

Curso 2012/13
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/28
I.S.B.N.: 978-84-15910-98-5

IGNACIO GARCÍA MARCO

**Ideales tóricos intersección completa
y algoritmos que provienen
de estructuras geométricas y combinatorias**

Directora
ISABEL BERMEJO DÍAZ



SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

Agradecimientos

Durante la realización de esta tesis he tenido la suerte de convivir con muchas personas que se han preocupado por mi, que han aportado para que esto saliera adelante y que me han ayudado de una u otra forma, a todos ¡MUCHAS GRACIAS!.

En primer lugar, tengo que agradecerle a mi directora, Leli, su tiempo, su paciencia y sus ganas. Muchas gracias por enseñarme cómo hay que "darse de tortas" con un problema para obtener algún resultado, por no desesperar al ver lo poco que luzco nuestros resultados al contarlos y por la posibilidad de dar clases con ella, fue muy divertido y enriquecedor. Sobre todo, le tengo que agradecer que en todo momento ha buscado lo mejor para mi formación y siempre se ha mostrado ilusionada con esta tesis, incluso cuando yo no lo estaba tanto.

A Enrique Reyes por los buenos ratos que pasamos en Brasil y en La Laguna jugando con "palitos y bolitas", porque siempre contesta mis dudas con presteza y por enseñarme que no hace falta estar en la facultad para pensar en matemáticas y que en una servilleta de papel se puede enunciar un teorema de estructura.

A Juan José Salazar por su amabilidad y colaboración, porque fue mi fácil trabajar con él y aprender de él.

A Philippe Gimenez, por haber seguido con interés el progreso de esta tesis, por las conversaciones matemáticas y la amabilidad con la que siempre ha arreglado toda la burocracia relativa al proyecto.

A Rafael Villarreal, porque el tema de esta tesis es el que es gracias a su oportuna visita a La Laguna y de sus conversaciones matemáticas con Leli.

A Aron Simis, por escucharme y aportar valiosas ideas a esta tesis.

A Abhyankar, por enseñarme lo que es tener verdadera pasión por las matemáticas.

A toda esa gente que he conocido en los congresos y que me ha hecho sentirme acompañado en esta aventura. A Ana Romero, Dumitru Stamate, Gemma Colomé, Luke Oeding, Michel Marco, Guadalupe Márquez, Jorge Ortigas, Montse Manubens y, sobre todo, a Edu y Óscar, porque cada vez que me inscribía a un congreso y veía alguno de estos nombres entre los participantes sabía que iban a ser unos días geniales.

A los profes de matemáticas que he tenido y me han metido el gusanillo en el cuerpo.

A los miembros del Departamento de Matemática Fundamental, que me han ayudado siempre que han podido.

A esos amigos que cada vez que ven una curiosidad matemática o un nuevo problema de lógica corren a contármelo, gracias a ellos no se me olvida lo que me gustan las matemáticas.

A todos esos amigos a los que no les interesan los ideales tóricos pero que me han acompañado durante toda la tesis y que siempre han "remado en mi dirección", animándome y estando cerca en los desánimos y disfrutando en los buenos momentos. Gracias a ustedes cuando recuerdo la tesis no solo pienso en la facultad, sino que también me acuerdo de muchos de los momentos más divertidos de mi vida: viajes, dardos, cafés, cervezas, chuletadas/asaderos, romerías, playas, caminatas, guateques, carreras, fiestas y muchas otras cosas más. En este grupo incluyo a la gente del parque rojo (David, Roberto, Victor el chico y el grande), los amigos de clase (Aimán, Cris, David, Elena, Fran, Leti, María, Sergio), los del aula (Abilio, Alan, Alex, Bonsi, Bruno, Gustavo, los 2 Manu, Rafa), los matemáticos (Alfredo, Cris, Carol, Froi, Irene, Mapi), los de la resi (Chema, Gilberto, Humberto, Javi Gómez, Ricar, Rober), los del piso (Charly, Josa, Julio, Pato, Pamplo, Reimon), los compañeros de despacho (Ana y José), los amigos de La Laguna (Andrea, Berta, Irantzu, Pablo y Toni), los compis de beca (Ana, Dani y María), la familia del Famegonza y, de una forma especial Anna, Bego, Cúper, Jessi, Jonay, Juanan y, por supuesto, Sandra.

A Eva, la principal sufridora del día a día de esta tesis. Es la primera con la que celebro cada demostración y la que mejor sabe la mala leche que se me pone cuando hay un contraejemplo a lo que creía cierto. Ella siempre está cuando hace falta, basta con tocar en su despacho y preguntar: "¿Piti?".

A mi familia también mil gracias. A Quique y Maite, que siendo mis hermanos pequeños me enseñan muchas cosas y que siempre ponen su toque de alegría a todo. Y por último a mis padres, que estoy seguro de que son las personas que están más contentas de que esta tesis vea la luz. Desde que "12 por 12 son 144" hasta hoy siempre me han animado y ayudado a hacer lo que más me gustaba. Además, durante el desarrollo de esta tesis siempre han estado pendientes desde el otro lado del teléfono apoyándome y dándome todo los ánimos que necesitaba. Esta tesis va dedicada a ustedes.

Índice

Introducción	9
1 Ideales tóricos	17
1.1 Generalidades	17
1.2 Ideales tóricos intersección completa	22
1.2.1 Del ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ a $I_{\mathcal{A}_{red}}$	29
1.2.2 Del ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ a $I_{\mathcal{A}(i,j)}$	34
2 Ideales tóricos simpliciales intersección completa	39
2.1 Generalidades	40
2.2 Algoritmo IC-simplicial	42
2.3 Ideales tóricos simpliciales homogéneos intersección completa y sus variedades	53
2.4 cisimplicial.lib	58
2.4.1 El problema de pertenencia a un semigrupo	58
2.4.2 El cálculo de B_i	59
2.4.3 Comprobando si existen $i, j : m_i a_i = m_j a_j$	60
2.4.4 El cálculo de \overline{m}_i	62
2.4.5 Comportamiento de la implementación	69
3 Intersecciones completas en curvas monomiales afines y proyectivas	71
3.1 Generalidades	72
3.2 Algoritmo IC-curva-monomial	76
3.3 Intersecciones completas en ciertas curvas monomiales afines	85
3.3.1 Intersecciones completas y sucesiones aritméticas generalizadas	87
3.3.2 Intersecciones completas y sucesiones de Fibonacci.	90
3.3.3 Intersecciones completas y sucesiones de Lucas	95
3.4 Intersecciones completas en ciertas curvas monomiales proyectivas	99
4 Intersecciones completas en ideales tóricos de grafos	105
4.1 Generalidades	105
4.2 El ideal tórico de un grafo	107
4.3 Una cota superior para el número de aristas de un grafo intersección completa	110
4.4 Algoritmo IC-grafo	113
4.5 Grafos theta e intersecciones completas	121
4.6 Teoremas de estructura de grafos intersección completa	126
Bibliografía	144

Introducción

"When teaching algebraic geometry and illustrating simple singularities, varieties, and morphisms, one almost invariably tends to choose examples of a "monomial type": i.e., varieties defined by equations $x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} = x_{r+1}^{a_{r+1}} \cdots x_n^{a_n}$ and morphisms f for which $f(y_i) = x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$." Mumford et al. [66] (1973)

Los ideales tóricos son un tipo particular de ideales del anillo de polinomios que están generados por diferencias de monomios (binomios), son primos y graduados. Su estudio es una parte importante del álgebra conmutativa y de la geometría algebraica. Desde el nacimiento de la geometría tórica en los años 70 el interés en el estudio de este tipo de ideales se ha ido incrementando notablemente y actualmente es un área fértil de investigación. El estudio de estos ideales está profundamente conectado con la combinatoria, la geometría de poliedros, el estudio de semigrupos... entre otras muchas ramas de las matemáticas.

El objetivo de esta tesis es el estudio y caracterización de los ideales tóricos que son intersección completa; concretamente, la obtención de métodos efectivos para determinar si un ideal tórico es intersección completa que no precisen del cálculo explícito de un sistema minimal de generadores del ideal. El estudio de la propiedad de ser intersección completa en ideales tóricos fue iniciado por Herzog en 1970 ([53]), quien resolvió satisfactoriamente el primer caso no trivial, esto es, proporcionó un criterio aritmético que caracteriza cuándo el ideal tórico asociado a una curva monomial afín en el espacio tridimensional es intersección completa. Además, en ese mismo trabajo, Herzog conjeturó cómo se podría generalizar este criterio para curvas monomiales en el espacio afín n -dimensional para todo $n \geq 3$. Si bien la conjetura no era cierta, como mostró Delorme [30] en 1976, este artículo suscitó el interés de muchos autores y surgieron varios artículos dando respuestas al mismo problema en contextos más generales, hasta que Fischer, Morris y Shapiro [38] en 1997 consiguen caracterizar los ideales tóricos que son intersección completa por medio del denominado *gluing* de semigrupos. Una característica común a todos estos trabajos es que tienen un marcado carácter teórico y no se centran en la obtención de algoritmos eficientes.

La principal aportación de esta tesis doctoral es la obtención de resultados que conducen al diseño, la demostración de la corrección e implementación de métodos efectivos que reciben como entrada un conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ y determinan si el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa o no, perteneciendo $I_{\mathcal{A}}$ a diversas familias de ideales tóricos. Los métodos propuestos son todos de naturaleza eminentemente aritmética-combinatoria y

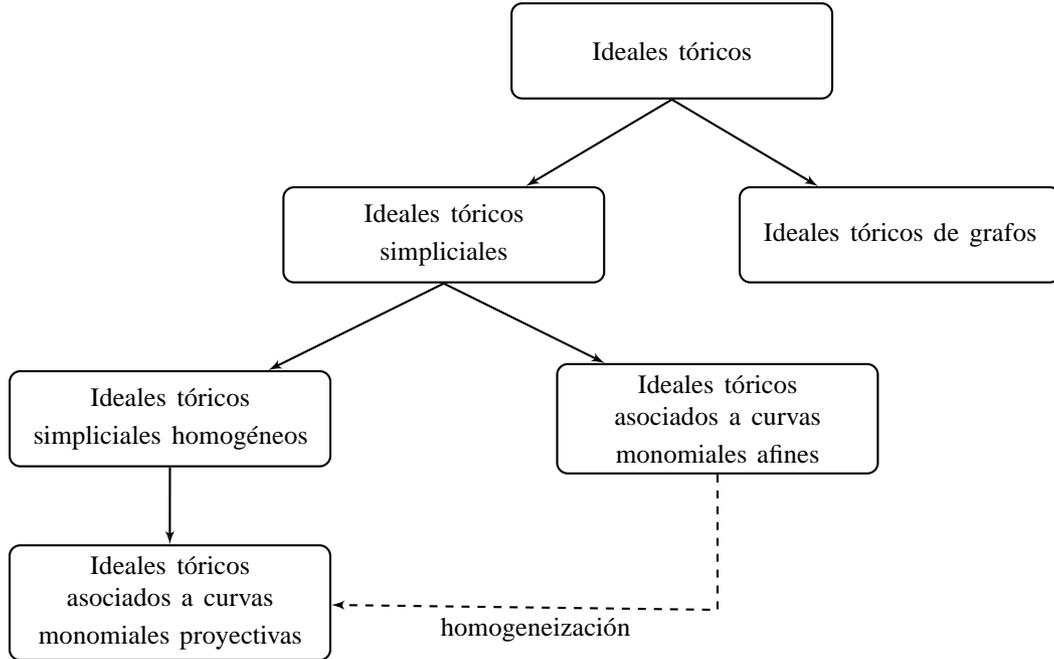
evitan tanto el cálculo de bases de Gröbner como la obtención explícita de sistemas minimales de generadores del ideal. No obstante, en los casos en los que el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, todos los algoritmos propuestos proporcionan, sin tener que efectuar ningún tipo de cálculo adicional, un sistema minimal de generadores del ideal. Muchos de los algoritmos obtenidos se han implementado en ANSI C y en SINGULAR [29]. Asimismo y como consecuencia no trivial de la aplicación teórica de los algoritmos propuestos, se aportan ejemplos de familias de ideales tóricos que son intersección completa.

Si bien en este trabajo no se consigue el ambicioso objetivo de caracterizar con algoritmos eficientes la propiedad de ser intersección completa para la totalidad de los ideales tóricos, cuestión que sigue abierta, lo que sí se consigue es caracterizarlo en dos importantes subfamilias: la de los ideales tóricos simpliciales y la de los ideales tóricos de grafos. Estos objetivos se alcanzan con el Algoritmo IC-simplicial y con el Algoritmo IC-grafos respectivamente.

En esta memoria se sigue un esquema que va de lo general a lo particular, a pesar de que esta forma de exposición altera el orden cronológico en el que se han obtenido los resultados de la tesis. Se ha preferido hacer así porque creemos que su explicación se hace más concisa. De esta forma, en cada momento podemos aplicar los resultados generales obtenidos previamente junto con las especificidades propias de cada caso. Así por ejemplo, al comienzo de esta tesis se estudió el caso de ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines y se obtuvo el Algoritmo IC-curva-monomial para determinar si un ideal de esta familia es intersección completa. Posteriormente se obtuvo el Algoritmo IC-simplicial como una generalización no trivial del anterior para ideales tóricos simpliciales. No obstante, en el Capítulo 2 de esta memoria se trata la propiedad intersección completa en ideales tóricos simpliciales finalizando con la obtención del Algoritmo IC-simplicial, para posteriormente en el Capítulo 3 obtener el Algoritmo IC-curva-monomial como caso particular del otro.

Siguiendo esta forma de exposición, comenzamos la memoria tratando los ideales tóricos en general y aportamos técnicas y resultados aplicables a cualquier ideal tórico. Tras esto nos centramos en la familia de los ideales tóricos simpliciales, donde utilizamos los resultados generales previamente obtenidos junto con otros específicos para caracterizar, por medio del Algoritmo IC-simplicial, los ideales tóricos simpliciales que son intersección completa. Dentro de los ideales tóricos simpliciales estudiamos con más detalle y proporcionamos algoritmos específicos para dos subfamilias importantes: los ideales tóricos simpliciales homogéneos y los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines. También estudiamos en detalle la propiedad de intersección completa para los ideales tóricos asociados a curvas monomiales proyectivas. En todos estos casos aportamos versiones más simples del Algoritmo IC-simplicial que son específicas para cada una de las familias. Posteriormente caracterizamos la propiedad de intersección completa para los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines cuando los elementos de \mathcal{A} son parte de sucesiones numéricas conocidas. También para los cierres proyectivos de estas curvas monomiales. Finalmente, nos dedicamos al estudio de otra familia de ideales tóricos independiente de los ideales tóricos simpliciales, la de los ideales tóricos de grafos y caracterizamos cuándo

son intersección completa por medio del Algoritmo IC-grafo.



En el Capítulo 1 comenzamos por introducir los conceptos de conjunto tórico $\Gamma_{\mathcal{A}}$, ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ y variedad tórica afín $V(I_{\mathcal{A}})$, todos ellos determinados por un conjunto de vectores no nulos $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$, y describimos algunas de las relaciones existentes entre ellos y algunas de sus propiedades básicas. Asimismo probamos la equivalencia entre varias definiciones de ideal tórico intersección completa y repasamos algunos de los principales resultados que se pueden encontrar en la bibliografía respecto a este tipo de ideales. Tras esto, dedicamos el resto del capítulo a introducir dos nuevas técnicas relativas a los ideales tóricos intersección completa. La primera técnica es consecuencia del Teorema 1.2.21 y la idea es que a partir del conjunto \mathcal{A} vamos a construir un conjunto \mathcal{A}_{red} que puede ser vacío o de la forma $\{a'_1, \dots, a'_t\} \subset \mathbb{N}^m$ tal que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$ o $I_{\mathcal{A}_{red}}$ es intersección completa. Además, cuando $\mathcal{A}_{red} \neq \emptyset$ el ideal $I_{\mathcal{A}_{red}}$ es más simple que $I_{\mathcal{A}}$ ya que $t \leq n$, $\text{ht}(I_{\mathcal{A}_{red}}) \leq \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ y los grados de los generadores de $I_{\mathcal{A}_{red}}$ son menores o iguales que los de $I_{\mathcal{A}}$. La segunda técnica es consecuencia del Teorema 1.2.27 que da bajo ciertas hipótesis una condición necesaria para que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa. Concretamente, para ciertos $i, j : 1 \leq i < j \leq n$, le asociamos a $I_{\mathcal{A}}$ un nuevo ideal tórico $I_{\mathcal{A}(i,j)}$ en un anillo de polinomios en exactamente una variable menos y de altura una unidad menos, de forma que si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa entonces $I_{\mathcal{A}(i,j)}$ también lo es. El Teorema 1.2.30 aporta hipótesis adicionales que si se cumplen y $I_{\mathcal{A}(i,j)}$ es intersección completa, entonces $I_{\mathcal{A}}$ también lo es. Si bien la aplicación de estas técnicas no es suficiente para caracterizar todos los ideales tóricos intersección completa, sí serán

de gran utilidad en el Capítulo 2 para caracterizar los ideales tóricos simpliciales que sí lo son.

El Capítulo 2 trata sobre la propiedad de intersección completa en los ideales tóricos simpliciales, que son aquellos en que el número de rayos extremos del cono de \mathcal{A} coincide con la dimensión del \mathbb{Q} -espacio vectorial generado por \mathcal{A} . Al igual que en el primer capítulo, comenzamos por recordar algunas propiedades de estos ideales y de sus variedades asociadas. A continuación vamos en búsqueda del Algoritmo IC-simplicial, un algoritmo que recibe como entrada un conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ que determina un ideal tórico simplicial $I_{\mathcal{A}}$, y devuelve si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa o no. Además, cuando $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa proporciona sin efectuar ningún cálculo adicional un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$. El Algoritmo IC-simplicial se obtiene al aplicar convenientemente los Teoremas 1.2.21, 1.2.27 y 1.2.30 del Capítulo 1 aplicables a cualquier ideal tórico conjuntamente con la Proposición 2.2.1, que es propia de los ideales tóricos simpliciales. El principal resultado de este capítulo es el Teorema 2.2.4, donde se demuestra la corrección del algoritmo propuesto. Dedicamos una parte de este capítulo al estudio de los ideales tóricos simpliciales que son homogéneos y vemos como, gracias al Corolario 2.3.2, el Algoritmo IC-simplicial se puede simplificar considerablemente en este caso. Aplicando el Corolario 2.3.2 desde un punto de vista teórico, cuando el cuerpo de definición de la variedad es algebraicamente cerrado, demostramos en el Teorema 2.3.3 que la única variedad tórica simplicial proyectiva lisa cuyo ideal asociado es intersección completa es la curva monomial proyectiva definida paramétricamente por $x_1 = u_1^2$, $x_2 = u_2^2$ y $x_3 = u_1 u_2$. Además, en el Teorema 2.3.4 listamos todas las variedades tóricas simpliciales proyectivas con exactamente un punto singular cuyo ideal asociado es intersección completa. La última sección de este capítulo está dedicada a explicar las implementaciones en ANSI C y en SINGULAR de los algoritmos propuestos.

El Capítulo 3 está dedicado a los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines, es decir, los ideales tóricos $I_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$, que son una subfamilia de los ideales tóricos simpliciales. Para esta familia y gracias a la Proposición 3.2.1, podemos dar una versión simplificada del Algoritmo IC-simplicial, que llamaremos Algoritmo IC-curva-monomial. Este algoritmo, cuando $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, nos proporciona un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$, y si además $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, nos proporciona el número de Frobenius del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$. Como aplicaciones del Algoritmo IC-curva-monomial aportamos en las Proposiciones 3.2.8 y 3.2.9 criterios específicos para determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa cuando $n = 3$ y $n = 4$, respectivamente. Haciendo uso de este algoritmo y de algunos nuevos resultados, pasamos a estudiar ejemplos de familias de curvas monomiales afines cuyo ideal es intersección completa. Concretamente, caracterizamos en el Teorema 3.3.5 cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa siendo \mathcal{A} una sucesión aritmética generalizada, es decir, existe $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que $ha_1 < a_2 < \dots < a_n$ es una sucesión aritmética; y en el Teorema 3.3.9 cuando \mathcal{A} es una sucesión casi-aritmética generalizada, es decir, $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética generalizada y $a_n \in \mathbb{Z}^+$ es un entero cualquiera. También estudiamos cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa siendo \mathcal{A} un conjunto formado por ciertos términos de la (p, q) -sucesión de Fibonacci o de Lucas, llegando a los

Teoremas 3.3.15 y 3.3.20 respectivamente. La última parte de este capítulo la dedicamos al estudio de los ideales tóricos asociados a curvas monomiales proyectivas. Estudiamos cómo el algoritmo para ideales tóricos simpliciales homogéneos se especializa a este caso dando lugar al Algoritmo IC-curva-monomial-proyectiva. Basándonos en él, obtendremos las versiones para curvas monomiales proyectivas de los Teoremas 3.3.5, 3.3.9, 3.3.15 y 3.3.20; los Teoremas 3.4.4, 3.4.6, 3.4.8 y 3.4.10 respectivamente.

En el Capítulo 4 estudiamos los ideales tóricos de grafos, que están definidos a partir de un grafo G simple y no dirigido. Dado que la definición del ideal depende de G , cabe pensar que las propiedades del ideal tórico I_G de G , puedan ser traducidas como propiedades combinatorias de G y viceversa. En particular nos centraremos en la propiedad de que I_G sea intersección completa y buscamos traducirla en propiedades combinatorias del grafo G . En el caso particular en que el grafo G sea bipartito, este problema ha sido ampliamente estudiado por varios autores llegando a dar una respuesta satisfactoria al problema; ver [47, 48, 65, 93]. En este capítulo consideramos el problema más general en que los grafos no son necesariamente bipartitos. Nos proponemos dos objetivos principales. El primero es proponer un algoritmo de naturaleza combinatoria que determine si I_G es intersección completa o no; el segundo consiste en aportar una caracterización combinatoria de la estructura de los grafos G tales que I_G es intersección completa. El primero de estos objetivos se alcanza con el Algoritmo IC-grafo, que se obtiene como consecuencia del Teorema 4.4.8 y consiste en un algoritmo que recibe como entrada un grafo G y devuelve VERDADERO si I_G es intersección completa o FALSO en caso contrario. El segundo objetivo se consigue parcialmente con los Teoremas 4.6.5 y 4.6.18. Para llegar a ellos, consideramos una partición de un grafo G en dos subgrafos inducidos disjuntos C y R tales que $V(C) = V(C_1) \sqcup \dots \sqcup V(C_s)$ donde C_1, \dots, C_s son ciclos primitivos impares y R es bipartito. En este contexto, en el Teorema 4.6.5 se demuestra que si I_G es intersección completa, entonces R es un grafo anillado y C es o bien el grafo nulo, un ciclo primitivo impar o está formado por dos ciclos primitivos impares propiamente conectados. Finalmente, bajo las hipótesis adicionales de que C sea conexo y R 2-conexo, en el Teorema 4.6.18 se listan todas las familias de grafos cuyo ideal tórico es intersección completa. Terminaremos este último capítulo con las versiones normales de los Teoremas 4.6.5 y 4.6.18; los Corolarios 4.6.20 y 4.6.21.

A lo largo de esta memoria se encuentran ejemplos que requieren del cálculo de bases de Gröbner. Estos cálculos, salvo que se indique lo contrario, se han efectuado haciendo uso del software SINGULAR [29]. Asimismo, dichos cálculos se pueden llevar a cabo mediante otros programas como CoCoA [22] o MACAULAY2 [50].

La elaboración de esta tesis ha dado lugar a los siguientes trabajos:

- *I. Bermejo, I. García-Marco y J. J. Salazar-González, An algorithm for checking whether the toric ideal of an affine monomial curve is a complete intersection.*

En este artículo se estudian y caracterizan los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines que son intersección completa y se diseña el Algoritmo IC-curva-monomial. También se estudian con detalle los casos $n = 3$ y $n = 4$, aportando

criterios específicos para estos casos. Finalmente se discuten los detalles de la implementación del Algoritmo IC-curva-monomial.

- *I. Bermejo y I. García-Marco, Complete intersections in certain affine and projective monomial curves.*

En este artículo se estudian determinadas familias de curvas monomiales afines y proyectivas cuyo ideal tórico asociado es intersección completa. Más precisamente, se caracteriza cuándo el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa siendo \mathcal{A} una sucesión aritmética generalizada o una sucesión casi-aritmética generalizada. También se caracteriza cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es una intersección completa en los casos en que \mathcal{A} está formado por ciertos términos de la (p, q) -sucesión de Fibonacci o de la (p, q) -sucesión de Lucas. Asimismo, en todos estos casos se caracteriza cuándo el ideal tórico asociado al cierre proyectivo de la curva monomial afín definida por $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

- *I. Bermejo y I. García-Marco, Complete intersections in simplicial toric varieties.*

En este trabajo se diseña, se prueba la corrección y se muestran los detalles de la implementación del Algoritmo IC-simplicial para determinar cuándo un ideal tórico simplicial es intersección completa. También se aporta una versión más simple del mismo algoritmo para ideales tóricos simpliciales homogéneos. Además, cuando el cuerpo k es algebraicamente cerrado, se listan todas las variedades tóricas simpliciales proyectivas cuyo ideal tórico asociado es intersección completa y son o bien lisas o tienen exactamente un punto singular.

- *I. Bermejo, I. García-Marco y E. Reyes, Complete intersection graphs.*

En este trabajo se estudian los ideales tóricos de grafos que son intersección completa desde un punto de vista algorítmico y combinatorio. En él obtenemos el Algoritmo IC-grafo para determinar si un ideal tórico de grafo es intersección completa. Por otra parte y bajo ciertas hipótesis se listan las familias de grafos tales que su ideal tórico asociado es intersección completa.

También se han implementado en ANSI C y en SINGULAR las siguientes librerías:

- *I. Bermejo, I. García-Marco y J. J. Salazar-González, cimonom.lib.*

Esta librería contiene una implementación del Algoritmo IC-curva-monomial. Su versión para SINGULAR se distribuyó con el software entre las versiones 3-0-2 y 3-1-3.

- *I. Bermejo y I. García-Marco, cisimplicial.lib.*

Esta librería contiene la implementación del Algoritmo IC-simplicial para determinar si un ideal tórico simplicial es intersección completa y del algoritmo para determinar si un ideal tórico simplicial homogéneo es intersección completa. Su versión en SINGULAR sustituye a la librería `cimonom.lib` puesto que la generaliza y mejora. Se distribuye con el software en las versiones posteriores a la 3-1-4.

Los resultados obtenidos en esta tesis, tanto en sus versiones preliminares como en su versión definitiva, han sido presentados por Ignacio García Marco en los siguientes congresos y foros de difusión científica:

- 10th Rhine Workshop on Computer Algebra, celebrado en Basilea, Suiza, en 2006.
- X Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones EACA, celebrado en Sevilla en 2006.
- Effective Methods in Algebraic Geometry, MEGA 2007, celebrado en Strobl, Austria, en 2007.
- Commutative, Combinatorial and Computational Algebra in Honour of Pilar Pisón Casares, celebrado en Sevilla en 2008.
- Iberian Meeting on Numerical Semigroups, celebrado en Oporto, Portugal, en 2008.
- I Encuentros sobre Investigación Matemática entre España e Iberoamérica CIMAC 07-08. Sesión de Álgebra Conmutativa Combinatoria y Computacional, celebrados en La Laguna en 2008.
- XI Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones EACA, celebrado en Granada en 2008.
- Seminario de Geometría Tórica V, celebrado en Jarandilla de la Vera en 2008.
- Effective Methods in Algebraic Geometry, MEGA 2009, celebrado en Barcelona en 2009.
- Pan-American Advanced Study Institute in Commutative Algebra and its Connections to Geometry, PASI-2009, celebrado en Recife, Brasil, en 2009.
- XII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones EACA, celebrado en Santiago de Compostela en 2010.
- 35th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC 2010, celebrado en Munich, Alemania, en 2010.
- Third Iberian Mathematical Meeting, celebrado en Braga, Portugal, en 2010 (ponencia invitada).
- Toric Geometry Seminar 2010, celebrado en Jarandilla de la Vera en 2010.
- EACA's First International School on Computer Algebra and Applications, celebrado en Tenerife en 2011.
- Effective Methods in Algebraic Geometry, MEGA 2011, celebrado en Estocolmo, Suecia, en 2011.

- MONomial Ideals, Computations and Applications, MONICA, celebrado en Castro Urdiales en 2011.
- Primer Encuentro de Jóvenes Investigadores de Matemáticas de la ULL, celebrado en La Laguna en 2011 (ponencia invitada).
- II Encuentro Conjunto RSME-SMM - Sesión especial de Álgebra Combinatoria, celebrado en Torremolinos en 2012 (ponencia invitada).
- Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones, EACA 2012, celebrado en Alcalá de Henares en 2012.

Asimismo, en las próximas fechas se tiene previsto presentar algunos resultados de la tesis en los siguientes eventos:

- EACA's Second International School on Computer Algebra and Applications, que se va a celebrar en Valladolid en 2013.
- Congreso de Jóvenes Investigadores de la Real Sociedad Matemática Española - Sesión especial de Singularidades, que se va a celebrar en Sevilla en 2013 (ponencia invitada).

Capítulo 1

Ideales tóricos

Este primer capítulo se divide en dos secciones. La primera de ellas está dedicada a introducir los conceptos de conjunto tórico, ideal tórico, variedad tórica afín y recordar algunas de sus propiedades básicas. Finalizamos la sección exponiendo un resultado clásico que caracteriza las variedades tóricas afines que son lisas que se utilizará en el Capítulo 2.

La segunda sección trata sobre la propiedad de ser intersección completa en ideales tóricos. Comenzamos obteniendo definiciones equivalentes de esta propiedad en el caso de ideales tóricos y seguimos con una recapitulación de los principales resultados acerca de los ideales tóricos intersección completa previos a esta memoria. El resto de la sección lo dividimos en dos subsecciones, cada una de ellas dedicada a introducir una técnica relacionada con los ideales tóricos intersección completa. La idea común a ambas técnicas es partir de un ideal tórico y construir otro de forma que si el primero es intersección completa entonces el segundo también lo es. Además el nuevo ideal tórico está estrechamente ligado al original y es más simple en algún sentido. Estas dos técnicas forman parte de [9], un trabajo conjunto con Isabel Bermejo, y son de utilidad en los Capítulos 2 y 3; en el Capítulo 2 para estudiar los ideales tóricos simpliciales que son intersección completa, y en el Capítulo 3 para estudiar la propiedad de intersección completa en ciertos ideales tóricos simpliciales de especial interés, los asociados a curvas monomiales.

1.1 Generalidades

Sea k un cuerpo arbitrario y sean $k[\mathbf{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$ y $k[\mathbf{t}] = k[t_1, \dots, t_m]$ dos anillos de polinomios sobre k . Sean $f_1, \dots, f_n \in k[\mathbf{t}]$ y consideremos el subconjunto Γ de \mathbb{A}_k^n definido paramétricamente por $x_i = f_i(t_1, \dots, t_m)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, es decir,

$$\Gamma = \{(f_1(u_1, \dots, u_m), \dots, f_n(u_1, \dots, u_m)) \in \mathbb{A}_k^n \mid u_1, \dots, u_m \in k\}.$$

Denotamos por $I(f_1, \dots, f_n)$ al ideal primo de $k[\mathbf{x}]$ que es el núcleo del homomorfismo de k -álgebras

$$\varphi: k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{t}] \text{ inducido por } x_i \mapsto f_i.$$

El ideal $I(f_1, \dots, f_n)$ está estrechamente relacionado con el conjunto Γ cuando el cuerpo k es infinito.

Proposición 1.1.1. [100, Corollary 7.1.12] Si k es un cuerpo infinito, entonces el ideal $I(\Gamma)$ de los polinomios que se anulan en Γ es $I(f_1, \dots, f_n)$.

Como consecuencia de esta proposición se tiene el siguiente corolario. En [26, Theorem 1 of Chapter 3, §3] se encuentra una prueba directa del mismo que no necesita de la proposición anterior.

Corolario 1.1.2. Si k es un cuerpo infinito, entonces $V(I(f_1, \dots, f_n))$ es la clausura de Zariski $\bar{\Gamma}$ de Γ .

Nota 1.1.3. Cuando k es un cuerpo algebraicamente cerrado y por tanto infinito, el Corolario 1.1.2 también se obtiene como consecuencia inmediata de "The Closure Theorem" (ver por ejemplo [26, Theorem 3 of Chapter 3, §2]), teniendo en cuenta que $I(f_1, \dots, f_n) = (x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n) \cap k[\mathbf{x}]$.

Nota 1.1.4. [1, Theorem 2.3.4] De la igualdad $I(f_1, \dots, f_n) = (x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n) \cap k[\mathbf{x}]$ se desprende un algoritmo para calcular un sistema de generadores de $I(f_1, \dots, f_n)$. En efecto, si \mathcal{G} una base de Gröbner del ideal $(x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n)$ con respecto a cualquier orden de eliminación en el que $t_j > x_i$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ y $\forall j \in \{1, \dots, m\}$, entonces $\mathcal{G} \cap k[\mathbf{x}]$ es un sistema de generadores de $I(f_1, \dots, f_n)$.

Nuestro objeto de estudio son los ideales tóricos, que son exactamente los ideales $I(f_1, \dots, f_n)$ donde $f_1, \dots, f_n \in k[\mathbf{t}]$ son monomios. De forma más precisa, dado un conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ de vectores no nulos de \mathbb{N}^m , con $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, el ideal tórico determinado por \mathcal{A} es $I_{\mathcal{A}} := I(\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n})$, donde \mathbf{t}^{a_i} denota el monomio $t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}}$ de $k[\mathbf{t}]$. Al conjunto de ceros $V(I_{\mathcal{A}})$ en \mathbb{A}_k^n se le denomina *variedad tórica afín*. A la k -álgebra $k[\mathbf{t}^{a_1}, \dots, \mathbf{t}^{a_n}] \subset k[\mathbf{t}]$, que es isomorfa a $k[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{A}}$, se le denota por $k[\mathcal{A}]$ y es el *álgebra del semigrupo* $\mathbb{N}\mathcal{A} := \sum_{i=1}^n \mathbb{N}a_i$.

El conjunto tórico $\Gamma_{\mathcal{A}}$ determinado por \mathcal{A} es el subconjunto de \mathbb{A}_k^n definido paramétricamente por $x_i = \mathbf{t}^{a_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, esto es,

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = \{(u_1^{a_{11}} \dots u_m^{a_{1m}}, \dots, u_1^{a_{n1}} \dots u_m^{a_{nm}}) \in \mathbb{A}_k^n \mid u_1, \dots, u_m \in k\}.$$

Como consecuencia de la Proposición 1.1.1 y el Corolario 1.1.2, si k es un cuerpo infinito, entonces $I(\Gamma_{\mathcal{A}}) = I_{\mathcal{A}}$ y $V(I_{\mathcal{A}}) = \bar{\Gamma}_{\mathcal{A}}$.

Cuando k es un cuerpo infinito en ocasiones el propio conjunto tórico $\Gamma_{\mathcal{A}}$ es una variedad y, por tanto, $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$. El problema de determinar bajo qué condiciones $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$ ha sido estudiado por Reyes, Villarreal y Zárate en [88] y posteriormente por Katsabekis y Thoma en [63, 64]. De particular interés para nosotros es [63, Corollary 2], donde se demuestra que si k es un cuerpo algebraicamente cerrado y el conjunto \mathcal{A} es de la forma $\{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ donde $n > m$, $d \in \mathbb{Z}^+$ y $\{e_1, \dots, e_m\}$ es

la base canónica de \mathbb{Z}^m , entonces $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$ (ver Proposición 2.1.4 de esta memoria). Para un cuerpo k cualquiera y cuando $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}$ con $\gcd\{a_1, \dots, a_n\} = 1$, Eliahou y Villarreal prueban en [36] que $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$ también en este caso.

Respecto del problema de obtener un sistema de generadores de $I_{\mathcal{A}}$, se puede proceder siguiendo el algoritmo propuesto en la Nota 1.1.4. No obstante, dicho algoritmo requiere del cálculo de una base de Gröbner \mathcal{G} del ideal $J = (x_1 - \mathbf{t}^{a_1}, \dots, x_n - \mathbf{t}^{a_n})$ con respecto a un orden de eliminación según observamos. El conjunto \mathcal{G} puede tener muchos elementos y su obtención puede ser muy costosa incluso cuando $\mathcal{G} \cap k[\mathbf{x}]$ tiene pocos elementos. Veamos algunos ejemplos de este hecho:

Sea $\mathcal{A} := \{(10, 0), (9, 1), (0, 4)\}$. La base de Gröbner reducida \mathcal{G} del ideal $J = (x_1 - t_1^{10}, x_2 - t_1^9 t_2, x_3 - t_2^4)$ con respecto del orden producto del orden lexicográfico inverso graduado con $t_1 > t_2$ y del mismo orden con $x_1 > x_2 > x_3$, tiene 23 elementos. Sin embargo, $\mathcal{G} \cap k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ tiene un único elemento $f := x_1^{18} x_3^5 - x_2^{20}$.

