p} no puede ser una norma.

Dado un conjunto de seminormas $\{\mathfrak{p}_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ y un punto u_0 de un espacio vectorial V , podemos generar una base de entornos de u_0 del siguiente modo

$$U_{\mathbb{B}, \varepsilon}(u_0) = \{u \in V / \mathfrak{p}_i(u - u_0) < \varepsilon, i \in \mathbb{B}\},$$

donde \mathbb{B} es un subconjunto finito de \mathbb{I} y $\varepsilon > 0$.

Por lo tanto, sobre V tenemos una topología asociada a esta base de entornos, respecto de la cual las aplicaciones \mathfrak{p}_i son aplicaciones continuas. En este caso se puede probar que, respecto de esta topología, las operaciones asociadas a la estructura de espacio vectorial son aplicaciones continuas. Por consiguiente, todo espacio vectorial con una familia de seminormas define un espacio vectorial topológico. Si la familia de seminormas $\{\mathfrak{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es numerable, entonces se puede probar que cualquier sucesión $(f_i)_{i \in \mathbb{I}}$ converge a f respecto de la topología definida por ellas si, y sólo si, $\mathfrak{p}_n(f_i - f)$ converge a cero para todo n .

Para finalizar esta sección, vamos a definir el concepto central de la misma: la noción de espacio de Fréchet [9].

Definición 1.1.6 Se dice que un espacio vectorial topológico V es un espacio de Fréchet si y sólo si satisface las siguientes propiedades:

1. V es un espacio Hausdorff
2. La topología sobre V está inducida por una familia numerable de seminormas $\{\mathfrak{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Esto significa que un subconjunto U de V es abierto si y sólo si para todo $u \in U$ existe $k \geq 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$\{v \in V / \mathfrak{p}_n(v - u) < \varepsilon \ \forall n \leq k\}$$

está contenido en U

3. V es un espacio vectorial completo respecto de la familia de seminormas ¹.

De hecho, la segunda y la tercera condición de la Definición 1.1.6 son equivalentes a que se pueda definir una distancia d invariante por traslación sobre el espacio vectorial V y que, respecto de esa métrica, el espacio sea completo. La relación entre la métrica d y las seminormas es

$$d(u, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\mathfrak{p}_k(u - v)}{1 + \mathfrak{p}_k(u - v)}.$$

Todo espacio de Banach V es, pues, un espacio de Fréchet, pero no todo espacio de Fréchet es un espacio de Banach. A continuación, veremos una manera de construir otros ejemplos de espacios de Fréchet.

Sea V un espacio vectorial con un conjunto contable de seminormas \mathfrak{p}_n , $n \in \mathbb{N}$. Si éstas cumplen las siguientes propiedades:

- F1. Si $v \in V$ y $\mathfrak{p}_n(v) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $v = 0$
- F2. Si $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en V respecto de cada seminorma \mathfrak{p}_n , entonces existe $v \in V$ tal que la sucesión v_i converge a v respecto de cada seminorma \mathfrak{p}_n ,

entonces V es un espacio de Fréchet. Esto es así ya que la condición F_2 garantiza obviamente que V es completo respecto de cada seminorma y F_1 garantiza que V es Hausdorff. En efecto, tomamos dos elementos en V distintos, v_1, v_2 . Usando F_1 , sabemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathfrak{p}_i(v_1 - v_2) \neq 0.$$

Consideramos $\varepsilon = \mathfrak{p}_i(v_1 - v_2)$ y definimos los siguientes entornos de v_1 y v_2 $U_{v_1, i, \frac{\varepsilon}{4}}$ y $U_{v_2, i, \frac{\varepsilon}{4}}$, donde

¹ El concepto de sucesión de Cauchy y de completitud dados en la Definición 1.1.2 pueden extenderse de manera natural para espacios con una familia de seminormas.

$$U_{v,n,\varepsilon} = \{u \in V / \mathfrak{p}_n(v - u) < \varepsilon\}. \quad (1.1)$$

Estos dos entornos no tienen puntos en común. Si existiera $v_3 \in V$ perteneciente a ambos entornos simultáneamente, se tendría que

$$\varepsilon = \mathfrak{p}_i(v_1 - v_2) \leq \mathfrak{p}_i(v_1 - v_3) + \mathfrak{p}_i(v_2 - v_3) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como esto no es posible, concluimos que V es Hausdorff.

1.2. Un ejemplo de espacio de Fréchet: el espacio de las curvas diferenciables cerradas en el plano

Hemos visto una construcción en la que un conjunto numerable de seminormas, bajo ciertas condiciones, genera un espacio de Fréchet. Mostraremos en esta sección un ejemplo concreto que será relevante para abordar nuestro problema inicial.

Denotamos por $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ al espacio de las curvas C^∞ -diferenciables y cerradas en el plano, esto es,

$$C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) = \{f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f \text{ es } C^\infty\text{-diferenciable}\}$$

y definimos el conjunto de seminormas $\{\mathfrak{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sobre este espacio

$$\mathfrak{p}_n(f) = \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \{\|f^{(k)}(\theta)\| / k \leq n\},$$

donde $f^{(k)}$ es la derivada k -ésima de f . De este modo, dados una función $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, construimos los entornos de f como los conjuntos

$$U_{f,n,\varepsilon} = \{g \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) / \mathfrak{p}_n(f - g) < \varepsilon\}.$$

Teorema 1.2.1 *El espacio $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es un espacio de Fréchet.*

Demostración. Lo primero que observamos es que $\{\mathfrak{p}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable de seminormas. Este hecho es consecuencia directa de las propiedades de la norma estándar en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto, podemos inducir una topología sobre $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ que convierte a las seminormas en aplicaciones continuas. De esta manera, $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es un espacio vectorial topológico.

Para probar que es un espacio de Fréchet, vamos a demostrar que satisface las propiedades F1 y F2 que mencionamos en la sección anterior.

Sea $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ tal que $\mathfrak{p}_n(f) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto significa que $\|f^{(n)}(\theta)\| = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier $\theta \in \mathbb{S}^1$. Luego, efectivamente, $f = 0$ y, por lo tanto, $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es Hausdorff.

Veamos ahora que $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ satisface la propiedad F2.

Sean n un número natural fijo y $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ una sucesión de Cauchy respecto de la seminorma \mathfrak{p}_n . Entonces, la sucesión $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \in C^n(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es de Cauchy en el espacio de Banach $(C^n(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), \|\cdot\|_n)$, donde la norma $\|\cdot\|_n$ está definida por

$$\|f\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \|f^{(k)}(\theta)\|.$$

En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $i_n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $i, j > i_n$, se tiene que $\mathfrak{p}_n(f_i, f_j) < \frac{\varepsilon}{n+1}$, esto es, para todo $k \leq n$

$$\max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \|f_i^{(k)}(\theta) - f_j^{(k)}(\theta)\| < \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Entonces,

$$\|f_i - f_j\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \|f_i^{(k)}(\theta) - f_j^{(k)}(\theta)\| < \sum_{k=0}^n \frac{\varepsilon}{n+1} = \varepsilon.$$

Como $C^n(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es completo respecto de la norma $\|\cdot\|_n$, existe una función $g_n \in C^n(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ tal que $f_i \rightarrow g_n$ respecto de la norma $\|\cdot\|_n$. Esto significa que cuando $i \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=0}^n \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \|(f_i^{(k)}(\theta) - g_n^{(k)}(\theta))\| \rightarrow 0.$$

Del mismo modo podemos deducir que $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $C^{n+1}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Por tanto, existe una función $g_{n+1} \in C^{n+1}(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ de manera que la sucesión $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a ella respecto de la norma $\|\cdot\|_{n+1}$. Veamos que $g_n = g_{n+1}$. Para ello, basta probar que $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a g_{n+1} respecto de la norma $\|\cdot\|_n$. En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_i - g_{n+1}\|_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \|(f_i^{(k)}(\theta) - g_{n+1}^{(k)}(\theta))\| < \varepsilon.$$

Si separamos el último término del sumatorio, resulta que $\|f_i - g_{n+1}\|_n < \varepsilon$. Por consiguiente, hemos demostrado que la sucesión $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge a dos funciones, g_n y g_{n+1} , en $C^n(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$. Puesto que se trata de un espacio normado, $g_n = g_{n+1} = g$, con $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$.

Lo último que faltaría por demostrar es que la sucesión converge a g respecto de cada seminorma \mathfrak{p}_n ; pero esto es inmediato, pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $i > i_0$

$$\|f_i - g\|_n = \sum_{k=0}^n \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \|(f_i^{(k)}(\theta) - g^{(k)}(\theta))\| < \varepsilon.$$

Luego, cada sumando es menor que ε , y por consiguiente, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{p}_n(f_i - g) < \varepsilon.$$

En definitiva, puesto que $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ satisface las propiedades F1 y F2, concluimos que es un espacio de Fréchet. \square

1.3. Variedades de Fréchet

Esta sección está dedicada a dar una breve introducción a las variedades de Fréchet. No pretendemos presentar un estudio detallado de este tipo de objetos. Nos ceñiremos a presentar las nociones y resultados (sin demostración) que precisamos para abordar nuestro problema inicial. Comenzamos definiendo la diferenciabilidad en espacios de Fréchet.

Definición 1.3.1 *Sea E un espacio de Fréchet y $f : \mathbb{R} \rightarrow E$ una curva sobre E , esto es, una aplicación continua sobre E . Diremos que f es diferenciable si existe una aplicación continua $f' : \mathbb{R} \rightarrow E$ tal que*

$$f'(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(t+s) - f(t)}{s}.$$

La curva f será C^∞ -diferenciable si existen todas sus derivadas y son continuas.

Si E_1 y E_2 son dos espacios de Fréchet y $F : E_1 \rightarrow E_2$ es una aplicación continua, entonces F es diferenciable si transforma curvas diferenciables en curvas diferenciables; es decir, que si $f : \mathbb{R} \rightarrow E_1$ es una curva diferenciable, entonces $F \circ f : \mathbb{R} \rightarrow E_2$ es una curva diferenciable en E_2 . F será un difeomorfismo si es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.

Esta noción de diferenciabilidad se puede extender para funciones $F : U \subseteq E_1 \rightarrow E_2$, con U un subconjunto abierto de E_1 . En esta Memoria, cuando hablamos de diferenciabilidad entendemos C^∞ -diferenciable (a no ser que se indique lo contrario).

A continuación, definimos el concepto de variedad de Fréchet.

Definición 1.3.2 *Sea M un espacio topológico Hausdorff. Una carta sobre M modelada sobre un espacio de Fréchet E es una aplicación $\phi : U \subset M \rightarrow E$ continua tal que U es un abierto de M , $\phi(U)$ es un abierto de E y $\phi : U \subset M \rightarrow \phi(U)$ es un homeomorfismo. Un atlas sobre M modelado sobre E es un conjunto de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ modeladas sobre E , de modo que $M = \cup_{\alpha \in \mathbb{A}} U_\alpha$ y para todo α y β tal que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, se tiene que*

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq E \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq E$$

es diferenciable. Una estructura diferenciable sobre M es un atlas maximal con respecto a esta última condición. En tal caso, se dice que M es una variedad de Fréchet.

Ejemplo 1.3.1 *Un espacio de Fréchet E es una variedad de Fréchet. Basta tomar el atlas formado por la carta (E, Id) .*

Ejemplo 1.3.2 *Un abierto U de una variedad M modelada sobre un espacio de Fréchet E , es una variedad de Fréchet. En efecto, si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ es un atlas diferenciable de M , entonces $\{(U_\alpha \cap U, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap U})\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ es un atlas diferenciable de U .*

Definición 1.3.3 *Una subvariedad de una variedad de Fréchet M modelada sobre E es un subconjunto N de M , tal que para todo $x \in N$ existe una carta (U, ϕ) de M tal que $\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap E_1$, siendo E_1 un subespacio lineal cerrado de E .*

Claramente, si $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ es un atlas de M , entonces $(N, \{(U_\alpha \cap N, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in \mathbb{A}})$ es una variedad de Fréchet modelada sobre E_1 ².

Ejemplo 1.3.3 *Un abierto U en M es una subvariedad de M .*

Extender la noción de curva diferenciable sobre una variedad de Fréchet resulta ahora natural.

Definición 1.3.4 *En una variedad de Fréchet M modelada sobre un espacio de Fréchet E , una curva (aplicación continua) $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ es diferenciable si para todo $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ existe un $\delta > 0$ y una carta (U, ϕ) de M tal que $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$, $f(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset U$ y*

$$\phi \circ f : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \phi(U) \subset E$$

es una aplicación diferenciable.

Supongamos ahora que $F : M_1 \rightarrow M_2$ es una aplicación continua entre variedades de Fréchet modeladas sobre E_1 y E_2 , respectivamente.

Definición 1.3.5 *F es diferenciable en $p \in M_1$ si existen (U_1, ϕ_1) carta de M_1 que contiene a p y (U_2, ϕ_2) carta de M_2 que contiene a $F(p)$, con $F(U_1) \subseteq U_2$, tales que la aplicación*

$$\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1) \subseteq E_1 \rightarrow \phi_2(U_2) \subseteq E_2$$

es diferenciable. La aplicación F es diferenciable cuando lo es en cada uno de sus puntos.

Ejemplo 1.3.4 *Sea N una subvariedad de una variedad de Fréchet M . Entonces, la inclusión de N en M es una aplicación diferenciable.*

² Un subespacio cerrado de un espacio de Fréchet es de nuevo un espacio de Fréchet.

En variedades finito dimensionales, un vector tangente en un punto de la variedad puede definirse de dos formas equivalentes: como una derivación en el espacio de funciones reales diferenciables en un entorno del punto, o como un vector tangente de una curva en la variedad que pasa por el punto. Esta equivalencia no ocurre en el caso infinito dimensional: todo vector velocidad de una curva es una derivación, pero no todas las derivaciones son inducidas desde una curva sobre la variedad.

Si M es una variedad de Fréchet y $p \in M$, entonces el tangente cinemático T_pM es el espacio cociente de curvas diferenciables $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tales que $f(0) = p$, con la relación de equivalencia

$$f \sim \bar{f} \Leftrightarrow f'(0) = \bar{f}'(0).$$

Se puede probar que T_pM es un espacio vectorial. Si U es un abierto de M , resulta que $T_pU \cong T_pM$ y en el caso de un espacio de Fréchet E , se tiene que $T_pE \cong E$.

Seguidamente, supongamos que $F : M_1 \rightarrow M_2$ es una aplicación diferenciable en p .