Para $\mathcal{A} = \{(2, 3, 5, 0), (5, 2, 3, 1), (4, 4, 2, 1), (1, 0, 2, 4), (1, 0, 5, 3), (0, 2, 0, 2)\} \subset \mathbb{N}^4$, Di Biase y Urbanke en [31, Example 2.3] afirman que la base de Gröbner reducida \mathcal{G} de J para el orden lexicográfico con $t_1 > \dots > t_4 > x_1 > \dots > x_6$ tiene 1180 elementos, mientras que $\mathcal{G} \cap k[x_1, \dots, x_6]$ tiene solo los siguientes 6 binomios:

$$\begin{array}{lll} x_3^{10} x_4^6 - x_2^9 x_4 x_6^{11} & x_1^{14} x_4^{20} - x_2 x_3^6 x_5^{19} x_6^8 & x_3^{16} x_5^{18} - x_1^{14} x_2^8 x_4^{14} x_6^3 \\ x_3^{26} x_5^{17} - x_1^{14} x_2^{17} x_4^8 x_6^{14} & x_3^{36} x_5^{16} - x_1^{14} x_2^{26} x_4^2 x_6^{25} & x_3^{16} x_4^4 x_5^{15} - x_1^{14} x_2^{35} x_6^{36}. \end{array}$$

Dada la ineficiencia del método general, independientemente del orden de eliminación elegido, se han dedicado múltiples trabajos a la obtención de algoritmos alternativos para el cálculo de sistemas de generadores de ideales tóricos, como son [13, 25, 31, 57, 58, 84, 97] entre otros. Todos estos métodos están basados en explotar las peculiaridades de los ideales tóricos para obtener mejores algoritmos. Pasaremos a estudiar algunas de estas peculiaridades.

Definición 1.1.5. *Se define el \mathcal{A} -grado de un monomio $\mathbf{x}^b \in k[\mathbf{x}]$ como $\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^b) := b_1 a_1 + \dots + b_n a_n \in \mathbb{N}^m$ y diremos que un polinomio $f \in k[\mathbf{x}]$ es \mathcal{A} -homogéneo si todos sus monomios tienen el mismo \mathcal{A} -grado, un ideal \mathcal{A} -homogéneo es aquel que está generado por polinomios \mathcal{A} -homogéneos.*

Un binomio $f \in k[\mathbf{x}]$ es una diferencia de dos monomios, es decir, $f = \mathbf{x}^b - \mathbf{x}^c$ para ciertos $b, c \in \mathbb{N}^n$. Un ideal de $k[\mathbf{x}]$ generado por binomios se denomina ideal binomial.

Proposición 1.1.6. [100, Proposition 7.1.2] $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal binomial y \mathcal{A} -homogéneo.

El hecho de que $I_{\mathcal{A}}$ sea \mathcal{A} -homogéneo no significa que sea homogéneo en el sentido usual. El siguiente resultado aporta un criterio para saber cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es homogéneo.

Proposición 1.1.7. [94, Lemma 4.14] $I_{\mathcal{A}}$ es homogéneo si y solo si existe un vector $w \in \mathbb{Q}^m$ tal que $a_i \cdot w = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Una peculiaridad importante de los ideales tóricos es la estrecha relación entre $I_{\mathcal{A}}$ y el núcleo del homomorfismo de grupos

$$\pi : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m \text{ definido por } \pi(e_i) = a_i \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ denota la base canónica de \mathbb{Z}^n . Claramente tenemos que $\varphi(\mathbf{x}^\alpha) = \mathbf{t}^{\pi(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y así un binomio $g := \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta \in I_{\mathcal{A}} \iff \widehat{g} := \alpha - \beta \in \text{Ker}(\pi)$. Si además se tiene en cuenta que $I_{\mathcal{A}}$ es binomial y primo es fácil demostrar el siguiente resultado que es consecuencia de la Proposición 1.1.6.

Corolario 1.1.8. [94, Corollary 4.3]

$$I_{\mathcal{A}} = \left(\{g = \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta \mid \gcd\{\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta\} = 1, \widehat{g} \in \text{Ker}(\pi)\} \right)$$

Para un ideal $I \subset k[\mathbf{x}]$ y un polinomio $f \in k[\mathbf{x}]$, $I : (f)^\infty$ denota el *ideal saturado de I respecto de f* , esto es, $I : (f)^\infty := \{g \in k[\mathbf{x}] \mid gf^k \in I \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}^+\}$.

Proposición 1.1.9. [94, Lemma 12.2] Sean $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} \subset \mathbb{Z}^n$ y g_1, \dots, g_s binomios tales que $\widehat{g}_i = \alpha_i$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Entonces, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ genera $\text{Ker}(\pi) \iff I_{\mathcal{A}} = (g_1, \dots, g_s) : \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\infty$.

La Proposición 1.1.9 sugiere un método para obtener un sistema de generadores (o una base de Gröbner) de $I_{\mathcal{A}}$ que sigue el siguiente esquema:

- (1) obtener un sistema de generadores $\{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$ de $\text{Ker}(\pi)$,
- (2) elegir binomios g_1, \dots, g_s tales que $\widehat{g}_i = \alpha_i$, y
- (3) calcular un sistema de generadores (o una base de Gröbner) del ideal $(g_1, \dots, g_s) : \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^\infty$.

De hecho, este es el esquema general en el que se basan muchos de los algoritmos citados anteriormente ([13, 25, 57, 58, 84, 97]), cuya principal diferencia reside en la forma de resolver (3).

Para resolver (1), basta con tener en cuenta que $\text{Ker}(\pi)$ es un \mathbb{Z} -módulo libre de rango $n - \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ y se puede obtener una base del mismo vía la Forma Normal de Hermite de una matriz entera (ver [23, Proposition 2.4.9 y Algorithm 2.4.10]) o haciendo uso del Algoritmo LLL (ver [68] para el Algoritmo LLL y [23, Algorithm 2.7.2] para el cálculo de una base de $\text{Ker}(\pi)$ haciendo uso de LLL).

Por otro lado, de la Proposición 1.1.9 se deduce directamente el siguiente corolario, que utilizaremos más adelante en la memoria.

Corolario 1.1.10. Si g_1, \dots, g_s son binomios que generan $I_{\mathcal{A}}$, entonces $\widehat{g}_1, \dots, \widehat{g}_s$ generan $\text{Ker}(\pi)$.

Finalizaremos esta sección con el Teorema 1.1.11, que aporta una caracterización de las variedades tóricas afines lisas cuando k es un cuerpo algebraicamente cerrado. En particular, la condición (c) del teorema proporciona un criterio combinatorio para determinar si $V(I_{\mathcal{A}})$ es lisa. Este resultado es una reescritura del obtenido por Mumford et al. en [66] (ver también página 29 de [42] o [28, Theorem 1.3.12]).

Teorema 1.1.11. *Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a) $V(I_{\mathcal{A}})$ es lisa.
- (b) $0 \in \mathbb{A}_k^n$ es un punto regular de $V(I_{\mathcal{A}})$.
- (c) El semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ admite un sistema de generadores formado por $r = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ elementos.

Para probar el teorema antes introduciremos tres resultados.

Al ser $V(I_{\mathcal{A}})$ una variedad irreducible, la dimensión de la variedad en cualquier punto coincide con la dimensión de Krull de $k[\mathcal{A}]$, que además viene dada por el siguiente resultado.

Proposición 1.1.12. [94, Lemma 4.2], [100, Proposition 7.1.17] *La dimensión de Krull de $k[\mathcal{A}]$ es $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$, i.e., la altura del ideal $I_{\mathcal{A}}$ es $n - \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$.*

Por otra parte, todo semigrupo $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^m$ finitamente generado tiene un único sistema minimal de generadores, además este sistema de generadores viene dado por el siguiente resultado.

Proposición 1.1.13. [73, Proposition 7.15], [28, Proposition 1.2.22] *El conjunto*

$$\mathcal{I} := \{a \in \mathcal{A} \mid \text{si } a = b + c \text{ con } b, c \in \mathbb{N}\mathcal{A} \text{ entonces } b = 0 \text{ o } c = 0\}$$

es un sistema minimal de generadores de $\mathbb{N}\mathcal{A}$ y además es único.

En este contexto, se obtiene el siguiente resultado que es una reformulación de [28, Lemma 1.3.10].

Lema 1.1.14. *Si $p := (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}_k^n$, entonces $\text{edim}(\mathcal{O}_{V(I_{\mathcal{A}}), p}) = |\mathcal{I}|$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{m} := (x_1, \dots, x_n) \subset k[\mathbf{x}]$, supongamos que $\mathcal{I} = \{a_1, \dots, a_r\}$ y veamos que la dimensión del k -espacio vectorial $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + I_{\mathcal{A}})$ es r . Para ello vamos a demostrar que las clases de x_1, \dots, x_r conforman una base del k -espacio vectorial $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + I_{\mathcal{A}})$. En efecto, si $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r \in \mathfrak{m}^2 + I_{\mathcal{A}}$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in k$ y $\lambda_i \neq 0$ para algún $i \in \{1, \dots, r\}$, entonces hay un binomio \mathcal{A} -homogéneo en $I_{\mathcal{A}}$ de la forma $x_i - \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} x_j^{\alpha_j}$ y por tanto $a_i = \sum_{j \neq i} \alpha_j a_j \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}a_j$, lo que contradice que $a_i \in \mathcal{I}$. Ahora bien,

$a_i \notin \mathcal{I}$ para todo $i \in \{r+1, \dots, n\}$, entonces $a_i = \sum_{j=1}^r \beta_j a_j$, con $\beta_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$ y $\sum_{j=1}^r \beta_j \geq 2$, de donde $x_i - \prod_{j=1}^r x_j^{\beta_j} \in I_{\mathcal{A}}$ y $x_i \in \mathfrak{m}^2 + I_{\mathcal{A}}$.

Ahora, si denotamos por \mathfrak{n} el ideal $(x_1, \dots, x_n)/I_{\mathcal{A}}$ del anillo cociente $k[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{A}}$, entonces $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ es isomorfo a $\mathfrak{m}/(\mathfrak{m}^2 + I_{\mathcal{A}})$ como k -espacio vectorial. A su vez, la aplicación natural

$$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \longrightarrow \mathfrak{n}_{V(I_{\mathcal{A}},p)}/\mathfrak{n}_{V(I_{\mathcal{A}},p)}^2$$

es también un isomorfismo de k -espacios vectoriales; por tanto $\text{edim}(\mathcal{O}_{Y,p}) = r$. \square

Demostración del Teorema 1.1.11. (b) \Rightarrow (c) Si $r := \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$, al ser 0 un punto regular de $V(I_{\mathcal{A}})$ tenemos que $|\mathcal{I}| = r$. En efecto, $|\mathcal{I}| = \text{edim}(\mathcal{O}_{V(I_{\mathcal{A}},0)})$ por el Lema 1.1.14. Además $\text{edim}(\mathcal{O}_{V(I_{\mathcal{A}},0)}) = \dim(\mathcal{O}_{V(I_{\mathcal{A}},0)})$ al ser 0 un punto regular de $V(I_{\mathcal{A}})$. Finalmente, $\dim(\mathcal{O}_{V(I_{\mathcal{A}},0)}) = \dim(k[\mathcal{A}])$ al ser $V(I_{\mathcal{A}})$ irreducible, de donde $|\mathcal{I}| = r$ por la Proposición 1.1.12. (c) se sigue de la Proposición 1.1.13.

(c) \Rightarrow (a) Sea $r = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$. Supongamos sin pérdida de generalidad que para todo $i : r < i \leq n$ existen $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ir} \in \mathbb{N}$ tales que $a_i = \alpha_{i1}a_1 + \dots + \alpha_{ir}a_r$. Entonces $\mathcal{I} = \{a_1, \dots, a_r\}$ por Proposición 1.1.13. Si denotamos $f_i := x_i - \prod_{j=1}^r x_j^{\alpha_{ij}}$ para todo $r < i \leq n$, entonces $I_{\mathcal{A}} = (f_{r+1}, \dots, f_n)$. En efecto, si $g \in I_{\mathcal{A}}$ entonces g se puede escribir como $g = g' + g''$ donde $g' \in (f_{r+1}, \dots, f_n)$ y $g'' \in k[x_1, \dots, x_r] \cap I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{I}}$, pero $I_{\mathcal{I}} = (0)$ al ser $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{I}) = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) = r$ y así $\text{ht}(I_{\mathcal{I}}) = 0$ por la Proposición 1.1.12. Entonces $g'' = 0$ y $g \in (f_{r+1}, \dots, f_n)$. De aquí $k[\mathbf{x}]/I_{\mathcal{A}} \simeq k[x_1, \dots, x_r]$ y $V(I_{\mathcal{A}})$ es lisa.

Como (a) \Rightarrow (b) es trivial, se concluye la prueba. \square

1.2 Ideales tóricos intersección completa

Un ideal de un anillo noetheriano se dice que es *intersección completa* si está generado por una sucesión regular. El siguiente teorema nos da una definición equivalente de esta propiedad en el caso de ideales tóricos, que es la que utilizaremos a lo largo de toda esta memoria.

Teorema 1.2.1. $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa \iff existen f_1, \dots, f_h binomios con $h = n - \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ tales que $I_{\mathcal{A}} = (f_1, \dots, f_h)$.

Para demostrar el Teorema 1.2.1 haremos uso de varios resultados para ideales casi-homogéneos, es decir, \mathcal{B} -homogéneos donde $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{Z}^+$. $I_{\mathcal{A}}$ es \mathcal{A} -homogéneo por la Proposición 1.1.6 y a todo ideal \mathcal{A} -homogéneo se le puede dotar de una estructura de ideal \mathcal{B} -homogéneo donde $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^+$ sin más que tomar $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\}$, donde $b_i := \sum_{j=1}^m a_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Gracias a esta estructura se tiene en particular que todos los sistemas minimales de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formados por elementos \mathcal{A} -homogéneos tienen el mismo número de elementos (ver [100, Proposition 2.5.1]). De hecho, este número es $\mu(I_{\mathcal{A}})$, el número mínimo de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ (ver [100, Proposition 2.5.1 y Corollary 2.5.2]).

Proposición 1.2.2. *Sea $I \subset k[\mathbf{x}]$ un ideal \mathcal{B} -homogéneo con $\mathcal{B} \in \mathbb{Z}^+$, entonces existen $f_1, \dots, f_d \in k[\mathbf{x}]$ polinomios \mathcal{B} -homogéneos tales que $\dim(k[\mathbf{x}]/I + (f_1, \dots, f_i)) = d - i$, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, donde $d = \dim(k[\mathbf{x}]/I)$.*

Demostración. Para probar el resultado antes demostraremos por inducción sobre r que si P_1, \dots, P_r son ideales primos \mathcal{B} -homogéneos, todos de igual altura $h < n$, entonces existe $g \in k[\mathbf{x}]$ un polinomio \mathcal{B} -homogéneo que no pertenece a $P_1 \cup \dots \cup P_r$. Si $r = 1$, entonces $x_i \notin P_1$ para algún $1 \leq i \leq n$ pues $h < n$. Sea ahora f un polinomio \mathcal{B} -homogéneo que no pertenece a $P_1 \cup \dots \cup P_{r-1}$ y supongamos que $f \in P_r$. Sea q un polinomio \mathcal{B} -homogéneo tal que $q \in P_1 \cap \dots \cap P_{r-1}$ y $q \notin P_r$. Tal polinomio existe porque de no ser así $P_1 \cap \dots \cap P_{r-1} \subset P_r$ de donde $P_i \subset P_r$ para algún $1 \leq i \leq r-1$, lo cual es imposible pues $\text{ht}(P_i) = \text{ht}(P_r)$. Si denotamos $\alpha := \deg_{\mathcal{B}}(f)$, $\beta := \deg_{\mathcal{B}}(q)$ y $g := f^\beta + q^\alpha$, entonces $g \notin P_1 \cup \dots \cup P_r$ y es \mathcal{B} -homogéneo.

Sean P_1, \dots, P_r los primos minimales de I de altura exactamente $n - d$ y supongamos que $d > 0$. Por lo anterior, existe un polinomio f_1 \mathcal{B} -homogéneo que no pertenece a P_1, \dots, P_r y, por tanto, $\dim(k[\mathbf{x}]/I) > \dim(k[\mathbf{x}]/I + (f_1))$. Repetimos el argumento tantas veces como sea necesario hasta que se obtienen $s \leq d$ polinomios \mathcal{B} -homogéneos f_1, \dots, f_s tales que $\dim(k[\mathbf{x}]/I + (f_1, \dots, f_s)) = 0$. Veamos ahora que $\text{ht}(I + (f_1, \dots, f_s)/I) = d$. En efecto, como $\dim(k[\mathbf{x}]/I + (f_1, \dots, f_s)) = 0$, el ideal maximal homogéneo $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ es el único ideal primo que contiene a $I + (f_1, \dots, f_s)$ y por tanto $\text{ht}(\mathfrak{m}/I) = \text{ht}(I + (f_1, \dots, f_s)/I)$. Por otra parte, $\dim(k[\mathbf{x}]/I) = \text{ht}(\mathfrak{m}/I)$ al ser I homogéneo. Entonces $d \leq s$ ya que $\{f_1 + I, \dots, f_s + I\}$ es un sistema de generadores del ideal $I + (f_1, \dots, f_s)/I$, de donde $d = s$ y se sigue el resultado. \square

Demostración del Teorema 1.2.1. (\Rightarrow) Como $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal binomial y un binomio pertenece a $I_{\mathcal{A}}$ si y solo si es \mathcal{A} -homogéneo, entonces todo sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios tendrá exactamente $\mu(I_{\mathcal{A}})$ elementos. Pero $\mu(I_{\mathcal{A}}) = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$. En efecto, al ser $I_{\mathcal{A}}$ una intersección completa, admite un sistema de generadores con $\text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ elementos (ver [100, Theorem 3.14(c)]). Esto implica que $\mu(I_{\mathcal{A}}) \leq \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$, de donde la igualdad $\mu(I_{\mathcal{A}}) = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$. El resultado es ahora consecuencia de la Proposición 1.1.12.

(\Leftarrow) Por la Proposición 1.2.2, existen $f_{h+1}, \dots, f_n \in k[\mathbf{x}]$ polinomios \mathcal{B} -homogéneos tales que $\dim(k[\mathbf{x}]/(f_1, \dots, f_i)) = n - i$ para todo $i \in \{h+1, \dots, n\}$. Denotamos $I_i := (f_1, \dots, f_i)$ y $R_i := k[\mathbf{x}]/I_i$ y probemos que $\text{ht}(I_i) = i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. En efecto, $f_{i+1} + I_i, \dots, f_n + I_i$ generan en R_i el ideal $(f_1, \dots, f_n)/I_i$, cuya altura es $\dim(R_i)$ al ser $\mathfrak{m} = (x_1, \dots, x_n)$ el único ideal primo que contiene a (f_1, \dots, f_n) y al ser I_i un ideal homogéneo. Por tanto, $\dim(R_i) \leq n - i$ de donde $i \leq \text{ht}(I_i)$. Veamos ahora que $\{f_1, \dots, f_n\}$ es sucesión regular. Si f_{i+1} es divisor de cero de R_i para algún $1 \leq i \leq n-1$, entonces f_{i+1} pertenece a algún primo asociado de I_i (ver por ejemplo [3, Proposition 4.7]), pero I_i es un ideal de altura i generado por i elementos y, por tanto, todos sus primos asociados tienen altura i (ver [100, Theorem 1.3.23]). De aquí se deduce que I_{i+1} está contenido en un primo de altura i , lo cual es imposible puesto que $\text{ht}(I_{i+1}) = i + 1$. \square

Como consecuencia directa del Teorema 1.2.1, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 1.2.3. $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff \mu(I_{\mathcal{A}}) = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$.

Nota 1.2.4. Vale la pena resaltar que en la demostración del Teorema 1.2.1 se prueba que si f_1, \dots, f_h son binomios con $h = n - \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ tales que $I_{\mathcal{A}} = (f_1, \dots, f_h)$, entonces $\{f_1, \dots, f_h\}$ es una sucesión regular. De hecho, utilizando el mismo argumento, se prueba que si f_1, \dots, f_h son polinomios casi-homogéneos que generan un ideal de altura h , entonces $\{f_1, \dots, f_h\}$ es una sucesión regular, lo que no ocurre en general. Por ejemplo, siendo k un cuerpo cualquiera, el ideal de $k[x, y, z]$ engendrado por $(x+1)y, (x+1)z, x$ es el maximal (x, y, z) de $k[x, y, z]$ y la sucesión $\{(x+1)y, (x+1)z, x\}$ no es regular pues $(x+1)z$ es un divisor de cero de $k[x, y, z]/((x+1)y)$.

En vista del Teorema 1.2.1, una posible forma de comprobar si un ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa consiste en calcular un sistema minimal de generadores del ideal formado por binomios y comprobar si el número de elementos de dicho sistema de generadores coincide con $n - \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$. En la Sección 1.1 se describió cómo obtener un sistema de generadores \mathcal{G} de $I_{\mathcal{A}}$. A partir de \mathcal{G} se podría llegar a un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ por medio de técnicas de bases de Gröbner (ver por ejemplo [1] o [27]) y así decidir si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa o no.

Al margen de las técnicas de bases de Gröbner, se han dedicado varios trabajos a la descripción de los sistemas de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formados por binomios y a caracterizar cuándo estos sistemas de generadores son minimales a partir de la combinatoria del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$, donde $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$. En esta línea y para $m = 1$ se encuadran los trabajos de Herzog [53] para $n = 3$, Bresinsky [14] para $n = 4$, Campillo y Pisón [18] cuando $n = 5$ y Eliahou [35], Bresinsky [14] y Rosales [89] para cualquier valor de n . Para cualquier valor de m , Morales en [76] diseña un algoritmo para obtener un sistema de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ cuando el semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ es simplicial y $\text{ht}(I_{\mathcal{A}}) = 2$. El problema para cualquier valor de n y m es estudiado por Sturmfels en [94, Theorem 5.3], donde aporta una descripción de los sistemas minimales de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formados por binomios en términos de una familia de grafos asociados al semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$. En este mismo contexto, Briales, Campillo, Marijuán y Pisón en [16] proponen un algoritmo que calcula sistemas minimales de generadores de ideales tóricos a partir del estudio de ciertos complejos simpliciales asociados al semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$; este método fue mejorado por Campillo y Gimenez en [17].

Todas estas descripciones de sistemas de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formados por binomios y la caracterización de cuándo son minimales dependen únicamente de la combinatoria del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$. Es por ello que para un ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$, el valor de $\mu(I_{\mathcal{A}})$ y por tanto la propiedad de ser intersección completa, es independiente del cuerpo k .

Las dos siguientes familias de ideales tóricos ponen de manifiesto que para determinar si un ideal tórico es intersección completa, la obtención de un sistema minimal de binomios que lo generan puede resultar muy ineficiente incluso en ejemplos aparentemente simples.

Para todo $l \geq 3$ se define $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{N}^2$ con $a_1 := (l, 0)$, $a_2 := (l-1, 1)$, $a_3 := (1, l-1)$ y $a_4 := (0, l)$. La altura de $I_{\mathcal{A}}$ es 2 y Bresinsky y Renschuch demostraron en [15] que $\mu(I_{\mathcal{A}}) = l$; por tanto $I_{\mathcal{A}}$ nunca es intersección completa.

Para todo $l \in \mathbb{Z}^+$, se define $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{N}$ con $a_1 = l^2$, $a_2 = 2l^2 - 1$, $a_3 = 3l^2 + l$ y $a_4 = 4l^2 + l - 1$. Eliahou demostró en [35] que $\mu(I_{\mathcal{A}}) \geq l$. Además esta cota

inferior no es muy ajustada, ya que por ejemplo para $l = 100$ se tiene que $\mu(I_{\mathcal{A}}) = 403$. Como la altura de $I_{\mathcal{A}}$ es 3, entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa cuando $l \geq 4$.

En esta memoria se aborda el problema de decidir si un ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa sin pasar por el cálculo de un sistema minimal de binomios que lo genere.

El problema fue inicialmente propuesto por Herzog [53] en 1970 y resuelto en el primer caso no trivial, el de las curvas monomiales afines en el espacio tridimensional, es decir, cuando $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{Z}^+$. En el citado artículo para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ se define

$$m_i := \min \left\{ b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{j \in \{1,2,3\} \setminus \{i\}} \mathbb{N} a_j \right\}$$

y se demuestra lo siguiente:

Teorema 1.2.5. [53, Theorem 3.8] $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff \exists i, j: 1 \leq i < j \leq 3$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$.

A raíz de este trabajo varios autores se interesaron en el mismo problema. Así por ejemplo, Delorme en [30] generalizó el resultado de Herzog para curvas monomiales afines en el espacio afín n -dimensional, es decir, cuando $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^+$, obteniendo un algoritmo para determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa en este contexto. En ese mismo artículo, Delorme también prueba la siguiente caracterización.

Teorema 1.2.6. [30, Proposition 9] Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^+$. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa \iff existen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ tales que \mathcal{A} es unión disjunta de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 y se tiene que

- (a) $\text{lcm}\{\text{gcd}(\mathcal{A}_1), \text{gcd}(\mathcal{A}_2)\} \in \mathbb{N}\mathcal{A}_1 \cap \mathbb{N}\mathcal{A}_2$, y
- (b) $I_{\mathcal{A}_1}$ y $I_{\mathcal{A}_2}$ son intersección completa.

Posteriormente, Rosales en [90] introduce la idea de *gluing* para todo subconjunto finito \mathcal{A} de \mathbb{N}^m , que es un concepto que generaliza la propiedad (a) del Teorema 1.2.6.

Definición 1.2.7. Sea \mathcal{A} un subconjunto finito de \mathbb{N}^m y sean $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ subconjuntos de \mathcal{A} tales que \mathcal{A} es unión disjunta de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . \mathcal{A} es *gluing* de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 si existe $\alpha \in \mathbb{N}\mathcal{A}_1 \cap \mathbb{N}\mathcal{A}_2$ tal que $\alpha \neq 0$ y $\mathbb{Z}\mathcal{A}_1 \cap \mathbb{Z}\mathcal{A}_2 = \mathbb{Z}\alpha$.

Haciendo uso del concepto de *gluing*, Fischer, Morris y Shapiro [38] en 1997 generalizan el resultado de Delorme para cualquier ideal tórico.

Teorema 1.2.8. [38, Theorem 3.1] $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa \iff existen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ tales que \mathcal{A} es unión disjunta de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 y se tiene que

- (a) \mathcal{A} es *gluing* de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 , y
- (b) $I_{\mathcal{A}_1}$ y $I_{\mathcal{A}_2}$ son intersección completa.

Este mismo resultado había sido previamente demostrado por García-Sánchez y Rosales cuando $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$ y $m \leq 3$ en [43, Theorem 2.6]. También en [43, Theorem 1.4] afinan este resultado para cualquier m siendo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ un semigrupo simplicial (ver Teorema 2.1.7 de esta memoria).

Además en [44, Section 4], García-Sánchez y Rosales proponen un método efectivo para, dado un conjunto \mathcal{A} que es unión disjunta de dos subconjuntos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 , comprobar si \mathcal{A} es gluing de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 . Este método efectivo junto con el Teorema 1.2.8 sugiere un algoritmo de naturaleza inductiva para determinar si un ideal tórico es intersección completa. Haciendo uso de este algoritmo, para poder afirmar que un ideal tórico no es intersección completa habría que construir todas las posibles particiones de \mathcal{A} en 2 subconjuntos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 y comprobar que no se satisfacen las condiciones del Teorema 1.2.8, lo que es ineficiente.

Por otra parte, Fischer y Shapiro en [40], antes de demostrar junto a Morris el Teorema 1.2.8, aportan otra caracterización de cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa en términos de lo que denominan *matrices dominantes*. Para llegar a esta caracterización, pasamos a introducir algunos conceptos previos y un teorema.

Definición 1.2.9. *Sea B una matriz con coeficientes enteros. B se dirá mezclada si toda fila de B contiene al menos una entrada positiva y una entrada negativa. B es dominante si no contiene ninguna submatriz cuadrada mezclada.*

Ejemplo 1.2.10. *Sean B_1, B_2 y B_3 las matrices enteras siguientes:*

$$B_1 := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se observa que B_1 y B_3 son mezcladas y B_2 no, ya que su segunda fila no tiene entradas negativas. B_1 no es dominante puesto que tiene como submatriz a la matriz cuadrada mezclada $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Como B_2 y B_3 no tienen submatrices cuadradas mezcladas, ambas son dominantes.

Para toda matriz B de coeficientes enteros y para todo $t \in \mathbb{Z}^+$ menor o igual que el rango de B , denotamos por $\Delta_t(B)$ al máximo común divisor de todos los menores $t \times t$ no nulos.

Teorema 1.2.11. [40, Theorem 2.9] *Sea $\{f_1, \dots, f_h\}$ conjunto de binomios de $I_{\mathcal{A}}$ con $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ tales que $f_i = \mathbf{x}^{\alpha_i} - \mathbf{x}^{\beta_i}$ con $\gcd\{\mathbf{x}^{\alpha_i}, \mathbf{x}^{\beta_i}\} = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, h\}$. Sea B la matriz $h \times n$ cuya fila i -ésima es $\widehat{f}_i = \alpha_i - \beta_i$ para todo $i \in \{1, \dots, h\}$. Entonces,*

$$I_{\mathcal{A}} = (f_1, \dots, f_h) \iff B \text{ es dominante y } \Delta_h(B) = 1.$$

El interés del Teorema 1.2.11 es doble. Por una parte, proporciona un criterio efectivo para determinar cuando un conjunto de $\text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ binomios de $I_{\mathcal{A}}$ genera $I_{\mathcal{A}}$, criterio que será de gran utilidad en esta memoria. Por otra parte, del Teorema 1.2.1 y de este resultado se deduce trivialmente la siguiente caracterización de la propiedad de ser intersección completa anunciada anteriormente.

Corolario 1.2.12. [40, Corollary 2.10] $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa \iff existen $\gamma_1, \dots, \gamma_h \in \text{Ker}(\pi)$ con $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ tales que la matriz B con filas $\gamma_1, \dots, \gamma_h$ es dominante y $\Delta_h(B) = 1$.

Si bien este corolario es una caracterización de los ideales tóricos intersección completa, de él no se desprende ningún método efectivo para determinar si un ideal tórico cumple esta propiedad.

No obstante, Fischer, Morris y Shapiro en [39] aportan un algoritmo que determina en tiempo polinomial si una matriz B de tamaño $h \times n$ es dominante o no. Haciendo uso de este resultado, del Teorema 1.2.11 y del hecho de que se puede determinar si $\Delta_h(B) = 1$ o no en tiempo polinomial (ver por ejemplo [59, Section 3] y [23, Theorem 2.4.3]), se concluye que se puede determinar en tiempo polinomial si un conjunto de h binomios de $I_{\mathcal{A}}$ genera $I_{\mathcal{A}}$, siendo $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$. También Scheja, Scheja y Storch en [91, Theorem 1.3] obtienen un criterio equivalente al del Teorema 1.2.11 y aportan en [91, Section 4] otro algoritmo polinomial para comprobar si un conjunto de h binomios de $I_{\mathcal{A}}$ genera $I_{\mathcal{A}}$.

Por consiguiente, dados f_1, \dots, f_h binomios de $I_{\mathcal{A}}$ con $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$, el problema de decisión: ¿Es $I_{\mathcal{A}} = (f_1, \dots, f_h)$? pertenece a la clase de complejidad \mathcal{P} .

También se desprende que dado $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$, el problema de decisión: ¿Es $I_{\mathcal{A}}$ intersección completa? se encuentra en la clase \mathcal{NP} . Como certificado de ser intersección completa basta con dar un conjunto de $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ binomios que genere $I_{\mathcal{A}}$. Al tratarse de un problema \mathcal{NP} , es interesante encontrar buenos criterios que determinen que ciertos ideales tóricos no son intersección completa. En esta línea se encuadran los resultados de García-Sánchez y Rosales [43, Theorem 2.19], Fischer, Morris y Shapiro [38, Corollary 3.4] y el artículo de Michelacakis y Thoma [72]. Todos ellos estudian el cono racional poliedral generado por \mathcal{A} , es decir

$$\text{Cone}(\mathcal{A}) := \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\} \subset \mathbb{R}^m,$$

y dan condiciones necesarias sobre la geometría de $\text{Cone}(\mathcal{A})$ para que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa cuando $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) \geq 3$. Para enunciar estos resultados, necesitamos introducir algunos conceptos previos.

Definición 1.2.13. Una cara del cono de \mathcal{A} es un subconjunto $\mathcal{F} \subset \text{Cone}(\mathcal{A})$ para el que existe un $w \in \mathbb{R}^m$ tal que $y \cdot w \geq 0$ para todo $y \in \text{Cone}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{F} = \{y \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \mid y \cdot w = 0\}$. Un rayo extremo de $\text{Cone}(\mathcal{A})$ es una cara de la forma $\mathcal{F}_b := \{\alpha b \mid \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$, donde $b \in \text{Cone}(\mathcal{A})$.

Si denotamos por r a $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$, García-Sánchez y Rosales demuestran en [43] que si $r = 3$ e $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces el número de rayos extremos es ≤ 4 . Posteriormente Fischer, Morris y Shapiro en [38] generalizan el resultado para todo $r \geq 3$ demostrando que si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, el número de rayos extremos es $\leq 2r - 2$. Michelacakis y Thoma van más allá de este resultado y caracterizan en [72, Theorem 3.2] el conjunto de conos $\sigma \subset \mathbb{R}^m$ tales que existe un $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$ con $\sigma = \text{Cone}(\mathcal{A})$ y $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa; además, esta caracterización es particularmente elegante cuando el cono tiene exactamente $2r - 2$ rayos extremos ([72, Theorem 1.5]).

Siguiendo en la línea de buscar condiciones necesarias que deben satisfacer los ideales tóricos intersección completa, Katsabekis, Morales y Thoma demuestran en [62, Theorem 4.1] que si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y \mathcal{F} es una cara del cono de \mathcal{A} , entonces $I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}$ también lo es. Este resultado nos será útil en el Capítulo 4 al estudiar los ideales tóricos de grafos. Aquí aportamos una prueba alternativa del mismo resultado en el Corolario 1.2.15, que es consecuencia directa de lo siguiente.

Proposición 1.2.14. *Sea \mathfrak{B} es un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios, entonces $\mathfrak{B} \cap k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$ es un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}$.*

Demostración. Primero afirmamos que si $f = \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta \in I_{\mathcal{A}}$ con $\mathbf{x}^\alpha \in k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$, entonces $\mathbf{x}^\beta \in k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$. En efecto, si $\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^\beta) = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$, como $\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^\beta) = \deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^\alpha)$ y $\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^\alpha) \in \mathcal{F}$, entonces $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\beta_j \neq 0$, se tiene que $\beta_j a_j \in \mathcal{F}$ de donde $a_j \in \mathcal{F}$ y así $\mathbf{x}^\beta \in k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$. Sea ahora g un elemento de $I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}$, como $g \in I_{\mathcal{A}}$, entonces $g = \sum_{f_i \in \mathfrak{B}} g_i f_i$ con $g_i \in k[\mathbf{x}]$. Consideramos el morfismo $\tau : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$ definido por $\tau(x_i) = 0$ si $a_i \notin \mathcal{F}$ y $\tau(x_i) = x_i$ si $a_i \in \mathcal{F}$. Por la primera observación de la prueba obtenemos que para todo $f_i \in \mathfrak{B}$ se tiene que $\tau(f_i) = f_i$ si $f_i \in k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$ y $\tau(f_i) = 0$ en caso contrario. Entonces

$$\tau(g) = \sum_{f_i \in \mathfrak{B}} \tau(g_i) \tau(f_i) = \sum_{f_i \in \mathfrak{B} \cap k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]} \tau(g_i) f_i.$$

Como $g = \tau(g)$ al estar g en $I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}} = I_{\mathcal{A}} \cap k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$, se tiene que $g \in (\{f_i \mid f_i \in \mathfrak{B} \cap k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]\})$, de donde el resultado. \square

Corolario 1.2.15. [62, Theorem 4.1] *Si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces $I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}$ es intersección completa.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.1, existe \mathfrak{B} un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por $\text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ binomios y, en virtud de la Nota 1.2.4, \mathfrak{B} es una sucesión regular. Aplicando la Proposición 1.2.14, se concluye que $\mathfrak{B} \cap k[x_i \mid a_i \in \mathcal{F}]$ es una sucesión regular que genera $I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}$. \square

Ejemplo 1.2.16. *Sea $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} \subset \mathbb{N}^2$ con $a_1 := (8, 0)$, $a_2 := (15, 0)$, $a_3 := (18, 0)$, $a_4 := (2, 2)$, $a_5 := (3, 3)$ y $a_6 := (0, 4)$. Si tomamos $w = (0, 1)$ es fácil comprobar que $y \cdot w \geq 0$ para todo $y \in \text{Cone}(\mathcal{A})$ y $\mathcal{F} := \{y \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \mid y \cdot w = 0\}$ =*

$\{y = (y_1, y_2) \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \mid y_2 = 0\}$, de donde $\mathcal{A} \cap \mathcal{F} = \{a_1, a_2, a_3\}$. Como $I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}$ no es intersección completa puesto que $2 = \text{ht}(I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}) < \mu(I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}) = 3$, entonces tampoco lo es $I_{\mathcal{A}}$ por el Corolario 1.2.15 anterior.

Otro problema relacionado con el de determinar cuándo un ideal tórico es intersección completa es el de determinar cuándo es intersección completa conjuntista por binomios, i.e., caracterizar cuándo $I_{\mathcal{A}}$ se puede escribir como el radical de un ideal generado por $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ binomios. Es evidente que todo ideal tórico intersección completa es intersección completa conjuntista por binomios. Es más, Barile, Morales y Thoma demuestran en [4] que cuando k es un cuerpo de característica cero, si existen $g_1, \dots, g_h \in k[\mathbf{x}]$ binomios tales que $I_{\mathcal{A}} = \sqrt{(g_1, \dots, g_h)}$, entonces $I_{\mathcal{A}} = (g_1, \dots, g_h)$. Así pues, en característica cero un ideal es intersección completa si y solo si es intersección completa conjuntista por binomios. Vale la pena reseñar que Bermejo, Giménez, Reyes y Villarreal en [11, Corollary 2.6] dan una prueba alternativa de este mismo resultado.

Lo que resta de sección lo dividiremos en dos subsecciones, cada una de ellas dedicada a introducir una técnica relacionada con los ideales tóricos intersección completa. Estas técnicas son esenciales para los Capítulos 2 y 3.

1.2.1 Del ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ a $I_{\mathcal{A}_{red}}$

A partir del conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$, vamos a construir otro conjunto $\mathcal{A}_{red} \subset \mathbb{N}^m$ con la propiedad de que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$ o $I_{\mathcal{A}_{red}}$ es intersección completa. Además, en caso de que \mathcal{A}_{red} no sea vacío, tendrá a lo sumo tantos elementos como \mathcal{A} , de donde $I_{\mathcal{A}_{red}} \subset k[x_1, \dots, x_t]$ con $t \leq n$ y los grados de los generadores de $I_{\mathcal{A}_{red}}$ serán menores o iguales que los de $I_{\mathcal{A}}$.

Para explicar cómo se construye el conjunto \mathcal{A}_{red} a partir de \mathcal{A} , necesitamos de los Lemas 1.2.17, 1.2.18 y de la Proposición 1.2.19.

Lema 1.2.17. Si $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

(a) $\mu(I_{\mathcal{A}}) = \mu(I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}) + 1$.

(b) $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$ es intersección completa.

Demostración. Asumimos que $a_n = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$ y construimos el binomio $g := x_n - \prod_{j=1}^{n-1} x_j^{\alpha_j}$ que pertenece a $I_{\mathcal{A}}$. Se tiene que

$$I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A} \setminus \{a_n\}} \cdot k[\mathbf{x}] + (g)$$

puesto que todo elemento $f \in I_{\mathcal{A}}$ se puede escribir como $f = f' + hg$ donde $h \in k[\mathbf{x}]$ y $f' \in I_{\mathcal{A}} \cap k[x_1, \dots, x_{n-1}] = I_{\mathcal{A} \setminus \{a_n\}}$. De aquí, se deduce fácilmente que $\mu(I_{\mathcal{A}}) = \mu(I_{\mathcal{A} \setminus \{a_n\}}) + 1$ y se tiene (a). Como $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) = \dim(\mathbb{Q}(\mathcal{A} \setminus \{a_n\}))$, entonces $\text{ht}(I_{\mathcal{A}}) = \text{ht}(I_{\mathcal{A} \setminus \{a_n\}}) + 1$ por la Proposición 1.1.12. (b) ahora es consecuencia de (a). \square

Lema 1.2.18. Si $a_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q}a_j$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces

(a) $\mu(I_A) = \mu(I_{A \setminus \{a_i\}})$.

(b) I_A es intersección completa $\iff I_{A \setminus \{a_i\}}$ es intersección completa.

Demostración. Asumimos que $a_n \notin \sum_{j \in \{1, \dots, n-1\}} \mathbb{Q}a_j$. Sea ahora $g := \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta \in I_A$ un binomio no nulo tal que $\gcd\{\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta\} = 1$. Veamos que $g \in I_{A \setminus \{a_n\}}$ para lo que basta con demostrar que $g \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ ya que $I_{A \setminus \{a_n\}} = I_A \cap k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. En efecto, si $\alpha_n \neq 0$, entonces $\alpha_n a_n = \sum_{j \neq n} (\beta_j - \alpha_j) a_j$, lo que es imposible. De igual forma se deduce que $\beta_n = 0$ y, por tanto, $g \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$. Se tiene entonces que $I_A = I_{A \setminus \{a_n\}} \cdot k[\mathbf{x}]$, de donde se siguen (a) y (b). \square

Asumiendo que $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q}a_j$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos

$$B_i := \min \left\{ b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z}a_j \right\}$$

y se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.2.19. Sea $\mathcal{A}' := \{a_1, \dots, a_{i-1}, b a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$, donde $b \in \mathbb{Z}^+$ es un divisor de B_i . Entonces

(a) $\mu(I_A) = \mu(I_{\mathcal{A}'})$.

(b) I_A es intersección completa $\iff I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa.

Demostración. Veamos (a). Para ello, si $\rho : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{x}]$ es el k -homomorfismo definido por $\rho(x_i) = x_i^b$, y $\rho(x_j) = x_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, se tiene que $I_A = \rho(I_{\mathcal{A}'}) \cdot k[\mathbf{x}]$. En efecto, es fácil comprobar que $\rho(g) \in I_A$ para todo binomio $g \in I_{\mathcal{A}'}$. Por otro lado, sea $h = \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta \in I_A$ tal que $\gcd\{\mathbf{x}^\alpha, \mathbf{x}^\beta\} = 1$ y supongamos sin pérdida de generalidad que $\beta_i = 0$. Entonces $\alpha_i a_i = \sum_{j \neq i} (\beta_j - \alpha_j) a_j$. De aquí se sigue que $\alpha_i \in \mathbb{Z}B_i$ y por tanto $\alpha_i = b \alpha'_i$ con $\alpha'_i \in \mathbb{N}$ al ser b un divisor de B_i . Denotamos $\alpha' := (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha'_i, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, entonces $h' := \mathbf{x}^{\alpha'} - \mathbf{x}^\beta$ pertenece a $I_{\mathcal{A}'}$ y satisface que $\rho(h') = h$. Por tanto, de la igualdad $I_A = \rho(I_{\mathcal{A}'}) \cdot k[\mathbf{x}]$, que acabamos de probar, se deduce que $\mu(I_{\mathcal{A}'}) \geq \mu(I_A)$.

Tomemos ahora $\mathfrak{B} = \{h_1, \dots, h_t\}$ un conjunto de binomios que genera I_A . Procediendo igual que antes se tiene que para todo $j \in \{1, \dots, t\}$ existe $h'_j \in I_{\mathcal{A}'}$ tal que $\rho(h'_j) = h_j$. Probemos que $I_{\mathcal{A}'} = (h'_1, \dots, h'_t)$. Sea $g' \in I_{\mathcal{A}'}$, entonces $\rho(g') \in I_A \cap \text{Im}(\rho)$. Como $k[\mathbf{x}]$ es un $\text{Im}(\rho)$ -módulo libre con base $\{1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{b-1}\}$, entonces $\rho(g')$ se puede escribir como $\rho(g') = \sum_{i=1}^t q_i \rho(h'_i)$ con $q_i \in \text{Im}(\rho)$. Por la inyectividad de ρ se tiene $I_{\mathcal{A}'} = (h'_1, \dots, h'_t)$, de donde se deduce $\mu(I_{\mathcal{A}'}) \leq \mu(I_A)$ y se tiene (a).

Como $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}')$, entonces $\text{ht}(I_A) = \text{ht}(I_{\mathcal{A}'})$ por la Proposición 1.1.12. (b) ahora es consecuencia de (a). \square

El apartado (a) de la proposición anterior es una generalización del resultado de Morales [75, Lemma 3.2] (ver también [74, Lemma 1.2]) que trata sobre el caso particular del ideal tórico asociado a una curva monomial afín.

Nota 1.2.20. Como consecuencia directa de la Proposición 1.2.19 y del Lema 1.2.17 se tiene que si $ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$ y para un divisor b de B_i , entonces $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$ es intersección completa. Este resultado generaliza el de Watanabe [102, Lemma 1] para ideales tóricos 1-dimensionales y $b = B_i$.

Aplicando iterativamente los Lemas 1.2.18 y 1.2.17 y la Proposición 1.2.19 tantas veces como sea posible, se le asocia al conjunto \mathcal{A} un único subconjunto $\mathcal{A}_{red} \subset \mathbb{N}^m$ que si no es vacío es de la forma $\mathcal{A}_{red} = \{a'_1, \dots, a'_t\}$, donde para cualquier $i \in \{1, \dots, t\}$ se verifica:

- $a'_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, t\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a'_j$,
- $a'_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, t\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q} a'_j$, y
- si $B'_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba'_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, t\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z} a'_j\}$, entonces $B'_i = 1$ (es decir, $a'_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, t\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z} a'_j$).

Cuando $\mathcal{A}_{red} \neq \emptyset$, diremos que el ideal tórico $I_{\mathcal{A}_{red}}$ es la *reducción* de $I_{\mathcal{A}}$ y se verifica el siguiente resultado, que es consecuencia de los tres anteriores.

Teorema 1.2.21. $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff \mathcal{A}_{red} = \emptyset$ o $I_{\mathcal{A}_{red}}$ es intersección completa.

En [12], Bertin y Carbonne introducen el concepto de *semigrupo libre* para denominar a una familia de semigrupos de \mathbb{N} . Posteriormente García-Sánchez y Rosales en [44] generalizan de forma natural este concepto para semigrupos de \mathbb{N}^m y aportan varias definiciones equivalentes ([44, Theorem 1.6]). Es fácil probar que el semigrupo de \mathbb{N}^m generado por \mathcal{A} es libre si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$, en cuyo caso $I_{\mathcal{A}}$ es una intersección completa por el teorema anterior.

El pseudocódigo de la Tabla 1.1 describe un algoritmo que recibe como entrada el conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ y calcula \mathcal{A}_{red} . Los siguientes dos ejemplos muestran cómo calcular \mathcal{A}_{red} siguiendo el algoritmo.

Ejemplo 1.2.22. Sea $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{N}^2$ con $a_1 = (6, 0)$, $a_2 = (4, 2)$, $a_3 = (3, 3)$, $a_4 = (2, 4)$ y $a_5 = (0, 6)$.

De la igualdad:

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3 \quad (1)$$

se sigue que para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q} a_j$. También de (1) se deduce que $B_1 = B_2 = 1$. Además $B_i a_i = a_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j$ para $i \in \{1, 2\}$. Calculemos ahora B_3 . Sabemos que $B_3 \leq 2$ por (1) y como $B_3 a_3$ pertenece a $\sum_{j \in \{1, 2, 4, 5\}} \mathbb{Z} a_j$ se tiene que $3B_3 \in \mathbb{Z}\{2, 4, 6\} = \mathbb{Z}\{2\}$ y por tanto $B_3 = 2$. Como $2a_3 = a_1 + a_5$, consideramos $\mathcal{A} \setminus \{a_3\}$ y definimos $B'_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, 2, 4, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z} a_j\}$ para todo $i \in \{1, 2, 4, 5\}$. De (1) obtenemos que $B'_i = 1$ y se observa que $B'_i a_i = a_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1, 2, 4, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j$ para todo $i \in \{1, 2, 4, 5\}$. Concluimos que $\mathcal{A}_{red} = \mathcal{A} \setminus \{a_3\}$.

Algoritmo de reducción

Entrada : $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m \setminus \{0\}$

Salida : \mathcal{A}_{red}

```

repeat
   $\mathcal{B} := \mathcal{A}$ 
  for all  $a \in \mathcal{A}$  do
    if  $a \notin \mathbb{Q}(\mathcal{A} \setminus \{a\})$  then
       $\mathcal{A} := \mathcal{A} \setminus \{a\}$ 
    else
       $B := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba \in \mathbb{Z}(\mathcal{A} \setminus \{a\})\}$ 
      if  $Ba \in \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a\})$  then
         $\mathcal{A} := \mathcal{A} \setminus \{a\}$ 
      end if
      if  $Ba \notin \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a\})$  then
         $\mathcal{A} := (\mathcal{A} \setminus \{a\}) \cup \{Ba\}$ 
      end if
    end if
  end for
until  $(\mathcal{A} = \emptyset)$  OR  $(\mathcal{A} = \mathcal{B})$ 
return  $(\mathcal{B})$ 

```

Tabla 1.1: Cálculo de \mathcal{A}_{red}

Ejemplo 1.2.23. Sea $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{N}^3$ con $a_1 = (0, 0, 3)$, $a_2 = (2, 3, 12)$, $a_3 = (0, 6, 18)$, $a_4 = (1, 0, 0)$ y $a_5 = (1, 5, 17)$.

Se observan las siguientes dos igualdades:

$$a_2 + 3a_5 = 3a_1 + 3a_3 + 5a_4 \quad (1)$$

$$2a_2 = 2a_1 + a_3 + 4a_4 \quad (2)$$

De (1) se sigue que para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q} a_j$. Calculemos B_1 , (1) y (2) muestran que tanto $3a_1$ como $2a_1$ pertenecen a $\sum_{j=2}^5 \mathbb{Z} a_j$ y, por ello, también $a_1 \in \sum_{j=2}^5 \mathbb{Z} a_j$ y $B_1 = 1$. Además $B_1 a_1 = a_1 \notin \sum_{j \in \{2, 3, 4, 5\}} \mathbb{N} a_j$. Procediendo de forma análoga, se obtiene que $B_2 = B_3 = B_4 = 1$ y $B_i a_i = a_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j$ para todo $i \in \{2, 3, 4\}$. Calculemos ahora B_5 , sabemos que $B_5 \leq 3$ por (1) y de la relación $B_5 a_5 \in \sum_{j=1}^4 \mathbb{Z} a_j$ observamos que $17 B_5 \in \mathbb{Z}\{3, 12, 18\} = \mathbb{Z}\{3\}$, por tanto $B_5 = 3$.

Denotemos $a_6 := 3a_5$ y $\mathcal{A}_1 := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6\}$, la Proposición 1.2.19 nos dice que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $I_{\mathcal{A}_1}$ lo es. Siguiendo con la ejecución del algoritmo, como $3a_5 = a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ consideramos $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A} \setminus \{a_5\}$.

Por (2) tenemos que para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, 2, 3, 4\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q} a_j$. Ahora calculamos $B'_1 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_1 \in \sum_{j \in \{2, 3, 4\}} \mathbb{Z} a_j\}$: por (2) se tiene que $B'_1 \leq 2$ y de la relación $B'_1 a_1 \in \sum_{j \in \{2, 3, 4\}} \mathbb{Z} a_j$ se deduce que $3 B'_1 \in \mathbb{Z}\{12, 18\} = \mathbb{Z}\{6\}$, de donde $B'_1 = 2$.

Denotemos $a_7 := 2a_1$ y $\mathcal{A}_3 := \{a_2, a_3, a_4, a_7\}$ y observamos que $a_7 \notin \mathbb{N}\{a_2, a_3, a_4\}$. Definimos $B'_2 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_2 \in \sum_{j \in \{3, 4, 7\}} \mathbb{Z} a_j\}$. Dado que $2a_2 = a_3 + 4a_4 + a_7$ tenemos que $B'_2 \leq 2$ y de la relación $B'_2 a_2 \in \sum_{j \in \{3, 4, 7\}} \mathbb{Z} a_j$ observamos que $3 B'_2 \in \mathbb{Z}\{6\}$, por tanto $B'_2 = 2$.

Denotemos $a_8 := 2a_2$ y $\mathcal{A}_4 := \{a_3, a_4, a_7, a_8\}$, la Proposición 1.2.19 nos dice que $I_{\mathcal{A}_3}$ es intersección completa si y solo si $I_{\mathcal{A}_4}$ lo es. Finalmente, observamos que $2a_2 = a_3 + 4a_4 + a_7 \in \mathbb{N}\{a_3, a_4, a_7\}$ y escribimos $\mathcal{A}_5 = \{a_3, a_4, a_7\}$. Dado que a_3, a_4 y a_7 son \mathbb{Q} -linealmente independientes, llegamos a que \mathcal{A}_{red} es \emptyset .

Nota 1.2.24. Cuando \mathcal{A}_{red} sea \emptyset como en el Ejemplo 1.2.23, o cuando por otros medios conozcamos un conjunto de binomios que genera $I_{\mathcal{A}_{red}}$, sea $I_{\mathcal{A}_{red}}$ intersección completa o no, las demostraciones de los Lemas 1.2.17, 1.2.18 y de la Proposición 1.2.19 indican cómo obtener durante la ejecución del algoritmo de la Tabla 1.1 un conjunto de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ sin efectuar ningún cálculo adicional. Además, el sistema de generadores obtenido será minimal si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$ o si el de $I_{\mathcal{A}_{red}}$ también lo era. De forma más precisa, el sistema de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ se obtendrá aplicando lo siguiente:

1. Si $a_i = \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \alpha_j a_j \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j$, entonces denotando $g := x_i - \prod_{j \neq i} x_j^{\alpha_j}$ se tiene que $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}} \cdot k[\mathbf{x}] + (g)$. Por consiguiente, si \mathfrak{B} es un sistema de generadores de $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$, entonces $\mathfrak{B} \cup \{g\}$ lo es de $I_{\mathcal{A}}$. Esto es consecuencia del Lema 1.2.17.
2. Si $a_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q} a_j$, entonces $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}} \cdot k[\mathbf{x}]$. Por consiguiente, si \mathfrak{B} es un sistema de generadores de $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$, también lo es de $I_{\mathcal{A}}$. Esto es consecuencia del Lema 1.2.18.
3. Si $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q} a_j$, entonces denotando $\mathcal{A}' := \{a_1, \dots, a_{i-1}, B_i a_i, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ se tiene que $I_{\mathcal{A}} = \rho(I_{\mathcal{A}'}) \cdot k[\mathbf{x}]$, donde $\rho : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[\mathbf{x}]$ es el morfismo inducido por $x_i \mapsto x_i^{B_i}$ y $x_j \mapsto x_j$ si $j \neq i$. Por consiguiente, si \mathfrak{B} es un sistema de generadores de $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$, entonces $\rho(\mathfrak{B})$ lo es de $I_{\mathcal{A}}$. Esto es consecuencia de la Proposición 1.2.19.

Veamos, siguiendo las indicaciones de la Nota 1.2.24, cómo se obtiene un sistema minimal de generadores del ideal tórico del Ejemplo 1.2.23.

Ejemplo 1.2.25. 1. Definimos $a_6 := 3a_5$, $\mathcal{A}_1 := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6\}$ y denotando por

$$\rho_1 : k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_6] \rightarrow k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$$

al homomorfismo inducido por $\rho_1(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y $\rho_1(x_6) = x_5^3$, se tiene $I_{\mathcal{A}} = \rho_1(I_{\mathcal{A}_1}) \cdot k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$.

2. Comprobamos si $a_6 \in \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_2 + \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$ y obtuvimos que $a_6 = a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4$. Por tanto, definimos $\mathcal{A}_2 := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $g_1 := x_6 - x_1x_2^2x_3^2x_4$ y tenemos que $I_{\mathcal{A}_1} = I_{\mathcal{A}_2} \cdot k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_6] + (g_1)$.

3. Definimos $a_7 := 2a_1$, $\mathcal{A}_3 := \{a_2, a_3, a_4, a_7\}$ y denotando por

$$\rho_2 : k[x_2, x_3, x_4, x_7] \rightarrow k[x_1, x_2, x_3, x_4]$$

al homomorfismo inducido por $\rho_2(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{2, 3, 4\}$ y $\rho_2(x_7) = x_1^2$, entonces $I_{\mathcal{A}_2} = \rho_2(I_{\mathcal{A}_3}) \cdot k[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

4. Definimos $a_8 := 2a_2$, $\mathcal{A}_4 := \{a_3, a_4, a_7, a_8\}$ y denotando por

$$\rho_3 : k[x_3, x_4, x_7, x_8] \rightarrow k[x_2, x_3, x_4, x_7]$$

al homomorfismo inducido por $\rho_3(x_i) = x_i$ para todo $i \in \{3, 4, 7\}$ y $\rho_3(x_8) = x_2^2$, entonces $I_{\mathcal{A}_3} = \rho_3(I_{\mathcal{A}_4}) \cdot k[x_2, x_3, x_4, x_7]$.

5. Comprobamos si $a_8 \in \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4 + \mathbb{N}a_7$ y obtuvimos que $a_8 = a_3 + 4a_4 + a_7$. Por tanto, definimos $\mathcal{A}_5 := \{a_3, a_4, a_7\}$ y $g_2 := x_8 - x_3x_4^4x_7$ y tenemos que $I_{\mathcal{A}_4} = I_{\mathcal{A}_5} \cdot k[x_3, x_4, x_7, x_8] + (g_2)$.

6. Como a_3, a_4, a_7 son linealmente independientes, tenemos que $I_{\mathcal{A}_5} = (0)$.

Como finalmente obtuvimos que $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$, se deduce que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y está generado minimalmente por el conjunto de binomios $\{\rho_1(g_1), \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3(g_2)\} = \{x_5^3 - x_1x_2^2x_3^2x_4, x_2^2 - x_1^2x_3x_4^4\}$.

1.2.2 Del ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ a $I_{\mathcal{A}(i,j)}$

El objetivo principal de esta subsección es la obtención de los Teoremas 1.2.27 y 1.2.30. El Teorema 1.2.27 da bajo ciertas hipótesis, condiciones necesarias para que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa. Cabe señalar que estas hipótesis las verifican automáticamente los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines como veremos en la Proposición 3.2.1, pero no se verifican en general. Concretamente, para ciertos $i, j : 1 \leq i < j \leq n$, le asociamos a $I_{\mathcal{A}}$ un nuevo ideal tórico $I_{\mathcal{A}(i,j)}$ en un anillo de polinomios en exactamente una variable menos y de altura una unidad menos, de forma que si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa entonces $I_{\mathcal{A}(i,j)}$ también lo es. Se estudia además bajo qué hipótesis adicionales, el ser $I_{\mathcal{A}(i,j)}$ una intersección completa implica que $I_{\mathcal{A}}$ también lo es (ver Teorema 1.2.30). Estos resultados serán útiles en los Capítulos 2 y 3.

Denotamos por \mathcal{H} al conjunto de elementos de \mathcal{A} que pertenecen al cono generado por el resto de elementos de \mathcal{A} , es decir,

$$\mathcal{H} := \left\{ a_i \in \mathcal{A} \mid a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q}_{\geq 0} a_j \right\}.$$

Para todo $a_i \in \mathcal{H}$, se define

$$m_i := \min \left\{ b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}a_j \right\}$$

y se denomina *binomio crítico respecto de x_i* a un binomio de $I_{\mathcal{A}}$ de la forma

$$x_i^{m_i} - \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} x_j^{\beta_{ij}}.$$

El concepto de binomio crítico fue introducido por Eliahou [35] en el contexto de los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines y posteriormente estudiado por Alcántar y Villarreal [2] en ese mismo contexto. La definición que hemos dado extiende este concepto de forma natural a un ideal tórico cualquiera.

Los binomios críticos juegan un papel importante en las demostraciones de los resultados principales de esta subsección y de los Capítulos 2 y 3. Los binomios críticos cumplen las dos propiedades siguientes.

Lema 1.2.26.

- (a) Sea $a_i \in \mathcal{H}$ y sea \mathfrak{B} un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios. Entonces existe $g \in \mathfrak{B}$ tal que g (o $-g$) es un binomio crítico respecto de x_i .
- (b) Si f_1, \dots, f_t son binomios críticos respecto de x_{i_1}, \dots, x_{i_t} con $1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq n$ y con \mathcal{A} -grados diferentes, entonces el conjunto $\{f_1, \dots, f_t\}$ se puede extender a un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios.

Demostración. Sea $\mathfrak{B} = \{g_1, \dots, g_s\}$ un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios. Denotamos por $D_1, \dots, D_s \in \mathbb{N}^m$ a los \mathcal{A} -grados de g_1, \dots, g_s respectivamente. Si $f \in I_{\mathcal{A}}$ es un binomio crítico respecto de x_i , como $\deg_{\mathcal{A}}(f) = m_i a_i$, f se puede escribir como $f = q_1 g_1 + \dots + q_s g_s$ donde q_k es o bien el polinomio nulo o un polinomio \mathcal{A} -homogéneo de \mathcal{A} -grado $m_i a_i - D_k \in \mathbb{N}^m$ para todo $k \in \{1, \dots, s\}$. Aplicando a ambos lados de la igualdad el homomorfismo evaluación que envía x_k a 0 para todo $k \neq i$, se tiene que existe un $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ tal que $q_{i_0} \neq 0$ y la imagen de g_{i_0} bajo este homomorfismo es igual a x_i^d con $da_i = D_{i_0}$. Supondremos que $i_0 = s$, entonces $g_s = x_i^d - \mathbf{x}^\alpha$ donde \mathbf{x}^α es un monomio en el que no aparece la variable x_i y por tanto $D_s = da_i \in \mathbb{Z}^+ a_i \cap \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}a_j$. De la definición de m_i se obtiene la igualdad $m_i = d$ y $\deg_{\mathcal{A}}(q_s) = 0$. En consecuencia, g_s (o $-g_s$) es binomio crítico respecto de x_i , lo que prueba (a). Además, $q_s \in k$ y por tanto $\mathfrak{B}' := \{g_1, \dots, g_{s-1}, f\}$ es un nuevo sistema minimal de binomios que genera $I_{\mathcal{A}}$. Si reiteramos este argumento demostramos (b). \square

Pasamos a enunciar el Teorema 1.2.27. Para ello, dados $b = (b_1, \dots, b_m)$ y $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{N}^m$, denotamos por $\gcd\{b, c\} \in \mathbb{N}^m$ al vector cuya i -ésima coordenada es 0 si $b_i = 0$ o $c_i = 0$, y $\gcd\{b_i, c_i\}$ en caso contrario.

Teorema 1.2.27. Sean $i, j : 1 \leq i < j \leq n$ tales que $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ y verifican que $m_i a_i = m_j a_j$. Si $I_{\mathcal{A}}$ intersección completa, entonces:

- (a) $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$ es también intersección completa, donde $\mathcal{A}_{(i,j)} := \{a'_1, \dots, a'_{n-1}\}$ con $a'_k := a_k$ para todo $k \in \{1, \dots, j-1\} \setminus \{i\}$, $a'_k := a_{k+1}$ para todo $k \in \{j, \dots, n-1\}$ y $a'_i := \gcd\{a_i, a_j\}$.
- (b) Para todo $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $a'_k \in \text{Cone}(\mathcal{A}_{(i,j)} \setminus \{a'_k\})$, si denotamos $m'_k := \min \{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a'_k \in \sum_{i \in \{1, \dots, n-1\}, i \neq k} \mathbb{N} a'_i\}$, se tiene que $m'_k = m_k$ si $k \in \{1, \dots, j-1\} \setminus \{i\}$, $m'_k = m_{k+1}$ si $k \in \{j, \dots, n-1\}$ y $m'_k a'_k \in \mathbb{N} a_i + \mathbb{N} a_j$ si $k = i$.

En la demostración de este teorema, usaremos el Teorema 1.2.11 y el siguiente resultado.

Lema 1.2.28. Sea $A = (a_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_{h \times n}(\mathbb{Z})$ una matriz entera de rango h tal que

- $a_{(h,j)} = 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n-2\}$,
- $a_{(h,n-1)} < 0$, $a_{(h,n)} > 0$ y $\gcd\{a_{(h,n-1)}, a_{(h,n)}\} = 1$.

Consideramos la matriz $A' = (b_{(i,j)}) \in \mathcal{M}_{h-1 \times n-1}(\mathbb{Z})$ definida por

- $b_{(i,j)} := a_{(i,j)}$ para todo $i \in \{1, \dots, h-1\}$ y $j \in \{1, \dots, n-2\}$
- $b_{(i,n-1)} := a_{(h,n)} a_{(i,n-1)} - a_{(h,n-1)} a_{(i,n)}$ para todo $i \in \{1, \dots, h-1\}$.

Entonces,

- (a) A es dominante $\iff A'$ es dominante y $a_{(i,n-1)} a_{(i,n)} \geq 0$ para todo $i : 1 \leq i \leq h-1$.
- (b) $\Delta_h(A) = \Delta_{h-1}(A')$.

Demostración. Para una matriz entera B de tamaño $u \times v$, a la submatriz $k \times k$ con filas $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq u$ y columnas $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq v$ con $k \leq \min\{u, v\}$, la denotamos por $B[i_1, \dots, i_k][j_1, \dots, j_k]$.

Supongamos que A es dominante, se comprueba fácilmente que $a_{(i,n-1)} a_{(i,n)} \geq 0$ para todo $i : 1 \leq i \leq h-1$, ya que en caso contrario la submatriz $A[i, h][n-1, n]$ sería mezclada. Veamos que A' es dominante, para ello supongamos por reducción al absurdo que no lo es. Entonces existen $k \leq h-1$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq h-1$ y $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n-1$ tales que $A'[i_1, \dots, i_k][j_1, \dots, j_k]$ es mezclada y se comprueba fácilmente que entonces,

- $A[i_1, \dots, i_k][j_1, \dots, j_k]$ es mezclada si $j_k < n-1$; y
- $A[i_1, \dots, i_k, h][j_1, \dots, j_k, n]$ es mezclada si $j_k = n-1$.

Esto implica, en cualquiera de los casos, que A no es dominante, lo que es un absurdo.

Si A no es dominante y $a_{(i,n-1)} a_{(i,n)} \geq 0$ para todo $i : 1 \leq i \leq h-1$, entonces existen $k \leq h$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq h$ y $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ tales que $A[i_1, \dots, i_k][j_1, \dots, j_k]$ es mezclada y se comprueba fácilmente que entonces,

- $A'[i_1, \dots, i_k][j_1, \dots, j_k]$ es mezclada si $i_k < h$ y $j_k < n - 1$;
- $A'[i_1, \dots, i_k][j_1, \dots, j_{k-1}, n - 1]$ es también mezclada si $i_k < h$, $j_{k-1} < n - 1$ y $j_k \geq n - 1$; y
- $A'[i_1, \dots, i_{k-1}][j_1, \dots, j_{k-1}]$ es mezclada en el resto de los casos.

Esto implica, en cualquiera de los casos, que A no es dominante y se tiene (a).

Probemos ahora que $\Delta_h(A) = \Delta_{h-1}(A')$. Para una matriz B de tamaño $u \times v$ con $u \leq v$ denotaremos por $B\{j_1, \dots, j_u\}$ con $1 \leq j_1 < \dots < j_u \leq v$ al menor $u \times u$ de B con filas $1, \dots, u$ y columnas j_1, \dots, j_u . Vamos a relacionar los menores $h \times h$ de A con los menores $h - 1 \times h - 1$ de A' . Tenemos que $A\{j_1, \dots, j_h\}$ toma los siguientes valores:

- 0, si $j_h < n - 1$ (pues la última fila es nula);
- $\pm a_{(h, n-1)} A'\{j_1, \dots, j_{h-1}\}$, si $j_h = n - 1$;
- $\pm a_{(h, n)} A'\{j_1, \dots, j_{h-1}\}$, si $j_{h-1} < n - 1$ y $j_h = n$; y
- $\pm A'\{j_1, \dots, j_{h-1}\}$, si $j_{h-1} = n - 1$ y $j_h = n$.

Como $\gcd\{a_{(h, n-1)}, a_{(h, n)}\} = 1$, tenemos que $\Delta_h(A) = \Delta_{h-1}(A')$. \square

Demostración del Teorema 1.2.27. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i = n - 1$ y $j = n$. Denotamos $\mathcal{A}' := \mathcal{A}_{(n-1, n)} = \{a_1, \dots, a_{n-2}, a'_{n-1}\}$, donde $a'_{n-1} = \gcd\{a_{n-1}, a_n\}$, y veamos que $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa. De la definición de m_{n-1} y m_n se tiene que $\gcd\{m_{n-1}, m_n\} = 1$ y es fácil comprobar que $m_n a'_{n-1} = a_{n-1}$ y $m_{n-1} a'_{n-1} = a_n$. Como evidentemente $\mathbb{Q}\mathcal{A}' = \mathbb{Q}\mathcal{A}$, entonces $\text{ht}(I_{\mathcal{A}'}) = \text{ht}(I_{\mathcal{A}}) - 1$ por la Proposición 1.1.12.

Denotemos por f al binomio crítico respecto de x_n , $f := x_n^{m_n} - x_{n-1}^{m_{n-1}} \in I_{\mathcal{A}}$. Por el Lema 1.2.26 (b) existe $\{f_1, \dots, f_h\}$ un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios donde $f_h = f$. Por otra parte, $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}})$ al ser $I_{\mathcal{A}}$ intersección completa.

Consideremos ahora $\psi : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n-1}]$, el k -homomorfismo definido por $\psi(x_k) = x_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n - 2\}$, $\psi(x_{n-1}) = x_{n-1}^{m_{n-1}}$ y $\psi(x_n) = x_{n-1}^{m_n}$. Vamos a demostrar que

$$I_{\mathcal{A}'} = (\psi(f_1), \dots, \psi(f_{h-1})), \quad (1.1)$$

con lo que $I_{\mathcal{A}'}$ sería intersección completa y se habría probado la primera parte del teorema. En efecto, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se tiene que $\deg_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}^\alpha) = \deg_{\mathcal{A}'}(\psi(\mathbf{x}^\alpha))$, de donde $\{\psi(f_1), \dots, \psi(f_{h-1})\} \subset I_{\mathcal{A}'}$. Si consideramos la matriz A de tamaño $h \times n$ cuya k -ésima fila es $\widehat{f_k} \in \mathbb{Z}^n$ para todo $k \in \{1, \dots, h\}$, del Teorema 1.2.11 se sigue que A es dominante y $\Delta_h(A) = 1$ puesto que $I_{\mathcal{A}} = (\widehat{f_1}, \dots, \widehat{f_h})$. Por tanto, si tomamos A' la matriz $(h - 1) \times (n - 1)$ cuya fila k -ésima es $\widehat{\psi(f_k)} \in \mathbb{Z}^{n-1}$ para todo $k \in \{1, \dots, h - 1\}$, la matriz A' es dominante y $\Delta_{h-1}(A') = \Delta_h(A) = 1$ por el Lema 1.2.28. Entonces, en virtud del Teorema 1.2.11 se concluye que $I_{\mathcal{A}'} = (\psi(f_1), \dots, \psi(f_{h-1}))$.

Siguiendo la misma notación, probemos ahora la segunda parte del teorema. Veamos primero que $m_k = m'_k$ para todo $a_k \in \text{Cone}(\mathcal{A}' \setminus \{a_k\})$ con $k \in \{1, \dots, n - 2\}$, donde m'_k

es en este caso igual a $\min \left\{ b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_k \in \sum_{\substack{l \in \{1, \dots, n-2\} \\ l \neq k}} \mathbb{N} a_l + \mathbb{N} a'_{n-1} \right\}$. Fijado k , observamos que la desigualdad $m_k \geq m'_k$ es obvia pues $a_{n-1}, a_n \in \mathbb{N} a'_{n-1}$. Por el Lema 1.2.26 (a), existe $l \in \{1, \dots, h-1\}$ tal que $\psi(f_l)$ es binomio crítico respecto de x_k . Entonces $f_l = x_k^{m'_k} - \mathbf{x}^\alpha$, donde \mathbf{x}^α es un monomio de \mathcal{A} -grado $m'_k a_k$ en el que no aparece la variable x_k , y por tanto $m'_k a_k \in \sum_{\substack{t \in \{1, \dots, n\} \\ t \neq k}} \mathbb{N} a_t$. Esto implica que $m'_k \geq m_k$ por la definición de m_k , de donde la igualdad. Supongamos por último que $a'_{n-1} \in \text{Cone}(\mathcal{A}' \setminus \{a'_{n-1}\})$ y veamos que $m'_{n-1} a'_{n-1} \in \mathbb{N} a_{n-1} + \mathbb{N} a_n$. En efecto, aplicando de nuevo Lema 1.2.26 (a), existe $l \in \{1, \dots, h-1\}$ tal que $\psi(f_l)$ es binomio crítico respecto de x_{n-1} . Entonces $f_l = x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n^{\beta_n} - \mathbf{x}^\alpha$, donde $x_{n-1}^{\beta_{n-1}} x_n^{\beta_n}$ es un monomio de \mathcal{A} -grado $m'_{n-1} a'_{n-1}$, y por tanto $m'_{n-1} a'_{n-1} \in \mathbb{N} a_{n-1} + \mathbb{N} a_n$. \square

Las condiciones necesarias para que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa del Teorema 1.2.27 anterior, no son suficientes en general como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2.29. *El ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} := \{45, 70, 75, 98, 147\} \subset \mathbb{N}$ no es intersección completa puesto que $\text{ht}(I_{\mathcal{A}}) = 4$ y $\mu(I_{\mathcal{A}}) = 7$. Sin embargo, como*

$$\begin{aligned} m_1 &:= \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_1 \in \mathbb{N} a_2 + \mathbb{N} a_3 + \mathbb{N} a_4 + \mathbb{N} a_5\} = 5, \\ m_3 &:= \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_3 \in \mathbb{N} a_1 + \mathbb{N} a_2 + \mathbb{N} a_4 + \mathbb{N} a_5\} = 3, \end{aligned}$$

se tiene que $m_1 a_1 = m_3 a_3 = 225$. Además, si denotamos $a'_1 := \gcd\{a_1, a_3\} = 15$, $a'_2 := 70$, $a'_3 := 98$ y $a'_4 := 147$ se tiene que $\mathcal{A}_{(1,3)} = \{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4\}$ y $I_{\mathcal{A}_{(1,3)}}$ es intersección completa. Por último, se puede comprobar que si denotamos

$$m'_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba'_i \in \sum_{\substack{j \in \{1,2,3,4\} \\ i \neq j}} \mathbb{N} a'_j\} \text{ para todo } i \in \{1, 2, 3, 4\},$$

entonces $m'_1 = 14$, $m'_1 a'_1 \in \mathbb{N} a_1 + \mathbb{N} a_3$, $m'_2 = m_2 = 3$, $m'_3 = m_4 = 3$ y $m'_4 = m_5 = 2$.