Definición 1.3.6 La aplicación inducida por F entre los espacios tangentes T_pM_1 y $T_{F(p)}M_2$, o aplicación tangente en p , es la aplicación lineal

$$T_pF : T_pM_1 \rightarrow T_{F(p)}M_2$$

tal que para todo $v \in T_pM_1$ se tiene que $T_pF(v) = (F \circ f)'(0)$, donde $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_1$ es una curva en M_1 tal que $f(0) = p$ y $f'(0) = v$.

En general, cuando estamos trabajando con variedades de Fréchet, el Teorema de la función inversa no es cierto. Es necesario que las variedades de Fréchet sean de un tipo especial, muy cercano a las variedades de Banach: las variedades tame-Fréchet. Estas variedades no son objeto de estudio de esta memoria. Para el desarrollo de la misma, sólo necesitamos el siguiente resultado, que se demuestra a partir del Corolario 2.3.2 (pág 146) y del Teorema 2.3.1 (pág 196) de [9].

Teorema 1.3.1 Sean M_1 una variedad compacta, M_2 una variedad de dimensión finita, V un espacio vectorial finito dimensional, $F : U \subseteq C^\infty(M_1, M_2) \rightarrow V$ una aplicación diferenciable de un abierto U de $C^\infty(M_1, M_2)$ y $f_0 \in U$ ³. Si las aplicaciones lineales

$$T_fF : T_fC^\infty(M_1, M_2) \rightarrow T_{F(f)}V, \quad \forall f \in F^{-1}(F(f_0))$$

³ El Corolario 2.3.2 (pág 146) de [9], demuestra que el espacio $C^\infty(M_1, M_2)$ es un espacio tame-Fréchet.

son suprayectivas, entonces $F^{-1}(F(f_0))$ es una subvariedad de U y

$$T_f \left(F^{-1}(F(f_0)) \right) = \text{Ker } T_f F, \quad \forall f \in F^{-1}(F(f_0))^4.$$

A continuación, daremos algunas definiciones acerca del fibrado tangente de una variedad de Fréchet, las cuales serán útiles para introducir la noción de métrica Riemanniana sobre una variedad de Fréchet. Previamente, describiremos la estructura diferenciable del fibrado tangente de una variedad de Fréchet.

Sean M una variedad de Fréchet modelada sobre E y $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ el fibrado tangente de M . Denotamos por $\pi : TM \rightarrow M$ a la proyección $\pi(p, [f]) = p$. Entonces, TM es una variedad de Fréchet modelada sobre $E \times E$ que hace a π diferenciable. En efecto, basta tomar un atlas de TM de la siguiente manera $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ tal que $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow E \times E$

$$\phi_\alpha(p, [f]) = (\varphi_\alpha(p), (\varphi_\alpha \circ f)'(0)),$$

siendo $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ un atlas diferenciable de M .

Asimismo, el producto fibrado

$$TM \times_M TM := \{(p, [f_1], [f_2]) / p \in M \text{ y } [f_1], [f_2] \in T_p M\}$$

también es una variedad de Fréchet modelada sobre $E \times E \times E$. Basta considerar la proyección $\tilde{\pi} : TM \times_M TM \rightarrow M$ y el atlas $\{(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha), \tilde{\phi}_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$, tal que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_\alpha : \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) &\rightarrow E \times E \times E \\ (p, [f_1], [f_2]) &\rightarrow \left(\varphi_\alpha(p), (\varphi_\alpha \circ f_1)'(0), (\varphi_\alpha \circ f_2)'(0) \right), \end{aligned}$$

donde $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{A}}$ es un atlas de M .

Ahora podemos definir la noción de métrica Riemanniana en una variedad de Fréchet.

Definición 1.3.7 Sea M una variedad de Fréchet. Una métrica Riemanniana es una aplicación diferenciable $\langle, \rangle_M : TM \times_M TM \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $p \in M$ la aplicación $\langle, \rangle_M : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ es un producto escalar sobre $T_p M$.

En tal caso, se dice que (M, \langle, \rangle_M) es una variedad Riemanniana de Fréchet modelada sobre E .

Definición 1.3.8 Sea $F : (M_1, \langle, \rangle_{M_1}) \rightarrow (M_2, \langle, \rangle_{M_2})$ un difeomorfismo entre variedades Riemannianas de Fréchet. Diremos que F es una isometría si para todo $p \in M_1$ se tiene que

$$\langle T_p F([f_1]), T_p F([f_2]) \rangle_{M_2} = \langle [f_1], [f_2] \rangle_{M_1}, \quad \forall [f_1], [f_2] \in T_p M_1.$$

⁴ El producto finito de espacios tame-Fréchet es tame-Fréchet. Usando este hecho y de nuevo el Corolario 2.3.2 (pág 146) de [9], se demuestra que el Teorema 1.3.1 es cierto cuando consideramos la aplicación $F : U \subseteq C^\infty(M_1, M_2) \times C^\infty(M_1, M_2) \rightarrow V$.

1.4. La subvariedad de Fréchet de curvas diferenciables planas cerradas regulares

En el estudio que vamos a realizar, no solo nos interesa considerar el espacio de las curvas cerradas en el plano, sino que necesitamos que las curvas cumplan cierta propiedad de regularidad: el vector tangente en cada punto de la curva es distinto de cero. Por ello, tomamos el conjunto de las curvas diferenciables cerradas regulares y lo denotamos por

$$\mathbb{M} = \{f \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \mid \|f'(\theta)\| \neq 0, \forall \theta \in \mathbb{S}^1\}.$$

Hemos visto en la Sección 1.2 que $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es un espacio vectorial topológico, sin embargo, el subconjunto \mathbb{M} no lo es. Esto supone la necesidad de trabajar sobre espacios más generales que los espacios de Fréchet: las variedades de Fréchet descritas en la sección anterior.

Proposición 1.4.1 *\mathbb{M} es un abierto de $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ y, por tanto, una subvariedad de Fréchet de $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, cuyo tangente $T_f\mathbb{M}$ se identifica con $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ para todo punto $f \in \mathbb{M}$.*

Demostración. Sean $f \in \mathbb{M}$ y $U_{f,1,\frac{\varepsilon}{2}}$ un entorno de f en $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ definido como en (1.1), con

$$\varepsilon = \min\{\|f'(\theta)\| \mid \theta \in \mathbb{S}^1\} > 0.$$

Queremos ver que $U_{f,1,\frac{\varepsilon}{2}} \subset \mathbb{M}$. Para ello, tomamos una función $g \in U_{f,1,\frac{\varepsilon}{2}}$ y vamos a demostrar que $\|g'(\theta)\| \neq 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{S}^1$.

Sabemos que

$$p_1(f - g) = \max_{\theta \in \mathbb{S}^1} \{\|f(\theta) - g(\theta)\|, \|f'(\theta) - g'(\theta)\|\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego, en particular, para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$, $\|f'(\theta) - g'(\theta)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$\|f'(\theta)\| = \|f'(\theta) - g'(\theta) + g'(\theta)\| \leq \|f'(\theta) - g'(\theta)\| + \|g'(\theta)\|$$

y obtenemos que $\|g'(\theta)\| \geq \|f'(\theta)\| - \|f'(\theta) - g'(\theta)\| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} > 0$. □

A continuación, describiremos el conjunto de curvas cerradas regulares sobre \mathbb{R}^2 normalizadas, esto es, de longitud 1 y centroide en el origen.

El **centroide**⁵ de un objeto está relacionado con la noción física del centro de masas. En el caso de una curva cerrada $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se define como

⁵ Es fácil comprobar que el centroide de una circunferencia es el centro de la misma.

$$\bar{c}(f) = \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| f(\theta) d\theta,$$

donde $L(f)$ denota la longitud de f , esto es,

$$L(f) = \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| d\theta.$$

Al conjunto de curvas cerradas regulares en el plano con longitud 1 y centroide localizado en el punto $(0, 0)$ lo denotamos por

$$\mathbb{M}_d = \{f \in \mathbb{M} / L(f) = 1, \bar{c}(f) = (0, 0)\}.$$

Proposición 1.4.2 \mathbb{M}_d es una subvariedad de Fréchet de \mathbb{M} y para $f_0 \in \mathbb{M}_d$

$$T_{f_0}\mathbb{M}_d = \left\{ h \in C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) / \int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), f_0'(\theta) \rangle}{\|f_0'(\theta)\|} d\theta = 0, \right. \\ \left. \int_0^{2\pi} \left(\|f_0'(\theta)\| h(\theta) + \frac{\langle h'(\theta), f_0'(\theta) \rangle}{\|f_0'(\theta)\|} f_0(\theta) \right) d\theta = 0 \right\}.$$

Demostración. Para realizar esta prueba, usaremos el Teorema 1.3.1.

Lo primero que debemos comprobar es que nos encontramos bajo las hipótesis del teorema. En nuestro caso, $M_1 = \mathbb{S}^1$ es una variedad compacta, y $M_2 = \mathbb{R}^2$ es una variedad de dimensión finita. Además, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathbb{M} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ es un abierto de $C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$ (ver Proposición 1.4.1).

Tomamos la aplicación diferenciable $(L, \bar{c}) : \mathbb{M} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ definida por $(L, \bar{c})(f) = (L(f), \bar{c}(f))$. Está claro que $\mathbb{M}_d = (L, \bar{c})^{-1}(1, (0, 0))$.

A continuación, tomamos $f_0 \in \mathbb{M}_d$, lo que implica que $(L, \bar{c})(f_0) = (1, (0, 0))$, y describimos la aplicación inducida entre los espacios tangentes por (L, \bar{c})

$$T_{f_0}(L, \bar{c}) : T_{f_0}\mathbb{M} \rightarrow T_{(L, \bar{c})(f_0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2).$$

Sea $h \in T_{f_0}\mathbb{M} \cong C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)$, esto es, $h : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación diferenciable; consideramos $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ una aplicación diferenciable sobre \mathbb{M} tal que $\sigma(0) = f_0$ y $\sigma'(0) = h$. En estas condiciones,

$$T_{f_0}(L, \bar{c})(h) = \left(\frac{d(L \circ \sigma)}{dt}(0), \frac{d(\bar{c} \circ \sigma)}{dt}(0) \right).$$

Sabemos que

$$L(\sigma(t)) = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(t, \theta) \right\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left\langle \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(t, \theta), \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(t, \theta) \right\rangle} d\theta,$$

siendo $\bar{\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación diferenciable definida por $\bar{\sigma}(t, \theta) = \sigma(t)(\theta)$. De este modo,

$$\frac{d(L \circ \sigma)}{dt}(0) = \int_0^{2\pi} \frac{\langle \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial t \partial \theta}(0, \theta), \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(0, \theta) \rangle}{\|\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(0, \theta)\|} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), f'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} d\theta.$$

En cuanto al centroide, se tiene que

$$\bar{c}(\sigma(t)) = \frac{1}{L(\sigma(t))} \int_0^{2\pi} \bar{\sigma}(t, \theta) \|\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(t, \theta)\| d\theta.$$

Así que

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{c} \circ \sigma)}{dt}(0) &= \frac{-1}{(L(f_0))^2} \frac{d(L \circ \sigma)}{dt}(0) \int_0^{2\pi} \|\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(0, \theta)\| \bar{\sigma}(0, \theta) d\theta \\ &+ \underbrace{\frac{1}{L(f_0)}}_1 \int_0^{2\pi} \left(\|\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(0, \theta)\| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t}(0, \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial t \partial \theta}(0, \theta), \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(0, \theta) \rangle}{\|\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \theta}(0, \theta)\|} f_0(\theta) \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\|f'_0(\theta)\| h(\theta) + \frac{\langle h'(\theta), f'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} f_0(\theta) \right) d\theta. \end{aligned}$$

De esta manera, la aplicación tangente inducida en f_0 es

$$\begin{aligned} T_{f_0}(L, \bar{c})(h(\theta)) &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), f'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} d\theta, \int_0^{2\pi} \left(\|f'_0(\theta)\| h(\theta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\langle h'(\theta), f'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} f_0(\theta) \right) d\theta \right). \end{aligned}$$

Para ver si esta aplicación es sobreyectiva en los elementos f_0 de \mathbb{M}_d , basta comprobar que es sobre para los elementos de la base canónica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, es decir, $\{(1, (0, 0)), (0, (1, 0)), (0, (0, 1))\}$.

Para el primer elemento, tomando $h = f_0$ se obtiene que

1. $T_{f_0}L(h) = \int_0^{2\pi} \frac{\langle f'_0(\theta), f'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} d\theta = L(f_0) = 1$
2. $T_{f_0}\bar{c}(h) = \int_0^{2\pi} (\|f'_0(\theta)\| f_0(\theta) + \|f'_0(\theta)\| f_0(\theta)) d\theta$
 $= 2 \int_0^{2\pi} \|f'_0(\theta)\| f_0(\theta) d\theta = 2\bar{c}(f_0) = (0, 0).$

Luego, $T_{f_0}(L, \bar{c})(h) = (1, (0, 0))$.

Para $(0, (1, 0))$ y $(0, (0, 1))$, tomando cualquier aplicación constante de \mathbb{S}^1 en \mathbb{R}^2 , $h(\theta) = (a, b)$, observamos que

1. $T_{f_0}L(h) = \int_0^{2\pi} \frac{\langle 0, f'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} d\theta = 0$
2. $T_{f_0}\bar{c}(h) = \int_0^{2\pi} \left(\|f'_0(\theta)\| h(\theta) + \frac{\langle 0, f'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} f_0(\theta) \right) d\theta = (a, b)L(f_0) = (a, b)$.

Eligiendo, en cada caso, los vectores $(a, b) = (1, 0)$ y $(a, b) = (0, 1)$, demostramos finalmente que $T_{f_0}(L, \bar{c})$ es sobre y, por consiguiente, podemos usar el Teorema 1.3.1 y concluir que \mathbb{M}_d es una subvariedad de Fréchet de \mathbb{M} . Además, $T_{f_0}\mathbb{M}_d = Ker T_{f_0}(L, \bar{c})$. □

1.5. Una métrica Riemanniana en la variedad de curvas planas cerradas regulares

En esta sección definiremos una métrica Riemanniana sobre el espacio \mathbb{M} de las curvas planas cerradas regulares, esto es, un producto escalar

$$\langle, \rangle_{\mathbb{M}}: T_f\mathbb{M} \times T_f\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

para todo $f \in \mathbb{M}$. Previamente vamos a describir $T_f\mathbb{M}$. Demostraremos que

$$T_f\mathbb{M} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times Ker T_f(L, \bar{c}).$$

En efecto, si $f \in \mathbb{M}$ y $h \in T_f\mathbb{M}$, definimos una descomposición de h de la siguiente manera:

$$h(\theta) = h^t + h^l(f(\theta) - \bar{c}(f)) + L(f)h^d(\theta),$$

donde

- (1) $h^t = T_f\bar{c}(h) \in \mathbb{R}^2$
- (2) $h^l = T_f(\ln L)(h) \in \mathbb{R}$
- (3) $h^d = \frac{1}{L(f)} \left(h - h^t - h^l(f - \bar{c}(f)) \right)$.