Siguiendo la misma técnica que en la demostración del Teorema 1.2.27 se prueba un recíproco de su primera parte, que será útil en los Capítulos 2 y 3 de la memoria.

Teorema 1.2.30. *Sean $i, j : 1 \leq i < j \leq n$ tales que $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ y verifican que $m_i a_i = m_j a_j$. Si $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$ es intersección completa y $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$ admite un sistema generador formado por binomios que pertenecen a la imagen del k -homomorfismo $\psi : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ inducido por $x_k \mapsto x_k$ si $k \in \{1, \dots, j-1\} \setminus \{i\}$, $x_k \mapsto x_{k-1}$ si $k \in \{j+1, \dots, n\}$, $x_i \mapsto x_i^{m_j}$, $x_j \mapsto x_i^{m_i}$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.*

Demostración. Basta con tomar $\{\psi(f_1), \dots, \psi(f_{h-1})\}$ un sistema minimal de binomios que genera $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$ y aplicar el Teorema 1.2.11 y el Lema 1.2.28 para demostrar que $I_{\mathcal{A}} = (f_1, \dots, f_h)$, donde $f_h = x_i^{m_i} - x_j^{m_j}$. \square

Capítulo 2

Ideales tóricos simpliciales intersección completa

Siendo $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$, el número de rayos extremos del cono de \mathcal{A} es mayor o igual que $r := \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$. Cuando este número es exactamente igual a r , al ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ se le denomina *ideal tórico simplicial* y a su variedad asociada *variedad tórica simplicial afín*. En particular, si $r = 1$ o $r = 2$, $I_{\mathcal{A}}$ es siempre un ideal tórico simplicial. Este capítulo está dedicado al estudio de la propiedad de ser intersección completa en ideales tóricos simpliciales. Comenzamos el mismo repasando algunas propiedades de estos ideales y de sus variedades asociadas. Concretamente caracterizamos los ideales tóricos simpliciales como aquellos que se pueden escribir como $I_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ y $d \in \mathbb{Z}^+$ siendo $\{e_1, \dots, e_m\}$ la base canónica de \mathbb{Z}^m .

Los resultados de este capítulo forman parte de [9], un trabajo conjunto con Isabel Bermejo. El principal objetivo es el diseño del Algoritmo IC-simplicial, un algoritmo cuya entrada es cualquier subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$ tal que $I_{\mathcal{A}}$ es simplicial y devuelve si $I_{\mathcal{A}}$ es una intersección completa o no, sin necesidad de calcular explícitamente un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$. Dicho algoritmo lo presentamos en la segunda sección y se obtiene como consecuencia de aplicar convenientemente los resultados generales obtenidos en las Subsecciones 1.2.1 y 1.2.2 del capítulo anterior, junto con la Proposición 2.2.1, que es un resultado específico de los ideales tóricos simpliciales. La corrección del Algoritmo IC-simplicial se demuestra en el Teorema 2.2.4.

La tercera sección está dedicada al estudio de la propiedad intersección completa en los ideales tóricos simpliciales que son homogéneos. Vemos cómo el Algoritmo IC-simplicial se puede simplificar en este caso. Concretamente, en el Corolario 2.3.2, demostramos que si $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal tórico simplicial homogéneo, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$. Desde un punto de vista teórico y como aplicación del mencionado Corolario 2.3.2, cuando k es un cuerpo algebraicamente cerrado, clasificamos las variedades tóricas simpliciales proyectivas cuyo ideal tórico asociado es intersección completa, cuando estas son o bien lisas o tienen un único punto singular.

El Algoritmo IC-simplicial ha sido implementado en ANSI C y en SINGULAR. La implementación en SINGULAR ha dado lugar a la librería `cisimplicial.lib` [7] que

se distribuye con el software a partir de su versión 3-1-4. Esta librería generaliza, mejora y sustituye a nuestra antigua librería `cimonom.lib` [6] específica para ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines. Esta librería se distribuyó con el software entre las versiones 3-0-2 y 3-1-3. En la última sección de este capítulo se discuten los detalles de la implementación de `cisimplicial.lib`.

2.1 Generalidades

El primer resultado que presentamos permite decir que todo ideal tórico simplicial es de la forma $I_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$. Si bien se trata de un resultado conocido, nos parece adecuado presentar aquí una demostración de este hecho que sigue el esquema de [54, Section 2]. Para llegar a él, vamos a enunciar un lema que relaciona los rayos extremos del cono de \mathcal{A} con los sistemas minimales de generadores del mismo. Recordamos que un conjunto finito $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$ es *sistema generador del cono de \mathcal{A}* si $\text{Cone}(\mathcal{A}) = \text{Cone}(\mathcal{B})$.

Lema 2.1.1. [28, Lemma 1.2.15] *Sea $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_s\}$ un subconjunto de $\text{Cone}(\mathcal{A})$. Entonces, \mathcal{B} es sistema minimal de generadores del cono de $\mathcal{A} \iff \mathcal{F}_{b_1}, \dots, \mathcal{F}_{b_s}$ son los rayos extremos del cono de \mathcal{A} , donde para todo $b \in \mathbb{R}^n$, $F_b := \{\alpha b \mid \alpha \geq 0\}$.*

Proposición 2.1.2. *Sea $I \subset k[\mathbf{x}]$ un ideal. Entonces, I es un ideal tórico simplicial si y solo si existen $m \geq 1$ y $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ tales que $I = I_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. (\Leftarrow) Es evidente, puesto que de_1, \dots, de_m forman un sistema minimal de generadores de $\text{Cone}(\mathcal{A})$ y entonces por el Lema 2.1.1 $\text{Cone}(\mathcal{A})$ tiene $m = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ rayos extremos. Como $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) = m$, se tiene el resultado. (\Rightarrow) Sea $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{N}^k$ tal que $I = I_{\mathcal{B}}$ y el cono de \mathcal{B} tiene $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{B})$ rayos extremos. Denotemos por m a $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{B})$. Sea B la matriz cuya fila i -ésima es $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{ik})$ para todo $1 \leq i \leq n$. B tiene m columnas linealmente independientes, que supondremos son las m primeras. Si denotamos $\bar{b}_i := (b_{i1}, \dots, b_{im})$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n\}$, entonces es fácil comprobar que $I_{\mathcal{B}} = I_{\bar{\mathcal{B}}}$ y que el cono de $\bar{\mathcal{B}}$ también tiene m rayos extremos. Sean $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ los rayos extremos de $\bar{\mathcal{B}}$ y supongamos que $\bar{b}_i \in \mathcal{F}_i$ para todo $1 \leq i \leq m$. Por el Lema 2.1.1 se sigue que $\text{Cone}(\bar{\mathcal{B}}) = \text{Cone}(\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m\})$. Sea C la matriz $m \times m$ cuyas columnas son $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m$ y denotamos por d a su determinante, que no puede ser 0 porque $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m$ son linealmente independientes. Suponemos sin pérdida de generalidad que $d > 0$ y denotamos por C^* a la matriz adjunta de la traspuesta de C . C^* tiene coeficientes enteros y $C^*C = dI_m$, donde I_m es la matriz identidad de orden m . Si $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^m$, donde $a_i := C^*\bar{b}_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces $a_i = de_i$ para todo $1 \leq i \leq m$ y como $\text{Cone}(\mathcal{A}) = \text{Cone}(\{a_1, \dots, a_m\})$, entonces $a_i \in \mathbb{N}^m$ para todo $m+1 \leq i \leq n$. Es fácil comprobar que $I_{\mathcal{A}} = I_{\bar{\mathcal{B}}}$ de donde el resultado. \square

Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$, Katsabekis y Thoma en [63, Corollary 2] demuestran que $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$. En la Proposición 2.1.4 aportamos una prueba alternativa de este mismo resultado que está inspirada en la

demostración de [88, Proposition 2.6]. Para ello haremos uso del siguiente resultado de Reyes, Villarreal y Zárate válido para un ideal tórico cualquiera.

Proposición 2.1.3. [88, Corollary 2.5] *Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, entonces $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$ si y solo si $V(I_{\mathcal{A}}, x_i) \subset \Gamma_{\mathcal{A}}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Proposición 2.1.4. *Sean k es un cuerpo algebraicamente cerrado y $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$. Entonces $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$.*

Demostración. Demostraremos por inducción sobre m que $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$. Supongamos que $m = 1$ y sea $i : 1 \leq i \leq n$. Para todo $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$ el binomio $x_i^{a_j} - x_j^{a_i}$ pertenece a $I_{\mathcal{A}}$. De aquí se deduce que $V(I_{\mathcal{A}}, x_i) = \{0\} \subset \Gamma_{\mathcal{A}}$ y por la Proposición 2.1.3 se tiene que $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$. Supongamos ahora que $m > 1$. Como para todo $j : m+1 \leq j \leq n$ el binomio $g_j := x_j^d - \prod_{i=1}^m x_i^{a_{ji}}$ pertenece a $I_{\mathcal{A}}$ se tiene que $V(I_{\mathcal{A}}, x_j) \subset \bigcup_{i=1}^m V(I_{\mathcal{A}}, x_i)$. Entonces, por la Proposición 2.1.3 anterior, para obtener el resultado basta con probar que $V(I_{\mathcal{A}}, x_i) \subset \Gamma_{\mathcal{A}}$ para los $i \in \{1, \dots, m\}$. Veámoslo para $i = m$. Sea $p := (p_1, \dots, p_n) \in V(I_{\mathcal{A}}, x_m)$, como $g_j \in I_{\mathcal{A}}$ se tiene $p_j = 0$ para todo $m+1 \leq j \leq n$ tal que $a_{jm} \neq 0$. Denotamos $\mathcal{B} := \{d\bar{e}_1, \dots, d\bar{e}_{m-1}\} \cup \{\bar{a}_j \mid m+1 \leq j \leq n, a_{jm} = 0\} \subset \mathbb{N}^{m-1}$, donde $\bar{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{im-1})$ y $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{m-1}\}$ es la base canónica de \mathbb{Z}^{m-1} . Por hipótesis de inducción tenemos que $\Gamma_{\mathcal{B}} = V(I_{\mathcal{B}})$, por tanto existe $(u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{A}_k^{m-1}$ tal que $u_i^d = p_i$ para $1 \leq i \leq m-1$ y $u_1^{a_{i1}} \cdots u_{m-1}^{a_{im-1}} = p_i$ para todo $m+1 \leq i \leq n$ tal que $a_{im} = 0$. Si tomamos $(u_1, \dots, u_m, 0) \in \mathbb{A}_k^m$, llegamos a que $p \in \Gamma_{\mathcal{A}}$. \square

Si \mathcal{A} no tiene la forma indicada en la Proposición 2.1.4, no siempre se tiene la igualdad entre el conjunto tórico $\Gamma_{\mathcal{A}}$ y la variedad tórica $V(I_{\mathcal{A}})$.

Ejemplo 2.1.5. *Sean $k = \mathbb{C}$ y $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{N}^2$ con $a_1 = (3, 1)$, $a_2 = (1, 3)$ y $a_3 = (2, 2)$. El ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es simplicial puesto que $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^2$ y es fácil comprobar que $I_{\mathcal{A}} = (x_3^2 - x_1x_2)$. El conjunto tórico es $\Gamma_{\mathcal{A}} = \{(u_1^3u_2, u_1u_2^3, u_1^2u_2^2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \mid u_1, u_2 \in \mathbb{C}\}$. Se comprueba que $(0, 1, 0) \in V(I_{\mathcal{A}})$ pero $(0, 1, 0) \notin \Gamma_{\mathcal{A}}$.*

Tampoco se tiene la igualdad entre $\Gamma_{\mathcal{A}}$ y $V(I_{\mathcal{A}})$ cuando k no es algebraicamente cerrado aún teniendo \mathcal{A} la forma adecuada.

Ejemplo 2.1.6. *Sean $k = \mathbb{R}$ y $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{N}^2$ con $a_1 = (2, 0)$, $a_2 = (0, 2)$ y $a_3 = (1, 1)$. El ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es simplicial puesto que $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^2$ y es fácil comprobar que $I_{\mathcal{A}} = (x_3^2 - x_1x_2)$. El conjunto tórico es $\Gamma_{\mathcal{A}} = \{(u_1^2, u_2^2, u_1u_2) \in \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3 \mid u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$. Se observa que $(-1, -1, -1)$ pertenece a $V(I_{\mathcal{A}})$ pero no a $\Gamma_{\mathcal{A}}$.*

El estudio de los ideales tóricos simpliciales intersección completa fue abordado por García-Sánchez y Rosales en [43]. Allí obtienen el siguiente resultado, que es una mejora de [38, Theorem 3.1] (ver Teorema 1.2.8).

Teorema 2.1.7. [43, Theorem 1.4] *Sea $I_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico simplicial. $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa \iff existen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ tales que $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}_1) = 1$, \mathcal{A} es unión disjunta de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 y se tiene que*

- (a) \mathcal{A} es gluing de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 , y
- (b) $I_{\mathcal{A}_1}$ y $I_{\mathcal{A}_2}$ son intersección completa.

Este resultado sugiere un algoritmo de naturaleza inductiva para comprobar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Siguiendo este algoritmo, para poder afirmar que un ideal tórico no es intersección completa habría que construir todas las posibles particiones de \mathcal{A} en 2 subconjuntos \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 tales que $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}_1) = 1$ y comprobar que no se satisfacen las condiciones del Teorema 2.1.7, lo que es ineficiente.

2.2 Algoritmo IC-simplicial

En esta sección presentamos el Algoritmo IC-simplicial y demostramos la corrección del mismo. Veamos un primer resultado específico de los ideales tóricos simpliciales que es clave para el diseño del algoritmo. Recordamos que $\mathcal{H} = \{a_i \in \mathcal{A} \mid a_i \in \text{Cone}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})\}$.

Proposición 2.2.1. *Sea $I_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico simplicial. Si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- (a) $\exists a_i, a_j \in \mathcal{H}$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$, o
- (b) $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$.

Demostración. Denotamos $r := \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ y supongamos que $m_i a_i \neq m_j a_j$ para todo $a_i, a_j \in \mathcal{H}$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\{a_1, \dots, a_r\}$ es sistema minimal de generadores del cono de \mathcal{A} , entonces $\{a_{r+1}, \dots, a_n\} \subset \mathcal{H}$ y para todo $r+1 \leq i < j \leq n$ se tiene que $m_i a_i \neq m_j a_j$. Veamos que $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$. Sean f_{r+1}, \dots, f_n binomios críticos respecto de x_{r+1}, \dots, x_n respectivamente. Como $\deg_{\mathcal{A}}(f_i) = m_i a_i \neq m_j a_j = \deg_{\mathcal{A}}(f_j)$ para todo $i, j : r+1 \leq i < j \leq n$, por el Lema 1.2.26.(b) sabemos que existe un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ al que pertenecen f_{r+1}, \dots, f_n . Como $\text{ht}(I_{\mathcal{A}}) = n - r$ e $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces $I_{\mathcal{A}} = (f_{r+1}, \dots, f_n)$.

Afirmamos que existe $j \in \{r+1, \dots, n\}$ tal que x_j no aparece en f_k para todo $k \in \{r+1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. En caso contrario, definimos el grafo dirigido simple con vértices $\{r+1, \dots, n\}$ y conjunto de arcos $\{(j, k) \mid r+1 \leq j, k \leq n, j \neq k \text{ y } x_j \text{ aparece en } f_k\}$, se tiene que el grado de salida de cada vértice es mayor o igual a 1, esto implica que necesariamente hay un ciclo en el grafo. Supongamos sin pérdida de generalidad que el ciclo es $(r+1, r+2, \dots, r+k, r+1)$ donde $k \leq n-r$, esto significa que $(f_{r+1}, \dots, f_{r+k}) \subset (x_{r+1}, \dots, x_{r+k})$, de donde $I_{\mathcal{A}} \subsetneq H := (x_{r+1}, \dots, x_{r+k}, f_{r+k+1}, \dots, f_n)$ pero esto no es posible pues $I_{\mathcal{A}}$ es primo y $n - r = \text{ht}(I_{\mathcal{A}}) < \text{ht}(H) \leq n - r$.

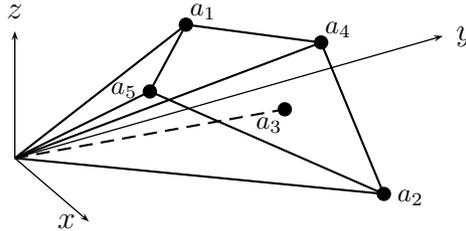
Por tanto, existe $j \in \{r+1, \dots, n\}$ tal que x_j solo aparece en f_j . Asumimos que $j = n$ y vamos a demostrar que $B_n a_n \in \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{N} a_j$. Por el Corolario 1.1.10, $\{\widehat{f}_{r+1}, \dots, \widehat{f}_n\}$ es una base de $\text{Ker}(\pi)$. Por definición, $B_n a_n = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j a_j$ para ciertos $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Como $\delta := B_n e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j e_j$ pertenece a $\text{Ker}(\pi)$, de escribir δ como combinación de $\widehat{f}_{r+1}, \dots, \widehat{f}_n$ se sigue que m_n divide a B_n . Además por definición $B_n \mid m_n$. Por tanto

$B_n a_n = m_n a_n \in \sum_{j \in \{1, \dots, n-1\}} \mathbb{N} a_j$. Por la Proposición 1.2.19 y el Lema 1.2.17 se tiene que $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_n\}}$ es intersección completa y está minimalmente generado por $\{f_{r+1}, \dots, f_{n-1}\}$, donde además $f_i \in I_{\mathcal{A} \setminus \{a_n\}}$ es binomio crítico respecto de x_i para todo $i \in \{r+1, \dots, n-1\}$. Si repetimos el mismo argumento obtenemos que se pueden reordenar a_1, \dots, a_{n-1} de forma que $B_i a_i \in \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{N} a_j$ para todo $i \in \{r+1, \dots, n-1\}$ y aplicando la Proposición 1.2.19 y el Lema 1.2.17 se obtiene que $\mathcal{A}_{red} = \mathcal{B}_{red}$, donde $\mathcal{B} = \{a_1, \dots, a_r\}$. Como a_1, \dots, a_r son \mathbb{Q} -linealmente independientes, entonces por el Lema 1.2.18 se tiene que $\mathcal{B}_{red} = \emptyset$, de donde el resultado. \square

Nota 2.2.2. Como se puede observar en la prueba de la Proposición 2.2.1, el resultado sigue siendo cierto si cambiamos la condición (a) por la siguiente: $\text{Cone}(\mathcal{A})$ está minimalmente generado por $\{a_1, \dots, a_r\}$ con $r = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ y existen $i, j : r+1 \leq i < j \leq n$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$. En el Capítulo 3 utilizaremos esta nueva versión de la Proposición 2.2.1.

La condición de que el ideal tórico sea simplicial en la Proposición 2.2.1 es esencial para obtener el resultado, ya que existen ideales tóricos intersección completa tales que $\mathcal{A}_{red} \neq \emptyset$ y $m_i a_i \neq m_j a_j$ para todo $a_i, a_j \in \mathcal{H}$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.2.3. Sea $I_{\mathcal{A}}$ el ideal tórico asociado a $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{N}^3$, con $a_1 = (0, 2, 1)$, $a_2 = (4, 2, 1)$, $a_3 = (2, 2, 1)$, $a_4 = (1, 3, 1)$ y $a_5 = (1, 1, 1)$. $I_{\mathcal{A}}$ no es un ideal tórico simplicial puesto que $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) = 3$ y como se puede observar en la figura el cono de \mathcal{A} tiene 4 rayos extremos; concretamente $\{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ es un sistema minimal de generadores del cono.



$I_{\mathcal{A}}$ tiene altura 2 y está generado por $g_1 := x_3^2 - x_1 x_2$ y $g_2 := x_1 x_3 - x_4 x_5$, por tanto es intersección completa. Sin embargo, $\mathcal{H} = \{a_3\}$. Además, $\mathcal{A}_{red} = \mathcal{A}$ puesto que las relaciones $2a_3 = a_1 + a_2$ y $a_1 + a_3 = a_4 + a_5$ muestran que $B_i = 1$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y \mathcal{A} es sistema minimal de generadores del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$.

El Algoritmo IC-simplicial que proponemos en la Tabla 2.1 sigue el siguiente esquema. Se recibe como entrada un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$ tal que $I_{\mathcal{A}} \subset k[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal tórico simplicial. Si existen $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$, se considera el subconjunto $\mathcal{A}_{(i,j)} = (\mathcal{A} \setminus \{a_i, a_j\}) \cup \{\gcd\{a_i, a_j\}\}$ de \mathbb{N}^m .

$I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$ satisface las siguientes propiedades:

- (1) $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}} \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ y $\text{ht}(I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}) = \text{ht}(I_{\mathcal{A}}) - 1$ (ver Proposición 1.1.12).
- (2) $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$ es intersección completa si $I_{\mathcal{A}}$ lo es (ver Teorema 1.2.27 (a)),
- (3) $I_{\mathcal{A}_{(i,j)}}$ es un ideal tórico simplicial (pues $\text{Cone}(\mathcal{A}) = \text{Cone}(\mathcal{A}_{(i,j)})$).

Procediendo como en el Teorema 1.2.27 (b), si $m'_i a'_i \notin \mathbb{N}a_i + \mathbb{N}a_j$, siendo $a'_i = \text{gcd}\{a_i, a_j\}$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa y hemos terminado.

En caso contrario, se repite el procedimiento tantas veces como sea posible hasta que se obtiene un conjunto $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_{n'}\} \subset \mathbb{N}^m$ definiendo un ideal tórico simplicial $I_{\mathcal{B}}$ que cumple que si $\bar{\mathcal{H}} := \{b_i \in \mathcal{B} \mid b_i \in \text{Cone}(\mathcal{B} \setminus \{b_i\})\}$ y $\bar{m}_i := \min\{c \in \mathbb{Z}^+ \mid cb_i \in \sum_{j \in \{1, \dots, n'\}, j \neq i} \mathbb{N}b_j\}$ para todo $b_i \in \bar{\mathcal{H}}$, entonces $\bar{m}_i b_i \neq \bar{m}_j b_j$ para todo $b_i, b_j \in \bar{\mathcal{H}}$.

Ahora calculamos \mathcal{B}_{red} . Si $\mathcal{B}_{red} \neq \emptyset$, entonces $I_{\mathcal{B}}$ no es intersección completa por la Proposición 2.2.1 y por tanto, $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa por el Teorema 1.2.27 (a) y hemos terminado. Si $\mathcal{B}_{red} = \emptyset$, entonces $I_{\mathcal{B}}$ es intersección completa por el Teorema 1.2.21 pero no se tiene la certeza de si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa o no. Para poder decidir si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa hay que realizar algunas comprobaciones adicionales que consisten en verificar si ciertos elementos de \mathbb{N}^m pertenecen a ciertos semigrupos. Concretamente, se estudia el efecto de reducir \mathcal{B} en el conjunto \mathcal{A} de partida comprobando la condición (b) del Teorema 1.2.27 tras este proceso. Si no se obtiene una respuesta negativa, llegamos a una situación en la que se aplica el Teorema 1.2.30 y hemos terminado: $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Nuestro próximo objetivo es demostrar la corrección del mismo.

Teorema 2.2.4. *Sea $I_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico simplicial, el Algoritmo IC-simplicial determina si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa o no.*

Antes de probar el Teorema 2.2.4 introducimos un lema técnico que generaliza el apartado (b) del Teorema 1.2.27. De hecho, (b) del Teorema 1.2.27 se obtiene del Lema 2.2.5 considerando los conjuntos unitarios $V' = \{a'_k\}$ para los $k \in \{1, \dots, n-1\}$ tales que $a'_k \in \text{Cone}(\mathcal{A}_{(i,j)} \setminus \{a'_k\})$.

Lema 2.2.5. *Supongamos que $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ con $1 \leq i < j \leq n$ satisfacen que $m_i a_i = m_j a_j$ y sean*

- V' un subconjunto propio de $\mathcal{A}_{(i,j)}$ tal que $\dim(\mathbb{Q}V') = 1$ y $a := \text{gcd}(V') \in \text{Cone}(\mathcal{A}_{(i,j)} \setminus V')$,
- $M := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba \in \sum_{a'_k \in \mathcal{A}_{(i,j)} \setminus V'} \mathbb{N}a'_k\}$, y
- $V := V'$ si $a'_i = \text{gcd}\{a_i, a_j\} \notin V'$, o $V := (V' \setminus \{a'_i\}) \cup \{a_i, a_j\}$ en caso contrario.

Si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y $Ma \in \mathbb{N}V'$, entonces $Ma \in \mathbb{N}V \cap \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus V)$.

Algoritmo IC-simplicial

Entrada: $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ tal que $I_{\mathcal{A}}$ es simplicial

Salida: VERDADERO o FALSO

$G := \mathcal{A}$

$V_i := \{a_i\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})\}$ para todo $a_i \in \text{Cone}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$

$k := 0$

while $\exists a_i, a_j \in G$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$ **do**

if $m_i a_i \notin \mathbb{N}V_i \cap \mathbb{N}V_j$ **then**

return FALSO

end if

$k := k + 1; a_{n+k} := \gcd\{a_i, a_j\}; G := (G \setminus \{a_i, a_j\}) \cup \{a_{n+k}\}; V_{n+k} := V_i \cup V_j$

if $a_{n+k} \in \text{Cone}(G \setminus \{a_{n+k}\})$ **then**

$m_{n+k} := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_{n+k} \in \mathbb{N}G\}$

end if

end while

$\mathcal{B} := G$

repeat

$G := \mathcal{B}$

for all $a_i \in G$ **do**

if $a_i \notin \mathbb{Q}(\mathcal{B} \setminus \{a_i\})$ **then**

$\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{a_i\}$

else

$B_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \mathbb{Z}(\mathcal{B} \setminus \{a_i\})\}$

if $B_i a_i \in \mathbb{N}(\mathcal{B} \setminus \{a_i\})$ **then**

if $B_i a_i \notin \mathbb{N}V_i \cap \sum_{a_j \in \mathcal{B} \setminus \{a_i\}} \mathbb{N}V_j$ **then**

return FALSO

end if

$\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{a_i\}$

end if

end if

end for

until $(\mathcal{B} = \emptyset)$ OR $(\mathcal{B} = G)$

if $\mathcal{B} \neq \emptyset$ **then**

return FALSO

end if

return VERDADERO

Tabla 2.1: Algoritmo IC-simplicial

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $i = n - 1$, $j = n$ y sea $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_{(n-1,n)} = \{a'_1, \dots, a'_{n-1}\}$, donde $a'_i = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n - 2\}$ y $a'_{n-1} = \gcd\{a_{n-1}, a_n\}$. Por el Teorema 1.2.27 (a) se tiene que $I_{\mathcal{A}'} \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ es intersección completa. Además, por (1.1) en la prueba del Teorema 1.2.27, si denotamos por ψ al morfismo $\psi : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ tal que $\psi(x_i) = x_i$ para $i \in \{1, \dots, n - 2\}$, $\psi(x_{n-1}) = x_{n-1}^{m_n}$, $\psi(x_n) = x_{n-1}^{m_{n-1}}$; entonces existen $h = \text{ht}(I_{\mathcal{A}'})$ binomios $g_1, \dots, g_h \in I_{\mathcal{A}'}$ tales que $I_{\mathcal{A}'} = (\psi(g_1), \dots, \psi(g_h)) \subset k[x_1, \dots, x_{n-1}]$.

Como $Ma \in \mathbb{N}V' \cap \mathbb{N}(\mathcal{A}' \setminus V')$, se tiene que $Ma = \sum_{a'_u \in V'} \gamma_u a'_u = \sum_{a'_v \in \mathcal{A}' \setminus V'} \gamma_v a'_v$. Por tanto, denotando $\alpha := \sum_{a'_u \in V'} \gamma_u e_u$ y $\beta := \sum_{a'_v \in \mathcal{A}' \setminus V'} \gamma_v e_v$, donde $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ es la base canónica de \mathbb{Z}^{n-1} , tenemos que el binomio $f := \mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta$ de \mathcal{A}' -grado $Ma \in \mathbb{N}^m$ pertenece a $I_{\mathcal{A}'}$. Por consiguiente, $f = q_1\psi(g_1) + \dots + q_h\psi(g_h)$, donde para todo $t \in \{1, \dots, h\}$ q_t es o bien el polinomio nulo o un polinomio \mathcal{A}' -homogéneo de \mathcal{A}' -grado $Ma - \deg_{\mathcal{A}'}(\psi(g_t)) \in \mathbb{N}^m$.

Consideremos el morfismo $\Phi : k[x_1, \dots, x_{n-1}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ inducido por $x_k \mapsto 0$ para todo $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ tal que $a'_k \notin V'$. Entonces, $\mathbf{x}^\alpha = \Phi(q_1)\Phi(\psi(g_1)) + \dots + \Phi(q_h)\Phi(\psi(g_h))$ y existen $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \delta_1, \dots, \delta_{n-1} \in \mathbb{N}$ y $i_0 \in \{1, \dots, h\}$ que verifican:

- $\Phi(q_{i_0}) \neq 0$,
- $\psi(g_{i_0}) = x_1^{\lambda_1} \dots x_{n-1}^{\lambda_{n-1}} - x_1^{\delta_1} \dots x_{n-1}^{\delta_{n-1}}$,
- $\lambda_r = 0$ si $a'_r \notin V'$ para todo $r \in \{1, \dots, n - 1\}$, y
- $\delta_s \neq 0$ para algún $s \in \{1, \dots, n - 1\}$ tal que $a'_s \notin V'$.

Entonces, Ma es componente a componente \geq que $\lambda_1 a'_1 + \dots + \lambda_{n-1} a'_{n-1} = \delta_1 a'_1 + \dots + \delta_{n-1} a'_{n-1}$, y $Ma - \sum_{a'_u \in V'} \delta_u a'_u$ es componente a componente \geq que $\lambda_1 a'_1 + \dots + \lambda_{n-1} a'_{n-1} - \sum_{a'_u \in V'} \delta_u a'_u = \delta_1 a'_1 + \dots + \delta_{n-1} a'_{n-1} - \sum_{a'_u \in V'} \delta_u a'_u$, que pertenece a

$$\mathbb{Z}^+ a \cap \sum_{a'_u \in \mathcal{A}' \setminus V'} \mathbb{N} a'_u.$$

De la propia definición de M se deduce que $\delta_u = 0$ para todo $a'_u \in V'$ y que $Ma = \deg_{\mathcal{A}'}(\psi(g_{i_0})) = \deg_{\mathcal{A}}(g_{i_0})$.

Si $a'_{n-1} \in V'$, entonces $g_{i_0} = x_1^{\lambda_1} \dots x_{n-2}^{\lambda_{n-2}} x_{n-1}^{\bar{\lambda}_{n-1}} x_n^{\bar{\lambda}_n} - x_1^{\delta_1} \dots x_{n-2}^{\delta_{n-2}}$, donde $\bar{\lambda}_{n-1}, \bar{\lambda}_n$ son enteros no negativos tales que $\bar{\lambda}_{n-1} a_{n-1} + \bar{\lambda}_n a_n = \lambda_{n-1} a'_{n-1}$. Como consecuencia, $Ma = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n-2} a_{n-2} + \bar{\lambda}_{n-1} a_{n-1} + \bar{\lambda}_n a_n \in \mathbb{N}V$.

Si $a_{n+1} \notin V'$, entonces $g_{i_0} = x_1^{\lambda_1} \dots x_{n-2}^{\lambda_{n-2}} - x_1^{\delta_1} \dots x_{n-2}^{\delta_{n-2}} x_{n-1}^{\bar{\delta}_{n-1}} x_n^{\bar{\delta}_n}$, donde $\bar{\delta}_{n-1}, \bar{\delta}_n$ son enteros no negativos tales que $\bar{\delta}_{n-1} a_{n-1} + \bar{\delta}_n a_n = \delta_{n-1} a'_{n-1}$. Como consecuencia, $Ma = \delta_1 a_1 + \dots + \delta_{n-2} a_{n-2} + \bar{\delta}_{n-1} a_{n-1} + \bar{\delta}_n a_n \in \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus V)$. \square

Demostración del Teorema 2.2.4. Es evidente que el algoritmo siempre termina, por tanto tenemos que probar que $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$ si y solo si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Supongamos primero que para todo $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ se tiene que $m_i a_i \neq m_j a_j$. En este caso se observa que $V_i = \{a_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, que en el bucle **while** no se satisface la condición de entrada y que, por tanto, $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$ si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$ y por las Proposiciones 2.2.1 y 1.2.19 esto es equivalente a que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa.

Así pues, resta demostrar el resultado cuando existen $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$. Suponemos sin pérdida de generalidad que $i = n - 1$ y $j = n$. Asumamos que $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$ y probemos que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. En particular, demostraremos que cuando el algoritmo devuelve VERDADERO, durante la ejecución del mismo se puede construir un conjunto \mathfrak{B} que consta de $\text{ht}(I_{\mathcal{A}}) = n - r$ binomios que generan $I_{\mathcal{A}}$, donde $r := \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$.

La construcción de \mathfrak{B} es la siguiente. Comenzamos con $\mathfrak{B} := \emptyset$. Durante la ejecución del bucle **while**, siempre que existan $a_i, a_j \in G$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$ tenemos que $m_i a_i \in \mathbb{N}V_i \cap \mathbb{N}V_j$ (ya que en caso contrario $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{FALSO}$). Por tanto existen $\{\gamma_u \mid a_u \in V_i\}, \{\gamma_v \mid a_v \in V_j\} \subset \mathbb{N}$ tales que $m_i a_i = \sum_{a_u \in V_i} \gamma_u a_u = \sum_{a_v \in V_j} \gamma_v a_v$ y denotamos

$$\alpha := \sum_{a_u \in V_i} \gamma_u e_u \in \mathbb{N}^m, \beta := \sum_{a_v \in V_j} \gamma_v e_v \in \mathbb{N}^n$$

y $\mathfrak{B} := \mathfrak{B} \cup \{\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta\}$

Durante la ejecución del bucle **repeat**, siempre que $B_i a_i \in \mathbb{N}(\mathcal{B} \setminus \{a_i\})$, tenemos que $B_i a_i \in \mathbb{N}V_i \cap \sum_{a_j \in \mathcal{B} \setminus \{a_i\}} \mathbb{N}V_j$ ya que en caso contrario $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{FALSO}$. Por tanto existe $\{\gamma_u \mid a_u \in V_i\} \subset \mathbb{N}$ y para todo $a_j \in (\mathcal{B} \setminus \{a_i\})$ existe un conjunto $\{\gamma_v \mid a_v \in V_j\} \subset \mathbb{N}$ tal que $B_i a_i = \sum_{a_u \in V_i} \gamma_u a_u = \sum_{a_j \in \mathcal{B}} \left(\sum_{a_v \in V_j} \gamma_v a_v \right)$ y denotamos

$$\alpha := \sum_{a_u \in V_i} \gamma_u e_u \in \mathbb{N}^n, \beta := \sum_{a_j \in \mathcal{B} \setminus \{a_i\}} \left(\sum_{a_v \in V_j} \gamma_v e_v \right) \in \mathbb{N}^n$$

y $\mathfrak{B} := \mathfrak{B} \cup \{\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta\}$.

Dado que $m_{n-1} a_{n-1} = m_n a_n \in \mathbb{N}V_{n-1} \cap \mathbb{N}V_n$, durante la ejecución de $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A})$ definimos $\delta_1 := m_{n-1} e_{n-1} - m_n e_n$, $a_{n+1} := \gcd\{a_{n-1}, a_n\}$, $V_{n+1} := \{a_{n-1}, a_n\}$ y $G := \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n+1}\}$. Si $n = r + 1$, todos los elementos de G son linealmente independientes y solo se construye un binomio $f := x_{n-1}^{m_{n-1}} - x_n^{m_n}$ durante la ejecución del algoritmo, por tanto $\mathfrak{B} = \{f\}$. Además, de la definición de m_{n-1} y m_n , se deduce que $\gcd\{m_{n-1}, m_n\} = 1$; por tanto la matriz $1 \times n$ cuya única fila es \hat{g} es claramente dominante y $\Delta_1(A) = \gcd\{m_{n-1}, m_n\} = 1$, de donde por el Teorema 1.2.11, se tiene que $I_{\mathcal{A}} = (\mathfrak{B})$.

Asumimos que el resultado se cumple para $n - 1$ y lo probaremos para n . Durante la ejecución de $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A})$, obtenemos $\mathfrak{B} := \{f_1, \dots, f_k\}$, donde $f_1 = x_{n-1}^{m_{n-1}} - x_n^{m_n}$. Además, si consideramos ψ el homomorfismo del Teorema 1.2.30 se tiene que si ejecutamos el algoritmo con $\mathcal{A}' := \mathcal{A}_{(n-1, n)} = \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n+1}\}$ como entrada obtendremos VERDADERO y el conjunto $\mathfrak{B}' := \psi(\mathfrak{B})$. Por hipótesis de inducción $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección

completa y está generado minimalmente por \mathfrak{B}' y, por el Teorema 1.2.30 se deduce que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa generado minimalmente por \mathfrak{B} .