Proposición 1.5.1 h^d pertenece a $Ker T_f(L, \bar{c})$.

Demostración. Vamos a comprobar que $T_f(L, \bar{c})(h^d) = (0, (0, 0))$. Teniendo en cuenta los cálculos realizados en la demostración de la Proposición 1.4.2, podemos probar que la aplicación

$$T_f(L, \bar{c}) : T_f\mathbb{M} \rightarrow T_{(L, \bar{c})(f)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$$

para $f \in \mathbb{M}$ está definida como

$$h \rightarrow \left(\int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta, \frac{-\bar{c}(f)}{L(f)} \int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta \right. \\ \left. + \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \left(\|f'(\theta)\| h(\theta) + \frac{\langle h'(\theta), f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} f(\theta) \right) d\theta \right).$$

Por otro lado,

$$T_f L(h^d) = \frac{1}{L(f)} \left[T_f L(h) - T_f L(h^t) - h^l T_f L(f - \bar{c}(f)) \right].$$

Desarrollando cada sumando por separado, se tiene que

1. $T_f L(h) = L(f) h^l$
2. $T_f L(h^t) = \int_0^{2\pi} \frac{\langle \overbrace{(h^t)'}^{(0,0)}, f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta = 0$
3. $T_f L(f - \bar{c}(f)) = \int_0^{2\pi} \frac{\langle f'(\theta) - \overbrace{(\bar{c}(f))'}^{(0,0)}, f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta = L(f).$

Luego, $T_f L(h^d) = \frac{1}{L(f)} (L(f) h^l - L(f) h^l) = 0.$

Por otro lado,

$$T_f \bar{c}(h^d) = \frac{1}{L(f)} \left(T_f \bar{c}(h) - T_f \bar{c}(h^t) - h^l T_f \bar{c}(f - \bar{c}(f)) \right).$$

Calculando cada término por separado, obtenemos que

1. $T_f \bar{c}(h) = h^t$
2. $T_f \bar{c}(h^t) = \frac{-\bar{c}(f)}{L(f)} \int_0^{2\pi} \frac{\langle \overbrace{(h^t)'}^{(0,0)}, f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta$

$$+ \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \left(\|f'(\theta)\| h^t + \frac{\langle \overbrace{(h^t)'}^{(0,0)}, f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} f(\theta) \right) d\theta = h^t$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad T_f \bar{c}(f - \bar{c}(f)) &= \frac{-\bar{c}(f)}{L(f)} \int_0^{2\pi} \frac{\langle f'(\theta) - \overbrace{(\bar{c}(f))'}^{(0,0)}, f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta \\
 &+ \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \left(\|f'(\theta)\| (f(\theta) - \bar{c}(f)) + \frac{\langle f'(\theta), f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} f(\theta) \right) d\theta \\
 &= -\bar{c}(f) + \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \left(2\|f'(\theta)\| f(\theta) - \|f'(\theta)\| \bar{c}(f) \right) d\theta = (0, 0).
 \end{aligned}$$

Luego, $T_f \bar{c}(h^d) = \frac{1}{L(f)}(h^t - h^t) = (0, 0)$.

□

En definitiva, acabamos de demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned}
 \phi : T_f \mathbb{M} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times Ker T_f(L, \bar{c}) \\
 h &\rightarrow (h^t, h^l, h^d)
 \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Esta descomposición nos sugiere definir la siguiente métrica Riemanniana en \mathbb{M} (ver [14]).

Proposición 1.5.2 Sean h y k dos elementos de $T_f \mathbb{M}$. Entonces, la operación $\langle, \rangle_{\mathbb{M}} : T_f \mathbb{M} \times T_f \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\langle h, k \rangle_{\mathbb{M}} = \langle h^t, k^t \rangle + h^l k^l + L(f) \int_0^{2\pi} \frac{\langle (h^d)'(\theta), (k^d)'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta$$

define una métrica Riemanniana sobre \mathbb{M} .

Demostración. Comprobamos que $\langle, \rangle_{\mathbb{M}}$ satisface las propiedades de producto escalar. En efecto, sean $h, k, m \in T_f \mathbb{M}$. De las siguientes propiedades que describimos a continuación, la 1. y la 2. son inmediatas.

1. $\langle h + m, k \rangle_{\mathbb{M}} = \langle h, k \rangle_{\mathbb{M}} + \langle m, k \rangle_{\mathbb{M}}$
2. $\langle \lambda h, k \rangle_{\mathbb{M}} = \lambda \langle h, k \rangle_{\mathbb{M}}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$
3. De la propiedad de simetría de los productos escalares de \mathbb{R} y \mathbb{R}^2 , se tiene que $\langle h, k \rangle_{\mathbb{M}} = \langle k, h \rangle_{\mathbb{M}}$
4. $\langle h, h \rangle_{\mathbb{M}} = \|h^t\|^2 + (h^l)^2 + L(f) \int_0^{2\pi} \frac{\|(h^d)'(\theta)\|^2}{\|f'(\theta)\|} d\theta \geq 0$.

Ahora, si $\langle h, h \rangle_{\mathbb{M}} = 0$, entonces $h^t = \frac{\|(h^d)'(\theta)\|^2}{\|f'(\theta)\|} = (0, 0)$ y $h^l = 0$, de lo que se deduce que $(h^d)' = (0, 0)$, es decir, que $h^d = cte$. Veamos que $h^d = (0, 0)$. En efecto, usando la Proposición 1.5.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (0, (0, 0)) &= T_f(L, \bar{c})(h^d) = \left(\int_0^{2\pi} \frac{\overbrace{\langle (h^d)'(\theta), f'(\theta) \rangle}^{(0,0)}}{\|f'(\theta)\|} d\theta, \right. \\
 &\quad \left. \frac{-\bar{c}(f)}{L(f)} \int_0^{2\pi} \frac{\overbrace{\langle (h^d)'(\theta), f'(\theta) \rangle}^{(0,0)}}{\|f'(\theta)\|} d\theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \left(\|f'(\theta)\| h^d(\theta) + \frac{\overbrace{\langle (h^d)'(\theta), f'(\theta) \rangle}^{(0,0)}}{\|f'(\theta)\|} f(\theta) \right) d\theta \right) \\
 &= (0, h^d).
 \end{aligned}$$

Luego, en este caso h^d sólo puede ser $(0, 0)$ y concluimos, así, que $h = (0, 0)$. □

De hecho, como veremos a continuación, \mathbb{M} con esta métrica es isométrica a $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}_d$ con la métrica derivada de los productos escalares correspondientes a \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} , y el producto tipo Sobolev [13] sobre $T_{f_0}\mathbb{M}_d$ siguiente

$$\langle h_0, k_0 \rangle_{\mathbb{M}_d} = \int_0^{2\pi} \frac{\langle h'_0(\theta), k'_0(\theta) \rangle}{\|f'_0(\theta)\|} d\theta^6, \tag{1.2}$$

donde $f_0 \in \mathbb{M}_d$ y $h_0, k_0 \in T_{f_0}\mathbb{M}_d$.

Proposición 1.5.3 *La aplicación $\phi_1 : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}_d$ definida por*

$$\phi_1(f) = \left(\bar{c}(f), \ln L(f), \frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)} \right)$$

es una isometría respecto de $\langle, \rangle_{\mathbb{M}}$ y la métrica determinada por la estándar sobre \mathbb{R}^2, \mathbb{R} y $\langle, \rangle_{\mathbb{M}_d}$

Demostración. Primeramente, observamos que la longitud de una curva en \mathbb{M} es un número positivo no nulo, luego $\ln L(f)$ está bien definido.

Seguidamente, debemos comprobar que $\frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)} \in \mathbb{M}_d$, esto es, que $L\left(\frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)}\right) = 1$ y que $\bar{c}\left(\frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)}\right) = (0, 0)$. En efecto,

$$1. \quad L\left(\frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)}\right) = \int_0^{2\pi} \left\| \left(\frac{f(\theta) - \bar{c}(f)}{L(f)} \right)' \right\| d\theta = \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| d\theta = 1$$

⁶ Si restringimos $\langle, \rangle_{\mathbb{M}}$ a $T_{f_0}\mathbb{M}_d$, obtenemos $\langle, \rangle_{\mathbb{M}_d}$.

$$\begin{aligned}
2. \quad \bar{c}\left(\frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)}\right) &= \frac{1}{L\left(\frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)}\right)} \int_0^{2\pi} \left\| \left(\frac{f(\theta) - \bar{c}(f)}{L(f)}\right)' \right\| \frac{f(\theta) - \bar{c}(f)}{L(f)} d\theta \\
&= \frac{1}{L(f)} (\bar{c}(f) - \bar{c}(f)) = (0, 0).
\end{aligned}$$

Luego, ϕ_1 está bien definida.

Veamos ahora que la inversa de la aplicación ϕ_1 es

$$\begin{aligned}
\phi_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}_d &\rightarrow \mathbb{M} \\
(v, l, \tilde{f}) &\rightarrow v + e^l \tilde{f}.
\end{aligned}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
1. \quad (\phi_1^{-1} \circ \phi_1)(f) &= \bar{c}(f) + L(f) \frac{f - \bar{c}(f)}{L(f)} = \bar{c}(f) + f - \bar{c}(f) = f \\
2. \quad (\phi_1 \circ \phi_1^{-1})(v, l, \tilde{f}) &= \left(\bar{c}(v + e^l \tilde{f}), \ln L(v + e^l \tilde{f}), \frac{v + e^l \tilde{f} - \bar{c}(v + e^l \tilde{f})}{L(v + e^l \tilde{f})} \right).
\end{aligned}$$

Desarrollando por separado la longitud y el centroide de $v + e^l \tilde{f}$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
a) \quad L(v + e^l \tilde{f}) &= \int_0^{2\pi} \|(v + e^l \tilde{f})'(\theta)\| d\theta = e^l \int_0^{2\pi} \|\tilde{f}'(\theta)\| dt = e^l \underbrace{L(\tilde{f})}_1 \\
b) \quad \bar{c}(v + e^l \tilde{f}) &= \frac{1}{L(v + e^l \tilde{f})} \int_0^{2\pi} \|(v + e^l \tilde{f})'(\theta)\| (v + e^l \tilde{f}(\theta)) d\theta \\
&= \frac{1}{e^l} \int_0^{2\pi} e^l \|\tilde{f}'(\theta)\| (v + e^l \tilde{f}(\theta)) d\theta = v + e^l \underbrace{\bar{c}(\tilde{f})}_{(0,0)} = v \\
c) \quad \frac{v + e^l \tilde{f} - \bar{c}(v + e^l \tilde{f})}{L(v + e^l \tilde{f})} &= \frac{v + e^l \tilde{f} - v}{e^l} = \tilde{f}.
\end{aligned}$$

Luego, $(\phi_1 \circ \phi_1^{-1})(v, l, \tilde{f}) = (v, \ln(e^l), \tilde{f}) = (v, l, \tilde{f})$.

El siguiente paso es calcular la aplicación inducida por ϕ_1 entre los correspondientes espacios tangentes, es decir, la aplicación

$$T_f \phi_1 : T_f \mathbb{M} \rightarrow T_{\bar{c}(f)} \mathbb{R}^2 \times T_{\ln L(f)} \mathbb{R} \times T_{pr_3(\phi_1(f))} \mathbb{M}_d.$$

Para ello, teniendo en cuenta las definiciones de h^t y h^l mostradas en la página 14, si $h \in T_f \mathbb{M}$, tenemos que

$$1. \quad T_f \bar{c}(h) = h^t$$

2. $T_f \ln L(h) = h^l$

3. $T_f(\text{pr}_3 \circ \phi_1)(h) = \frac{L(f)(h - h^t) - L(f)h^l(f - \bar{c}(f))}{L^2(f)} = h^d.$

Luego, la aplicación tangente es

$$T_f \phi_1 : T_f \mathbb{M} \rightarrow T_{\bar{c}(f)} \mathbb{R}^2 \times T_{\ln L(f)} \mathbb{R} \times \frac{T_{f - \bar{c}(f)} \mathbb{M}_d}{L(f)}$$

$$h \rightarrow (h^t, h^l, h^d)$$

y es claro que

$$\langle h, k \rangle_{\mathbb{M}} = \langle h^t, k^t \rangle + h^l k^l + \langle h^d, k^d \rangle_{\mathbb{M}_d}.$$

Por lo tanto, como $\langle T_f \phi_1(h), T_f \phi_1(k) \rangle_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}_d} = \langle h, k \rangle_{\mathbb{M}}$, concluimos que ϕ_1 es una isometría. □

Antes de finalizar esta sección, presentaremos otra descripción de la variedad Riemanniana $(\mathbb{M}_d, \langle, \rangle_d)$ que nos será útil en lo sucesivo.

Proposición 1.5.4 *Si $\mathbb{M}'_d = \{f \in \mathbb{M} / L(f) = 1, f(0) = (0, 0)\}$, entonces*

a) \mathbb{M}'_d es una subvariedad de \mathbb{M} y su espacio tangente en $f \in \mathbb{M}'_d$ es

$$T_f \mathbb{M}'_d = \{h \in T_f \mathbb{M} / T_f L(h) = 0, h(0) = (0, 0)\}.$$

b) La aplicación $\rho : \mathbb{M}_d \rightarrow \mathbb{M}'_d$ dada por $\rho(f) = f - f(0)$ es un difeomorfismo.

c) Si sobre \mathbb{M}'_d consideramos la métrica Riemanniana

$$\langle h, k \rangle_{\mathbb{M}'_d} = \int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), k'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta$$

con $h, k \in T_f \mathbb{M}'_d$ y $f \in \mathbb{M}'_d$, entonces $\rho : (\mathbb{M}_d, \langle, \rangle_{\mathbb{M}_d}) \rightarrow (\mathbb{M}'_d, \langle, \rangle_{\mathbb{M}'_d})$ es una isometría.

Demostración. Para verificar a) consideramos la aplicación $G : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ definida por $G(f) = (L(f), f(0))$. Está claro que $G^{-1}(1, 0, 0) = \mathbb{M}'_d$. Además, la aplicación tangente asociada $T_f G : T_f \mathbb{M} \rightarrow T_{G(f)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal

$$T_f G(h) = \left(\int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta, h(0) \right)$$

para todo $h \in T_f \mathbb{M}$ y $f \in \mathbb{M}$. En efecto, como ya hemos visto en la demostración de la Proposición 1.4.2,

$$T_f L(h) = \int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), f'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta.$$

Para calcular la segunda coordenada de la aplicación tangente, es decir, $pr_2 \circ G : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$; consideramos $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{M}$ una curva sobre \mathbb{M} tal que $\sigma(0) = f$ y $\sigma'(0) = h$. De este modo,

$$T_f(pr_2 \circ G)(h) = \frac{d(pr_2 \circ G \circ \sigma)}{dt}(0) = \frac{d(\bar{\sigma}(t, 0))}{dt}(0) = h(0),$$

donde $\bar{\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la aplicación tal que $\bar{\sigma}(t, \theta) = \sigma(t)(\theta)$.

Además, $T_f G$ es sobre en \mathbb{M}'_d . En efecto, sea $f \in \mathbb{M}'_d$. Tenemos que

1. $T_f G(f) = (L(f), f(0)) = (1, 0, 0)$
2. $T_f G(1, 0) = (0, 1, 0)$
3. $T_f G(0, 1) = (0, 0, 1)$.

Por lo tanto, $G^{-1}(1, 0, 0) = \mathbb{M}'_d$ es una subvariedad de \mathbb{M} .

A continuación, demostraremos **b**). Está claro que la aplicación está bien definida. Su inversa es $\rho^{-1}(f) = f - \bar{c}(f)$ para todo $f \in \mathbb{M}'_d$ y la aplicación tangente $T_f \rho : T_f \mathbb{M}'_d \rightarrow T_{\rho(f)} \mathbb{M}'_d$ está definida como

$$T_f \rho(h)(\theta) = h(\theta) - h(0).$$

Por último, describiremos la métrica Riemanniana sobre \mathbb{M}'_d inducida por la identificación $\rho : \mathbb{M}'_d \rightarrow \mathbb{M}'_d$.

$$\begin{aligned} \langle h, k \rangle_{\mathbb{M}'_d} &= \langle T_{\rho(f)} \rho^{-1}(h), T_{\rho(f)} \rho^{-1}(k) \rangle_{\mathbb{M}'_d} \\ &= \langle h + T_{\rho(f)} \bar{c}(h), k + T_{\rho(f)} \bar{c}(k) \rangle_{\mathbb{M}'_d} = \int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), k'(\theta) \rangle}{\|f'(\theta)\|} d\theta. \end{aligned}$$

□

1.6. Embebimiento de la variedad \mathbb{M} en un espacio euclídeo

El objetivo de esta sección es embeber la variedad \mathbb{M} en un espacio que nos permita inducir una media extrínseca de una muestra de curvas planas cerradas regulares. Para ello, consideramos $V = C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las curvas cerradas en \mathbb{R} con el producto interior

$$\langle a, b \rangle_V = \int_0^{2\pi} a(\theta)b(\theta) d\theta,$$

para $a, b \in V$, y la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : V \times V &\rightarrow C^\infty(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) \\ (a, b) &\rightarrow \Psi(a, b)(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta \left(a(s) + ib(s) \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Obsérvese que en la definición anterior, identificamos el plano real \mathbb{R}^2 con \mathbb{C} . Además, $\Psi(a, b)(0) = (0, 0)$. Por lo tanto, si queremos que $\Psi(a, b)$ sea una curva cerrada, debe ocurrir que $\Psi(a, b)(2\pi) = (0, 0)$, esto es, que

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(a^2(s) - b^2(s) + 2ia(s)b(s) \right) ds = (0, 0).$$

Esta condición se satisface si $\|a\|_V = \|b\|_V$ y $\langle a, b \rangle_V = 0$. Si además queremos que $\Psi(a, b) \in \mathbb{M}$, entonces

$$(0, 0) \neq \Psi(a, b)'(\theta) = \frac{1}{2} (a(\theta) + ib(\theta))^2 = \frac{1}{2} \left(a^2(\theta) - b^2(\theta) + i2a(\theta)b(\theta) \right).$$

Esto implica que $(a(\theta), b(\theta)) \neq (0, 0)$ para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$.

Ahora bien, en general $L(\Psi(a, b))$ puede tomar cualquier valor; luego, para que $\Psi(a, b) \in \mathbb{M}'_d$ debe ocurrir que

$$L(\Psi(a, b)) = \int_0^{2\pi} \|\Psi(a, b)'(\theta)\| d\theta = \frac{1}{2} \left(\|a\|_V + \|b\|_V \right) = \|a\|_V = 1.$$

Estas condiciones generan ciertas restricciones sobre los elementos (a, b) que tomamos de $V \times V$, de modo que para que $\Psi(a, b) \in \mathbb{M}'_d$, este par debe pertenecer al conjunto

$$St^0(2, V) = \{(a, b) \in St(2, V) / (a(\theta), b(\theta)) \neq (0, 0) \forall \theta \in \mathbb{S}^1\},$$

donde $St(2, V) = \{(a, b) \in V \times V / \|a\|_V = \|b\|_V = 1, \langle a, b \rangle_V = 0\}$.

Veremos a continuación que $St(2, V)$ es una subvariedad de $V \times V$.

Proposición 1.6.1 *$St(2, V)$ es una subvariedad de $V \times V$ y el tangente de esta subvariedad en un punto $(a, b) \in St(2, V)$ es*

$$T_{(a,b)}St(2, V) = \{(\tilde{a}, \tilde{b}) \in T_aV \times T_bV / \langle a, \tilde{a} \rangle_V = 0, \langle b, \tilde{b} \rangle_V = 0, \langle \tilde{a}, b \rangle_V = -\langle a, \tilde{b} \rangle_V\}. \quad (1.3)$$

Además, $St^0(2, V)$ es un abierto de $St(2, V)$ y, por tanto, una subvariedad de $St(2, V)$ tal que para todo $(a, b) \in St^0(2, V)$

$$T_{(a,b)}St^0(2, V) \cong T_{(a,b)}St(2, V).$$

Demostración. Definimos la aplicación

$$F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(a, b) \rightarrow (\|a\|_V, \|b\|_V, \langle a, b \rangle_V).$$

Queda claro que $St(2, V) = F^{-1}(1, 1, 0)$. Por tanto, para demostrar esta proposición, usaremos el Teorema 1.3.1. Para ello, debemos calcular previamente la aplicación tangente

$$T_{(a,b)}F : T_aV \times T_bV \rightarrow T_{F(a,b)}\mathbb{R}^3.$$

Sean $(a, b) \in St(2, V)$ un par de elementos tal que $F(a, b) = (1, 1, 0)$ y \tilde{a}, \tilde{b} dos elementos de $T_aV \cong V$ y $T_bV \cong V$, respectivamente. Tomamos las curvas $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow V$ y $\tau : \mathbb{R} \rightarrow V$ tales que $\sigma(0) = a, \sigma'(0) = \tilde{a}$ y $\tau(0) = b, \tau'(0) = \tilde{b}$.

De este modo, la aplicación tangente inducida por F viene dada por

$$T_{(a,b)}F(\tilde{a}, \tilde{b}) = \frac{d(F \circ (\sigma, \tau))}{dt}(0).$$

Así,

$$\frac{d(pr_1 \circ F(\sigma, \tau))}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \left(\sqrt{\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}^2(t, \theta) d\theta} \right) (0)$$

$$= \frac{\int_0^{2\pi} 2\bar{\sigma}(0, \theta) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t}(0, \theta) d\theta}{2\|\sigma(0)\|_V} = \frac{\langle a, \tilde{a} \rangle_V}{\|a\|_V},$$

siendo $\bar{\sigma} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación diferenciable definida por $\bar{\sigma}(t, \theta) = \sigma(t)(\theta)$.

De la misma manera, tenemos que

$$\frac{d(pr_2 \circ F(\sigma, \tau))}{dt}(0) = \frac{\langle b, \tilde{b} \rangle_V}{\|b\|_V}.$$

Por último,

$$\frac{d(pr_3 \circ F \circ (\sigma(t), \tau(t)))}{dt}(0) = \frac{d}{dt} \left(\int_0^{2\pi} \bar{\sigma}(t, \theta) \bar{\tau}(t, \theta) d\theta \right) (0)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t}(0, \theta) \bar{\tau}(0, \theta) + \bar{\sigma}(0, \theta) \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial t}(0, \theta) \right) d\theta$$

$$= \langle \tilde{a}, b \rangle_V + \langle a, \tilde{b} \rangle_V,$$

siendo $\bar{\tau} : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación diferenciable definida por $\bar{\tau}(t, \theta) = \tau(t)(\theta)$.

Por lo tanto, la aplicación tangente es

$$T_{(a,b)}F : T_aV \times T_bV \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) \rightarrow \left(\frac{\langle a, \tilde{a} \rangle_V}{\|a\|_V}, \frac{\langle b, \tilde{b} \rangle_V}{\|b\|_V}, \langle \tilde{a}, b \rangle_V + \langle a, \tilde{b} \rangle_V \right).$$

Veamos ahora si $T_{(a,b)}F$ es sobre en $St(2, V)$. Para ello, basta probar que es sobre para la base de \mathbb{R}^3 , es decir, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. En efecto,

1. $T_{(a,b)}F(a, 0) = (\|a\|_V, 0, \langle a, b \rangle_V + 0) = (1, 0, 0)$
2. $T_{(a,b)}F(0, b) = (0, \|b\|_V, 0 + \langle a, b \rangle_V) = (0, 1, 0)$
3. $T_{(a,b)}F\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{\langle a, b \rangle_V}{2\|a\|_V}, \frac{\langle b, a \rangle_V}{2\|b\|_V}, \frac{1}{2}(\langle b, b \rangle_V + \langle a, a \rangle_V)\right) = (0, 0, 1)$.

Por consiguiente, $St(2, V) = F^{-1}(1, 1, 0)$ es una subvariedad de $V \times V$.

Como consecuencia del Teorema 1.3.1, se deduce que $T_{(a,b)}St(2, V) = Ker T_{(a,b)}F$, de lo que se concluye (1.3).

Finalmente, veremos que $St^0(2, V)$ es un abierto de $St(2, V)$. Para ello, es suficiente comprobar que

$$A = \{(a, b) \in V \times V / a^2(\theta) + b^2(\theta) \neq 0 \forall \theta \in \mathbb{S}^1\}$$

es un abierto de $V \times V$.

Sea $(a, b) \in A$. Para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$ tenemos que $(a, b, \theta) \in H^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ donde $H : V \times V \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ es la aplicación diferenciable definida por

$$H(a, b, \theta) = a^2(\theta) + b^2(\theta).$$

Como $H^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ es un abierto de $V \times V \times \mathbb{S}^1$, existen U_a^θ, U_b^θ e I_θ entornos de a, b y θ respectivamente, tales que

$$U_a^\theta \times U_b^\theta \times I_\theta \subseteq H^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}).$$

Puesto que \mathbb{S}^1 es compacto y $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{\theta \in \mathbb{S}^1} I_\theta$, existe un subrecubrimiento finito $\mathbb{S}^1 = \bigcup_{i=1}^n I_{\theta_i}$ de \mathbb{S}^1 . Así,

$$\left(\bigcap_{i=1}^n U_a^{\theta_i}\right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n U_b^{\theta_i}\right) \subseteq A.$$

En efecto, sea $(a_1, b_1) \in \left(\bigcap_{i=1}^n U_a^{\theta_i}\right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n U_b^{\theta_i}\right)$. Si $\theta \in \mathbb{S}^1$, entonces existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$(a_1, b_1, \theta) \in U_a^{\theta_i} \times U_b^{\theta_i} \times I_{\theta_i} \subset H^{-1}(\mathbb{R} - \{0\}).$$

Esto quiere decir que $a_1^2(\theta) + b_1^2(\theta) \neq 0$, luego el par $(a_1, b_1) \in A$.

Por último, ya que

$$St^0(2, V) = A \cap St(2, V),$$

se sigue que $St^0(2, V)$ es un abierto en $St(2, V)$. □

De esta manera, Ψ induce una aplicación $\Psi : St^0(2, V) \rightarrow \mathbb{M}'_d$ que en general no es inyectiva, ya que $\Psi(a, b) = \Psi(-a, -b)$.

Proposición 1.6.2 *La aplicación $\Psi : St^0(2, V) \subset St(2, V) \rightarrow \mathbb{M}'_d$ es sobre. De hecho, para todo $f \in \mathbb{M}'_d$ se tiene que*

$$\Psi^{-1}(f) = \{(a, b), (-a, -b)\},$$

siendo

$$a(\theta) = \sqrt{2\|f'(\theta)\|} \cos\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right) \quad y \quad b(\theta) = \sqrt{2\|f'(\theta)\|} \sin\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right),$$

donde $\alpha(\theta)$ es el ángulo que forma $f'(\theta)$ con el eje OX medido en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Demostración. En primer lugar, vemos que $\Psi(a, b) = f$. En efecto,

$$\begin{aligned} \Psi(a, b)(\theta) &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \left(a^2(s) - b^2(s) + 2ia(s)b(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\theta 2\|f'(s)\| \left(\cos^2\left(\frac{\alpha(s)}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha(s)}{2}\right) \right) ds \\ &\quad + i \frac{1}{2} \int_0^\theta 2\|f'(s)\| \sin\left(\frac{\alpha(s)}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha(s)}{2}\right) ds \\ &= \int_0^\theta \|f'(s)\| \left(\cos(\alpha(s)) + i \sin(\alpha(s)) \right) ds \\ &= \int_0^\theta f'(s) ds = f(\theta) - \underbrace{f(0)}_{(0,0)} = f(\theta). \end{aligned}$$

Además, es inmediato que $\Psi(a, b) = \Psi(-a, -b)$.

En segundo lugar, hay que comprobar que a y b , definidos como se dice en la proposición, pertenecen a $St^0(2, V)$.

Si calculamos la suma y la resta de las normas de a y b , tenemos que

1. $\|a\|_V^2 + \|b\|_V^2 = \int_0^{2\pi} 2\|f'(\theta)\| d\theta = 2$
2. $\|a\|_V^2 - \|b\|_V^2 = \int_0^{2\pi} 2\|f'(\theta)\| \left(\cos^2\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right) \right) d\theta$

$$= 2 \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| \cos(\alpha(\theta)) d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (p_1 \circ f)'(\theta) d\theta$$

$$= 2 \left((p_1 \circ f)(2\pi) - (p_1 \circ f)(0) \right) = 0.$$

Luego, $\|a\|_V = 1 = \|b\|_V$.