Supongamos ahora que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y probemos que $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$ por inducción sobre n . Si $n = r + 1$ y $m_{n-1}a_{n-1} = m_n a_n$, entonces es fácil comprobar que $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$.

Asumiendo que el resultado es cierto para $n - 1$ lo probamos para n . Al ejecutar el algoritmo con \mathcal{A} como entrada se define: $G := \mathcal{A}$, $V_i := \{a_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})\}$ para todo $a_i \in \text{Cone}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$.

Como $m_{n-1}a_{n-1} = m_n a_n \in \mathbb{N}a_{n-1} \cap \mathbb{N}a_n$, denotamos $a_{n+1} := \gcd\{a_{n-1}, a_n\}$, $V_{n+1} := \{a_{n-1}, a_n\}$ y $G := (G \setminus \{a_{n-1}, a_n\}) \cup \{a_{n+1}\}$; además, en caso de que $a_{n+1} \in \text{Cone}(G \setminus \{a_{n+1}\})$, se define

$$m_{n+1} := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_{n+1} \in \sum_{i=1}^{n-2} \mathbb{N}a_i\}.$$

Sea ahora $\mathcal{A}' := \{a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n+1}\}$. Por el Teorema 1.2.27 (a) sabemos que $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa y por hipótesis de inducción se sigue que $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}') = \text{VERDADERO}$. Ahora arrancamos el algoritmo con \mathcal{A}' como entrada y tenemos que:

- $G' := \mathcal{A}' = G$
- $V'_i := \{a_i\}$, para todo $i \in \{1, \dots, n-2, n+1\}$,
- $m'_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n-2, n+1\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}a_j\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-2, n+1\}$ tal que $a_i \in \text{Cone}(G' \setminus \{a_i\})$.

Si $i \in \{1, \dots, n-2\}$ entonces $V_i = V'_i$ y si $a_i \in \text{Cone}(G' \setminus \{a_i\})$, entonces por el Teorema 1.2.27 (b) se tiene que $m_i = m'_i$ y si además $a_{n+1} \in \text{Cone}(G' \setminus \{a_{n+1}\})$, entonces $m'_{n+1} = m_{n+1}$ por definición.

A partir de ahora continuaremos simultáneamente con la ejecución de $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A})$ y $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}')$. A partir de este momento siempre tendremos que $G' = G$ y, por tanto, $m'_i = m_i$, $V_i = V'_i$ si $a_{n+1} \notin V_i$ y $V_i = (V'_i \setminus \{a_{n+1}\}) \cup \{a_{n-1}, a_n\}$ si $a_{n+1} \in V'_i$. Vamos a comprobar que en cualquier repetición del bucle **while**, siempre que $m_i a_i = m_j a_j$, entonces $m_i a_i \in \mathbb{N}V_i$.

Como $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}') = \text{VERDADERO}$, siempre que $m_i a_i = m_j a_j$, tendremos que $m_i a_i \in \mathbb{N}V'_i$. Si $a_{n+1} \notin V'_i$, entonces $V'_i = V_i$ y ya estaría. Si $a_{n+1} \in V'_i$, entonces $V'_j = V_j$ y $m_i a_i = m_j a_j \in \mathbb{N}V_j$, de donde

$$m_i = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{a_u \in \mathcal{A}' \setminus V'_i} \mathbb{N}a_u\}.$$

Dado que se satisfacen las hipótesis del Lema 2.2.5 para $i = n-1$, $j = n$, $V' = V'_i$ y $M = m_i$, tenemos que $m_i a_i \in \mathbb{N}V_i$, y análogamente llegamos a que $m_j a_j \in \mathbb{N}V_j$.

Ahora pasamos a estudiar el bucle **repeat** en la ejecución simultánea. Siempre tendremos que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ y, por tanto, para todo $a_i \in \mathcal{B}$ se tiene que $B'_i = B_i$. Por tanto,

lo único que queda por demostrar es que si $B_i a_i \in \mathbb{N} V_i' \cap \sum_{a_j \in (\mathcal{B} \setminus \{a_i\})} \mathbb{N} V_j'$, entonces $B_i a_i \in \mathbb{N} V_i \cap \sum_{a_j \in (\mathcal{B} \setminus \{a_i\})} \mathbb{N} V_j$.

En cualquier repetición de este bucle, si denotamos por $\mathcal{C} := \cup_{a_j \in \mathcal{B}} V_j$, aplicando repetidas veces la Proposición 1.2.19 y el Teorema 1.2.27 (a), llegamos a que $I_{\mathcal{C}} \subset k[x_i \mid a_i \in \mathcal{C}]$ es intersección completa. Desde el momento en que $a_{n-1}, a_n \notin \mathcal{C}$, se tiene que $V_i' = V_i$ para todo $a_i \in \mathcal{B}$ y entonces $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$. En caso de que $a_{n-1}, a_n \in \mathcal{C}$, definimos $\tilde{m}_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \sum_{a_r \in \mathcal{C} \setminus \{a_i\}} \mathbb{N} a_r\}$ para $i = n-1$ y $i = n$ y tenemos que $\tilde{m}_{n-1} a_{n-1} = \tilde{m}_n a_n$ pues $m_{n-1} a_{n-1} = m_n a_n$.

Ahora supongamos que $B_i a_i \in \mathbb{N} V_i' \cap \sum_{a_j \in (\mathcal{B}' \setminus \{a_i\})} \mathbb{N} V_j'$ o, lo que es lo mismo, que $B_i a_i \in \sum_{a_s \in V_i'} \mathbb{N} a_s \cap \sum_{a_r \in \mathcal{C}' \setminus V_i'} \mathbb{N} a_r$. Entonces

$$B_i = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \sum_{a_r \in \mathcal{C}' \setminus V_i'} \mathbb{N} a_r\}.$$

Tras aplicar el Lema 2.2.5 al ideal tórico $I_{\mathcal{C}}$, tomando $i = n-1, j = n, V' = V_i'$ y $M = B_i$, tenemos que $B_i a_i \in \mathbb{N} V_i$ y que $B_i a_i \in \sum_{a_j \in \mathcal{C} \setminus V_i} \mathbb{N} a_j = \sum_{a_j \in (\mathcal{B} \setminus \{a_i\})} \mathbb{N} V_j$. Por tanto $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$. \square

Ilustremos el funcionamiento del algoritmo con varios ejemplos, el primero de ellos es un ejemplo muy simple de un ideal tórico simplicial de altura 2 que es intersección completa; el segundo también es intersección completa de altura 5 y por último un ideal tórico simplicial de altura 4 que no es intersección completa.

Ejemplo 2.2.6. Consideremos el conjunto $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{N}^2$ con $a_1 := (7, 0)$, $a_2 := (0, 7)$, $a_3 := (2, 2)$ y $a_4 := (3, 3)$. Veamos, haciendo uso del Algoritmo IC-simplicial que el ideal tórico simplicial $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Comenzamos el algoritmo inicializando las variables $G := \mathcal{A}$ y $V_i := \{a_i\}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Como $a_i \in \text{Cone}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$ para $i \in \{3, 4\}$, tenemos que

$$m_3 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_3 \in \sum_{j \in \{1, 2, 4\}} \mathbb{N} a_j\} = 3, \text{ y}$$

$$m_4 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_4 \in \sum_{j \in \{1, 2, 3\}} \mathbb{N} a_j\} = 2.$$

Observamos que $3a_3 = m_3 a_3 = m_4 a_4 = 2a_4$. Por tanto definimos $a_5 := \gcd\{a_1, a_2\} = (\gcd\{2, 3\}, \gcd\{2, 3\}) = (1, 1)$, $G := (G \setminus \{a_3, a_4\}) \cup \{a_5\} = \{a_1, a_2, a_5\}$ y $V_5 := V_3 \cup V_4 = \{a_3, a_4\}$. Como $a_5 \in \text{Cone}(G \setminus \{a_5\})$, también definimos $m_5 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_5 \in \mathbb{N} a_1 + \mathbb{N} a_2\} = 7$.

Como no existen $a_i, a_j \in G$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$, tomamos $\mathcal{B} := G = \{a_1, a_2, a_5\}$. Si denotamos $B_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \mathbb{Z}(G \setminus \{a_i\})\}$ para $i \in \{1, 2, 5\}$, llegamos a que $B_1 = B_2 = 1$ y que $B_5 = 7$. Se observa que $B_i a_i = a_i \notin \mathbb{N}(G \setminus \{a_i\})$ para $i \in \{1, 2\}$. Sin embargo, $B_5 a_5 = 7a_5 = 2a_3 + a_4 \in \mathbb{N} V_5 = \mathbb{N}\{a_3, a_4\}$ y $B_5 a_5 = 7a_5 = a_1 + a_2 \in \mathbb{N} V_1 + \mathbb{N} V_2 = \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$.

Ahora $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{a_5\} = \{a_1, a_2\}$, y como a_1 y a_2 son linealmente independientes llegamos finalmente a que $\mathcal{B} = \emptyset$ y $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A})$ devuelve VERDADERO. Por consiguiente, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Ejemplo 2.2.7. Consideremos el conjunto $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\} \subset \mathbb{N}^3$ con $a_1 := (52, 0, 0)$, $a_2 := (0, 52, 0)$, $a_3 := (0, 0, 52)$, $a_4 := (20, 30, 100)$, $a_5 := (28, 42, 140)$, $a_6 := (30, 45, 150)$, $a_7 := (42, 63, 210)$ y $a_8 := (52, 52, 78)$. Veamos, haciendo uso del Algoritmo IC-simplicial que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Comenzamos el algoritmo inicializando las variables $G := \mathcal{A}$ y $V_i := \{a_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, 8\}$. Para $i \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ se tiene que $a_i \in \text{Cone}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$ y definimos

$$m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, 8\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}a_j\},$$

llegando a que $m_4 = 3$, $m_5 = 3$, $m_6 = 2$, $m_7 = 2$ y $m_8 = 2$.

Se observa que $3a_4 = m_4a_4 = m_6a_6 = 2a_6$. Por tanto tomamos $a_9 := \text{gcd}\{a_4, a_6\} = (10, 15, 50)$, $G := (G \setminus \{a_4, a_6\}) \cup \{a_9\} = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_7, a_8, a_9\}$ y $V_9 := V_4 \cup V_6 = \{a_4, a_6\}$. Como $a_9 \in \text{Cone}(G \setminus \{a_9\})$, también definimos

$$m_9 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_9 \in \sum_{i \in \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}} \mathbb{N}a_i\} = 7.$$

Se observa que $3a_5 = m_5a_5 = m_7a_7 = 2a_7$. Por tanto tomamos $a_{10} := \text{gcd}\{a_5, a_7\} = (14, 21, 70)$, $G := (G \setminus \{a_5, a_7\}) \cup \{a_{10}\} = \{a_1, a_2, a_3, a_8, a_9, a_{10}\}$ y $V_{10} := V_5 \cup V_7 = \{a_5, a_7\}$. Como $a_{10} \in \text{Cone}(G \setminus \{a_{10}\})$, también definimos

$$m_{10} := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_{10} \in \sum_{i \in \{1, 2, 3, 8, 9\}} \mathbb{N}a_i\} = 5.$$

Ahora observamos que $7a_9 = m_9a_9 = m_{10}a_{10} = 5a_{10}$ y comprobamos que $7a_9 = 2a_4 + a_6 = a_5 + a_7 \in \mathbb{N}V_9 \cap \mathbb{N}V_{10}$. Por tanto, definimos $a_{11} := \text{gcd}\{a_9, a_{10}\} = (2, 3, 10)$, $G := (G \setminus \{a_9, a_{10}\}) \cup \{a_{11}\} = \{a_1, a_2, a_3, a_8, a_{11}\}$ y $V_{11} := V_9 \cup V_{10} = \{a_4, a_5, a_6, a_7\}$. Como $a_{11} \in \text{Cone}(G \setminus \{a_{11}\})$, también definimos

$$m_{11} := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_{11} \in \sum_{i \in \{1, 2, 3, 8\}} \mathbb{N}a_i\} = 52.$$

Como no existen $a_i, a_j \in G$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$, tomamos $\mathcal{B} := G$, si denotamos $B_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \mathbb{Z}(\mathcal{B} \setminus \{a_i\})\}$ para $i \in \{1, 2, 3, 8, 11\}$, llegamos a que $B_{11} = 52$. Se observa que $B_{11}a_{11} = 52a_{11} = a_4 + 2a_7 \in \mathbb{N}V_{11}$ y que $B_{11}a_{11} = 52a_{11} = a_2 + 7a_3 + 2a_8 \in \bigcup_{i \in \{1, 2, 3, 8\}} \mathbb{N}V_i$ y definimos $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{a_{11}\}$.

Ahora denotando $B'_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \mathbb{Z}(G \setminus \{a_i\})\}$ para $i \in \{1, 2, 3, 8\}$, llegamos a que $B'_8 = 2$. Se observa que $B'_8 a_8 = 2a_8 \in \mathbb{N}V_8$ y que $B'_8 a_8 = 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 \in \bigcup_{i \in \{1, 2, 3\}} \mathbb{N}V_i$ y definimos $\mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{a_8\}$.

Tenemos que $\mathcal{B} = \{a_1, a_2, a_3\}$, y como a_1, a_2 y a_3 son linealmente independientes llegamos finalmente a que $\mathcal{B} = \emptyset$ y $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A})$ devuelve VERDADERO. Por consiguiente, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Ejemplo 2.2.8. Consideremos el conjunto $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{N}$ con $a_1 := 45$, $a_2 := 70$, $a_3 := 75$, $a_4 := 98$ y $a_5 := 147$ del Ejemplo 1.2.29 y comprobemos, haciendo uso del Algoritmo IC-simplicial, que $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa como ya indicamos.

Comenzamos el algoritmo inicializando las variables $G := \mathcal{A}$ y $V_i := \{a_i\}$ para todo $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Para $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se tiene que $a_i \in \text{Cone}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$ y definimos

$$m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j\},$$

llegando a que $m_1 = 5$, $m_2 = 3$, $m_3 = 3$, $m_4 = 3$ y $m_5 = 2$.

Se observa que $5a_1 = m_1 a_1 = m_3 a_3 = 3a_3$. Por tanto, tomamos $a_6 := \gcd\{a_1, a_3\} = 15$, $G := (G \setminus \{a_1, a_3\}) \cup \{a_6\} = \{a_2, a_4, a_5, a_6\}$ y $V_6 := V_1 \cup V_3 = \{a_1, a_3\}$. Como $a_6 \in \text{Cone}(G \setminus \{a_6\})$, también definimos

$$m_6 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_6 \in \sum_{i \in \{2, 4, 5\}} \mathbb{N} a_i\} = 14.$$

Se observa que $3a_4 = m_4 a_4 = m_5 a_5 = 2a_5$. Por tanto, definimos $a_7 := \gcd\{a_4, a_5\} = 49$, $G := (G \setminus \{a_4, a_5\}) \cup \{a_7\} = \{a_2, a_6, a_7\}$ y $V_7 := V_4 \cup V_5 = \{a_4, a_5\}$. Como $a_7 \in \text{Cone}(G \setminus \{a_7\})$, también definimos

$$m_7 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_7 \in \mathbb{N} a_2 + \mathbb{N} a_6\} = 5.$$

Se observa que $3a_2 = m_2 a_2 = m_6 a_6 = 14a_6$ y se comprueba que $210 = m_2 a_2 = 3a_1 + a_3 \in \mathbb{N} V_6 = \mathbb{N}\{a_1, a_3\}$. Por tanto, definimos $a_8 := \gcd\{a_2, a_6\} = 5$, $G := (G \setminus \{a_2, a_6\}) \cup \{a_8\} = \{a_7, a_8\}$ y $V_8 := V_2 \cup V_6 = \{a_1, a_2, a_3\}$. Como $a_8 \in \text{Cone}(G \setminus \{a_8\})$, también definimos $m_8 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_8 \in \mathbb{N} a_7\} = 49$.

Finalmente observamos que $5a_7 = m_7 a_7 = m_8 a_8 = 49a_8$ y que $5a_7 = a_4 + a_5 \in \mathbb{N} V_7 = \mathbb{N}\{a_4, a_5\}$, pero $5a_7 \notin \mathbb{N} V_8 = \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$, por consiguiente $\text{IC-simplicial}(\mathcal{A})$ devuelve FALSO e $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa.

Nota 2.2.9. La demostración del Teorema 2.2.4 también nos muestra cómo obtener un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ cuando este es intersección completa mientras se está ejecutando el Algoritmo IC-simplicial. Es importante recalcar que para obtener el sistema minimal de generadores no hay que hacer ningún cálculo adicional, sino los propios del Algoritmo IC-simplicial. De forma más precisa, los binomios que conforman el sistema de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ se obtienen de la siguiente forma:

1. Durante la ejecución del bucle **while**, siempre que existan $a_i, a_j \in G$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$ tendremos que $m_i a_i \in \mathbb{N} V_i \cap \mathbb{N} V_j$. Por tanto existen $\{\gamma_u \mid a_u \in V_i\}$, $\{\gamma_v \mid a_v \in V_j\} \subset \mathbb{N}$ tales que $m_i a_i = \sum_{a_u \in V_i} \gamma_u a_u = \sum_{a_v \in V_j} \gamma_v a_v$ y construimos el binomio $g := \prod_{a_u \in V_i} x_u^{\gamma_u} - \prod_{a_v \in V_j} x_v^{\gamma_v}$.

2. Durante la ejecución del bucle **repeat**, siempre que $B_i a_i \in \mathbb{N} V_i \cap \sum_{a_j \in \mathcal{B} \setminus \{a_i\}} \mathbb{N} V_j$, existe $\{\gamma_u \mid a_u \in V_i\} \subset \mathbb{N}$ y para todo $a_j \in \mathcal{B} \setminus \{a_i\}$ existe un conjunto $\{\gamma_v \mid a_v \in V_j\} \subset \mathbb{N}$ tales que $B_i a_i = \sum_{a_u \in V_i} \gamma_u a_u = \sum_{a_j \in \mathcal{B} \setminus \{a_i\}} \left(\sum_{a_v \in V_j} \gamma_v a_v \right)$ y construimos el binomio $g := \prod_{a_u \in V_i} x_u^{\gamma_u} - \prod_{a_j \in \mathcal{B} \setminus \{a_i\}} \left(\prod_{a_v \in V_j} x_v^{\gamma_v} \right)$.

Ilustremos este procedimiento en los ejemplos anteriores en que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Ejemplo 2.2.10. En el Ejemplo 2.2.6 habíamos visto que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa donde $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{N}^2$ con $a_1 := (7, 0)$, $a_2 := (0, 7)$, $a_3 := (2, 2)$ y $a_4 := (3, 3)$. Veamos cómo se obtiene un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ durante la ejecución del Algoritmo IC-simplicial.

- Tras calcular m_3 y m_4 observamos que $3a_3 = m_3 a_3 = m_4 a_4 = 2a_4$; por tanto definimos $g_1 := x_3^3 - x_4^2$.
- Al definir $a_5 := \gcd\{a_3, a_4\} = (1, 1)$ y calcular B_5 observamos que $B_5 a_5 = 7a_5 = a_1 + a_2 = 2a_3 + a_4 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\} \cap \mathbb{N}\{a_3, a_4\}$, entonces definimos $g_2 := x_1 x_2 - x_3^2 x_4$.

Como el algoritmo terminó devolviendo VERDADERO, entonces podemos concluir que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y está minimalmente generado por $\{g_1, g_2\}$.

Ejemplo 2.2.11. En el Ejemplo 2.2.7 habíamos visto que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa donde $\mathcal{A} := \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\} \subset \mathbb{N}^3$ con $a_1 := (52, 0, 0)$, $a_2 := (0, 52, 0)$, $a_3 := (0, 0, 52)$, $a_4 := (20, 30, 100)$, $a_5 := (28, 42, 140)$, $a_6 := (30, 45, 150)$, $a_7 := (42, 63, 210)$ y $a_8 := (52, 52, 78)$. Veamos cómo se obtiene un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ durante la ejecución del Algoritmo IC-simplicial.

- Calculamos m_4 , m_5 , m_6 , m_7 y m_8 y, dado que $3a_4 = m_4 a_4 = m_6 a_6 = 2a_6$, definimos $g_1 := x_4^3 - x_6^2$.
- Definimos $a_9 := \gcd\{a_4, a_6\} = (10, 15, 50)$, calculamos m_9 y, dado que $3a_5 = m_5 a_5 = m_7 a_7 = 2a_7$, definimos $g_2 := x_5^3 - x_7^2$.
- Definimos $a_{10} := \gcd\{a_5, a_7\} = (14, 21, 70)$, calculamos m_{10} y, dado que $7a_9 = m_9 a_9 = m_{10} a_{10} = 5a_{10}$ y que $m_9 a_9 = 2a_4 + a_6 = a_5 + a_7 \in \mathbb{N} V_9 \cap \mathbb{N} V_{10}$, definimos $g_3 := x_4^2 x_6 - x_5 x_7$.
- Posteriormente calculamos B_{11} y, dado que $B_{11} a_{11} = 52a_{11} = a_4 + 2a_7 = a_2 + 7a_3 + 2a_8 \in \mathbb{N}\{a_4, a_5, a_6, a_7\} \cap \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3, a_8\}$, definimos $g_4 := x_4 x_7^2 - x_2 x_3^7 x_8^2$.
- Finalmente calculamos B'_8 y, dado que $B'_8 a_8 = 2a_8 = 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 \in \mathbb{N}\{a_8\} \cap \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$, definimos $g_5 := x_8^2 - x_1^2 x_2^2 x_3^3$.

Como el algoritmo terminó devolviendo VERDADERO, entonces podemos concluir que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y está minimalmente generado por $\{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$.

2.3 Ideales tóricos simpliciales homogéneos intersección completa y sus variedades

En esta sección estudiamos los ideales tóricos simpliciales que son homogéneos. Comenzamos por demostrar que son de la forma $I_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$, donde $\sum_{j=1}^m a_{ij} = d$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$.

Proposición 2.3.1. *Un ideal $I \subset k[x]$ es un ideal tórico simplicial homogéneo si y solo si existe $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ con $d = \sum_{j=1}^m a_{ij}$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $I = I_{\mathcal{A}}$.*

Demostración. (\Rightarrow) En vista de la Proposición 2.1.2, al ser I un ideal tórico simplicial, existe $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ tal que $I = I_{\mathcal{A}}$. Como además $I_{\mathcal{A}}$ es homogéneo, por la Proposición 1.1.7 existe $w = (w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $(de_i) \cdot w = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $a_i \cdot w = 1$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$. De la igualdad $(de_i) \cdot w = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ se tiene que w debe ser el vector $w = \frac{1}{d}(1, \dots, 1)$; como además $a_i \cdot w = 1$, se concluye que $\sum_{j=1}^m a_{ij} = d$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$.

(\Leftarrow) De la Proposición 2.1.2 y de la Proposición 1.1.7 con $w = \frac{1}{d}(1, \dots, 1)$ se sigue el resultado. \square

Para todo ideal tórico simplicial homogéneo $I_{\mathcal{A}}$, su variedad asociada $V(I_{\mathcal{A}}) \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ se denomina *variedad tórica simplicial proyectiva*. Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado y \mathcal{A} tiene la forma indicada en la Proposición 2.3.1, en virtud de la Proposición 2.1.4 (también por [26, Theorem 12 of Chapter 8, §5]) se tiene que $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$.

Para esta familia de ideales tóricos el Algoritmo IC-simplicial se puede simplificar notablemente, como muestra el siguiente resultado.

Corolario 2.3.2. *Sea $I_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico simplicial homogéneo. Entonces,*

$$I_{\mathcal{A}} \text{ es intersección completa} \iff \mathcal{A}_{red} = \emptyset.$$

Demostración. (\Leftarrow) Por el Teorema 1.2.21. (\Rightarrow) Si $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal tórico simplicial homogéneo, entonces $\lambda a_i \neq a_j$ para todo $\lambda \in \mathbb{Q}$, de donde $m_i a_i \neq m_j a_j$ para todo $a_i, a_j \in \mathcal{H}$. Por la Proposición 2.2.1 se tiene que si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa entonces $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$. \square

De este resultado se desprende un método efectivo para determinar si un ideal tórico simplicial homogéneo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Concretamente, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si la salida del algoritmo de la Tabla 1.1 es el vacío. Es más, en virtud de la Nota 1.2.24 o de la Nota 2.2.9, en caso de que un ideal tórico simplicial homogéneo sea intersección completa, obtenemos sin ningún esfuerzo adicional un conjunto de binomios que genera minimalmente el ideal tórico.

Dedicamos el resto de esta sección a clasificar de las variedades tóricas simpliciales proyectivas lisas o con un único punto singular que son intersección completa idealista. Recordar que una variedad es *intersección completa idealista* si su ideal asociado es intersección completa. Esta clasificación surge como consecuencia teórica del Corolario 2.3.2 y del Teorema 1.1.11. Concretamente, los resultados a probar son los siguientes.

Teorema 2.3.3. Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y $X \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ una variedad tórica simplicial proyectiva lisa. Entonces, X es intersección completa idealista si y solo si $n = 3$ y X es la curva monomial proyectiva plana definida paramétricamente por

$$x_1 = u_1^2, x_2 = u_2^2, x_3 = u_1 u_2.$$

Teorema 2.3.4. Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y $X \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ una variedad tórica simplicial proyectiva con exactamente un punto singular. Entonces, X es intersección completa idealista si y solo si

- o bien X es la curva monomial proyectiva de \mathbb{P}_k^{n-1} de grado $d \geq 3$ definida por

$$x_1 = u_1^d, x_2 = u_2^d, x_3 = u_1^{d-1} u_2, x_4 = u_1^{d-d_4} u_2^{d_4} \dots, x_n = u_1^{d-d_n} u_2^{d_n},$$

donde $1 < d_4 < \dots < d_n < d$ y $d_4 \mid d_5 \mid \dots \mid d_n \mid d$

- o X es la superficie monomial proyectiva de \mathbb{P}_k^3 definida por

$$x_1 = u_1^2, x_2 = u_2^2, x_3 = u_3^2, x_4 = u_1 u_2.$$

Para llegar a estos resultados antes estudiamos las piezas afines que recubren una variedad tórica simplicial proyectiva cuando k es algebraicamente cerrado. Sea $X = V(I_{\mathcal{A}}) \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ una variedad tórica simplicial proyectiva con $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$. Consideramos la piezas afines $\{X \cap \mathcal{U}_i\}_{i=1}^n$ de X , siendo $\mathcal{U}_i = \mathbb{P}_k^{n-1} \setminus V(x_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Se tiene que, al ser X simplicial, las m primeras piezas afines son suficientes para recubrir X . Es decir, $X = \bigcup_{i=1}^m (X \cap \mathcal{U}_i)$. En efecto, si $p = (p_1 : \dots : p_n) \in X$ y $p \notin \mathcal{U}_i$ para todo $1 \leq i \leq m$, entonces $p_1 = \dots = p_m = 0$. Ahora $\forall j \in \{m+1, \dots, n\}$ consideramos el binomio $f_j := x_j^d - \prod_{k=1}^m x_k^{a_{jk}} \in I_{\mathcal{A}}$. Como $f_j(p) = 0$, se deduce que $p_j = 0$ para todo $j \in \{m+1, \dots, n\}$, cosa que no es posible.

Veamos que estas piezas afines son homeomorfas a variedades tóricas simpliciales afines. Recordar que para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathcal{U}_i \simeq \mathbb{A}_k^{n-1}$ vía

$$(b_1 : \dots : b_n) \mapsto (b_1/b_i, \dots, b_{i-1}/b_i, b_{i+1}/b_i, \dots, b_n/b_i).$$

Si para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y para todo $j \in \{m+1, \dots, n\}$ denotamos

$$a_j^{(i)} := (a_{j1}, \dots, a_{ji-1}, a_{ji+1}, \dots, a_{jm}) \in \mathbb{N}^{m-1}$$

y $\mathcal{A}^{(i)} := \{d\bar{e}_1, \dots, d\bar{e}_{m-1}, a_{m+1}^{(i)}, \dots, a_n^{(i)}\} \subset \mathbb{N}^{m-1}$ donde $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{m-1}\}$ es la base canónica de \mathbb{Z}^{m-1} , entonces la pieza afín $X \cap \mathcal{U}_i$ es homeomorfa a la variedad tórica simplicial afín $Y_i := V(I_{\mathcal{A}^{(i)}})$.

De esta forma, X es lisa si y solo si Y_i es lisa para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. El siguiente lema aporta un criterio para determinar cuándo una variedad tórica simplicial afín es lisa.

Lema 2.3.5. Sea $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ y para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ denotamos $\lambda_j := \min\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid ke_j \in \mathcal{A}\}$. Supongamos que k es un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, la variedad tórica simplicial afín $V(I_{\mathcal{A}}) \subset \mathbb{A}_k^n$ es lisa $\iff \forall j \in \{1, \dots, m\} : \lambda_j \mid d$ y $\lambda_j \mid a_{ij}$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$.

Demostración. En virtud del Teorema 1.1.11, $V(I_{\mathcal{A}})$ es lisa si y solo si el semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ admite un sistema de generadores \mathcal{I} formado por $m = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ elementos. Como $\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_m e_m\}$ está contenido en cualquier sistema de generadores de $\mathbb{N}\mathcal{A}$, se tiene que $V(I_{\mathcal{A}})$ es lisa si y solo si $\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_m e_m\}$ es sistema generador de $\mathbb{N}\mathcal{A}$, de donde el resultado. \square

Haciendo uso del Lema 2.3.5 vamos a probar la siguiente proposición, que es consecuencia del Corolario 2.3.2 y de utilidad en las demostraciones de los Teoremas 2.3.3 y 2.3.4.

Proposición 2.3.6. Sean k un cuerpo algebraicamente cerrado y $X = V(I_{\mathcal{A}}) \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ una variedad tórica simplicial proyectiva con $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ y $\sum_{j=1}^n a_{ij} = d$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$. Supongamos que existen $r, s : 1 \leq r < s \leq m$ tales que $X \setminus V(x_r, x_s)$ está contenido en el lugar no singular de X . Entonces, X es intersección completa idealista si y solo si $n = m + 1$ y X viene dada paramétricamente por

$$x_1 = u_1^2, \dots, x_m = u_m^2, x_{m+1} = u_r u_s.$$

Demostración. Supongamos que $\gcd\{d, a_{ij} \mid m+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} = 1$ y que $r = 1$ y $s = 2$. Entonces, $Y_k = V(I_{\mathcal{A}^{(k)}})$ es lisa para $k \in \{1, 2\}$. Nuestro primer objetivo es demostrar que $e_1 + (d-1)e_2, (d-1)e_1 + e_2 \in \mathcal{A}$. Denotamos

$$\lambda_{1j} := \min\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid (d-k)e_1 + ke_j \in \mathcal{A}\} \text{ para todo } j \in \{2, \dots, m\}, \text{ y}$$

$$\lambda_{2j} := \min\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid (d-k)e_2 + ke_j \in \mathcal{A}\} \text{ para todo } j \in \{1, 3, \dots, m\}.$$

Por el Lema 2.3.5 se tiene que para todo $k \in \{1, 2\}$

$$\lambda_{kj} \mid d \text{ y } \lambda_{kj} \mid a_{ij} \text{ para todo } i \in \{m+1, \dots, n\} \text{ y } j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{k\}.$$

Denotamos $\lambda := \lambda_{12}$ y veamos que $\lambda = 1$. En efecto, $\lambda \mid d$ y, como $\lambda_{21}e_1 + (d-\lambda_{21})e_2 \in \mathcal{A}$, entonces $\lambda \mid d - \lambda_{21}$, lo que implica que $\lambda \mid \lambda_{21}$ y por un argumento análogo obtenemos que $\lambda = \lambda_{21}$. Además, para todo $j \geq 3$, $(d-\lambda_{1j})e_1 + \lambda_{1j}e_j \in \mathcal{A}$, lo que implica que $\lambda \mid \lambda_{1j}$ y como consecuencia $\lambda \mid \gcd\{d, a_{ij} \mid m+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} = 1$. Por tanto, $\lambda = 1$ y $(d-1)e_1 + e_2, e_1 + (d-1)e_2 \in \mathcal{A}$.

Si $d > 2$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_{n-1} = e_1 + (d-1)e_2$ y que $a_n = (d-1)e_1 + e_2$. La igualdad $a_{n-1} + a_n = de_1 + de_2$ implica que $de_1, de_2, a_{n-1}, a_n \in \mathcal{A}_{red}$ y por el Corolario 2.3.2 obtenemos que $I_{\mathcal{A}}$ no puede ser intersección completa.

Si $d = 2$, hemos probado que $e_1 + e_2 \in \mathcal{A}$. Si $n = m + 1$ se tiene que $\mathcal{A} = \{2e_1, \dots, 2e_m, e_1 + e_2\}$, en cuyo caso $B_n = 2$, $2a_n = 2e_1 + 2e_2$ y $\{2e_1, \dots, 2e_m\}$ son \mathbb{Q} -linealmente independientes, entonces $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$ e $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa por el Teorema 1.2.21. Si $n > m + 1$, entonces existe $e_i + e_j \in \mathcal{A}$ con $j \geq 3, i \neq j$

- si $i = 1$, entonces $\lambda_{2j} = 1$, lo que significa que $e_2 + e_j \in \mathcal{A}$
- si $i = 2$, entonces $\lambda_{1j} = 1$, lo que significa que $e_1 + e_j \in \mathcal{A}$
- si $i \geq 3$, entonces $\lambda_{1j} = \lambda_{2j} = 1$ lo que significa que $e_1 + e_j, e_2 + e_j \in \mathcal{A}$

En cualquiera de los tres casos hemos probado que $e_1 + e_j$ y $e_2 + e_j$ pertenecen a \mathcal{A} con j entero fijo ≥ 3 . Como $e_1 + e_2 \in \mathcal{A}$ y $2e_1, 2e_2, 2e_j$ son también elementos de \mathcal{A} , la igualdad siguiente

$$(e_1 + e_j) + (e_2 + e_j) + (e_1 + e_2) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_j$$

que involucra elementos de \mathcal{A} nos dice que \mathcal{A}_{red} no puede ser vacío pues contiene en particular a esos 6 elementos. En virtud del Corolario 2.3.2, $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa y se tiene el resultado. \square

Demostración del Teorema 2.3.3. Sea $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ con $\sum_{j=1}^m a_{ij} = d$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $X = V(I_{\mathcal{A}})$. Aplicando la Proposición 2.3.6 con $r = 1$ y $s = 2$ se deduce que X viene dada paramétricamente por $x_1 = u_1^2, \dots, x_m = u_m^2, x_{m+1} = u_1 u_2$ y, por tanto, $X = V(I_{\mathcal{B}})$ con $\mathcal{B} = \{2e_1, \dots, 2e_m, e_1 + e_2\} \subset \mathbb{N}^m$. Si $m \geq 3$, Y_3 no es lisa por el Lema 2.3.5, de donde el resultado. \square

Demostración del Teorema 2.3.4. Sea $\mathcal{A} = \{de_1, \dots, de_m, a_{m+1}, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ con $\sum_{j=1}^m a_{ij} = d$ para todo $i \in \{m+1, \dots, n\}$ tal que $X = V(I_{\mathcal{A}})$. Como X tiene exactamente un punto singular, entonces habrá solo una carta afín Y_i que no es lisa con $i \in \{1, \dots, m\}$. En efecto, si existiesen $i, j : 1 \leq i < j \leq m$ tales que Y_i, Y_j no son lisas, por ejemplo Y_1 e Y_2 , entonces por el Teorema 1.1.11, $0 \in Y_1 \subset \mathbb{A}_k^{n-1}$ es un punto singular de Y_1 que se corresponde con el punto singular $(1 : 0 : \dots : 0) \in X$ y $0 \in Y_2 \subset \mathbb{A}_k^{n-1}$ es un punto singular de Y_2 que se corresponde con el punto singular $(0 : 1 : 0 : \dots : 0) \in X$. Supondremos pues que las cartas afines Y_1, \dots, Y_{m-1} son lisas. Si $m \geq 3$, por la Proposición 2.3.6, se obtiene directamente que $m = 3, n = 4$ y X viene dada paramétricamente por

$$x_1 = u_1^2, x_2 = u_2^2, x_3 = u_3^2, x_4 = u_1 u_2.$$

Así pues, solo queda considerar el caso de las curvas monomiales proyectivas con exactamente un punto singular. En este caso tenemos que $a_3 = (d - d_3)e_1 + d_3e_2, \dots, a_n = (d - d_n)e_1 + d_n e_2$ y podemos asumir que $d_3 < \dots < d_n < d$ y $\gcd\{d, d_3, \dots, d_n\} = 1$. Tenemos que $Y_1 = V(I_{\mathcal{A}^{(1)}})$ con $\mathcal{A}^{(1)} = \{d, d_3, \dots, d_n\}$. En virtud del Lema 2.3.5, se tiene que Y_1 es lisa si y solo si d_3 , que es igual a $\min(\mathcal{A}^{(1)})$, divide a todos los elementos de $\mathcal{A}^{(1)}$. Como $\gcd\{d, d_3, \dots, d_n\} = 1$, entonces $d_3 = 1$.