En cuanto al producto interior de a y b , se tiene que

$$\begin{aligned} \langle a, b \rangle_V &= \int_0^{2\pi} 2\|f'(\theta)\| \cos\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| \sin(\alpha(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} (p_2 \circ f)'(\theta) d\theta \\ &= (p_2 \circ f)(2\pi) - (p_2 \circ f)(0) = 0. \end{aligned}$$

Por último, como $0 \neq \|f'(\theta)\| = \frac{1}{2}(a^2(\theta) + b^2(\theta))$, concluimos que $(a, b) \in St^0(2, V)$.

Resta demostrar que si $\Psi(a_1, b_1) = f$, entonces $(a_1, b_1) = (a, b)$ o $(a_1, b_1) = (-a, -b)$. En efecto, si $\Psi(a_1, b_1) = f$, entonces, como $\Psi(a, b) = f$, se tiene que

$$f'(\theta) = \frac{1}{2}(a_1(\theta) + ib_1(\theta))^2 = \frac{1}{2}(a(\theta) + ib(\theta))^2.$$

Esta condición sólo es posible si $(a_1, b_1) = (a, b)$ o $(a_1, b_1) = (-a, -b)$. □

Veremos a continuación que $\Psi : St^0(2, V) \rightarrow \mathbb{M}'_d$ es una isometría respecto de los productos escalares $2 \langle, \rangle_{St^0(2, V)}$ y $\langle, \rangle_{\mathbb{M}'_d}$. El producto escalar $\langle, \rangle_{St^0(2, V)}$ es el inducido por $V \times V^7$ sobre $T_{(a, b)}St^0(2, V)$.

Proposición 1.6.3 *Para todo (a, b) de $St^0(2, V)$, la aplicación*

$$T_{(a, b)}\Psi : T_{(a, b)}St^0(2, V) \rightarrow T_{\Psi(a, b)}\mathbb{M}'_d$$

es una isometría lineal entre los espacios euclídeos

$$\left(T_{(a, b)}St^0(2, V), 2 \langle, \rangle_{St^0(2, V)}\right) \text{ y } \left(T_{\Psi(a, b)}\mathbb{M}'_d, \langle, \rangle_{\mathbb{M}'_d}\right).$$

Por lo tanto, la aplicación $\Psi : St^0(2, V) \rightarrow \mathbb{M}'_d$ es un isometría local.

Demostración. Sea $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in T_{(a, b)}St^0(2, V)$. Esto implica que

$$\langle a, \tilde{a} \rangle_V = \langle b, \tilde{b} \rangle_V = 0 \text{ y } \langle \tilde{a}, b \rangle_V = -\langle a, \tilde{b} \rangle_V.$$

Un cálculo no complicado demuestra que

$$T_{(a, b)}\Psi(\tilde{a}, \tilde{b})(\theta) = \int_0^\theta (a(s) + ib(s)) \cdot (\tilde{a}(s) + i\tilde{b}(s)) ds.$$

Veremos a continuación, que

$${}^7 \langle (a, b), (\tilde{a}, \tilde{b}) \rangle_{V \times V} = \langle a, \tilde{a} \rangle_V + \langle b, \tilde{b} \rangle_V.$$

$$T_{(a,b)}\Psi : T_{(a,b)}St^0(2, V) \rightarrow T_{\Psi(a,b)}\mathbb{M}'_d$$

es biyectiva.

Para demostrar que es inyectiva comprobaremos que $KerT_{(a,b)}\Psi = 0$. En efecto, si $T_{(a,b)}\Psi(\tilde{a}, \tilde{b}) = 0$ significa que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\theta (a(s) + ib(s)) \cdot (\tilde{a}(s) + i\tilde{b}(s)) ds \\ &= \int_0^\theta \left((a(s)\tilde{a}(s) - b(s)\tilde{b}(s)) + i(\tilde{a}(s)b(s) + a(s)\tilde{b}(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

Derivando esta ecuación respecto de θ deducimos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a(\theta)\tilde{a}(\theta) - b(\theta)\tilde{b}(\theta) = 0 \\ b(\theta)\tilde{a}(\theta) + a(\theta)\tilde{b}(\theta) = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Como

$$\begin{vmatrix} a(\theta) & -b(\theta) \\ b(\theta) & a(\theta) \end{vmatrix} = a^2(\theta) + b^2(\theta) \neq 0,$$

la única solución posible de (1.4) es la trivial, esto es, $\tilde{a}(\theta) = \tilde{b}(\theta) = 0$ para todo $\theta \in \mathbb{S}^1$.

A continuación, comprobaremos que $T_{(a,b)}\Psi$ es sobre.

Si $h \in T_{\Psi(a,b)}\mathbb{M}'_d$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \frac{\langle h'(\theta), (\Psi(a, b))'(\theta) \rangle}{\|(\Psi(a, b))'(\theta)\|} d\theta = 0 \text{ y } h(0) = (0, 0). \quad (1.5)$$

Buscamos un par $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in T_{(a,b)}St(2, V)$ tal que

$$h(\theta) = T_{(a,b)}\Psi(\tilde{a}, \tilde{b})(\theta) = \int_0^\theta (a(s) + ib(s)) \cdot (\tilde{a}(s) + i\tilde{b}(s)) ds.$$

Así, consideramos el sistema

$$\begin{cases} a(\theta)\tilde{a}(\theta) - b(\theta)\tilde{b}(\theta) = p_1(h'(\theta)) \\ b(\theta)\tilde{a}(\theta) + a(\theta)\tilde{b}(\theta) = p_2(h'(\theta)). \end{cases} \quad (1.6)$$

Nuevamente, tenemos que

$$\begin{vmatrix} a(\theta) & -b(\theta) \\ b(\theta) & a(\theta) \end{vmatrix} = a^2(\theta) + b^2(\theta) \neq 0.$$

Luego, existen unos únicos $\tilde{a}(\theta)$ y $\tilde{b}(\theta)$ que satisfacen el sistema. Sólo falta comprobar que estas curvas están en $T_{(a,b)}St^0(2, V)$, esto es, que cumplen las condiciones

$$\langle a, \tilde{a} \rangle_V = \langle b, \tilde{b} \rangle_V = 0 \quad \text{y} \quad \langle \tilde{a}, b \rangle_V = - \langle a, \tilde{b} \rangle_V .$$

Ya que $h(2\pi) = (0, 0)$, podemos tomar en el sistema (1.6) $\theta = 2\pi$ y deducir que

$$\langle a, \tilde{a} \rangle_V = \langle b, \tilde{b} \rangle_V \quad \text{y} \quad \langle \tilde{a}, b \rangle_V = - \langle a, \tilde{b} \rangle_V .$$

Por otro lado, de (1.5) se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} \frac{\langle (a(\theta) + ib(\theta)) \cdot (\tilde{a}(\theta) + i\tilde{b}(\theta)), (a(\theta) + ib(\theta))^2 \rangle}{\|(a(\theta) + ib(\theta))^2\|} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \langle \tilde{a}(\theta) + i\tilde{b}(\theta), a(\theta) + ib(\theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\tilde{a}(\theta)a(\theta) + \tilde{b}(\theta)b(\theta)) d\theta = \langle \tilde{a}, a \rangle_V + \langle \tilde{b}, b \rangle_V = 2 \langle \tilde{a}, a \rangle_V . \end{aligned}$$

Luego, $\langle a, \tilde{a} \rangle_V = \langle b, \tilde{b} \rangle_V = 0$.

Para finalizar esta demostración, comprobaremos que efectivamente $T_{(a,b)}\Psi$ conserva los correspondientes productos escalares en $T_{(a,b)}St^0(2, V)$ y $T_{\Psi(a,b)}\mathbb{M}'_d$, es decir, que se cumple la siguiente igualdad:

$$2 \langle (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1), (\tilde{a}_2, \tilde{b}_2) \rangle_{St^0(2,V)} = \langle T_{(a,b)}\Psi(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1), T_{(a,b)}\Psi(\tilde{a}_2, \tilde{b}_2) \rangle_{\mathbb{M}'_d} .$$

En efecto, denotando por $\tilde{h} = T_{(a,b)}\Psi(\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)$ y $\tilde{k} = T_{(a,b)}\Psi(\tilde{a}_2, \tilde{b}_2)$, se tiene que $\tilde{h}'(s) = (a(s) + ib(s)) \cdot (\tilde{a}_1(s) + i\tilde{b}_1(s))$ y $\tilde{k}'(s) = (a(s) + ib(s)) \cdot (\tilde{a}_2(s) + i\tilde{b}_2(s))$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{h}, \tilde{k} \rangle_{\mathbb{M}'_d} &= \int_0^{2\pi} \frac{\langle \tilde{h}'(s), \tilde{k}'(s) \rangle}{\|\Psi'(a, b)(s)\|} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(a^2(s) + b^2(s)) (\tilde{a}_1(s)\tilde{a}_2(s) + \tilde{b}_1(s)\tilde{b}_2(s))}{\frac{1}{2}(a^2(s) + b^2(s))} ds \\ &= \int_0^{2\pi} 2(\tilde{a}_1(s)\tilde{a}_2(s) + \tilde{b}_1(s)\tilde{b}_2(s)) ds \\ &= 2 \langle (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2), (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \rangle_{St^0(2,V)} . \end{aligned}$$

□

De hecho, se puede probar que la aplicación

$$\begin{aligned} \Psi : St^0(2, V) &\rightarrow \mathbb{M}'_d \\ (a, b) &\rightarrow \Psi(a, b)(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta (a(s) + ib(s))^2 ds \end{aligned}$$

es un recubridor de dos hojas ([15], página 5, Teorema 2.2), tal que si se restringe a cada una de ellas tenemos una isometría de la hoja de $St^0(2, V)$ en \mathbb{M}'_d .

Resumiendo, el espacio \mathbb{M} de curvas planas cerradas regulares es isométrico al producto $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \left(St^0(2, V)\right)^+$, donde $\left(St^0(2, V)\right)^+$ es una de las hojas del recubrimiento $St^0(2, V) \rightarrow \mathbb{M}'_d$. Por lo tanto, podemos considerar el embebimiento isométrico de \mathbb{M} en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$ dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &\hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V \\ f &\hookrightarrow \left(\bar{c}(f), \ln L(f), (a, b)\right), \end{aligned}$$

donde $a(\theta) = \sqrt{\frac{2\|f'(\theta)\|}{L(f)}} \cos\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right)$, $b(\theta) = \sqrt{\frac{2\|f'(\theta)\|}{L(f)}} \sin\left(\frac{\alpha(\theta)}{2}\right)$ y $\alpha(\theta)$ es el ángulo que forma $f'(\theta)$ con el eje OX . Aquí, consideramos sobre \mathbb{M} la métrica Riemanniana $\langle, \rangle_{\mathbb{M}}$ y sobre $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$ las derivadas de las estándares sobre \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} y $2\langle, \rangle_{V \times V}$.

1.7. Media extrínseca de una muestra de n curvas planas cerradas regulares

Sabemos que el espacio de curvas planas cerradas regulares \mathbb{M} es una variedad Riemanniana; luego, dada una muestra de n curvas f_1, f_2, \dots, f_n , en esta sección nos planteamos definir una media extrínseca de la muestra. Para ello, tendremos en cuenta la identificación de \mathbb{M} con $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \left(St^0(2, V)\right)^+$

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \left(St^0(2, V)\right)^+ &\rightarrow \mathbb{M} \\ (v, l, (a, b)) &\rightarrow v + e^l \left(\Psi(a, b) - \bar{c}(\Psi(a, b))\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

y el embebimiento

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &\hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \left(St^0(2, V)\right)^+ \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V \\ f &\hookrightarrow \left(\bar{c}(f), \ln L(f), (a, b)\right). \end{aligned}$$

De este modo, dado un conjunto de curvas $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de \mathbb{M} , éstas se pueden identificar con los elementos de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$

$$\left(\bar{c}(f_i), \ln L(f_i), (a_i, b_i)\right)$$

y podemos definir la media en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$ como $\left(\bar{c}_m, \ln L_m, (a_m, b_m)\right)$, donde

$$\bar{c}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{c}(f_i), \quad L_m = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n L(f_i)}^8,$$

$$a_m(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i(\theta) \quad \text{y} \quad b_m(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i(\theta).$$

Comprobaremos que $(\bar{c}_m, \ln L_m, (a_m, b_m))$ minimiza la distancia definida en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \times V \times V$ inducida por los productos escalares estándares en \mathbb{R}^2 , \mathbb{R} y el producto $\langle, \rangle_{V \times V}$ en $V \times V$. En efecto, definimos la función

$$F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow \sum_{i=1}^n \langle \bar{c}(f_i) - v, \bar{c}(f_i) - v \rangle$$

y vamos a demostrar que \bar{c}_m es un mínimo.

Derivando F_1 respecto de v , tenemos que

$$D(F_1)(v) = D\left(\sum_{i=1}^n \langle \bar{c}(f_i) - v, \bar{c}(f_i) - v \rangle\right)(v) = -2 \sum_{i=1}^n \bar{c}(f_i) + 2nv.$$

Observamos que $D(F_1)(\bar{c}_m) = 0$. Derivando F_1 de nuevo respecto de v , se tiene que

$$D^2(F_1)(v) = D^2\left(-\sum_{i=1}^n \bar{c}(f_i) + 2nv\right) = 2n > 0.$$

Por lo tanto, \bar{c}_m es un mínimo de F_1 .

En cuanto a $\ln L_m$, tomamos la función

$$F_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow \sum_{i=1}^n \langle \ln L(f_i) - p, \ln L(f_i) - p \rangle$$

y vemos que la derivada de F_2 respecto de p es

$$\frac{d}{dp} F_2(p) = \frac{d}{dp} \sum_{i=1}^n \langle \ln L(f_i) - p, \ln L(f_i) - p \rangle = -2 \sum_{i=1}^n \ln L(f_i) + 2np.$$

Está claro que $\frac{d}{dp} F_2(\ln L_m) = 0$. Además, como $\frac{d^2}{dp^2} F_2(p) = 2n > 0$, tenemos que $\ln L_m$ es un mínimo de F_2 .

Finalmente, demostraremos que el par (a_m, b_m) es un punto crítico de la función

⁸ Nótese que L_m es la media geométrica de $L(f_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y que

$$\ln L_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln L(f_i).$$

$$F_3 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \rightarrow \sum_{i=1}^n \left(d_0 \left((a_i, b_i), (a, b) \right) \right)^2, \quad (1.8)$$

donde $\left(d_0 \left((a, b), (\bar{a}, \bar{b}) \right) \right)^2 = \|a - \bar{a}\|_V^2 + \|b - \bar{b}\|_V^2$.

Un cálculo directo prueba que la aplicación tangente $T_{(a,b)}F_3 : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$T_{(a,b)}F_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = -2 \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{2\pi} (a_i(\theta) - a(\theta)) \tilde{a}(\theta) d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} (b_i(\theta) - b(\theta)) \tilde{b}(\theta) d\theta \right). \quad (1.9)$$

Así, es evidente que para todo $(\tilde{a}, \tilde{b}) \in V \times V$

$$T_{(a_m, b_m)}F_3(\tilde{a}, \tilde{b}) = -2 \sum_{i=1}^n \left(\int_0^{2\pi} (a_i(\theta) - a_m(\theta)) \tilde{a}(\theta) d\theta \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} (b_i(\theta) - b_m(\theta)) \tilde{b}(\theta) d\theta \right) = 0.$$

Luego, (a_m, b_m) efectivamente es un punto crítico de F_3 .

Sin embargo, en general (a_m, b_m) no pertenece a $St^0(2, V)$; por lo tanto, no es posible obtener el correspondiente elemento de \mathbb{M} asociado por la aplicación ϕ dada en (1.7). La estrategia que se sigue a continuación consiste en aplicar el proceso de normalización de Gram-Schmidt a (a_m, b_m) para conseguir un punto de $St^0(2, V)$. Los puntos restantes de este espacio son rotaciones de dicho punto. Así, podremos calcular la rotación correspondiente a la mínima distancia con (a_m, b_m) . Pero, para aplicar Gram-Schmidt debemos garantizar previamente que a_m y b_m son independientes.

En lo que sigue, a no ser que se indique lo contrario, vamos a suponer que (a_m, b_m) es un punto no focal⁹ de $St^0(2, V)$, esto es, existe un único $(a_m^0, b_m^0) \in St^0(2, V)$ tal que

$$d_0 \left((a_m, b_m), St^0(2, V) \right) = d_0 \left((a_m, b_m), (a_m^0, b_m^0) \right).^{10} \quad (1.10)$$

Consideramos el subespacio W_1 de V dado por $W_1 = span\{a_m, b_m, a_m^0, b_m^0\}$. La dimensión de este subespacio es menor o igual a 4 y por tanto, es posible

⁹ Esta condición de focalidad se puede garantizar en gran parte de los casos prácticos.

¹⁰ Nótese que, cuando el punto es focal, existe $(\bar{a}_m, \bar{b}_m) \in St(2, V)$ tal que

$$d_0 \left((a_m, b_m), St(2, V) \right) = d_0 \left((a_m, b_m), (\bar{a}_m, \bar{b}_m) \right),$$

ya que $St(2, V)$ es un cerrado en $V \times V$.

encontrar $\bar{a}, \bar{b} \in V$ tales que $\{\bar{a}, \bar{b}, a_m^0, b_m^0\}$ es un sistema ortonormal respecto de \langle, \rangle_V , de modo que

$$W_1 \subset W = \text{span}\{\bar{a}, \bar{b}, a_m^0, b_m^0\}.$$

Como $d_0((a_m, b_m), St^0(2, V)) = d_0((a_m, b_m), St^0(2, W))$, podemos suponer en lo que sigue que la dimensión de V es 4.

Proposición 1.7.1 *Si (a_m, b_m) es un punto no focal de $St^0(2, V)$, entonces $\dim(\text{span}\{a_m, b_m\}) = 2$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que la dimensión de $\text{span}\{a_m, b_m\}$ es menor que 2. En ese caso, pueden darse tres situaciones:

Si $a_m = 0$. Sabemos que $(a_m^0, b_m^0) \in St^0(2, V)$ es el único punto que satisface la ecuación (1.10). Luego, en este caso se tiene que

$$\left(d_0((0, b_m), (a_m^0, b_m^0))\right)^2 = \|a_m^0\|_V^2 + \|b_m - b_m^0\|_V^2.$$

Sin embargo, el punto $(-a_m^0, b_m^0)$ de $St^0(2, V)$ también satisface la ecuación (1.10) y eso implica que $(0, b_m)$ sería un punto focal.

Si $b_m = 0$. Del mismo modo, si $(a_m^0, b_m^0) \in St^0(2, V)$, entonces se tiene que

$$\left(d_0((a_m, 0), (a_m^0, b_m^0))\right)^2 = \|a_m - a_m^0\|_V^2 + \|b_m^0\|_V^2 = \left(d_0((a_m, 0), (a_m^0, -b_m^0))\right)^2.$$

Por lo tanto, $(a_m, 0)$ sería un punto focal.

Si $b_m = \lambda a_m$ con $\lambda \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} d_0((a_m, \lambda a_m), (a_m^0, b_m^0)) &= d_0((a_m, \lambda a_m), (\cos \theta_0 a_m^0 + \sin \theta_0 b_m^0, \\ &\quad \sin \theta_0 a_m^0 - \cos \theta_0 b_m^0)) \end{aligned} \tag{1.11}$$

donde $\theta_0 \in (0, 2\pi)$ tal que

$$\lambda = \frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0}.$$

En efecto, desarrollando (1.11) obtenemos que el segundo término de esta ecuación es

$$\begin{aligned} &\left(d_0((a_m, \lambda a_m), (\cos \theta_0 a_m^0 + \sin \theta_0 b_m^0, \sin \theta_0 a_m^0 - \cos \theta_0 b_m^0))\right)^2 \\ &= \|a_m\|_V^2 - 2 \cos \theta_0 \langle a_m, a_m^0 \rangle_V - 2 \sin \theta_0 \langle a_m, b_m^0 \rangle_V \\ &\quad + \lambda^2 \|a_m\|_V^2 - 2\lambda \sin \theta_0 \langle a_m, a_m^0 \rangle_V + 2\lambda \cos \theta_0 \langle a_m, b_m^0 \rangle_V + 2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Teniendo en cuenta las siguientes igualdades

- $\|a_m - a_m^0\|_V^2 = \|a_m\|^2 V + \|a_m^0\|_V^2 - 2 \langle a_m, a_m^0 \rangle_V$
- $\|b_m - b_m^0\|_V^2 = \|b_m\|^2 V + \|b_m^0\|_V^2 - 2 \langle b_m, b_m^0 \rangle_V$

resulta de (1.12) que

$$\begin{aligned} & \left(d_0 \left((a_m, \lambda a_m), (\cos \theta_0 a_m^0 + \sin \theta_0 b_m^0, \sin \theta_0 a_m^0 - \cos \theta_0 b_m^0) \right) \right)^2 \\ &= \|a_m - a_m^0\|_V^2 + \|\lambda a_m - b_m^0\|_V^2 = \left(d_0 \left((a_m, \lambda a_m), (a_m^0, b_m^0) \right) \right)^2 \end{aligned}$$

Nótese que la función

$$\lambda(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}, \quad \theta \in (0, 2\pi)$$

es sobre (ver Figura 1.1).

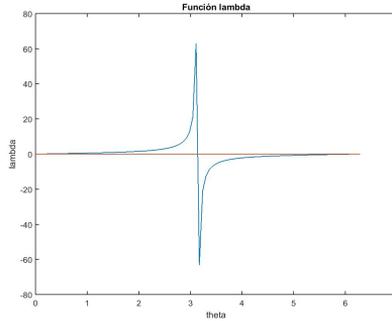


Figura 1.1. Función λ

Por lo tanto, para todo $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ existe un θ_0 tal que $\lambda = \frac{1 - \cos \theta_0}{\sin \theta_0}$.

Resta demostrar

$$(c, d) = (\cos \theta_0 a_m^0 + \sin \theta_0 b_m^0, \sin \theta_0 a_m^0 - \cos \theta_0 b_m^0) \in St^0(2, V).$$

En efecto, un cómputo directo prueba que $\langle c, c \rangle_V = 1$, $\langle d, d \rangle_V = 1$, $\langle c, d \rangle_V = 0$ y $c^2(\theta) + d^2(\theta) = (a_m^0)^2(\theta) + (b_m^0)^2(\theta) \neq (0, 0)$.

En conclusión, si $b_m = \lambda a_m$ con $\lambda \neq 0$, entonces existe $(c, d) \in St^0(2, V)$, (c, d) diferente de (a_m^0, b_m^0) tal que

$$d_0 \left((a_m, \lambda a_m), (a_m^0, b_m^0) \right) = d_0 \left((a_m, \lambda a_m), (c, d) \right),$$

lo cual es absurdo.

□

Acabamos de probar que $\{a_m, b_m\}$ son independientes, de modo que podemos aplicar el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a (a_m, b_m) :

$$u_1 = a_m \quad y \quad u_2 = b_m - \frac{\langle a_m, b_m \rangle_V}{\langle a_m, a_m \rangle_V} a_m.$$

Adviértase que $\langle u_1, u_2 \rangle_V = 0$ y que u_2 tiene sentido, pues $\langle a_m, a_m \rangle_V \neq 0$. El resultado del método es, entonces

$$\left(a_g = \frac{u_1}{\|u_1\|_V}, b_g = \frac{u_2}{\|u_2\|_V} \right) \in St^0(2, V).$$

Es obvio que conocido el elemento (a_g, b_g) de $St^0(2, V)$, todos los demás elementos de $St^0(2, V)$ son una rotación de (a_g, b_g) , esto es,

$$e^{i\alpha}(a_g + ib_g) = \left(a_g \cos \alpha - b_g \sin \alpha, a_g \sin \alpha + b_g \cos \alpha \right)$$

con $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Tomamos (a_m^0, b_m^0) como la rotación correspondiente al α que minimiza la función $F_3 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_3(\alpha) = \int_0^{2\pi} \left(a_m(\theta) - a_g(\theta) \cos \alpha + b_g(\theta) \sin \alpha \right)^2 d\theta \tag{1.13}$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(b_m(\theta) - a_g(\theta) \sin \alpha - b_g(\theta) \cos \alpha \right)^2 d\theta.$$

Si derivamos esta función respecto de α , tenemos que

$$\frac{dF_3}{d\alpha}(\alpha) = 2 \left[\sin \alpha \left(\langle a_m, a_g \rangle_V + \langle b_m, b_g \rangle_V \right) \right. \\ \left. + \cos \alpha \left(\underbrace{\langle a_m, b_g \rangle_V - \langle b_m, a_g \rangle_V}_0 \right) \right].$$

De modo que, si $\frac{dF_3}{d\alpha}(\alpha) = 0$, entonces

$$\sin \alpha \left(\langle a_m, a_g \rangle_V + \langle b_m, b_g \rangle_V \right) - \cos \alpha \langle b_m, a_g \rangle_V = 0 \tag{1.14}$$

y por consiguiente

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\langle b_m, a_g \rangle_V}{\langle a_m, a_g \rangle_V + \langle b_m, b_g \rangle_V} \right) \in [0, 2\pi].$$

Nótese que $\langle a_m, a_g \rangle_V = \|a_m\|_V > 0$ y que

$$\langle b_m, b_g \rangle_V = \frac{\sqrt{\|b_m\|_V^2 \|a_m\|_V^2 - \langle a_m, b_m \rangle^2}}{\|a_m\|_V} \geq 0,$$

ya que a_m y b_m son independientes.

Calculando la segunda derivada de la función F_3 respecto de α y teniendo en cuenta (1.14), tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_3}{d\alpha^2}(\alpha) &= 2 \left[\cos \alpha \left(\langle a_m, a_g \rangle_V + \langle b_m, b_g \rangle_V \right) + \sin \alpha \langle b_m, a_g \rangle_V \right] \\ &= 2 \cos \alpha \frac{\left(\langle a_m, a_g \rangle_V + \langle b_m, b_g \rangle_V \right)^2 + \langle b_m, a_g \rangle_V^2}{\langle a_m, a_g \rangle_V + \langle b_m, b_g \rangle_V}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, α será un mínimo cuando $\cos(\alpha) > 0$, esto es, cuando

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \left[\right.$$

Finalmente, todo el desarrollo teórico que hemos realizado en este capítulo nos sugiere la siguiente definición de la curva media extrínseca.

Definición 1.7.1 *La curva media extrínseca de una muestra $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ de curvas planas cerradas regulares es la curva obtenida de la siguiente fórmula:*

$$f_m = \bar{c}_m + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n L(f_i)} \left(\frac{1}{2} \int_0^\bullet \left(a_m^0(s) + ib_m^0(s) \right)^2 ds - \bar{c} \left(\frac{1}{2} \int_0^\bullet \left(a_m^0(s) + ib_m^0(s) \right)^2 ds \right) \right),$$

donde $(a_m^0, b_m^0) \in St^0(2, V)$ es el punto crítico $e^{i\alpha}(a_g + ib_g)$ que minimiza la función descrita en (1.13) ¹¹.

¹¹ Obsérvese que $f_m = \phi(\bar{c}_m, \ln L_m, (a_m^0, b_m^0))$.

Algoritmo

La teoría desarrollada en el capítulo anterior nos permite implementar un algoritmo para resolver el problema de encontrar la curva media extrínseca. Ésto lo haremos en este capítulo. Así, hemos estructurado el mismo de la siguiente manera: primero mostramos un esquema del algoritmo para establecer de manera clara los pasos que se deben seguir; después discretizamos el proceso y lo implementamos en MATLAB. Finalmente, lo aplicamos a dos ejemplos: uno puramente matemático y otro médico, en el que analizamos una imagen médica de un tumor cerebral. El código del algoritmo puede verse en este [enlace](#).

2.1. Descripción del algoritmo

En esta sección, describiremos paso a paso el algoritmo y, posteriormente, mostraremos un diagrama del mismo para esquematizar el procedimiento. Así, el algoritmo se desarrolla en los siguientes pasos.

PASO 1: Establecer las curvas $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ planas cerradas y regulares que forman la muestra.