Ahora probaremos por inducción sobre $n \geq 3$ que $I_{\mathcal{A}}$ con

$$\mathcal{A} = \{de_1, de_2, (d-1)e_1 + e_2, (d-d_4)e_1 + d_4e_2, \dots, (d-d_n)e_1 + d_n e_2\}$$

es intersección completa si y solo si $d_4 \mid \dots \mid d_n \mid d$.

Si $n = 3$ tenemos que $\mathcal{A} = \{de_1, de_2, (d-1)e_1 + e_2\}$. En este caso se tiene que $B_3 = d$ y $da_3 = (d-1)de_1 + de_2$, siendo $B_3 = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_3 \in \mathbb{Z}de_1 + \mathbb{Z}de_2\}$. Como de_1, de_2 son \mathbb{Q} -linealmente independientes, $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$ y por el Corolario 2.3.2, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Supongamos ahora que $n \geq 4$ y observamos que $a_i = d_i a_3 + (1 - d_i)de_1$ para todo $i \in \{4, \dots, n\}$, de donde $B_i = 1$. Además es fácil comprobar que $ba_3 \in \sum_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq 3}} \mathbb{Z}a_i$ si y solo si $b \in \sum_{i=4}^n \mathbb{Z}d_i + \mathbb{Z}d$, de donde $B_3 = \gcd\{d_4, \dots, d_n, d\}$. Teniendo esto en cuenta

$$B_3 a_3 \in \sum_{j \in \{4, \dots, n\}} \mathbb{N}a_j + \mathbb{N}de_1 + \mathbb{N}de_2 \iff d_4 = \gcd\{d_4, \dots, d_n, d\},$$

ya que si $B_3 a_3 \in \sum_{j \in \{4, \dots, n\}} \mathbb{N}a_j + \mathbb{N}de_1 + \mathbb{N}de_2$, entonces se tiene que $\gcd\{d_4, \dots, d_n, d\} \in \sum_{j=4}^m \mathbb{N}d_j + \mathbb{N}d$ y como $\gcd\{d_4, \dots, d_n, d\} \leq d_4 < \dots < d_n < d$ esto solo es posible si $d_4 = \gcd\{d_4, \dots, d_n, d\}$. Además en este caso se tiene que $B_3 a_3 = a_4 + (d_4 - 1)de_1$.

Por tanto, si $d_4 \neq \gcd\{d_4, \dots, d_n, d\}$, $\mathcal{A}_{red} \neq \emptyset$ e $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa por el Corolario 2.3.2. En caso contrario, es decir, si $d_4 = \gcd\{d_4, \dots, d_n, d\}$, en virtud de la Proposición 1.2.19 y del Lema 1.2.17, se tiene que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_3\}}$ es intersección completa. Además, en este caso, si denotamos $d' := d/d_4 \in \mathbb{Z}^+$, $d'_i := d_i/d_4 \in \mathbb{Z}^+$ para todo $i \in \{4, \dots, n\}$ y $\mathcal{A}' := \{d'e_1, d'e_2, (d' - 1)e_1 + e_2, (d' - d'_5)e_1 + d'_5 e_2, \dots, (d' - d'_n)e_1 + d'_n e_2\}$, es evidente que $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_3\}} = I_{\mathcal{A}'}$. Por hipótesis de inducción $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa si y solo si $d'_5 \mid \dots \mid d'_n \mid d'$, lo que implica que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff d_4 \mid d_5 \mid \dots \mid d_n \mid d$. \square

Hay que señalar que en las demostraciones de los Teoremas 2.3.3 y 2.3.4 y de la Proposición 2.3.6 en la que se basan, se ha ejecutado teóricamente el algoritmo de la Tabla 1.1. Por tanto, se obtienen fácilmente las ecuaciones implícitas que definen las variedades tóricas simpliciales proyectivas que son intersección completa idealista citadas con anterioridad siguiendo la Nota 1.2.24. Obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 2.3.7. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y $X \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ una variedad tórica simplicial proyectiva lisa. Entonces, X es intersección completa idealista si y solo si X es la curva en \mathbb{P}_k^2 con ecuación $x_3^2 - x_1 x_2 = 0$.*

Corolario 2.3.8. *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado $X \subset \mathbb{P}_k^{n-1}$ una variedad tórica simplicial proyectiva con exactamente un punto singular. Entonces, X es intersección completa idealista si y solo si*

- o bien X es la curva monomial en \mathbb{P}_k^{n-1} definida por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3^{b_3} - x_1^{b_3-1} x_4 = 0 \\ x_4^{b_4} - x_1^{b_4-1} x_5 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-1}^{b_{n-1}} - x_1^{b_{n-1}-1} x_n = 0 \\ x_n^{b_n} - x_1^{b_n-1} x_2 = 0 \end{array} \right.$$

donde o bien $n \geq 4$ y $b_3, \dots, b_n \geq 2$, o $n = 3$ y $b_3 \geq 3$.

- o X es la superficie en \mathbb{P}_k^3 de grado 2 con ecuación $x_4^2 - x_1x_2 = 0$.

2.4 cisimplicial.lib

Hemos implementado en ANSI C y en SINGULAR [29] los algoritmos propuestos en las dos secciones anteriores para determinar si un ideal tórico simplicial o un ideal tórico simplicial homogéneo es intersección completa. En particular, la implementación para SINGULAR dio lugar a la librería `cisimplicial.lib` [7] que se distribuye con el software en su versión 3-1-4 y posteriores. Esta librería sustituye a la anterior `cimonom.lib` [6] que se distribuyó entre las versiones 3-0-2 y 3-1-3 y que contiene las funciones necesarias para determinar si el ideal tórico asociado a una curva monomial afín es intersección completa. La nueva librería `cisimplicial.lib`, no solo generaliza sino que también mejora la anterior, si bien utiliza alguna de las funciones de la misma. En esta sección explicaremos los detalles de la implementación de `cisimplicial.lib`.

Dado un ideal tórico simplicial homogéneo $I_{\mathcal{A}}$, haciendo uso del Corolario 2.3.2 una forma de determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, es verificando si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$. Para este fin y siguiendo el esquema que indica la Tabla 1.1 hay que diseñar procedimientos que resuelvan los siguientes problemas:

- comprobar si un elemento $b \in \mathbb{N}^m$ pertenece a un subsemigrupo de \mathbb{N}^m
- si $a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Q}a_j$, calcular $B_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z}a_j\}$

Para diseñar un método efectivo que determine si un ideal tórico simplicial no homogéneo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa siguiendo el Algoritmo IC-simplicial de la Tabla 2.1, a los dos problemas anteriores hay que sumarle el de comprobar si existen $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$. Este problema lo resolvemos mediante el cálculo de los \overline{m}_i que son los m_i para subsemigrupos de \mathbb{N} .

Dedicamos las siguientes subsecciones a abordar cada uno de estos problemas y terminamos evaluando el funcionamiento de la librería de SINGULAR.

2.4.1 El problema de pertenencia a un semigrupo

Este es un problema de decisión que consiste en, dado $b \in \mathbb{N}^m$ y una familia finita de vectores $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \in \mathbb{N}^m$, decidir si b pertenece o no al subsemigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ de \mathbb{N}^m o, equivalentemente, decidir si existen $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{N}$ tales que $b = \sum v_i a_i$. Evidentemente, este problema de decisión es equivalente al de decidir si el sistema de ecuaciones $Av = b$ tiene una solución $v \in \mathbb{N}^n$, donde A es una matriz $m \times n$ con coeficientes naturales y $b \in \mathbb{N}^m$.

Este problema, que es \mathcal{NP} -completo (ver [70]), ha sido ampliamente tratado en la bibliografía, cabe destacar el algoritmo basado en Teoría de Grafos propuesto por Contejean y Devie en [24], para otros métodos alternativos recomendamos el trabajo de Pisón

y Vignerón [83] y las referencias que allí se encuentran. Para resolver este problema nos hemos decantado por un procedimiento de enumeración exhaustiva.

En `cisimplicial.lib` hemos implementado la función `belongSemigroup` que recibe como argumentos de entrada un vector $b \in \mathbb{N}^m$ y una matriz A de tamaño $m \times n$ y entradas enteras no negativas y devuelve un vector $v \in \mathbb{N}^n$ tal que $Av = b$, o -1 si tal vector no existe. Por tanto, si ponemos en A los vectores de $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ por columnas, entonces $b \in \mathbb{N}\mathcal{A}$ si y solo si existe $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ tal que $Av = b$; además en caso de existir tal vector, tenemos que $b = \sum_{i=1}^n v_i a_i$.

Ejemplo 2.4.1. *Ejemplo de llamada de la función `belongSemigroup`:*

```
> intmat A[3][4] = 10, 3, 2, 1,
                  2, 1, 1, 3,
                  5, 0, 1, 2;
> intvec b = 23,12,10;
> intvec c = 12,4,1;
> belongSemigroup(b,A);
1,3,1,2          // A * (1 3 1 2)^t = b
> belongSemigroup(c,A);
0                // A * x = c no tiene solución x ∈ ℕ^n
```

2.4.2 El cálculo de B_i

Por simplicidad de notación en esta sección trataremos el cálculo de B_1 . Esto es, dado $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ tal que $a_1 \in \mathbb{Q}(\mathcal{A} \setminus \{a_1\})$, buscamos calcular $B_1 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{Z}a_i\}$. Para resolver este problema usaremos el siguiente resultado.

Lema 2.4.2. *Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ tal que $a_1 \in \sum_{i \in \{2, \dots, n\}} \mathbb{Q}a_i$. Entonces,*

$$B_1 = \frac{\text{Card}(T(\mathbb{Z}^m / \sum_{i \in \{2, \dots, n\}} \mathbb{Z}a_i))}{\text{Card}(T(\mathbb{Z}^m / \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{Z}a_i))},$$

donde $T(-)$ denota el subgrupo de torsión de un grupo abeliano.

Para probar este lema, recordamos un resultado clásico de Heger [52].

Proposición 2.4.3. [52, Página 51] *Sea A una matriz entera $m \times n$ y sea $b \in \mathbb{Z}^m$ un vector columna tal que $r := \text{rk}(A) = \text{rk}([A \ b])$. Entonces, el sistema $Ax = b$ tiene solución $x \in \mathbb{Z}^n \iff \Delta_r(A) = \Delta_r([A \ b])$.*

Demostración del Lema 2.4.2. Sea A la matriz entera cuyas columnas son a_1, \dots, a_n y sea A_1 la matriz obtenida al quitarle la primera columna a A . Por definición B_1 es el menor $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $A_1 x = ka_1$ tiene solución entera $x \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Como $a_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{Q}a_i$, entonces $\text{rk}(A) = \text{rk}(A_1)$ y por el resultado de Heger se sigue que k es el menor entero tal que

$$\Delta_r(A_1) = \Delta_r([A_1 \ ka_1]) = \text{gcd}\{\Delta_r(A_1), k\Delta_r(A)\}.$$

Como $\Delta_r(A)$ divide a $\Delta_r(A_1)$, podemos concluir que

$$B_1 = \frac{\Delta_r(A_1)}{\Delta_r(A)}.$$

Finalmente, es bien sabido que $\Delta_r(A)$ es el orden del subgrupo de torsión de $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}\mathcal{A}$ y $\Delta_r(A_1)$ es el orden del subgrupo de torsión de $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(\mathcal{A} \setminus \{a_1\})$, ver e.g. [101, Lemma 1.3.17] o [59, Section 3]. \square

Por tanto, el problema de calcular B_1 se ve reducido al de calcular el orden de los subgrupos de torsión de dos grupos abelianos finitamente generados. Estos se pueden calcular por medio de la forma normal de Hermite de una matriz (ver [23, Theorem 2.4.3 y Algorithm 2.4.5]).

Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^r$ donde $r = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ y $a_1 \in \mathbb{Q}(\mathcal{A} \setminus \{a_1\})$, entonces los grupos $\mathbb{Z}^r/\mathbb{Z}\mathcal{A}$ y $\mathbb{Z}^r/\mathbb{Z}(\mathcal{A} \setminus \{a_1\})$ son finitos y la fórmula para obtener B_1 se ve simplificada, ya que

$$B_1 = \frac{\text{Card}(\mathbb{Z}^r / \sum_{i \in \{2, \dots, n\}} \mathbb{Z}a_i)}{\text{Card}(\mathbb{Z}^r / \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{Z}a_i)}.$$

Además, siempre podemos suponer que estamos en esta situación pues si $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$ y $m > r$, entonces la matriz A cuyas columnas son a_1, \dots, a_n tiene r filas linealmente independientes, que supondremos que son las r primeras y si denotamos $\mathcal{B} := \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{N}^r$ con $b_i = (a_{i1}, \dots, a_{ir})$, entonces $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{B}) = r$ y además $\mathbb{Z}^r/\mathbb{Z}\mathcal{B} \simeq T(\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}\mathcal{A})$ y $\mathbb{Z}^r/\mathbb{Z}(\mathcal{B} \setminus \{b_1\}) \simeq T(\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}(\mathcal{A} \setminus \{a_1\}))$.

En la librería `cisimplicial.lib` se ha implementado la función `cardGroup` que recibe como argumento de entrada una matriz A de tamaño $m \times n$ y devuelve el número de elementos de $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}\mathcal{A}$, siendo $\mathbb{Z}\mathcal{A}$ el subgrupo de \mathbb{Z}^m generado por las columnas de A . La función devuelve -1 si $\mathbb{Z}^m/\mathbb{Z}\mathcal{A}$ es infinito. En esta función se lleva a cabo internamente un cálculo ad hoc de la forma normal de Hermite de la matriz A .

Ejemplo 2.4.4. *Ejemplo de llamada de la función `cardGroup`:*

```
> intmat C[3][5] = 24, 0, 0, 8, 3,
                  0, 24, 0, 10, 6,
                  0, 0, 24, 5, 9;
> cardGroup(C);
72 // El orden del grupo  $\mathbb{Z}^3/\sum_{i=1}^5 \mathbb{Z}c_i$  es 72
```

2.4.3 Comprobando si existen $i, j : m_i a_i = m_j a_j$

Uno de los puntos clave del Algoritmo IC-simplicial, además de los ya expuestos, es el de determinar si existen $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$. Recordamos que $\mathcal{H} = \{a_i \in \mathcal{A} \mid a_i \in \text{Cone}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})\}$ y que para todo $a_i \in \mathcal{H}$, se tiene que $m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}a_j\}$.

En el método que vamos a proponer, que es el que hemos implementado en la librería `cisimplicial.lib`, no calcularemos m_i explícitamente para todo $a_i \in \mathcal{H}$, sino que nos centraremos en tratar de decidir si $m_i a_i = m_j a_j$ para ciertos $a_i, a_j \in \mathcal{H}$. Con este fin, para todo $a_i \in \mathcal{H}$, definimos el conjunto $\mathcal{L}_i := \{a_j \in \mathcal{A} \mid j \neq i \text{ y } \exists \lambda \in \mathbb{Q} \text{ tal que } \lambda a_i = a_j\}$, y escribimos

$$\bar{m}_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_i \in \sum_{a_j \in \mathcal{L}_i} \mathbb{N} a_j\}.$$

Con estas definiciones se tienen las siguientes propiedades:

Lema 2.4.5. *Si $a_i \in \mathcal{H}$, se tiene que:*

- (a) $\bar{m}_i \geq m_i$,
- (b) Si $m_i a_i = m_j a_j$ para algún $a_j \in \mathcal{H}$, entonces $a_j \in \mathcal{L}_i$ y $m_i = \bar{m}_i$.
- (c) $\bar{m}_i = m_i$ si y solo si el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n &= (\bar{m}_i - 1) a_i \\ x_i + x_{n+1} &= \bar{m}_i - 2 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

no tiene solución $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

- (d) Sea $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que $a_{ik} \neq 0$, entonces

$$\bar{m}_i = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b a_{ik} \in \sum_{a_j \in \mathcal{L}_i} \mathbb{N} a_{jk}\}.$$

Demostración. Los apartados (a), (b) y (d) son evidentes de la definición de \bar{m}_i . Veamos (c), si $m_i < \bar{m}_i$, entonces existen $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ tales que $m_i a_i = \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n\} \\ j \neq i}} \alpha_j a_j$ y si tomamos $\alpha_i := \bar{m}_i - m_i - 1 \in \mathbb{N}$ y $\alpha_{n+1} := m_i - 1$ se tiene que $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ es solución al sistema (2.1). De igual forma, si $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ es solución de (2.1), entonces $\alpha_i \leq \bar{m}_i - 2$ y $\sum_{j \neq i} \alpha_j a_j = (\bar{m}_i - 1 - \alpha_i) a_i \in \mathbb{N} a_i$. Por tanto $m_i \leq \bar{m}_i - 1 - \alpha_i < \bar{m}_i$. \square

Por tanto, para todo $a_i, a_j \in \mathcal{H}$, sustuiremos el problema de decidir si $m_i a_i = m_j a_j$ por el de decidir si $\bar{m}_i a_i = \bar{m}_j a_j$, $\bar{m}_i = m_i$ y $\bar{m}_j = m_j$.

Las igualdades $\bar{m}_i = m_i$ y $\bar{m}_j = m_j$ se pueden comprobar buscando si existe una solución entera no negativa al sistema (2.1) que, a su vez, es equivalente a comprobar si el vector $\bar{b} = ((\bar{m}_i - 1) a_i, \bar{m}_i - 2) \in \mathbb{N}^{m+1}$ pertenece al semigrupo $\mathbb{N} \bar{\mathcal{A}}$, donde $\bar{\mathcal{A}} = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n, \bar{a}_{n+1}\}$ con $\bar{a}_j = (a_j, 0)$ para $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, $\bar{a}_i = (a_i, 1)$ y $\bar{a}_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$.

Para comprobar si $\bar{m}_i a_i = \bar{m}_j a_j$ calcularemos explícitamente los valores de \bar{m}_i y \bar{m}_j . Al cálculo de \bar{m}_i le vamos a dedicar un estudio concienzudo. Cabe resaltar que el Lema 2.4.5.(d) nos dice que \bar{m}_i es el menor múltiplo de un entero positivo que pertenece a un subsemigrupo de \mathbb{N} , lo que es más simple a priori que el cálculo de m_i que involucra elementos en \mathbb{N}^m .

2.4.4 El cálculo de \overline{m}_i

Los resultados y métodos que vamos a presentar a continuación se encuentran en la Sección 4.1 del trabajo conjunto con Isabel Bermejo y Juan José Salazar González [5].

Por simplicidad de notación estudiaremos el cálculo de \overline{m}_1 . Como ya indicamos, \overline{m}_1 es el menor $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $kd_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{N}d_i$, donde d_1, \dots, d_n son todos enteros positivos. Si $n = 2$, es evidente que $\overline{m}_1 = \text{lcm}\{d_1, d_2\}/d_1$, pero para valores de $n \geq 3$ no hay fórmula conocida. El problema del cálculo de \overline{m}_1 se puede formular mediante el siguiente modelo de Programación Lineal Entera (PLE):

$$x^* := \min \quad x_1 \quad (2.2)$$

$$d_1 + d_1x = d_2x_2 + \dots + d_nx_n \quad (2.3)$$

$$x, x_1, \dots, x_n \geq 0 \quad (2.4)$$

$$x, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z} \quad (2.5)$$

Donde $\overline{m}_1 = x^* + 1$.

De la definición de \overline{m}_1 se desprende fácilmente que al calcularlo, en particular, se decide si una ecuación diofántica lineal tiene o no una solución no negativa. En efecto, la ecuación diofántica lineal $d_2x_2 + \dots + d_nx_n = d_1$ admite una solución no negativa si y solo si el valor óptimo del modelo (2.2)–(2.5) es $x^* = 0$. De aquí se deduce que el cálculo de \overline{m}_1 es un problema \mathcal{NP} -duro puesto que el problema de decisión citado anteriormente es \mathcal{NP} -completo (ver [70]). Para n prefijado, por contra, el problema de optimización de calcular \overline{m}_1 es resoluble en tiempo polinomial (ver [69] o [80, Section 9.5.34]).

La relajación lineal del problema de optimización en cuestión, i.e., el modelo (2.2)–(2.4) tiene valor óptimo igual a 0, obtenido por ejemplo con la solución $x_1 = 0$, $x_2 = d_1/d_2$ y $x_i = 0$ para todo $i > 2$. A pesar de que existe software moderno especializado en la resolución de problemas de programación lineal entera que incluyen desigualdades adicionales (e.g., cortes de Gomory) que mejoran esta costa inferior, los algoritmos basados en Programación Lineal no son capaces de encontrar ni siquiera una solución entera para muchos ejemplos. Esto se puede comprobar si más que introducir en cualquiera de estos programas el siguiente ejemplo:

$$n = 3, d_1 = 75000, d_2 = 75001, d_3 = 75002.$$

Usando el software comercial `Cplex 9.1` con los parámetros por defecto es imposible hallar una solución entera de (2.3)–(2.5) tras una hora de cálculo en un ordenador personal Pentium IV 3 Ghz. Es por este motivo que buscaremos otras formas de aproximarnos al problema.

Presentaremos dos técnicas, una basada en una técnica de ramificación y acotación (*branch-and-bound*) y otra que sigue un esquema de Teoría de Grafos.

Un procedimiento de ramificación y acotación

Dado que encontrar \overline{m}_1 es un problema combinatorio clasificado como \mathcal{NP} -duro, una forma clásica de atacar el problema para resolverlo es el de seguir un esquema de rami-

ficación y acotación. Proponemos la siguiente implementación.

Denotamos por

$$M := \frac{\min\{\text{lcm}\{d_1, d_i\} \mid 2 \leq i \leq n\}}{d_1}, \quad (2.6)$$

que es una cota superior trivial de \overline{m}_1 . Por tanto, $M - 1$ es una cota superior para el óptimo de la función objetivo del modelo (2.2)–(2.5), y lo usaremos como cota superior inicial en nuestra propuesta de ramificación y acotación.

Crearemos un árbol de búsqueda en el que cada nodo tendrá asociado unos valores enteros no negativos de las variables x_2, \dots, x_n , de los que se deriva su cota inferior local $d_2x_2 + \dots + d_nx_n$. En particular, el nodo raíz tiene asociado $x_2 = \dots = x_n = 0$. En cada nodo del árbol de búsqueda distinto de la raíz se comprueba si su cota inferior local es un múltiplo de d_1 . Si así fuera, no habría que ramificar ese nodo y la cota superior se reemplazaría si mejorase la que tuviésemos con anterioridad. En caso contrario, se aplica ramificación y se crean (a lo sumo) $n - 1$ nuevos nodos en el árbol de búsqueda. Cada uno de estos nodos se crea aumentando exactamente una unidad cada una de las variables del conjunto $\{x_2, \dots, x_n\}$. Para evitar crear dos nodos idénticos, marcamos cada cota inferior local la primera vez que aparece. Como es usual en las técnicas de esta naturaleza, un nodo no se crea si su cota inferior local es mayor o igual que la cota superior en ese momento.

Un procedimiento de Teoría de Grafos

Una aproximación alternativa al problema de calcular \overline{m}_1 es usar una representación del problema por medio de la Teoría de Grafos. La idea que subyace a esta consiste en representar cada solución (x_1, x_2, \dots, x_n) de (2.3)–(2.5) como un camino de peso x_1 en un grafo. Entonces, el problema combinatorio modelado en (2.2)–(2.5) es equivalente a encontrar un camino mínimo en el grafo. Esta idea está inspirada en la que usan Clausen y Fortenbacher en [21] para resolver ecuaciones diofánticas lineales.

Más precisamente, consideremos el grafo pesado dirigido $\mathcal{G} = (V, A)$, donde el conjunto de nodos es

$$V := \{v \in \mathbb{Z} \mid -\max\{d_i \mid 2 \leq i \leq n\} < v \leq d_1\}$$

y el conjunto de arcos es

$$A := \bigcup_{i=2}^n \{(v, v - d_i) \mid v \in V, v > 0\} \cup \{(v, v + d_1) \mid v \in V, v \leq 0\}.$$

Un arco (v, w) diremos que va hacia adelante si $v < w$ y hacia atrás en caso contrario. A cada arco hacia adelante le asociamos un peso de una unidad y los arcos hacia atrás tienen asociado un peso nulo. El peso de un camino en \mathcal{G} es la suma de los pesos de todos sus arcos. Inspirados por [21, Lemma 7] tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.4.6. *Hay una aplicación sobreyectiva que va desde el conjunto de caminos en \mathcal{G} desde d_1 hasta 0 con peso x_1 hasta el conjunto de soluciones (x_1, \dots, x_n) de (2.3)–(2.5).*

Demostración. Un camino en \mathcal{G} desde d_1 hasta 0 con peso x_1 tiene exactamente x_1 arcos hacia adelante. Si llamamos x_i al número de arcos hacia atrás en ese camino de tipo $(v, v - d_i)$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces $d_1 + d_1x - d_2x_2 - \dots - d_nx_n = 0$.

Tomemos ahora una solución (x_1, \dots, x_n) de (2.3)–(2.5). Construimos un camino en \mathcal{G} desde d_1 a 0 de peso x_1 cuya imagen es (x_1, \dots, x_n) de la siguiente forma. Comenzamos en el nodo d_1 , escogemos $i \in \{2, \dots, n\}$ y añadimos el arco hacia atrás $(d_1, d_1 - d_i)$. Si $d_1 - d_i > 0$ elegimos $j \in \{2, \dots, n\}$ y añadimos el arco hacia atrás $(d_1 - d_i, d_1 - d_i - d_j)$. Si $d_1 - d_i \leq 0$, añadimos el arco hacia adelante $(d_1 - d_i, 2d_1 - d_i)$. Repetimos este mismo proceso teniendo en cuenta que x_i es el número de arcos de la forma $(v, v - d_i)$ a añadir para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, claramente el camino termina en el nodo 0 tras añadir x_1 arcos hacia adelante. \square

Como consecuencia del Lema 2.4.6, el problema de calcular x^* (y por tanto \overline{m}_1) se puede resolver encontrando un camino mínimo entre dos nodos en un grafo dirigido. Esto se puede llevar a cabo usando por ejemplo el algoritmo de Dijkstra (ver [33]). La eficiencia de dicho algoritmo depende fuertemente del número de nodos y arcos en el grafo. Es por ello que vamos a presentar una reducción en el grafo G introducido anteriormente que nos permite trabajar con un grafo $\mathcal{G}' = (V', A')$ menor que el anterior.

Definimos el conjunto de nodos de \mathcal{G}' como

$$V' := \{v \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq v \leq d_1\}$$

y su conjunto de arcos como

$$A' := \{(v, (v - d_i) \bmod d_1) \mid v \in V', i \in \{2, \dots, n\}\}.$$

El peso de cada arco $(v, (v - d_i) \bmod d_1) \in A'$ se define como

$$w_{(v,i)} := \left\lfloor \left\lceil \frac{v - d_i}{d_1} \right\rceil \right\rfloor.$$

Par explicar la idea que hay detrás estas definiciones haremos uso de la siguiente función lineal

$$f(x_1, \dots, x_n) = d_1 + d_1x - d_2x_2 - \dots - d_nx_n.$$

Comenzamos con $x_1 = \dots = x_n = 0$ y $f(0, \dots, 0) = d_1$. Cuando $f(x_1, \dots, x_n) = v$ para ciertos valores x_1, \dots, x_n y $0 \leq v \leq d_1$, incrementar la variable x_i con $i \geq 2$ en una unidad implica incrementar la variable x_1 en $w_{(v,i)}$ unidades con el fin de mantener el valor de f entre 0 y d_1 . Una vez hemos fijado los valores de x_2, \dots, x_n el valor de x_1 está unívocamente determinado puesto que es el único posible valor para garantizar que $0 \leq f(x_1, \dots, x_n) < d_1$. Una solución de la ecuación diofántica lineal consiste en asignar valores a x_2, \dots, x_n de forma que el valor de f vaya a 0. Claramente, cada camino desde d_1 hasta 0 en \mathcal{G} tiene asociado un camino desde d_1 hasta 0 en \mathcal{G}' con idéntico peso, y viceversa. La Figura 2.1 muestra el grafo \mathcal{G}' en el caso en que $d_1 = 5, d_2 = 6, d_3 = 8$ y $n = 3$. Los arcos representados por líneas simples tienen peso igual a uno y los arcos representados por

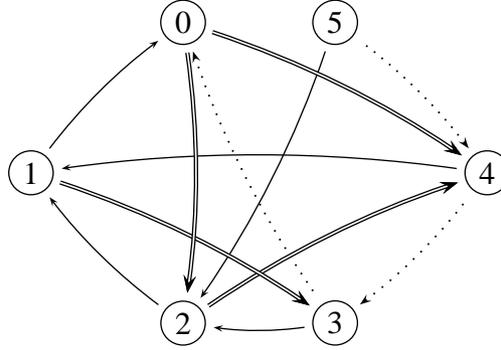


Figura 2.1: Grafo \mathcal{G}' para $d_1 = 5, d_2 = 6, d_3 = 8$.

líneas dobles tiene peso 2. Los arcos con líneas punteadas muestran uno de los caminos mínimos cuyo peso total es $x^* = 3$.

Entonces, hemos visto como x^* se puede calcular aplicando el algoritmo de Dijkstra para encontrar un camino mínimo desde d_1 a 0 en \mathcal{G}' . Como el número total de nodos del grafo es $d_1 + 1$ y el número de arcos es $(n - 1)(d_1 + 1)$, el problema de optimización (2.2)–(2.5) se puede resolver en $\mathcal{O}(n \cdot d_1 + d_1 \cdot \log(d_1))$ (ver, e.g., [41]). En vista de esto, con la reducción del grafo, la complejidad computacional de calcular \bar{m}_1 depende únicamente de n y de d_1 , pero no de los valores d_2, \dots, d_n .

Corolario 2.4.7. *Cada \bar{m}_i se puede calcular en tiempo pseudo-polinomial.*

Comportamiento de los procedimientos

Los algoritmos descritos anteriormente para calcular \bar{m}_1 han sido implementados en el lenguaje de programación ANSI C en un ordenador personal. Para evaluar el comportamiento de estas implementaciones, hemos creado cuatro familias de instancias que pasamos a describir:

Familia I: Los valores de d_i son enteros aleatorios en el intervalo [1000,100000].

Familia II: Los valores de d_i son números consecutivos.

Familia III: Los valores de d_i están en sucesión aritmética.

Familia IV: El valor d_1 es un entero aleatorio en el intervalo [1000,100000] y $d_{i+1} = d_i + \lambda_i$ donde λ_i es un número aleatorio en el intervalo [1,40].

Hemos generado varios ejemplos de cada familia hasta crear una batería de 24 ejemplos. La descripción de cada ejemplo se puede encontrar en la Tabla 2.2.

La Tabla 2.3 muestra los resultados de nuestros experimentos. En la columna *ejemplo* aparece el nombre del ejemplo. El valor de n en cada ejemplo también aparece (los valores exactos de d_i aparecen en la Tabla 2.2). La columna x^* da el valor de la variable x_1 en la solución óptima, es decir, $\bar{m}_1 = x^* + 1$. La columna M muestra la cota superior inicial

ejemplo	d_1, \dots, d_n
I.1	5173 82835 71618 40113 91618 56780 97331 99443 39811 67661
I.2	13956 42464 64164 67639 17570 31020 81873 52330 17587 61921
I.3	3628 56835 89345 23514 88287 24393 55216 48382 12009 7082 84883 38185 48852 83318 95127 7420 4832 52260 63788 68681 91522 60856 48284 22796 51653 87359 34636 91369 32019 52229
I.4	10218 80552 26128 42899 21692 78331 16579 28129 38510 43810 60285 83245 81109 20600 90391 31893 63315 31329 72998 99347 56966 98524 18152 47034 89406 93278 71447 49169 86098 82404
I.5	6305 40866 11010 86388 6992 41758 6671 5476 15794 12321 24890 65024 30998 62708 31002 30369 46368 92055 50089 21348 42871 39775 66691 12266 65787 24612 48497 66292 21489 8110 70723 77707 18120 56111 29364 14465 96869 71387 18941 28016 99060 42831 92040 45410 4539 38394 74780 66260 45802 23869
I.6	17958 56264 21280 72173 21727 37106 56359 76162 22682 59347 99825 102401 69719 88911 24957 69124 77834 18594 87208 75064 53043 81469 65664 80841 27173 91634 75135 79897 76442 69070 58598 27706 75351 25771 34433 103809 73483 95595 21491 34182 90421 25244 88901 80684 41553 59378 53518 45147 47938 29935
II.1	1000 1001 1002
II.2	10315 10316 10317
II.3	75000 75001 75002
II.4	1000 1001 1002 1003 1004
II.5	100 101 102 103 104 105 106 107 108 109
II.6	240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250
III.1	2101 5124 8457
III.2	31013 41014 51015
III.3	4000 4901 5802 6703
III.4	10000 19101 28202 37303
III.5	103 305 507 709 911
III.6	508 929 1350 1771 2192
IV.1	47369 47371 47375
IV.2	10125 10138 10154 10163
IV.3	68365 68410 68433 68451
IV.4	10169 10200 10213 10258 10259
IV.5	12863 12868 12874 12881 12890
IV.6	70003 70007 70012 70015 70016 70019

Tabla 2.2: Descripción de los ejemplos

ejemplo	n	M	x^*	R&A		Grafo tiempo	Mat tiempo	Cplex	
				tiempo	nodos			tiempo	nodos
I.1	10	39810	79	0.06	5818	0.02	0.313	0.72	26084
I.2	10	2584	21	0.03	21444	0.01	0.078	0.39	13705
I.3	30	1207	20	0.01	11306	0.01	66.516	0.73	19289
I.4	30	602	13	0.02	52068	0.01	87.328	1.91	48558
I.5	50	1415	5	0.02	37673	0.02	82.031	1.41	22403
I.6	50	3098	7	0.03	25612	0.02	705.891	2.66	45910
II.1	3	500	500	0.03	125749	0.01	0.953	6.13	252391
II.2	3	10315	5158	2.73	13310219	0.01	14.594	647.56	26629522
II.3	3	37500	37500	27.34	129999999	0.01	354.453	–	146930821
II.4	5	250	250	0.03	94374	0.01	0.594	–	128847821
II.5	10	20	12	0.01	629	0.01	0.047	5.06	183911
II.6	11	24	24	0.01	2723	0.01	0.422	–	32319130
III.1	3	5123	29	0.01	70	0.01	0.078	0.02	135
III.2	3	41013	25507	49.97	149565314	0.01	161.781	–	130296991
III.3	4	2900	2234	0.66	2434462	0.01	5.75	–	132025250
III.4	4	14100	12434	7.67	21706521	0.01	53.281	–	131236017
III.5	5	304	227	0.01	3029	0.01	0.531	2.38	85794
III.6	5	547	547	0.03	57297	0.01	1.297	3073.31	109944937
IV.1	3	47370	15792	26.73	124705473	0.01	93.094	–	143520115
IV.2	4	10137	268	0.25	829463	0.01	0.719	0.01	210
IV.3	4	13681	797	3.24	12427114	0.01	4.578	–	144935201
IV.4	5	10199	113	0.16	357961	0.01	0.334	0.01	0
IV.5	5	12867	477	0.90	2483783	0.01	1.594	–	142912631
IV.6	6	70006	4376	45.48	114883122	0.02	58.89	–	136157474

Tabla 2.3: Resultados computacionales

de x^* tal y como la definimos en 2.6. Las columnas etiquetadas con *tiempo* muestran el tiempo de CPU en segundos consumido por cada procedimiento en un ordenador personal con Intel Pentium IV 3Ghz. La ejecución del algoritmo fue abortada siempre que se superó el tiempo de una hora de cálculo, cada vez que se alcanzó esta situación lo marcamos con “–” en la tabla. Se ejecutaron cuatro funciones distintas que pasamos a explicar:

R&A: Esta es nuestra implementación del algoritmo de ramificación y acotación descrito anteriormente. También aparece en la tabla el número de nodos explorados en el árbol de búsqueda.

Grafo: Esta es nuestra implementación del algoritmo basado en Teoría de Grafos descrito usando el grafo \mathcal{G}' . El problema de calcular un camino mínimo lo resolvimos usando una versión modificada de SPLIB [20], una librería en ANSI C para calcular un camino mínimo en un grafo por medio de una implementación del Algoritmo de Dijkstra que usa los denominados pilas de Fibonacci. La modificación que llevamos a cabo en esta librería está basada en el hecho de que en el grafo \mathcal{G}' conocemos los $n - 1$ nodos vecinos a uno dado sin necesidad de almacenar previamente en ningún tipo de estructura de datos todos los arcos del grafo.

Mat: El software comercial *Mathematica* incluye una herramienta para comprobar si existe una solución no negativa de una ecuación diofántica lineal. Aplicando esta herramienta de forma iterativa se puede calcular el valor de \overline{m}_1 sin más que comprobar la factibilidad del sistema (2.3)–(2.5) para un valor de x_1 fijado. Las iteraciones se crean comenzando por $x_1 = 0$ y se incrementa uno por uno el valor de x_1 hasta que el problema es factible. El número de veces en que se aplica dicha herramienta es exactamente $x^* + 1 = \overline{m}_1$.

Cplex: Es el software comercial *Cplex 9.1* diseñado para resolver problemas de PLE actuando sobre el modelo (2.2)–(2.5). También se muestra el número de nodos visitados en el árbol de búsqueda.