PASO 2: Calcular los correspondientes elementos de cada curva en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times S^{l^0}(2, V)$, es decir,

$$\left(\bar{c}(f_i), \ln L(f_i), (a_i, b_i) \right),$$

donde

$$L(f_i) = \int_0^{2\pi} \|f'_i(\theta)\| d\theta, \quad \bar{c}(f_i) = \frac{1}{L(f_i)} \int_0^{2\pi} \|f'_i(\theta)\| f_i(\theta) d\theta,$$

$$a_i(\theta) = \sqrt{\frac{2\|f'_i(\theta)\|}{L(f_i)}} \cos\left(\frac{\alpha_i(\theta)}{2}\right) \quad \text{y} \quad b_i(\theta) = \sqrt{\frac{2\|f'_i(\theta)\|}{L(f_i)}} \sin\left(\frac{\alpha_i(\theta)}{2}\right),$$

siendo $\alpha_i(\theta)$ el ángulo que forma $f'_i(\theta) = (x'_i(\theta), y'_i(\theta))$ con el eje OX , esto es,

$$\alpha_i(\theta) = \arctan\left(\frac{y'_i(\theta)}{x'_i(\theta)}\right) \in [0, 2\pi].$$

PASO 3: Calcular el valor medio $(\bar{c}_m, \ln L_m, (a_m, b_m))$ en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$ con las siguientes fórmulas:

$$\bar{c}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{c}(f_i), \quad \ln L_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln L(f_i), \quad a_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{y} \quad b_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i.$$

PASO 4: Construir el par $(a_m^0, b_m^0) \in St^0(2, V)$ que minimiza la distancia con $(a_m, b_m) \in V \times V$. Consideramos los elementos de $V \times V$

$$u_1 = a_m, \quad \text{y} \quad u_2 = b_m - \frac{\langle a_m, b_m \rangle_V}{\langle a_m, a_m \rangle_V} a_m$$

y los normalizamos, obteniendo el par

$$\left(a_g = \frac{u_1}{\|u_1\|_V}, b_g = \frac{u_2}{\|u_2\|_V} \right).$$

Por último, calculamos el elemento buscado con la fórmula

$$(a_m^0, b_m^0) = (a_g \cos \alpha - b_g \sin \alpha, a_g \sin \alpha + b_g \cos \alpha),$$

donde α es el ángulo

$$\alpha = \arctan \frac{\langle b_m, a_g \rangle_V}{\langle a_m, a_g \rangle_V + \langle b_m, b_g \rangle_V} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[.$$

PASO 5: Calcular la curva $\Psi(a_m^0, b_m^0) \in \mathbb{M}'_d$ mediante la expresión

$$\Psi(a_m^0, b_m^0)(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta \left(a_m^0(s) + i b_m^0(s) \right)^2 ds.$$

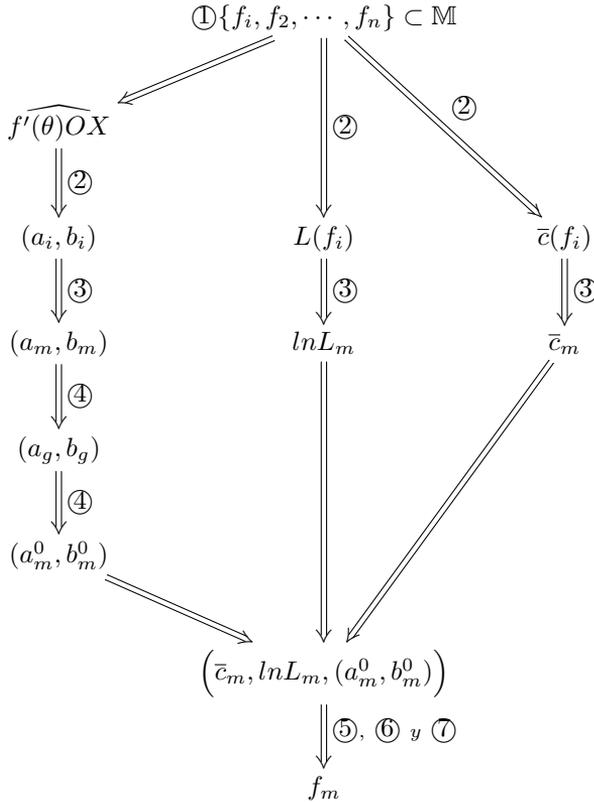
PASO 6: Calcular el centroide de la curva $\Psi(a_m^0, b_m^0) \in \mathbb{M}'_d$, esto es,

$$\bar{c}(\Psi(a_m^0, b_m^0)) = \int_0^{2\pi} \left\| \left(\Psi(a_m^0, b_m^0) \right)'(\theta) \right\| \Psi(a_m^0, b_m^0)(\theta) d\theta.$$

PASO 7: Construir la curva media extrínseca en \mathbb{M} , es decir,

$$f_m = \bar{c}_m + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n L(f_i) \left(\Psi(a_m^0, b_m^0) - \bar{c}(\Psi(a_m^0, b_m^0)) \right)}.$$

A continuación, mostramos el diagrama del algoritmo.



2.2. Ejemplo matemático

En esta sección, presentamos un ejemplo matemático con tres circunferencias con centro el origen y de radios 1, 2 y 6, respectivamente.

Consideramos las curvas $f_1(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$, $f_2(\theta) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ y $f_3(\theta) = (6 \cos \theta, 6 \sin \theta)$. Usando la fórmula de la longitud tenemos que $L(f_1) = 2\pi$, $L(f_2) = 4\pi$ y $L(f_3) = 12\pi$. Por otro lado, el centroide de todas ellas es el punto $(0, 0)$. Como

$$f'_1(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta) = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

tenemos que el ángulo que forma $f'_1(\theta)$ con el eje OX es $\alpha_1(\theta) = \theta + \frac{\pi}{2}$ y de la misma manera deducimos que $\alpha_2(\theta) = \alpha_1(\theta) = \alpha_3(\theta)$.

Con estos datos, estamos en condiciones de construir los (a_i, b_i) correspondientes a cada curva, esto es,

$$(a_1(\theta), b_1(\theta)) = (a_2(\theta), b_2(\theta)) = (a_3(\theta), b_3(\theta)) = \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right).$$

De este modo, el par (a_m, b_m) es

$$(a_m(\theta), b_m(\theta)) = \left(\sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right), \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right).$$

Nótese que $(a_m, b_m) \in St^0(2, V)$, por lo que $(a_m^0, b_m^0) = (a_m, b_m)$.

Finalmente, calculamos la curva imagen por la aplicación Ψ , es decir,

$$\Psi(a_m^0, b_m^0)(\theta) = \frac{1}{2} \int_0^\theta \left(a_m^0(s) + ib_m^0(s) \right)^2 ds = \frac{1}{2\pi} \left(\cos(\theta) - 1, \sin(\theta) \right),$$

y su centroide, o sea,

$$\bar{c}(\Psi(a_m^0, b_m^0)) = \left(\frac{-1}{2\pi}, 0 \right).$$

Así, concluimos que la curva media en este ejemplo es la circunferencia de radio $\sqrt[3]{12}$ y centro $(0, 0)$

$$f_m(\theta) = \sqrt[3]{12} \left(\cos \theta, \sin \theta \right)^{12}.$$

En este caso tenemos las parametrizaciones de las curvas, pero esto no suele ser así. Lo normal es que conozcamos una serie de puntos de cada curva, por lo que debemos discretizar el proceso usando métodos numéricos de aproximación. En concreto, debemos discretizar dos operaciones: la derivación y la integración.

Para la elaboración del código en MATLAB, hemos optado por utilizar los métodos numéricos que a continuación describimos.

1. Para el cálculo de la derivada utilizamos la fórmula

$$f'(\theta) \approx \frac{1}{2h} \left[-f(\theta + 2h) + 8f(\theta + h) - 8f(\theta - h) + f(\theta - 2h) \right],$$

donde $\theta \in \{0, h, 2h, \dots, 2\pi\}$ y h es el tamaño de paso. El error cometido al usar este método es

¹² Nótese que la curva media extrínseca es una circunferencia cuyo radio es la media geométrica de los radios de la muestra. Este tipo de media es menos sensible a valores extremos que la media aritmética y aparece como consecuencia de la introducción del logaritmo neperiano en la segunda componente de $\mathbb{M} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \left(St^0(2, V) \right)^+$. Es necesario aplicar el logaritmo neperiano porque tomar directamente las longitudes implicaría trabajar en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \times V \times V$ y este espacio no es un espacio vectorial.

$$\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in [\theta - 2h, \theta + 2h],$$

por lo que es un método de orden 5 (página 178, [3]).

2. Para el cálculo de las integrales usamos el método de la trapezoidal compuesto, esto es,

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \approx \frac{h}{2} \left[f(0) + f(2\pi) + \sum_{i=2}^{n-1} f(\theta_i) \right].$$

En este caso, el error cometido por el método es

$$\frac{2\pi h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in [0, 2\pi]$$

y, por tanto, tiene orden 2 (página 194, [3]).

En lo que se refiere a los datos del algoritmo, debemos aportar como datos de entrada el número de curvas de la muestra (n), el número de puntos que se toman de cada curva (N) y estos puntos. Debido al uso del método trapezoidal compuesto, es preciso poner una restricción sobre los puntos, pues tienen que ser tomados equiespaciadamente con tamaño $h = \frac{2\pi}{N-1}$. De esta manera, se obtiene como dato de salida una representación de las curvas de la muestra junto con la curva media extrínseca.

Así, si aplicamos el algoritmo, explicado en la Sección 2.1, al ejemplo anterior de las circunferencias descritas tomando 18 puntos, obtenemos que los puntos de f_1 , f_2 y f_3 son los que se muestran en la siguiente tabla (Tabla 2.1). También en esta tabla se señala la discretización de la curva media extrínseca f_m resultante del algoritmo.

Tabla 2.1. Discretización de la muestra y de la circunferencia media extrínseca

f_1		f_2		f_3		f_m	
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_m	y_m
1.000000	0.000000	2.000000	0.000000	6.000000	0.000000	2.261922	0.000000
0.932472	0.361242	1.864944	0.722483	5.594833	2.167450	2.109179	0.817100
0.739009	0.673696	1.478018	1.347391	4.434054	4.042174	1.671580	1.523847
0.445738	0.895163	0.891477	1.790327	2.674430	5.370980	1.008225	2.024789
0.092268	0.995734	0.184537	1.991468	0.553610	5.974405	0.208704	2.252273
-0.273663	0.961826	-0.547326	1.923651	-1.641978	5.770954	-0.619004	2.175574
-0.602635	0.798017	-1.205269	1.596034	-3.615808	4.788103	-1.363112	1.805053
-0.850217	0.526432	-1.700434	1.052864	-5.101303	3.158593	-1.923125	1.190748
-0.982973	0.183750	-1.965946	0.367499	-5.897839	1.102497	-2.223408	0.415627
-0.982973	-0.183750	-1.965946	-0.367499	-5.897839	-1.102497	-2.223408	-0.415627
-0.850217	-0.526432	-1.700434	-1.052864	-5.101303	-3.158593	-1.923125	-1.190748
-0.602635	-0.798017	-1.205269	-1.596034	-3.615808	-4.788103	-1.363112	-1.805053
-0.273663	-0.961826	-0.547326	-1.923651	-1.641978	-5.770954	-0.619004	-2.175574
0.092268	-0.995734	0.184537	-1.991468	0.553610	-5.974405	0.208704	-2.252273
0.445738	-0.895163	0.891477	-1.790327	2.674430	-5.370980	1.008225	-2.024789
0.739009	-0.673696	1.478018	-1.347391	4.434054	-4.042174	1.671580	-1.523847
0.932472	-0.361242	1.864944	-0.722483	5.594833	-2.167450	2.109179	-0.817100
1.000000	-0.000000	2.000000	-0.000000	6.000000	-0.000000	2.261922	-0.000000

La representación gráfica de las curvas es la siguiente (f_1 en azul, f_2 en rojo, f_3 en amarillo y f_m en negro).

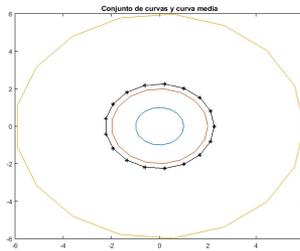


Figura 2.1. Curvas de radios 1, 2 y 6 y curva media extrínseca

Como se observa, el algoritmo genera una curva que resulta ser una circunferencia centrada en el origen y de radio 2.26, por lo que se comete un error de 0.029.

2.3. Aplicación a una imagen médica

En esta sección aplicaremos el algoritmo al problema de delimitar un tumor cerebral en una radiografía (Figura 2.2). Con la ayuda de tres expertos, hemos

delimitado el tumor de la radiografía usando el programa GeoGebra ¹³. Las tres curvas que formaron la muestra son las que aparecen en la imagen de la derecha de la Figura 2.2.

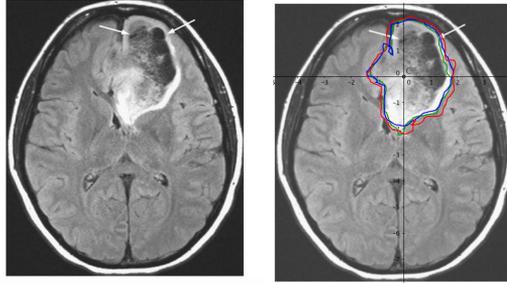


Figura 2.2. Tumor neuroepitelial disemбриoplástico y curvas de la muestra

En este caso, para hallar la curva media extrínseca, no basta utilizar 18 puntos, como se hizo en el ejemplo anterior, ya que entonces no estaríamos tomando todas las irregularidades del tumor. Han sido necesarios, en esta ocasión, 27 puntos para que la curva media extrínseca se aproxime correctamente a la forma que queremos analizar. Además, como se ha usado el método trapezoidal compuesto y los puntos tienen que ser equiespaciados, el tamaño de paso es 0.2416.

De este modo, las longitudes y los centroides de las curvas de la muestra y de la curva media extrínseca obtenidos por el algoritmo son los que se indican en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2. Longitudes y centroides de las curvas

	curva verde	curva azul	curva roja	f_m
Longitud	11.159228	11.185316	12.026049	11.179646
Centroide	(0.264876, 0.128564)	(0.265571, 0.150529)	(0.292732, 0.089391)	(0.274393, 0.122828)

La curva media extrínseca sobre la radiografía del tumor está representada en la imagen de la izquierda de la Figura 2.3, mientras que en la imagen de la derecha representamos las curvas de la muestra ¹⁴ y la curva media extrínseca, de color negro, generadas por el algoritmo.

¹³ Existen programas más sofisticados para realizar estas delimitaciones, pero en esta Memoria sólo queremos mostrar el proceso.

¹⁴ La curva verde está representada en color rojo, la roja en color amarillo y la azul en el mismo color, pues son los colores por defecto que establece MATLAB.

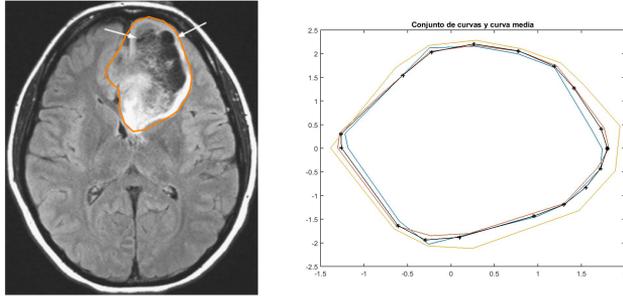


Figura 2.3. Curva media extrínseca sobre la radiografía y resultado del algoritmo

La discretización de las cuatro curvas está descrita en la siguiente Tabla 2.3.

Tabla 2.3. Tabla 2. Curvas de la muestra y curva media extrínseca

curva verde		curva azul		curva roja		f_m	
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_m	y_m
1.7378	-0.0081	1.8149	-0.0084	1.8351	-0.0085	1.797066	-0.011672
1.6175	0.3906	1.7626	0.4256	1.9439	0.4694	1.726288	0.412130
1.4717	0.7634	1.5744	0.8167	1.5449	0.8015	1.563232	0.814853
1.3484	1.1830	1.4291	1.2538	1.5273	1.3399	1.413324	1.273530
1.1909	1.7073	1.2163	1.7438	1.2605	1.8072	1.188659	1.734251
0.7690	1.9978	0.7890	2.0497	0.8096	2.1031	0.780245	2.057190
0.2730	2.1575	0.2753	2.1756	0.2890	2.2844	0.262609	2.206655
-0.2467	2.1224	-0.2382	2.0487	-0.2528	2.1748	-0.225234	2.035363
-0.4860	1.3017	-0.5324	1.4260	-0.6367	1.7053	-0.555286	1.540495
-0.7204	1.0554	-0.7935	1.1625	-0.6838	1.0018	-0.753825	1.091932
-0.8685	0.7776	-0.8757	0.7841	-0.9530	0.8533	-0.922933	0.810681
-1.0503	0.5584	-1.0392	0.5525	-1.1144	0.5925	-1.101773	0.567441
-1.2204	0.3078	-1.2799	0.3228	-1.2399	0.3127	-1.265853	0.301756
-1.1839	0.0055	-1.3033	0.0061	-1.3852	0.0064	-1.259598	0.009564
-0.8364	-0.2020	-0.9871	-0.2384	-1.1226	-0.2711	-1.021945	-0.228897
-0.6937	-0.3598	-0.7217	-0.3744	-0.8380	-0.4347	-0.807539	-0.416963
-0.6855	-0.6014	-0.7217	-0.6332	-0.8668	-0.7605	-0.776655	-0.697370
-0.7584	-1.0873	-0.7217	-1.0347	-0.8487	-1.2167	-0.775494	-1.138308
-0.5942	-1.5436	-0.6316	-1.6407	-0.6557	-1.7035	-0.610031	-1.636223
-0.2569	-2.0305	-0.2341	-1.8500	-0.2616	-2.0676	-0.295168	-1.939444
0.1999	-1.7192	0.2097	-1.8033	0.2464	-2.1196	0.098964	-1.881582
0.5625	-1.5066	0.5729	-1.5345	0.6581	-1.7626	0.537706	-1.638760
0.9857	-1.4441	0.7935	-1.3505	1.0400	-1.5236	0.952062	-1.433714
1.3156	-1.1780	1.3032	-1.1669	1.4724	-1.3184	1.299902	-1.189509
1.4972	-0.7960	1.4665	-0.7797	1.6359	-0.8698	1.549939	-0.827544
1.7212	-0.4341	1.6798	-0.4237	1.8895	-0.4766	1.720996	-0.425310
1.7378	-0.0081	1.8149	-0.0084	1.8351	-0.0085	1.797066	0.002662

Conclusiones

El análisis de formas resulta ser un área de investigación de las Matemáticas que permite dar respuestas a problemas reales de diferentes ámbitos. Por ejemplo, en el área de la oncología, podemos plantear problemas como la evolución de un tumor o la decisión de qué zonas se deben radiar y cuáles no. Pero también en otros contextos, como en el ámbito de la industria textil, donde podemos plantear la búsqueda de una talla estándar; en la agricultura, donde podemos encontrar el área óptima para aplicar fertilizante a los cultivos; en el área de la geología, donde podemos encontrar la ubicación aproximada de yacimientos de petróleo y de minerales; en el ámbito de la vulcanología, donde podemos analizar la evolución de la actividad volcánica y, por último, en el ámbito de la aeronomía, en el que podemos dar una forma plana aproximada de posibles nubes de gases que se encuentren en la atmósfera.

En esta Memoria se ha conseguido demostrar con detalle los resultados contenidos en [8]. A su vez, el algoritmo desarrollado ha resultado ser eficiente con el ejemplo matemático de las tres circunferencias concéntricas y con el ejemplo médico del tumor neuroepitelial disembrionárico. Aunque para establecer la eficacia del mismo es necesario estudiar más casos y hacer un análisis de errores, podemos concluir que en esta Memoria se ha cumplido el objetivo planteado al inicio de la misma.

En particular, hemos tratado el problema del cálculo de la forma media a partir de una muestra de formas. Este problema se puede contemplar desde dos perspectivas diferentes: calcular una media intrínseca o una media extrínseca. La primera perspectiva implica trabajar con la estructura geométrica de la variedad Riemanniana de Fréchet del espacio de curvas planas cerradas regulares. La otra opción consiste en embeber esta variedad en un espacio euclídeo en el que podemos calcular la media y posteriormente, encontrar la curva (media extrínseca) en \mathbb{M} que minimiza la distancia con la media en el espacio embebido. La media extrínseca [8] se utiliza para evaluar la variabilidad de las observaciones que se hacen de una misma imagen. Sería interesante comparar ambas perspectivas (la intrínseca y la extrínseca) para el cálculo de la media.

Las investigaciones realizadas en este ámbito, trabajan en el contexto de la Geometría de variedades de Fréchet infinito dimensionales. Esta teoría matemática es una herramienta potente pero bastante compleja y requiere un bagaje de

formación muy transversal: Análisis Funcional, Geometría Riemanniana infinito dimensional, Cálculo Numérico, Tratamiento de Datos, Estadística, etc.

Hoy en día, gran parte de las imágenes con las que se trabaja son en 3D. Es por esto por lo que las actuales investigaciones tratan de desarrollar un marco teórico para imágenes en 3D, similar al que presentamos en esta Memoria para 2D. Por lo tanto, estas temáticas constituyen un campo abierto a la investigación matemática con aplicabilidad en diversas ciencias.

Por otro lado, a veces interesa estudiar algunas curvas que no son cerradas. Por ejemplo, los surcos del cerebro. Hacer un análisis matemático en esta línea podría resultar interesante.

Bibliografía

- [1] Azencott R., Coldefy F. y Younes L.: A DISTANCE FOR ELASTIC MATCHING IN OBJECT RECOGNITION. *Proceedings of 12th ICPR, Vienna, AT, pp. 687 - 691, 1996.*
- [2] Bookstein F.: THE MEASUREMENT OF BIOLOGICAL SHAPE AND SHAPE CHANGE. *Springer-Verlag, New York, NY, 1978.*
- [3] Burden Richard L., Faires J. Douglas: NUMERICAL ANALYSIS. *Brooks/Cole, 2011.*
- [4] Dryden I. y Mardia K.: STATISTICAL SHAPE ANALYSIS. *John Wiley and Sons, New York, NY, 1998.*
- [5] Flores Compañ M.: MEDIA MUESTRAL INTRÍNSECA EN EL ESPACIO DE CURVAS PLANAS. *Trabajo de fin de máster, Universitat Jaume I, 2014.*
- [6] Flores Compañ M., Gual-Arnau X., Ibañez Gual M., Simó Vidal A.: INTRINSIC SIMPLE MEAN IN THE SPACE OF PLANAR SHAPES. *Pattern Recognition Vol. 60, 164-176, 2016.*
- [7] Goodall C.: PROCRUSTES METHODS IN THE STATISTICAL ANALYSIS OF SHAPE. *JOURNAL OF THE ROYAL STATISTICAL SOCIETY. Series B (Methodological) 53, 285 - 339, 1991.*
- [8] Gual-Arnau X., Victoria Ibañez Gual M., Simó Vidal A.: A NEW EXTRINSIC SAMPLE MEAN IN THE SHAPE SPACE WITH APPLICATIONS TO THE BOUNDARIES OF ANATOMICAL STRUCTURES. *Biometrical Journal 57, 502 - 516, 2015.*
- [9] Hamilton R. S.: THE INVERSE FUNCTION THEOREM OF NASH AND MOSER. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society., Vol. 7, No. 1, 1982.*
- [10] Kendall D.: SHAPE MANIFOLDS, PROCRUSTEAN METRICS, AND COMPLEX PROJECTIVE SPACES. *London Mathematical Society 16, 81 - 121, 1984.*
- [11] Kendall D., Barden D., Carne T. y Le H.: SHAPE AND SHAPE THEORY. *John Wiley and Sons, Chichester, UK., Vol. 500, 2009.*
- [12] Kraut M. A., Aygun N. y Yousem D. M.: RADIOLOGICAL FEATURES OF CENTRAL NERVOUS SYSTEM TUMORS. *Youmans Neurological Surgery, 6 edition, Vol. 2, 1206-1224, 2011*

- [13] Mennucci A. , Yezzi A. y Sundaramoorthi G.: PROPERTIES OF SOBOLEV-TYPE METRICS IN THE SPACE OF CURVES. *Interfaces Free Bound.*, 10(4):423 - 445, 2008.
- [14] Sundaramoorthi G., Mennucci A., Soatto S. y Yezzi A.: A NEW GEOMETRIC METRIC IN THE SPACE OF CURVES, AND APPLICATIONS TO TRACKING DEFORMING OBJECTS BY PREDICTION AND FILTERING. *SIAM Journal on Imaging Sciences* 4(1):109 - 145, 2011.
- [15] Younes L., Michor P. W., Shah J. y Mumford D.: A METRIC ON SHAPE WITH EXPLICIT GEODESICS. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 19(1): 25 - 57, 2008.
- [16] Younes L.: OPTIMAL MATCHING BETWEEN SHAPES VIA ELASTIC DEFORMATIONS. *Journal of Image and Vision Computing* 17, 381 - 389, 1999.

DIFFERENTIAL GEOMETRY FOR THE STUDY OF MEDICAL IMAGES

CLARA RODRÍGUEZ PÉREZ

THE PROBLEM

Let \mathbb{M} the space of regular closed plane curves. The problem is to give a notion of a mean curve of a set of elements of \mathbb{M} which belongs to this space.

NOTATION

- **Length** $L(f) = \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| d\theta$
- **Centroid** $\bar{c}(f) = \frac{1}{L(f)} \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\| f(\theta) d\theta$

TOOLS

- **Fréchet space** $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2) = \{f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid f \text{ is differentiable}\}$

- **Fréchet manifolds**

1. $\mathbb{M} = \{f \in C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2) \mid \|f'(\theta)\| \neq 0 \forall \theta \in S^1\}$ submanifold of $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$
2. $\mathbb{M}_d = \{f \in \mathbb{M} \mid L(f) = 1, \bar{c}(f) = (0, 0)\}$ submanifold of \mathbb{M}
3. $\mathbb{M}'_d = \{f \in \mathbb{M} \mid L(f) = 1, f(0) = (0, 0)\} \cong \mathbb{M}_d$

\Downarrow

$$\mathbb{M} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}_d \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{M}'_d$$

- **Riemannian metric on \mathbb{M}**

$$\begin{aligned}
 - C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2) &\cong T_f \mathbb{M} \cong T_f \mathbb{M} \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times T_{f_0} \mathbb{M}_d, \quad f_0 = f - \bar{c}(f) \\
 - T_f \phi(b) &= (h^t, h^s, h^d) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times T_{f_0} \mathbb{M}_d \\
 - \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{M}} &= \langle h^t, k^t \rangle + \langle h^s, k^s \rangle + L(f) \int_0^{2\pi} \frac{\langle h^d, k^d \rangle \gamma(\theta)}{\|f'(\theta)\|} d\theta
 \end{aligned}$$

- **Euclidean space** ($V = C^\infty(S^1, \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_V$), where $\langle a, b \rangle_V = \int_0^{2\pi} a(\theta)b(\theta) d\theta$

- **2-fold covering**

$$S^0(2, V) = \{(a, b) \in V \times V \mid \|a\|_V = \|b\|_V = 1, \langle a, b \rangle_V = 1, \langle a, b \rangle_V = 0, (a(\theta), b(\theta)) \neq (0, 0) \forall \theta \in S^1\} \rightarrow \mathbb{M}'_d$$

$$\text{Sheet over the 2-fold covering: } (S^0(2, V))^+ \cong \mathbb{M}'_d$$

REFERENCES

Gual-Arnau X., Victoria Ibáñez Gual I.M., Simó Vidal A.: A NEW EXTRINSIC SAMPLE MEAN IN THE SHAPE SPACE WITH APPLICATIONS TO THE BOUNDARIES OF ANATOMICAL STRUCTURES. *Biometrical Journal* 57, 502-516, 2015.

STRATEGY

$$\mathbb{M} \xrightarrow[\phi]{\text{Isometry}} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times (S^0(2, V))^+ \xrightarrow{\text{Embedding}} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$$

$$f \rightarrow (\bar{c}(f), \text{In}L(f), (a_i, b_i))$$

- $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ curves of \mathbb{M}
- $(\bar{c}_m, \text{In}L_m, (a_m, b_m)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{c}(f_i), \text{In}L(f_i), (a_i, b_i))$ the mean in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times V \times V$
- In general, $(\bar{c}_m, \text{In}L_m, (a_m, b_m)) \notin \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times (S^0(2, V))^+ \cong \mathbb{M}$
- Find $(d_m^0, \theta_m^0) \in (S^0(2, V))^+$ that minimizes the distance between $(\bar{c}_m, \text{In}L_m, (a_m, b_m))$ and $(\bar{c}_m, \text{In}L_m, (d_m^0, \theta_m^0))$
- **Result: The extrinsic mean curve:** $f_m = \phi(\bar{c}_m, \text{In}L_m, (d_m^0, \theta_m^0))$

APPLICATION TO AN IMAGE OF A BRAIN TUMOR

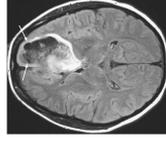


Figure 1: Brain tumor

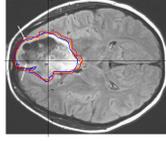


Figure 2: Down curves by 3 experts

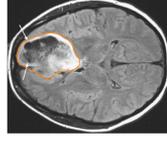


Figure 3: Extrinsic mean curve over the brain tumor

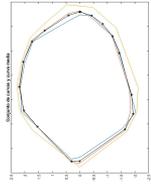


Figure 4: All curves