En vista de los datos de la tabla podemos concluir que los ejemplos de la Familia I son fáciles para cualquier aproximación al problema, siendo *Mathematica* la peor opción a medida que n crece. En los otros ejemplos, *Cplex* muestra el peor comportamiento e incluso no es capaz de resolver 10 de los 18 ejemplos por debajo del tiempo límite. El algoritmo de ramificación y acotación descrito fue capaz de resolver todos los ejemplos en un tiempo de computación relativamente corto. Sin embargo, la mejor aproximación en vista de nuestros ejemplos es el basado en Teoría de Grafos. Para investigar los límites de nuestra implementación hemos llevado a cabo más experimentos tratando con valores mayores de d_i . En estos casos, el consumo de memoria se ha visto notablemente incrementado debido al número de nodos y arcos que tienen los grafos. De hecho, cuando los valores de d_i son mayores que 10^9 nuestra implementación no es capaz de resolver el problema en un ordenador personal de 32-bits debido a limitaciones de memoria. El número n parece tener poco impacto en el tiempo de ejecución. En nuestros experimentos, siempre que no se ha llegado al límite de memoria, el tiempo de ejecución ha sido inferior a un segundo.

En vista de la mayor eficiencia del método basado en Teoría de Grafos, este fue el que escogimos para implementar la función `minMult`. En la implementación en ANSI C se usó el grafo reducido \mathcal{G}' y una versión modificada por nosotros de SPLIB [20], una librería que contiene una implementación del Algoritmo de Dijkstra que usa una estructura de datos dinámica denominada pilas de Fibonacci. Al tener SINGULAR la limitación de no poder hacer uso de la memoria de forma dinámica, se optó en la implementación en SINGULAR por un algoritmo de camino mínimo en el grafo \mathcal{G} , que aunque tiene más nodos que \mathcal{G}' , tiene la ventaja de que el peso de las aristas es 0 o 1. Gracias a esta ventaja pudimos implementar una versión del Algoritmo de Dijkstra para \mathcal{G} que no hace uso de estructuras de datos dinámicas. La función `minMult` que recibe como argumentos de entrada un entero positivo b y un vector de enteros positivos $d = (d_1, \dots, d_n)$ y devuelve el menor valor $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $kb \in \mathbb{N}\{d_1, \dots, d_n\}$. Esta función inicialmente formó parte de la librería `cimonom.lib` y posteriormente fue incorporada a `cisimplicial.lib`.

Ejemplo 2.4.8. *Ejemplo de llamada a la función `minMult`:*

```
> int b = 46;
> intvec d = 13,17,59;
> minMult(b,d);
3 // 3 b = 8 d[1] + 2 d[2]
```

Nota 2.4.9. *Vale la pena mencionar que, según ya hemos indicado, en las implementaciones del Algoritmo IC-simplicial que hemos llevado a cabo hemos evitado el cálculo explícito de m_i para todo $a_i \in \mathcal{H}$. En cuanto al cálculo exacto de m_i , se puede plantear fácilmente como un problema que sigue un esquema de Programación Lineal Entera y por tanto, se puede usar cualquier software especializado. Además la generalización del procedimiento de ramificación y acotación que propusimos para el cálculo de \overline{m}_i es directa salvo por el hecho de que la cota superior inicial M no es tan fácil de obtener, así que o bien se podría comenzar sin cota superior inicial o buscar otra cota superior. Incluso el método basado en Teoría de Grafos se podría generalizar, recordamos que para el cálculo de \overline{m}_i ideamos una representación del problema por medio de la Teoría de Grafos inspirado en las ideas de [21] para buscar las soluciones enteras no negativas de ecuaciones diofánticas lineales. En [24], Contejean y Devie generalizan [21] para buscar las soluciones enteras no negativas de sistemas de ecuaciones diofánticas lineales. Siguiendo las mismas ideas que Contejean y Devie usan para generalizar el trabajo de Clausen y Fortenbacher se podría generalizar el método de cálculo de \overline{m}_i para el cálculo de m_i .*

2.4.5 Comportamiento de la implementación

La principal función de la librería `cisimplicial.lib` es la llamada `isCI` que sirve para determinar si un ideal tórico simplicial o simplicial homogéneo es intersección completa. Esta función gestiona las llamadas a las funciones citadas en las subsecciones anteriores (`belongSemigroup`, `cardGroup` y `minMult`) siguiendo los pasos del Algoritmo IC-simplicial. La tarea más costosa del Algoritmo IC-simplicial es la comprobación de si

existen $a_i, a_j \in \mathcal{H}$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$. Con el fin de intentar reducir el mayor número de veces este paso, primero se aplicará el Algoritmo de reducción (ver Tabla 1.1) para obtener \mathcal{A}_{red} , para después ejecutar IC-simplicial con \mathcal{A}_{red} como argumento de entrada.

La función `isIC` recibe como entrada una matriz A de tamaño $m \times n$ con coeficientes enteros no negativos; además, si denotamos por $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^n$ los vectores columna de A , entonces ninguno de estos puede ser el vector nulo y para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ debe existir un $j(i) \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{j(i)} = d_i e_i$ con $d_i \in \mathbb{Z}^+$, de esta forma garantizamos que el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es simplicial. La función devuelve 1 (VERDADERO) si el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ es intersección completa y 0 (FALSO) en caso contrario. Adicionalmente, si se desea, en caso de que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa también muestra un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$.

Ejemplo 2.4.10. *Ejemplo de llamada a la función `isCI`:*

```
> intmat A[3][5] = 12, 0, 0, 1, 2,
                  0, 10, 0, 3, 2,
                  0, 0, 8, 3, 3;

> isCI(A);
0 // NO es intersección completa
> intmat B[3][10] =
52, 0, 0, 20, 28, 30, 42, 32, 36, 40,
0, 52, 0, 30, 42, 45, 63, 32, 36, 40,
0, 0, 52, 100, 140, 150, 210, 48, 54, 6012;
> isCI(B);
1 // SÍ es intersección completa
// Generadores del ideal
toric[1]=x(4)^3-x(6)^2
toric[2]=x(5)^3-x(7)^2
toric[3]=x(4)^2*x(6)-x(5)*x(7)
toric[4]=x(8)^5-x(10)^4
toric[5]=-x(9)^2+x(8)*x(10)
toric[6]=-x(1)^2*x(2)^3*x(3)^10+x(4)*x(7)^2
toric[7]=-x(1)^2*x(2)^2*x(3)^3+x(8)^2*x(10)
```

Hemos llevado a cabo experimentos que avalan el buen funcionamiento de la librería. Por ejemplo, hemos producido ejemplos de ideales tóricos simpliciales $I_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_{27}\} \subset \mathbb{N}^8$ y $0 \leq a_{ij} \leq 4000$ para todo $1 \leq i \leq 27$, $1 \leq j \leq 8$ y la función ha devuelto en menos de un segundo con un ordenador personal Intel Pentium IV 3Ghz si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Capítulo 3

Intersecciones completas en curvas monomiales afines y proyectivas

Una subfamilia importante de la de los ideales tóricos simpliciales es la de ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines, esto es, cuando $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}^+$. Como ideales tóricos simpliciales que son, podemos determinar si son intersección completa por medio del Algoritmo IC-simplicial de la Tabla 2.1. No obstante, como veremos en la Proposición 3.2.1, en este caso si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$. Basándonos en esta peculiaridad propondremos en la Tabla 3.1 una versión más simple del Algoritmo IC-simplicial, que llamaremos IC-curva-monomial. También mostraremos cómo durante la ejecución del nuevo algoritmo, si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, se puede obtener sin ningún esfuerzo adicional, como en el caso simplicial general, un sistema minimal de generadores formado por $\text{ht}(I_{\mathcal{A}}) = n - 1$ binomios \mathcal{A} -homogéneos. Si además $\text{gcd}(\mathcal{A}) = 1$, también se puede obtener el número de Frobenius del semigrupo numérico $\mathbb{N}\mathcal{A}$.

Es importante resaltar que el Algoritmo IC-curva-monomial se obtuvo originariamente como consecuencia del Teorema 3.1.4, un resultado que caracteriza las intersecciones completas a través de la existencia de árboles binarios etiquetados que satisfacen ciertas hipótesis. Sin embargo, en nuestro afán de presentar nuestros resultados de una forma más concisa, en esta memoria vamos a obtener el Algoritmo IC-curva-monomial como consecuencia del Algoritmo IC-simplicial y la Proposición 3.2.1, a pesar de que el Algoritmo IC-simplicial se obtuvo como una generalización no evidente del anterior.

Aplicaremos el algoritmo propuesto para estudiar con detalle el caso en que la dimensión de inmersión de la curva es ≤ 4 , esto es, cuando $n = 3$ o $n = 4$ y daremos criterios específicos para determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa en estos casos.

Haciendo uso de estos resultados, en la Sección 3 pasaremos a estudiar determinadas familias de curvas monomiales afines cuyo ideal tórico asociado es intersección completa. Más concretamente, caracterizaremos cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa siendo \mathcal{A} una sucesión aritmética generalizada, es decir, si existe un $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\{ha_1, a_2, \dots, a_n\}$ es una sucesión aritmética creciente. También cuando \mathcal{A} es una sucesión casi-aritmética generalizada, es decir, si $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ una sucesión aritmética generalizada y a_n es un entero

positivo cualquiera. Terminamos la sección caracterizando cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es una intersección completa en los casos en que \mathcal{A} está formado por ciertos términos de la (p, q) -sucesión de Fibonacci o de la (p, q) -sucesión de Lucas.

La Sección 4 y última de este capítulo la dedicaremos al estudio de la propiedad de intersección completa de los ideales tóricos asociados a curvas monomiales proyectivas, que son exactamente los ideales tóricos simpliciales homogéneos $I_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^2$. Estos ideales se caracterizan por ser los homogeneizados respecto de una nueva variable de ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines. Como todo ideal $I_{\mathcal{A}}$ de esta familia es simplicial homogéneo, sabemos por el Corolario 2.3.2 que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$. Por tanto, basta con aplicar el Algoritmo de reducción de la Tabla 1.1 para calcular \mathcal{A}_{red} y comprobar si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$ para determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Sin embargo, en la Tabla 3.2 propondremos una simplificación de este algoritmo para este caso particular, el Algoritmo IC-curva-monomial-proyectiva, que utilizamos para obtener las versiones proyectivas de las caracterizaciones para curvas monomiales afines de la Sección 3 anterior. De forma más precisa, caracterizamos cuándo el ideal tórico homogéneo de una curva monomial proyectiva ligada a una sucesión aritmética generalizada, a una sucesión casi-aritmética generalizada o a ciertos subconjuntos de la (p, q) -sucesión de Fibonacci o de la (p, q) -sucesión de Lucas es intersección completa.

Los resultados de este capítulo forman parte de los artículos [5] y [8]. En el primero de estos trabajos se propuso el Algoritmo IC-curva-monomial obtenido tras caracterizar las intersecciones completas a través de la existencia de árboles binarios etiquetados que satisfacen ciertas condiciones aritméticas (Teorema 3.1.4). Este algoritmo fue implementado en ANSI C y en SINGULAR; la implementación en SINGULAR dio lugar a la librería `cimonom.lib` [6] que se distribuyó con el software entre las versiones 3-0-2 y 3-1-3 y fue sustituida por `cisimplicial.lib` [7] a partir de la versión 3-1-4. En [5] se realiza además un estudio detallado de la implementación del Algoritmo IC-curva-monomial, así como de la complejidad del mismo que no forma parte de este capítulo de la memoria puesto que en el Capítulo 2 anterior se incluyó dicho estudio en un caso más general. El segundo trabajo se centra en el estudio de determinadas familias de curvas monomiales afines y proyectivas cuyo ideal tórico asociado es intersección completa, lo que constituye las Secciones 3 y 4 de este capítulo citadas anteriormente.

3.1 Generalidades

Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^+$. El conjunto tórico asociado a \mathcal{A} es la curva monomial afín dada paramétricamente por $x_1 = u^{a_1}, \dots, x_n = u^{a_n}$, esto es,

$$\Gamma_{\mathcal{A}} = \{(u^{a_1}, \dots, u^{a_n}) \mid u \in k\}.$$

El ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es el *ideal tórico asociado* a $\Gamma_{\mathcal{A}}$.

Como ya vimos en la Proposición 2.1.4, si k es algebraicamente cerrado, el conjunto tórico $\Gamma_{\mathcal{A}}$ coincide con la variedad tórica $V(I_{\mathcal{A}})$. Cuando k no es necesariamente algebraicamente cerrado, Eliahou y Villarreal demostraron en [36] el siguiente resultado.

Proposición 3.1.1. [36, Lemma 3.4] Si $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, entonces $\Gamma_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}})$.

El problema de caracterizar los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines que son intersección completa fue propuesto por Herzog [53] en 1970 y resuelto por él mismo en el primer caso no trivial, esto es, cuando $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{Z}^+$. Más concretamente, demostró que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si existen $1 \leq i < j \leq 3$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$ y que esto equivale a que se pueden reordenar a_1, a_2, a_3 de forma que $\text{lcm}\{a_3, \gcd\{a_1, a_2\}\} \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$. En el mismo artículo conjeturó que para $n > 3$, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si se pueden reordenar a_1, \dots, a_n de forma que $\text{lcm}\{a_i, \gcd\{a_1, \dots, a_{i-1}\}\} \in \mathbb{N}\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ para todo $i \in \{3, \dots, n\}$, lo que generaliza el criterio para $n = 3$. Es fácil comprobar que esta última condición equivale a que \mathcal{A}_{red} sea \emptyset , en cuyo caso $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa por el Teorema 1.2.21. No obstante, el resultado no se verifica al revés, basta con considerar el conjunto $\mathcal{A} = \{14, 15, 20, 21\}$, ya que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{red}$ y $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

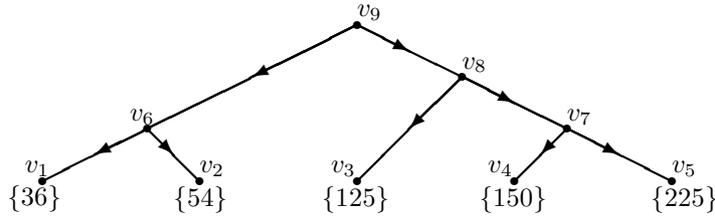
Delorme en [30] fue el primero en proponer un contraejemplo a la conjetura de Herzog y demostró que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si \mathcal{A} es gluing de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 , donde $I_{\mathcal{A}_1}$ y $I_{\mathcal{A}_2}$ son intersección completa (ver [30, Proposition 9]). Además, en el mismo trabajo Delorme propuso un algoritmo para determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. El algoritmo en cuestión se fundamenta en una caracterización de las intersecciones completas dada por la existencia de ciertas "sucesiones distinguidas", cuya construcción se basa en el cálculo del menor entero positivo que pertenece a la intersección de dos subsemigrupos de \mathbb{N} .

Por otra parte, Bermejo, Giménez, Reyes y Villarreal proponen en [11] una caracterización de tipo aritmético-combinatoria de cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa mediante la existencia de un *árbol binario etiquetado por \mathcal{A}* satisfaciendo ciertas condiciones aritméticas. Recordar que un *árbol binario* es un árbol dirigido, conexo, con raíz, cuyos nodos pueden tener cero o 2 hijos. Los nodos sin hijos se denominan *nodos terminales* y el único nodo sin padre se llama la *raíz* del árbol. Un árbol binario con n nodos terminales se dice que está *etiquetado por \mathcal{A}* si sus nodos terminales están etiquetados por $\{a_1\}, \dots, \{a_n\}$. Sea v un nodo de un árbol binario \mathcal{T} etiquetado por $\{a_1, \dots, a_n\}$ y \mathcal{T}_v el subárbol de \mathcal{T} cuyo nodo raíz es v . Si denotamos por Δ_v al subconjunto de $\{a_1, \dots, a_n\}$ tal que \mathcal{T}_v está etiquetado por Δ_v , en [11] se prueba lo siguiente:

Teorema 3.1.2. [11, Theorem 4.3] $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si existe un árbol binario \mathcal{T} etiquetado por \mathcal{A} tal que, para cada nodo no terminal v de \mathcal{T} con hijos v_1 y v_2 , se tiene que $\text{lcm}\{\gcd(\Delta_{v_1}), \gcd(\Delta_{v_2})\} \in \mathbb{N}\Delta_{v_1} \cap \mathbb{N}\Delta_{v_2}$.

Veamos un ejemplo de aplicación de este resultado.

Ejemplo 3.1.3. La siguiente figura muestra un árbol binario \mathcal{T} etiquetado por el conjunto $\mathcal{A} := \{a_1, a_3, a_3, a_4, a_5\}$ con $a_1 := 36$, $a_2 := 54$, $a_3 := 125$, $a_4 := 150$ y $a_5 := 225$ que satisface las condiciones aritméticas del Teorema 3.1.2 y, por tanto, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.



En efecto, \mathcal{T} tiene como nodos terminales a v_1, v_2, v_3, v_4 y v_5 y como nodos no terminales a v_6, v_7, v_8 y v_9 . Además,

- v_9 tiene como hijos a v_6 y v_8 , donde $\Delta_{v_6} = \{36, 54\}$, $\Delta_{v_8} = \{125, 150, 225\}$ y

$$\text{lcm}\{\text{gcd}\{36, 54\}, \text{gcd}\{125, 150, 225\}\} = 450 \in \mathbb{N}\{36, 54\} \cap \mathbb{N}\{125, 150, 225\}.$$

- v_8 tiene como hijos a v_3 y v_7 , donde $\Delta_{v_3} = \{125\}$, $\Delta_{v_7} = \{150, 225\}$ y

$$\text{lcm}\{125, \text{gcd}\{150, 225\}\} = 375 \in \mathbb{N}\{125\} \cap \mathbb{N}\{150, 225\}.$$

- v_7 tiene como hijos a v_4 y v_5 , donde $\Delta_{v_4} = \{150\}$, $\Delta_{v_5} = \{225\}$ y

$$\text{lcm}\{150, 225\} = 450 \in \mathbb{N}\{150\} \cap \mathbb{N}\{225\}.$$

- v_6 tiene como hijos a v_1 y v_2 , donde $\Delta_{v_1} = \{36\}$, $\Delta_{v_2} = \{54\}$ y

$$\text{lcm}\{36, 54\} = 108 \in \mathbb{N}\{36\} \cap \mathbb{N}\{54\}.$$

Si bien el Teorema 3.1.2 aporta una caracterización de tipo combinatorio-aritmético de los ideales tóricos asociados a curvas monomiales afines que son intersección completa, de él no se desprende directamente ningún algoritmo eficiente para determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa; sin embargo, este es el principal resultado en que nos basamos en [5] para obtener el Algoritmo IC-curva-monomial de la Tabla 3.1.

De forma más precisa, el Algoritmo IC-curva-monomial se obtuvo como consecuencia del Teorema 3.1.4, un resultado que combina la noción de árbol binario etiquetado, con los enteros positivos m_i , para obtener una caracterización de los ideales tóricos intersección completa de la que sí se desprende un algoritmo. Para enunciar el Teorema 3.1.4 antes introduciremos algunas definiciones. Sea \mathcal{T} un árbol binario etiquetado por \mathcal{A} y sea v un nodo de \mathcal{T} distinto de la raíz, definimos:

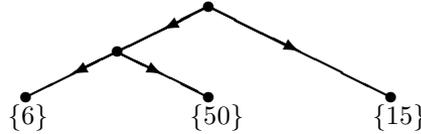
$$a_v := \text{gcd}(\Delta_v), \text{ y } m_v := \min \left\{ b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_v \in \mathbb{N}a_w + \left(\sum_{a_i \in \mathcal{A} \setminus (\Delta_v \cup \Delta_w)} \mathbb{N}a_i \right) \right\},$$

donde v y w son nodos hijos del mismo padre. Se observa que si v es un vértice terminal etiquetado por $\{a_i\}$ entonces $a_v = a_i$ y que si v y w son nodos terminales de \mathcal{T} etiquetados respectivamente por $\{a_i\}$ y $\{a_j\}$, entonces m_v coincide con m_i y m_w con m_j .

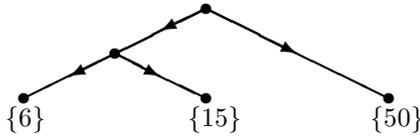
Teorema 3.1.4. $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa \iff existe un árbol binario \mathcal{T} etiquetado por \mathcal{A} tal que, para todo nodo no terminal v distinto de la raíz con hijos v_1 y v_2 , se tiene que $m_v a_v \in \sum_{a_r \in \Delta_v} \mathbb{N} a_r$ y $m_{v_1} a_{v_1} = m_{v_2} a_{v_2}$.

Es fácil observar que si \mathcal{T} es un árbol que satisface las hipótesis del Teorema 3.1.4 también satisface las del Teorema 3.1.2, no siendo cierto el contrario en general. Veamos un ejemplo de este hecho.

Ejemplo 3.1.5. Sea \mathcal{T} el árbol binario etiquetado por $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$ con $a_1 := 6$, $a_2 := 15$ y $a_3 := 50$ siguiente:



Como $m_1 = 5, m_2 = 2, m_3 = 3$ y $m_1 a_1 \neq m_3 a_3$, se observa que \mathcal{T} no cumple las hipótesis del Teorema 3.1.4 pero sí las del Teorema 3.1.2. Esto no supone una contradicción puesto que el siguiente árbol \mathcal{T}' sí que satisface las condiciones del Teorema 3.1.4:



Según hemos señalado, el Algoritmo IC-curva-monomial de la Tabla 3.1 lo obtuvimos originariamente como consecuencia del Teorema 3.1.4, lo que demostramos en el Corolario 3.1 de [5]. Dado que obtendremos el Algoritmo IC-curva-monomial por otro procedimiento, lo que mostraremos en la Proposición 3.2.4 de esta memoria es que este algoritmo devuelve VERDADERO si y solo si existe un árbol binario que satisface las condiciones del Teorema 3.1.4, lo que aporta una nueva prueba del Teorema 3.1.4, que demostramos en el Teorema 2.3 de [5] por otros métodos. En la prueba de la Proposición 3.2.4 mostraremos además cómo, durante la ejecución del Algoritmo IC-curva-monomial, cuando este devuelve VERDADERO, se puede construir un árbol binario que satisface las hipótesis del Teorema 3.1.4.

En caso de que $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, el complemento de $\mathbb{N}\mathcal{A}$ en \mathbb{N} es finito (ver por ejemplo [46, Lemma 1.1]) y se dice que $\mathbb{N}\mathcal{A}$ es un *semigrupo numérico*. Al mayor entero que no pertenece a $\mathbb{N}\mathcal{A}$ se le denomina el *numero de Frobenius* del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ y se denota por $g(\mathbb{N}\mathcal{A})$. El problema de determinar el número de Frobenius de un semigrupo numérico es un problema \mathcal{NP} -duro, como demostró Ramírez Alfonsín en [85], aunque para cualquier valor de n prefijado, Kannan probó en [61] que existe un algoritmo polinomial. Cuando $n = 2$, Sylvester en [95] proporcionó la siguiente formula para el número de Frobenius (ver también [86, Theorem 2.1.1]):

Teorema 3.1.6. [95] $g(\mathbb{N}\{a_1, a_2\}) = a_1 a_2 - a_1 - a_2$.

Para valores de $n \geq 3$, el cálculo del número de Frobenius es un problema hacia el que se dirigen multitud de investigaciones.

En [55], Herzog y Kunz demuestran la siguiente propiedad del número de Frobenius en términos de los generadores de $I_{\mathcal{A}}$.

Proposición 3.1.7. [55] *Sea $\{g_1, \dots, g_k\}$ un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por polinomios \mathcal{A} -homogéneos con $\deg_{\mathcal{A}}(g_1) \leq \dots \leq \deg_{\mathcal{A}}(g_k)$. Entonces,*

$$\sum_{i=1}^{n-1} \deg_{\mathcal{A}}(g_i) - \sum_{i=1}^n a_i \geq g(\mathbb{N}\mathcal{A}).$$

Además, se tiene la igualdad si y solo si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

El interés de la Proposición 3.1.7 radica en que si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, conociendo un sistema minimal de generadores \mathcal{A} -homogéneos de $I_{\mathcal{A}}$ o, al menos, conociendo los \mathcal{A} -grados de los generadores que lo conforman, podemos obtener el número de Frobenius de $\mathbb{N}\mathcal{A}$. Además, si $\gcd(\mathcal{A}) \neq 1$, lo que podemos obtener fácilmente es el número de Frobenius del semigrupo numérico $\mathbb{N}\mathcal{A}'$, donde $\mathcal{A}' := \{a'_1, \dots, a'_n\}$ con $a'_i := a_i/\gcd(\mathcal{A})$ puesto que $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A}'}$.

3.2 Algoritmo IC-curva-monomial

Para obtener el Algoritmo IC-curva-monomial del Algoritmo IC-simplicial, haremos uso del siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. *Si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces existen $i, j : 1 \leq i < j \leq n$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$.*

Demostración. Sea $\{g_1, \dots, g_{n-1}\}$ un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios \mathcal{A} -homogéneos. Por el Lema 1.2.26, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ existe $k(i) \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $g_{k(i)}$ (o $-g_{k(i)}$) es un binomio crítico respecto de x_i . Por tanto existen $i, j : 1 \leq i < j \leq n$ tales que $k(i) = k(j)$, de donde $\deg_{\mathcal{A}}(g_{k(i)}) = m_i a_i = m_j a_j$. \square

Haciendo uso de este resultado, el Algoritmo IC-simplicial de la Tabla 2.1 queda simplificado para el caso de curvas monomiales afines tal y como se muestra en la Tabla 3.1.

Observando el Algoritmo IC-curva-monomial vemos que hay dos posibles situaciones en las que el algoritmo devuelve FALSO, veamos ejemplos de ambas.

Ejemplo 3.2.2. *Haciendo uso del Algoritmo IC-curva-monomial, vemos que el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ con $a_1 := 90, a_2 := 140, a_3 := 147, a_4 := 150$ y $a_5 := 196$ no es intersección completa. Definimos $G_1 := \mathcal{A}$ y $V_i := \{a_i\}$ para todo $1 \leq i \leq 5$, se tiene que $m_1 = 5, m_2 = 3, m_3 = 4, m_4 = 3$ y $m_5 = 3$. Se observa que*

Algoritmo IC-curva-monomial

Entrada: $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^+$
Salida: VERDADERO o FALSO
 $G := \mathcal{A}$
 $V_i := \{a_i\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$
 $m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$
 $k := 0$
while $\exists a_i, a_j \in G$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$ **do**
 if $m_i a_i \notin \mathbb{N}V_i \cap \mathbb{N}V_j$ **then**
 return FALSO
 end if
 $k := k + 1$
 if $k = n - 1$ **then**
 return VERDADERO
 end if
 $a_{n+k} := \gcd\{a_i, a_j\}; G := (G \setminus \{a_i, a_j\}) \cup \{a_{n+k}\}; V_{n+k} := V_i \cup V_j$
 $m_{n+k} := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_{n+k} \in \mathbb{N}(G \setminus \{a_{n+k}\})\}$
end while
return FALSO

Tabla 3.1: Algoritmo IC-curva-monomial

$m_1 a_1 = m_4 a_4 = 450 \in \mathbb{N}V_1 \cap \mathbb{N}V_3$; por tanto se definen $a_6 := \gcd\{a_1, a_4\} = 30$, $G_2 := (G_1 \setminus \{a_1, a_4\}) \cup \{a_6\} = \{a_2, a_3, a_5, a_6\} = \{140, 147, 196, 30\}$ y $V_6 := V_1 \cup V_4 = \{90, 150\}$. Ahora, calculamos $m_6 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_6 \in \mathbb{N}\{a_2, a_3, a_5\}\} = 14$ y obtenemos que $m_6 a_6 = 420$. Observamos que $m_2 a_2 = m_6 a_6 = 420 = 3 \cdot a_1 + a_4 \in \mathbb{N}V_2 \cap \mathbb{N}V_6$; entonces definimos $a_7 := \gcd\{a_2, a_6\} = 10$, $G_3 := (G_2 \setminus \{a_2, a_6\}) \cup \{a_7\} = \{a_3, a_5, a_7\}$ y $V_7 := V_2 \cup V_6 = \{90, 140, 150\}$. Ahora, calculamos $m_7 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_7 \in \mathbb{N}\{a_3, a_5\}\} = 49$ y obtenemos que $m_7 a_7 = 490$. Observamos que $m_3 a_3 = m_5 a_5 \in \mathbb{N}V_3 \cap \mathbb{N}V_5$; entonces definimos $a_8 := \gcd\{a_3, a_5\} = 49$, $G_4 := (G_3 \setminus \{a_3, a_5\}) \cup \{a_8\} = \{a_7, a_8\}$ y $V_8 := V_4 \cup V_5 = \{147, 196\}$. Ahora, calculamos $m_8 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_8 \in \mathbb{N}a_7\} = 10$ y $m_8 a_8 = 490$. Observamos que $m_7 a_7 = m_8 a_8$ y que $m_7 a_7 = 2a_3 + a_5 \in \mathbb{N}V_8$; sin embargo $m_7 a_7 \notin \mathbb{N}V_7$ y por tanto $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa.

Ejemplo 3.2.3. Veamos que el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ con $a_1 := 22$, $a_2 := 33$, $a_3 := 72$, $a_4 := 78$ y $a_5 := 84$ no es intersección completa. De hecho, si definimos $G_1 := \mathcal{A}$ y $V_i := \{a_i\}$ para todo $1 \leq i \leq 5$, se tiene que $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 2$, $m_4 = 2$ y $m_5 = 4$. Se observa que $m_1 a_1 = m_2 a_2 = 66 \in \mathbb{N}V_1 \cap \mathbb{N}V_2$; por tanto se definen $a_6 := \gcd\{a_1, a_2\} = 11$, $G_2 := (G_1 \setminus \{a_1, a_2\}) \cup \{a_6\} = \{a_3, a_4, a_5, a_6\} =$

$\{72, 78, 84, 11\}$ y $V_6 := V_1 \cup V_2 = \{22, 33\}$. Ahora, calculamos $m_6 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_6 \in \mathbb{N}\{a_3, a_4, a_5\}\} = 30$ y obtenemos que $m_6 a_6 = 330$. Se observa que $m_i a_i \neq m_j a_j$ para todo $3 \leq i < j \leq 6$ y por tanto $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa.

En relación a la implementación del Algoritmo IC-curva-monomial, la operación más costosa computacionalmente es la del cálculo de m_i , que llevamos a cabo siguiendo la aproximación al problema vía Teoría de Grafos explicada en la Subsección 2.4.4. Con el objetivo de comparar nuestro algoritmo con el descrito por Delorme [30, Section 14], efectuamos una implementación de su algoritmo siguiendo la misma filosofía. La tarea más costosa en el algoritmo de Delorme consiste en calcular el menor entero positivo que pertenece a dos subsemigrupos de \mathbb{N} , que denotamos por $\mathbb{N}\{a_1, \dots, a_k\}$ y $\mathbb{N}\{a_{k+1}, \dots, a_n\}$. Para calcularlo, adaptamos el procedimiento de Teoría de Grafos de Clausen y Fortenbacher [21] diseñado para resolver la ecuación diofántica lineal homogénea $d_1 x_1 + \dots + d_k x_k = d_{k+1} x_{k+1} + \dots + d_n x_n$. En este contexto, hubo que calcular un camino mínimo en un grafo que tiene $\max\{d_1, \dots, d_k\} + \max\{d_{k+1}, \dots, d_n\}$ nodos y $(n - k) \max\{d_1, \dots, d_k\} + k \max\{d_{k+1}, \dots, d_n\}$ arcos, en el cual los pesos de los arcos no son 0 o 1, ni se puede hacer una reducción de este grafo como la descrita en la Subsección 2.4.4. Por estos motivos, encontrar los caminos mínimos en el algoritmo de Delorme consume mucho más tiempo de computación que encontrar los respectivos caminos mínimos en el Algoritmo IC-curva-monomial y esto hace que, a la postre, nuestro algoritmo mejore al de Delorme.

La siguiente proposición relaciona el Algoritmo IC-curva-monomial con la existencia de árboles binarios etiquetados. Como consecuencia directa de esta proposición, se obtiene una demostración del Teorema 3.1.4 de la sección anterior.

Proposición 3.2.4. $\text{IC-curva-monomial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO} \iff \text{existe un árbol binario } \mathcal{T} \text{ etiquetado por } \mathcal{A} \text{ que satisface las condiciones del Teorema 3.1.4.}$

Demostración. (\Leftarrow) Afirmamos que \mathcal{T} satisface las hipótesis del Teorema 3.1.2; en efecto, para cada nodo v de \mathcal{T} con hijos v_1 y v_2 se tiene que $\text{lcm}\{\text{gcd}(\Delta_{v_1}), \text{gcd}(\Delta_{v_2})\} = m_{v_1} a_{v_1} = m_{v_2} a_{v_2} \in \mathbb{N}\Delta_{v_1} \cap \mathbb{N}\Delta_{v_2}$. Entonces por el Teorema 3.1.2 se tiene que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y, por tanto, $\text{IC-curva-monomial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$.

(\Rightarrow) Veamos cómo construir un árbol binario etiquetado por \mathcal{A} que satisface las hipótesis del Teorema 3.1.4 durante la ejecución del Algoritmo IC-curva-monomial. Comenzamos denotando por \mathcal{T}_i al árbol con un único nodo v_i etiquetado por $\{a_i\}$ para $1 \leq i \leq n$. Como $\text{IC-curva-monomial}(\mathcal{A}) = \text{VERDADERO}$, en cada ejecución del bucle **while** existen $a_i, a_j \in G$ tales que $m_i a_i = m_j a_j$ y definimos \mathcal{T}_{n+k} como el árbol que tiene un nodo raíz v_{n+k} y como subárboles hijos a \mathcal{T}_i y \mathcal{T}_j . Cuando el algoritmo termina su ejecución se ha construido el árbol binario $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{2n-1}$, veamos que \mathcal{T} satisface las condiciones del Teorema 3.1.4.

Por construcción, \mathcal{T} es un árbol binario etiquetado por \mathcal{A} tal que para todo vértice v de \mathcal{T} se tiene que $\Delta_{v_i} = V_i$ y si denotamos $a_{v_i} := \text{gcd}(\Delta_{v_i})$, entonces $a_i = a_{v_i}$ para todo $1 \leq i \leq 2n - 2$. Para todo vértice v de \mathcal{T} distinto de la raíz, denotamos $m_v := \min \left\{ b \in \right.$

$\mathbb{Z}^+ \mid ba_v \in \mathbb{N}a_w + \left(\sum_{a_i \in \mathcal{A} \setminus (\Delta_v \cup \Delta_w)} \mathbb{N}a_i \right)$, donde v y w son vértices hijos del mismo padre. Si demostramos que $m_i = m_{v_i}$ para todo nodo distinto de la raíz tendremos que \mathcal{T} satisface las condiciones del Teorema 3.1.4. Sea v_i un nodo distinto de la raíz y sea v_j el nodo con mismo padre que v_i . Como durante la ejecución del algoritmo obtuvimos que $m_i a_i = m_j a_j$, entonces $m_i a_i = \text{lcm}\{a_i, a_j\}$ y de la definición de m_{v_i} se tiene la desigualdad $m_i \geq m_{v_i}$. Si v_j es un nodo terminal o $j < i$, entonces $m_i = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{a_k \in G \setminus \{a_i\}} \mathbb{N}a_k\}$, donde G es un conjunto tal que $a_j \in G$ (porque v_j es terminal o $j < i$) y $\mathbb{N}a_j + \sum_{a_k \notin V_i \cup V_j} \mathbb{N}a_k \subset \sum_{a_k \in G \setminus \{a_i\}} \mathbb{N}a_k$, de donde se tiene que $m_i \leq m_{v_i}$. Si v_j es un nodo no terminal y $j > i$, como $m_{v_i} a_i = \alpha_j a_j + \sum_{a_k \in \mathcal{A} \setminus (V_i \cup V_j)} \alpha_k a_k$, entonces

$$(m_i - m_{v_i})a_i + \sum_{a_k \in \mathcal{A} \setminus (V_i \cup V_j)} \alpha_k a_k = (m_j - \alpha_j)a_j.$$

Por definición $m_j := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_j \in \mathbb{N}(G \setminus \{a_j\})\}$, donde G es un conjunto tal que $a_i \in G$ (porque $j > i$) y $\mathbb{N}a_i + \sum_{a_k \in \mathcal{A} \setminus (V_i \cup V_j)} \mathbb{N}a_k \subset \sum_{a_k \in G \setminus \{a_j\}} \mathbb{N}a_k$, entonces se tiene que $\alpha_j = m_j$ o $\alpha_j = 0$. Si $\alpha_j = m_j$ entonces $m_{v_i} = m_i$ y si $\alpha_j = 0$ entonces $m_{v_i} a_i \in \sum_{a_k \notin V_i \cup V_j} \mathbb{N}a_k$, en cuyo caso $m_{v_i} \geq m_i$ y habríamos terminado. \square

Veremos ahora un ejemplo de ejecución del Algoritmo IC-curva-monomial en el que el algoritmo devuelve VERDADERO y, por tanto, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Además en el mismo ejemplo mostraremos cómo obtener durante la ejecución del algoritmo un árbol que satisface las condiciones del Teorema 3.1.4. Para ello, seguiremos la construcción descrita en la demostración de la Proposición 3.2.4.

Ejemplo 3.2.5. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ con $a_1 = 36$, $a_2 = 54$, $a_3 = 125$, $a_4 = 150$ y $a_5 = 225$, veamos que el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. En efecto, sean

$$G_1 := \mathcal{A}, V_1 := \{36\}, V_2 := \{54\}, V_3 := \{125\}, V_4 := \{150\} \text{ y } V_5 := \{225\}$$

y denotamos por \mathcal{T}_i al árbol con un único nodo etiquetado por $\{a_i\}$ para todo $1 \leq i \leq 5$. Calculamos

$$m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, 5\} \\ j \neq i}} \mathbb{N}a_j\} \text{ para todo } i \in \{1, \dots, 5\}$$

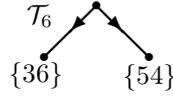
y obtenemos $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$, $m_4 = 3$, $m_5 = 2$.

Observamos que $m_1 a_1 = m_2 a_2$ y que $m_1 a_1 \in \mathbb{N}V_1 \cap \mathbb{N}V_2$. Definimos

$$a_6 := \gcd\{a_1, a_2\} = 18, V_6 := V_1 \cup V_2 = \{36, 54\},$$

$$G_2 := \{a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{125, 150, 225, 18\}, \text{ y}$$

\mathcal{T}_6 el árbol con nodo raíz v_6 y subárboles hijos \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 :

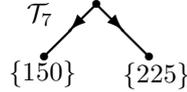


Calculamos $m_6 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_6 \in \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4 + \mathbb{N}a_5\}$ y obtenemos que $m_6 = 25$. Ahora comparamos $m_3a_3, m_4a_4, m_5a_5, m_6a_6$, observamos que $m_4a_4 = m_5a_5 = 450$ y que $m_4a_4 \in \mathbb{N}V_4 \cap \mathbb{N}V_5$. Entonces definimos

$$a_7 := \gcd\{a_4, a_5\} = 75, \quad V_7 := V_4 \cup V_5 = \{150, 225\},$$

$$G_3 := \{a_3, a_6, a_7\} = \{125, 18, 75\}, \quad y$$

\mathcal{T}_7 el árbol con nodo raíz v_7 y subárboles hijos \mathcal{T}_4 y \mathcal{T}_5 :

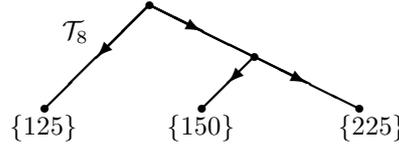


Calculamos $m_7 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_7 \in \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_6\}$ y obtenemos que $m_7 = 5$. Ahora comparamos m_3a_3, m_6a_6 y m_7a_7 , observamos que $m_3a_3 = m_7a_7$ y comprobamos si $m_3a_3 \in \mathbb{N}V_3 \cap \mathbb{N}V_7$, llegando a que en efecto $m_7a_7 = 3a_3 = a_4 + a_5 \in \mathbb{N}V_3 \cap \mathbb{N}V_7$. Entonces definimos

$$a_8 := \gcd\{a_3, a_7\} = \gcd\{125, 75\} = 25,$$

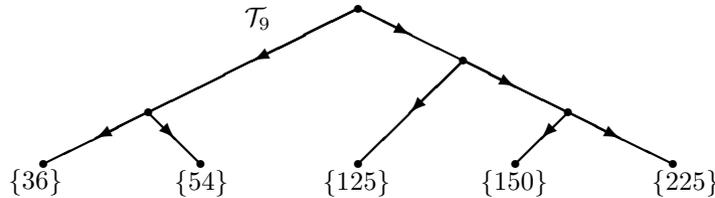
$$V_8 := V_3 \cup V_7 = \{125, 150, 225\}, \quad G_4 := \{a_6, a_8\} = \{18, 25\}, \quad y$$

\mathcal{T}_8 el árbol con nodo raíz v_8 y subárboles hijos \mathcal{T}_3 y \mathcal{T}_7 :

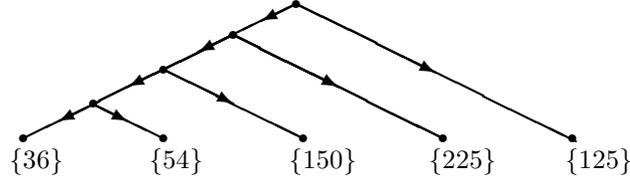


Calculamos $m_8 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_8 \in \mathbb{N}a_6\}$ y obtenemos que $m_8 = 18$. Finalmente, observamos que $m_6a_6 = m_8a_8$ y comprobamos si $m_6a_6 \in \mathbb{N}V_6 \cap \mathbb{N}V_8$, llegando a que en efecto $m_6a_6 = 8a_1 + 3a_2 = 2a_5 \in \mathbb{N}V_6 \cap \mathbb{N}V_8$.

Por último se define \mathcal{T}_9 como el árbol con nodo raíz v_9 y subárboles hijos \mathcal{T}_6 y \mathcal{T}_8 . Se observa que \mathcal{T}_9 es un árbol binario etiquetado por \mathcal{A} que satisface las condiciones aritméticas del Teorema 3.1.4.



Durante la ejecución del algoritmo tuvimos en cuenta que $m_4a_4 = m_5a_5$, pero lo cierto es que $m_4a_4 = m_5a_5 = m_6a_6$. Si en su lugar hubiésemos tenido en cuenta que $m_4a_4 = m_6a_6$, habríamos construido el siguiente árbol que también satisface las condiciones del Teorema 3.1.4:



Como ya indicamos en la Nota 2.2.9, cuando el Algoritmo IC-curva-monomial devuelve VERDADERO se puede obtener sin esfuerzo adicional un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios \mathcal{A} -homogéneos. Más concretamente, siempre que $m_i a_i = m_j a_j$ se comprueba que $m_i a_i \in \mathbb{N}V_i \cap \mathbb{N}V_j$ y por tanto se puede escribir $m_i a_i = \sum_{a_r \in V_i} \alpha_r a_r = \sum_{a_s \in V_j} \alpha_s a_s$; entonces construimos el binomio $g := \prod_{a_r \in V_i} x_r^{\alpha_r} - \prod_{a_s \in V_j} x_s^{\alpha_s}$ de \mathcal{A} -grado $m_i a_i = m_j a_j$. El conjunto de binomios así construido forma un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$.

Como por cada igualdad $m_i a_i = m_j a_j$ construimos un binomio \mathcal{A} -homogéneo de \mathcal{A} -grado $m_i a_i$, haciendo uso de la Proposición 3.1.7 podemos obtener el número de Frobenius del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$, cuando $\gcd(\mathcal{A}) = 1$.

Corolario 3.2.6. *Si $\gcd(\mathcal{A}) = 1$ y $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces*

$$g(\mathbb{N}\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{2n-2} \frac{m_i a_i}{2} - \sum_{i=1}^n a_i,$$

donde $m_1, \dots, m_{2n-2}, a_{n+1}, \dots, a_{2n-2}$ son los enteros positivos obtenidos en la ejecución del Algoritmo IC-curva-monomial.

El Corolario 3.2.6 también es consecuencia de [11, Nota 4.5].

En el Ejemplo 3.2.5, comprobamos haciendo uso del Algoritmo IC-curva-monomial que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa donde $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} \subset \mathbb{Z}^+$ con $a_1 = 36, a_2 = 54, a_3 = 125, a_4 = 150$ y $a_5 = 225$. Veamos cómo se obtiene un sistema minimal de generadores del ideal así como el número de Frobenius del semigrupo numérico $\mathbb{N}\mathcal{A}$.

Durante la ejecución del algoritmo hicimos las siguientes comprobaciones:

- Calculamos m_i para todo $1 \leq i \leq 5$ y obtuvimos $m_1 = 3, m_2 = 2, m_3 = m_4 = 3$ y $m_5 = 2$.
- Observamos que $3a_1 = m_1 a_1 = m_2 a_2 = 2a_2$, entonces definimos $g_1 := x_1^3 - x_2^2$.
- Definimos $a_6 := \gcd\{a_1, a_2\}$ y obtuvimos que $m_6 = 25$.
- Observamos que $3a_4 = m_4 a_4 = m_5 a_5 = 2a_5$, entonces definimos $g_2 := x_4^3 - x_5^2$.
- Definimos $a_7 := \gcd\{a_4, a_5\}$ y obtuvimos que $m_7 = 5$.

- Observamos que $3a_3 = m_3a_3 = m_7a_7 = 5a_7$. Comprobamos que $m_7a_7 \in \mathbb{N}\{a_4, a_5\}$ obteniendo que $m_7a_7 = a_4 + a_5$ y entonces definimos $g_3 := x_3^3 - x_4x_5$.
- Definimos $a_8 := \gcd\{a_3, a_7\}$ y obtuvimos que $m_8 = 18$.
- Observamos que $25a_6 = m_6a_6 = m_8a_8 = 18a_8$. Comprobamos que $m_6a_6 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\} \cap \mathbb{N}\{a_3, a_4, a_5\}$ obteniendo que $m_6a_6 = 8a_1 + 3a_2 = 2a_5$ y finalmente definimos $g_4 := x_1^8x_2^3 - x_5^2$.

Concluimos que $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ es un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios. Además, como $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, también tenemos que el número de Frobenius de $\mathbb{N}\mathcal{A}$ es

$$g(\mathbb{N}\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^8 \frac{m_i a_i}{2} - \sum_{i=1}^5 a_i = (108 + 450 + 375 + 450) - (36 + 54 + 125 + 150 + 225) = 793.$$

A partir de un árbol que satisface las condiciones del Teorema 3.1.4 también se puede obtener un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por binomios \mathcal{A} -homogéneos, como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.2.7. *Sea \mathcal{T} un árbol binario etiquetado por \mathcal{A} satisfaciendo las hipótesis del Teorema 3.1.4. Entonces,*

- (1) $\{g_v \mid v \text{ es nodo no terminal de } \mathcal{T}\}$ es un sistema de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ formado por $n - 1$ binomios, donde para todo vértice no terminal v de \mathcal{T} con hijos v_1 y v_2 se tiene que $g_v := \prod x_r^{\alpha_r} - \prod x_s^{\beta_s}$ con $\alpha_r, \beta_s \geq 0$ tales que

$$\text{lcm}\{\gcd(\Delta_{v_1}), \gcd(\Delta_{v_2})\} = \sum_{a_r \in \Delta_{v_1}} \alpha_r a_r = \sum_{a_s \in \Delta_{v_2}} \beta_s a_s.$$

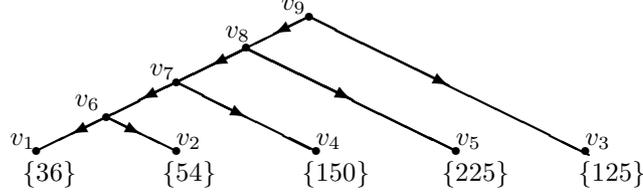
- (2) Si $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, el número de Frobenius $g(\mathbb{N}\mathcal{A})$ del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ es

$$g(\mathbb{N}\mathcal{A}) = \sum_{v \text{ nodo de } \mathcal{T} \neq \text{raiz}} \frac{m_v a_v}{2} - \sum_{i=1}^n a_i.$$

Demostración. La primera afirmación es consecuencia directa de [11, Nota 4.5 (i)], ya que si v es nodo no terminal de \mathcal{T} y v_1, v_2 son sus hijos, entonces $\text{lcm}\{\gcd(\Delta_{v_1}), \gcd(\Delta_{v_2})\} = m_{v_1}a_{v_1} = m_{v_2}a_{v_2} \in \mathbb{N}\Delta_{v_1} \cap \mathbb{N}\Delta_{v_2}$. De (1) se sigue que $I_{\mathcal{A}}$ está generado por binomios de \mathcal{A} -grados $m_{v_i}a_{v_i} = m_{v_j}a_{v_j}$ donde v_i y v_j son nodos de \mathcal{T} hijos del mismo padre y, por tanto, distintos de la raíz. De aquí y por la Proposición 3.1.7 se sigue (2) (ver también [11, Nota 4.5 (ii)]) \square

Ilustremos este resultado con un ejemplo:

Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ con $a_1 = 36$, $a_2 = 54$, $a_3 = 125$, $a_4 = 150$ y $a_5 = 225$ y sea \mathcal{T} el siguiente árbol binario etiquetado por \mathcal{A} que, como indicamos en el Ejemplo 3.2.5, satisface las condiciones del Teorema 3.1.4:



- v_6 tiene como hijos a v_1 y a v_2 , $\Delta_{v_1} = \{a_1\}$ y $\Delta_{v_2} = \{a_2\}$ y

$$\text{lcm}\{\text{gcd}(\Delta_{v_1}), \text{gcd}(\Delta_{v_2})\} = 108 = 3a_1 = 2a_2 \in \mathbb{N}(\Delta_{v_1}) \cap \mathbb{N}(\Delta_{v_2}),$$

por tanto definimos $g_{v_6} := x_1^3 - x_2^2$.

- v_7 tiene como hijos a v_4 y a v_6 , $\Delta_{v_4} = \{a_4\}$ y $\Delta_{v_6} = \{a_1, a_2\}$ y

$$\text{lcm}\{\text{gcd}(\Delta_{v_4}), \text{gcd}(\Delta_{v_6})\} = 450 = 3a_4 = 5a_1 + 5a_2 \in \mathbb{N}(\Delta_{v_4}) \cap \mathbb{N}(\Delta_{v_6}),$$

por tanto definimos $g_{v_7} := x_4^3 - x_1^5 x_2^5$.

- v_8 tiene como hijos a v_5 y a v_7 , $\Delta_{v_5} = \{a_5\}$ y $\Delta_{v_7} = \{a_1, a_2, a_4\}$ y

$$\text{lcm}\{\text{gcd}(\Delta_{v_5}), \text{gcd}(\Delta_{v_7})\} = 450 = 2a_5 = 5a_1 + 5a_2 \in \mathbb{N}(\Delta_{v_5}) \cap \mathbb{N}(\Delta_{v_7}),$$

por tanto definimos $g_{v_8} := x_5^2 - x_1^5 x_2^5$.

- v_9 tiene como hijos a v_3 y a v_8 , $\Delta_{v_3} = \{a_3\}$ y $\Delta_{v_8} = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ y

$$\text{lcm}\{\text{gcd}(\Delta_{v_3}), \text{gcd}(\Delta_{v_8})\} = 375 = 3a_3 = a_4 + a_5 \in \mathbb{N}(\Delta_{v_3}) \cap \mathbb{N}(\Delta_{v_8}),$$

por tanto definimos $g_{v_9} := x_3^3 - x_4 x_5$.

En virtud de la Proposición 3.2.7 concluimos que $\{g_{v_6}, g_{v_7}, g_{v_8}, g_{v_9}\}$ es un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ y que $g(\mathbb{N}\mathcal{A}) = 793$.

Terminaremos esta sección demostrando criterios específicos para determinar si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa cuando $n = 3$ o $n = 4$. El primero es la Proposición 3.2.8, que presenta una prueba alternativa del resultado de Herzog cuando $n = 3$. Si combinamos la Proposición 3.2.1 específica para curvas monomiales, con el Teorema 1.2.27 válido para ideales tóricos cualesquiera, obtenemos condiciones necesarias para que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa. En la Proposición 3.2.9 probaremos que estas condiciones también son suficientes cuando $n = 4$.

Proposición 3.2.8. [53, Theorem 3.8] Si $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \mathbb{Z}^+$, son equivalentes:

- (1) $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa
- (2) $\exists i, j : 1 \leq i < j \leq 3$, tales que $m_i a_i = m_j a_j$
- (3) $\exists i \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\text{lcm}\{a_i, \text{gcd}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})\} \in \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Por la Proposición 3.2.1. (2) \Rightarrow (3) Supongamos que $m_2 a_2 = m_3 a_3$ y veamos que $\text{lcm}\{a_1, \text{gcd}\{a_2, a_3\}\} \in \mathbb{N}\{a_2, a_3\}$. Denotamos $a_4 := \text{gcd}\{a_2, a_3\}$ y sean $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$ con $\lambda_2 \geq 0$ tales que $\text{lcm}\{a_1, a_4\} = \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3$. Entonces escribimos $\lambda_2 = qm_2 + \lambda'_2$ con $0 \leq \lambda'_2 < m_2$ y denotamos $t := \lambda_3 + qm_3 \in \mathbb{Z}$, entonces $\text{lcm}\{a_1, a_4\} = \lambda'_2 a_2 + ta_3$. Si demostramos que $t \in \mathbb{N}$ ya tendríamos que $\text{lcm}\{a_1, a_4\} \in \mathbb{N}\{a_2, a_3\}$. En efecto, si $\lambda'_2 = 0$ entonces $t > 0$ y si $\lambda'_2 > 0$ entonces $\lambda'_2 a_2 = \text{lcm}\{a_1, a_4\} - ta_3$, pero como $0 < \lambda'_2 < m_2$, de la definición de m_2 tenemos que $t > 0$. (3) \Rightarrow (1) Es fácil puesto que si $B_i a_i = \text{lcm}\{a_i, \text{gcd}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})\} \in \mathbb{N}(\mathcal{A} \setminus \{a_i\})$ para algún $1 \leq i \leq 3$, entonces por la Proposición 1.2.19 y el Lema 1.2.17, se tiene que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si lo es $I_{\mathcal{A} \setminus \{a_i\}}$, y este último es intersección completa ya que tiene altura 1. \square

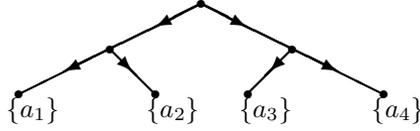
Proposición 3.2.9. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \subset \mathbb{Z}^+$. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa \iff se satisfacen las siguientes condiciones:

- 1 existen $u, v : 1 \leq u < v \leq 4$ tales que $m_u a_u = m_v a_v$
- 2 siempre que $m_u a_u = m_v a_v$ con $1 \leq u < v \leq 4$, se tiene que
 - (a) $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa, donde $\mathcal{A}' := \{a'_1, a'_2, a'_3\}$, con $a'_k := a_k$ para $k < v$ y $k \neq u$, $a'_k := a_{k+1}$ para $k \geq v$, y $a'_u := \text{gcd}\{a_u, a_v\}$;
 - (b) $m'_k = m_k$ para $k < v$ y $k \neq u$, $m'_k = m_{k+1}$ para $k \geq v$, y $m'_u a'_u \in \mathbb{N} a_u + \mathbb{N} a_v$, donde $m'_k := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba'_k \in \sum_{s \in \{1,2,3\} \setminus \{k\}} \mathbb{N} a'_s\}$ para todo $k \in \{1, 2, 3\}$.

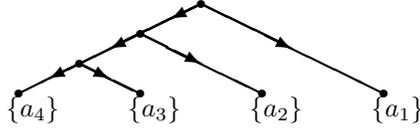
Demostración. (\Rightarrow) Directo de la Proposición 3.2.1 y el Teorema 1.2.27. (\Leftarrow) Supongamos que $m_3 a_3 = m_4 a_4$ y sea $a_5 := \text{gcd}\{a_3, a_4\}$. Asumimos que $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa con $\mathcal{A}' = \{a_1, a_2, a_5\}$ y que $m'_1 = m_1$, $m'_2 = m_2$ y $m'_5 a_5 \in \mathbb{N} a_3 + \mathbb{N} a_4$, donde $m'_r := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_r \in \sum_{s \in \{1,2,5\} \setminus \{r\}} \mathbb{N} a_s\}$ para todo $r \in \{1, 2, 5\}$. Como $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa, por la Proposición 3.2.8 y su prueba sabemos que se satisface una de estas tres condiciones:

- $m'_1 a_1 = m'_2 a_2$ y $\text{lcm}\{\text{gcd}\{a_1, a_2\}, a_5\} \in \mathbb{N} a_1 + \mathbb{N} a_2$;
- $m'_2 a_2 = m'_5 a_5$ y $\text{lcm}\{a_1, \text{gcd}\{a_2, a_5\}\} \in \mathbb{N} a_2 + \mathbb{N} a_5$;
- $m'_1 a_1 = m'_5 a_5$ y $\text{lcm}\{a_2, \text{gcd}\{a_1, a_5\}\} \in \mathbb{N} a_1 + \mathbb{N} a_5$.

En el primer caso se tiene que $m_1 a_1 = m_2 a_2$, $m_3 a_3 = m_4 a_4$ y que $\text{lcm}\{\text{gcd}\{a_1, a_2\}, a_5\} \in \mathbb{N} a_1 + \mathbb{N} a_2$. Entonces $m'_5 a_5 = \text{lcm}\{\text{gcd}\{a_1, a_2\}, a_5\}$ y, por tanto $m'_5 a_5 = m'_6 a_6$ pertenece a $(\mathbb{N} a_1 + \mathbb{N} a_2) \cap (\mathbb{N} a_3 + \mathbb{N} a_4)$. Por tanto, IC-curva-monomial devuelve VERDADERO y se construye el siguiente árbol:



Para el segundo caso, $m_3a_3 = m_4a_4$ y $m'_5a_5 \in \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$. Además, $m'_2a_2 = m'_5a_5$ y como $m'_1a_1 = \text{lcm}\{a_1, \text{gcd}\{a_2, a_3, a_4\}\}$ y $m'_1 = m_1$, se sigue que $\text{lcm}\{a_1, \text{gcd}\{a_2, a_3, a_4\}\} \in \mathbb{N}a_2 + \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$. Por tanto, IC-curva-monomial devuelve VERDADERO y se construye el siguiente árbol:



Esto termina la demostración, puesto que el tercer caso es similar al segundo. \square

El siguiente ejemplo muestra cómo aplicar este resultado para demostrar que un ideal tórico es intersección completa.

Ejemplo 3.2.10. Para $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ con $a_1 = 15, a_2 = 70, a_3 = 98$ y $a_4 = 147$, el ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. En efecto, $m_1 = 14, m_2 = 3, m_3 = 3$ y $m_4 = 2$. Observamos que $m_3a_3 = m_4a_4$ y definimos $a_5 := \text{gcd}\{a_3, a_4\}$ y $m'_r := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_r \in \sum_{s \in \{1,2,5\}, s \neq r} \mathbb{N}a_s\}$ para todo $r \in \{1, 2, 5\}$. Obtenemos $a_5 = 49, m'_1 = 14 = m_1, m'_2 = 3 = m_2, m'_5 = 5$ y $m'_5a_5 = 245 \in \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$ ($245 = 1 \cdot 98 + 1 \cdot 147$). Como $m'_1a_1 = m'_2a_2$, por la Proposición 3.2.8 se tiene que $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa donde $\mathcal{A}' = \{a_1, a_2, a_5\}$ y podemos concluir que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Sin embargo, la misma caracterización no es cierta en general cuando $n \geq 5$, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.11. El ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ con $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, donde $a_1 := 45, a_2 := 70, a_3 := 75, a_4 := 98$ y $a_5 := 147$ no es intersección completa, como vimos en el Ejemplo 2.2.8. No obstante, se verifica que $m_1a_1 = m_3a_3 = 225$ y si denotamos $a'_1 := \text{gcd}\{a_1, a_3\} = 15, a'_2 := 70, a'_3 := 98, a'_4 := 147$ y $\mathcal{A}' := \{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4\}$ se tiene que $I_{\mathcal{A}'}$ es intersección completa, como vimos en el Ejemplo 3.2.10. Además, se comprueba que $m'_1 = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid 15b \in \mathbb{N}\{70, 98, 147\}\} = 14, m'_1a'_1 = 210 \in \mathbb{N}\{45, 75\}, m'_2 = m_2 = 3, m'_3 = m_4 = 3$ y $m'_4 = m_5 = 2$.

3.3 Intersecciones completas en ciertas curvas monomiales afines

El objetivo de esta sección es proporcionar familias de curvas monomiales afines cuyo ideal tórico asociado es intersección completa. El punto de partida lo constituyen los trabajos de García-Sánchez y Rosales [45], Maloo y Sengupta [71] y Fel [37].

En el primero de ellos, los autores prueban que si \mathcal{A} es un conjunto de enteros consecutivos, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si o bien $n = 2$, o $n = 3$ y a_1 es par. En el segundo, los autores generalizan el resultado cuando \mathcal{A} es un conjunto de enteros en sucesión aritmética, esto es, existe un $d \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a_i = a_1 + (i - 1)d$ para $1 \leq i \leq n$. En el Teorema 3.3.5 extenderemos este resultado a *sucesiones aritméticas generalizadas*, es decir, sucesiones $\{a_1, \dots, a_n\}$ tales que existe $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\{ha_1, a_2, \dots, a_n\}$ es una sucesión aritmética.

Maloo y Sengupta estudian además el caso en que $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética y $a_n \in \mathbb{Z}^+$ es un entero cualquiera (lo que denominan una sucesión casi-arithmética) y demuestran que si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces $n \leq 4$. Nótese que si $n = 3$, \mathcal{A} siempre es una sucesión casi-arithmética. Aquí caracterizaremos completamente en el Teorema 3.3.9 cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa siendo $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ una sucesión aritmética generalizada, $a_n \in \mathbb{Z}^+$ un entero cualquiera y $n \geq 4$.

En el tercero, al autor da algunas condiciones para que el semigrupo generado por un conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}$, donde a_1, a_2, a_3 son miembros de la sucesión de Fibonacci o de Lucas, sea un semigrupo numérico simétrico. Recordamos que un semigrupo numérico \mathcal{S} es *simétrico* si y solo si para todo $d \notin \mathcal{S}$ se tiene que $g(\mathcal{S}) - d \in \mathcal{S}$, donde $g(\mathcal{S})$ es el número de Frobenius de \mathcal{S} . Herzog demostró en [53, Theorem 3.10] que cuando $n = 3$ y $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, el semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ es simétrico si y solo si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Aquí caracterizaremos cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa para ciertos subconjuntos \mathcal{A} de una (p, q) -sucesión de Fibonacci o de una (p, q) -sucesión de Lucas, donde $p, q \in \mathbb{Z}^+$ y $\gcd\{p, q\} = 1$.

Recordemos la definición de este tipo de sucesiones. Una ecuación de recurrencia lineal de segundo orden con coeficientes enteros tiene la siguiente forma:

$$U_{n+2} = pU_{n+1} + qU_n \text{ para } n \geq 0 \text{ con condiciones iniciales } U_0 = \alpha, U_1 = \beta.$$

La (p, q) -sucesión de Fibonacci, que denotaremos por $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es la solución a la anterior ecuación cuando $\alpha = 0$ y $\beta = 1$, mientras que la (p, q) -sucesión de Lucas, denotada por $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es la solución cuando $\alpha = 2$ y $\beta = p$. Nótese que estas definiciones dan una generalización natural de la sucesiones de Fibonacci y Lucas usuales, que ahora se denominan $(1, 1)$ -sucesión de Fibonacci y $(1, 1)$ -sucesión de Lucas.

En los Teoremas 3.3.15 y 3.3.20 caracterizamos cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa para $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ en los siguientes casos:

- (a) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i = F_{d_i}$, siendo $\{d_1, \dots, d_n\}$ una sucesión aritmética generalizada.
- (b) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i = L_{d_i}$, siendo $\{d_1, \dots, d_n\}$ es una sucesión aritmética.

Los resultados de esta sección, si bien no son corolarios directos de los resultados incluidos en secciones anteriores, sí se obtienen como consecuencia de ellos, lo que permite obtener, cuando $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, un sistema minimal de generadores del ideal tórico, además del número de Frobenius $g(\mathcal{S})$ del semigrupo numérico $\mathcal{S} := \mathbb{N}\{a_1/e, \dots, a_n/e\}$, donde $e := \gcd(\mathcal{A})$.

3.3.1 Intersecciones completas y sucesiones aritméticas generalizadas

En esta parte trataremos los casos en que o bien \mathcal{A} es una sucesión aritmética generalizada, o $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética generalizada y a_n es un entero positivo cualquiera. Asumimos que $\mathbb{N}\mathcal{A}$ es un **semigrupo numérico**, i.e., $\gcd(\mathcal{A}) = 1$ y que $\mathbb{N}\mathcal{A}$ está **generado minimalmente por \mathcal{A}** . Nótese que si \mathcal{A} es una sucesión aritmética generalizada con $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, entonces \mathcal{A} es sistema minimal de generadores de $\mathbb{N}\mathcal{A}$ si y solo si $n \leq a_1$.

Como ya dijimos con anterioridad, Maloo y Sengupta demostraron que si $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética y $n \geq 5$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa. Para llegar a ese resultado se basaron en la descripción de Patil y Singh [82] de un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$ cuando $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética (ver también [81] para una prueba más corta del mismo resultado). Sin pasar por la obtención explícita de un sistema minimal de generadores de $I_{\mathcal{A}}$, aquí demostraremos que si $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética generalizada y $n \geq 5$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa, lo que generaliza el resultado de Maloo y Sengupta.

Lema 3.3.1. *Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ un subconjunto cualquiera de \mathbb{Z}^+ . Si existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que:*

- $m_i a_i \neq m_j a_j$ y
- $m_i a_i = \sum_{k \neq i} \alpha_k a_k$, $m_j a_j = \sum_{k \neq j} \beta_k a_k$ con $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \neq 0$ y $\beta_i \neq 0$,

entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa.

Demostración. Sean $f_i := x_i^{m_i} - \prod_{k \neq i} x_k^{\alpha_k}$ y $f_j := x_j^{m_j} - \prod_{k \neq j} x_k^{\beta_k}$. Como $\deg_{\mathcal{A}}(f_i) = m_i a_i \neq m_j a_j = \deg_{\mathcal{A}}(f_j)$, entonces por el Lema 1.2.26 existe un sistema minimal de generadores \mathfrak{B} de $I_{\mathcal{A}}$ al que pertenecen f_i y f_j . Supongamos que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, entonces existen g_3, \dots, g_{n-1} tales que $\mathfrak{B} = \{f_i, f_j, g_3, \dots, g_{n-1}\}$ genera $I_{\mathcal{A}}$. Por tanto $I_{\mathcal{A}} \subset J := (x_i, x_j, g_3, \dots, g_{n-1})$, pero esto no es posible pues $I_{\mathcal{A}}$ es primo y por tanto $n - 1 = \text{ht}(I_{\mathcal{A}}) < \text{ht}(J) \leq \mu(J) \leq n - 1$. \square

Proposición 3.3.2. *Si $n \geq 4$ y \mathcal{A} contiene una sucesión aritmética generalizada de cuatro elementos, entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa.*

Demostración. Supongamos que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ forman una sucesión aritmética generalizada, es decir, existe $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que ha_1, a_2, a_3, a_4 están en sucesión aritmética. Al ser \mathcal{A} sistema minimal de generadores de $\mathbb{N}\mathcal{A}$, se tiene que $m_i \neq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Además, $2a_2 = ha_1 + a_3$ y $2a_3 = a_2 + a_4$ de donde $m_2 = m_3 = 2$ y, por tanto, $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa por el Lema 3.3.1. \square

Esta Proposición nos permite deducir directamente el siguiente resultado que generaliza el de [71]:

Corolario 3.3.3. *Si $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética generalizada y $n \geq 5$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa.*

El siguiente resultado también es consecuencia directa de Proposición 3.3.2:

Corolario 3.3.4. *Si \mathcal{A} una sucesión aritmética generalizada y $n \geq 4$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa.*

Ahora procederemos con las caracterizaciones buscadas:

Teorema 3.3.5. *Sea \mathcal{A} una sucesión aritmética generalizada con $n \geq 3$. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $n = 3$ y a_1 es par.*

Demostración. Por el Corolario 3.3.4 solo queda estudiar el caso en que $n = 3$. Sea $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\{ha_1, a_2, a_3\}$ es una sucesión aritmética. Como $\gcd(\mathcal{A}) = 1$, si denotamos $d := a_3 - a_2$, entonces $a_2 = ha_1 + d$, $a_3 = ha_1 + 2d$ y $\gcd\{a_1, d\} = 1$. Se tiene que $\gcd\{a_1, a_3\} = \gcd\{a_1, 2d\} = \gcd\{a_1, 2\}$, separamos dos casos. Si a_1 es par, entonces a_2 es impar y $\text{lcm}\{a_2, \gcd\{a_1, a_3\}\} = 2a_2 = ha_1 + a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_3\}$ y, por la Proposición 3.2.8, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Si a_1 es impar, entonces

- $\text{lcm}\{a_1, \gcd\{a_2, a_3\}\} = \gcd\{h, d\}a_1 < a_2 < a_3$, por tanto $\text{lcm}\{a_1, \gcd\{a_2, a_3\}\} \notin \mathbb{N}\{a_2, a_3\}$,
- $\text{lcm}\{a_2, \gcd\{a_1, a_3\}\} = a_2 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_3\}$ y
- $\text{lcm}\{a_3, \gcd\{a_1, a_2\}\} = a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$.

Así que de nuevo por la Proposición 3.2.8 concluimos que $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa. \square

Nota 3.3.6. *Además en caso de que $I_{\mathcal{A}}$ sea intersección completa, esto es, cuando $n = 3$, $\{a_1, a_2, a_3\}$ es una sucesión aritmética generalizada y a_1 es par, se obtiene la siguiente información adicional (ver Nota 1.2.24 y Proposición 3.1.7):*

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_2^2 - x_1^h x_3, x_1^{a_3/2} - x_3^{a_1/2} \right)$, siendo $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\{ha_1, a_2, a_3\}$ es sucesión aritmética, es decir $h = (2a_2 - a_3)/a_1$.
- $g(\mathbb{N}\mathcal{A}) = a_1 a_3 / 2 - a_1 + a_2 - a_3$.

La fórmula general para el número de Frobenius del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$ cuando \mathcal{A} es una sucesión aritmética generalizada se puede encontrar en [86, Theorem 3.3.4].

Como consecuencia directa del Teorema 3.3.5 se obtienen los ya citados:

Corolario 3.3.7. [71, Theorem 3.5] *Sea \mathcal{A} una sucesión aritmética. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $n = 2$ o $n = 3$ y a_1 es par.*

Corolario 3.3.8. [43, Corollary 9] *Sea \mathcal{A} un conjunto de enteros consecutivos. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $n = 2$ o $n = 3$ y a_1 es par.*

Respecto al caso en que $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es sucesión aritmética generalizada con $n \geq 4$, se tiene lo siguiente:

Teorema 3.3.9. *Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ tal que $\mathcal{A} \setminus \{a_n\}$ es una sucesión aritmética generalizada con $n \geq 4$. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $n = 4$ y se satisface una de las siguientes condiciones:*

1. $a_1/\gcd\{a_1, a_2\}$ es par y $\gcd\{a_1, a_2\} a_4 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$, o
2. a_1, a_4 son pares y $\mathcal{C}_{red} = \emptyset$ con $\mathcal{C} = \{a_1, a_3, a_4\}$

Demostración. Por el Corolario 3.3.3 solo queda estudiar el caso en que $n = 4$. Se observa que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si lo es $I_{\mathcal{A}'}$, donde $\mathcal{A}' := \{a_1, a_2, a_3, B_4 a_4\}$ y, a su vez, $I_{\mathcal{A}'} = I_{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} := \{a'_1, a'_2, a'_3, a'_4\}$ donde $a'_i = a_i/B_4$ para $1 \leq i \leq 3$ y $a'_4 = a_4$. Además, $\gcd\{a'_1, a'_2\} = 1$ puesto que $B_4 = \gcd\{a_1, a_2, a_3\} = \gcd\{a_1, a_2\}$.

Si $a'_4 \in \mathbb{N}\{a'_1, a'_2, a'_3\}$, entonces por el Lema 1.2.17, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $I_{\mathcal{B} \setminus \{a'_4\}}$ lo es. Como $\mathcal{B} \setminus \{a'_4\} = \{a'_1, a'_2, a'_3\}$ es una sucesión aritmética generalizada y $\gcd\{a'_1, a'_2, a'_3\} = 1$, por el Teorema 3.3.5 tenemos que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si a'_1 es par. A partir de ahora supondremos que $a'_4 \notin \mathbb{N}\{a'_1, a'_2, a'_3\}$. Sea $m_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba'_i \in \mathbb{N}(\mathcal{B} \setminus \{a'_i\})\}$ para todo $1 \leq i \leq 4$, entonces $m_4 \geq 2$ puesto que $a'_4 \notin \mathbb{N}\{a'_1, a'_2, a'_3\}$ y como \mathcal{A} es sistema minimal de generadores de $\mathbb{N}\mathcal{A}$ también se tiene que $m_1, m_2, m_3 \geq 2$, en particular $m_2 = 2$. Estudiemos los posibles valores de m_1 , si $m_1 a'_1 = m_2 a'_2$ definimos $a'_5 := \gcd\{a'_1, a'_2\} = 1$ y $m'_3 := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba'_3 \in \mathbb{N}\{a'_4, a'_5\}\} = 1$ y por la Proposición 3.2.9, $I_{\mathcal{B}}$ no es intersección completa ya que $m_3 \neq m'_3$. Si $m_1 a'_1 = m_3 a'_3$, entonces $m_1 a'_1 = \text{lcm}\{a'_1, a'_3\} \leq \text{lcm}\{a'_1, a'_2\}$, como $\text{lcm}\{a'_1, a'_3\} = a'_1 a'_3 / \gcd\{a'_1, 2\}$, $\text{lcm}\{a'_1, a'_2\} = a'_1 a'_2$ y $a'_2 < a'_3$, entonces $\gcd\{a'_1, 2\} = 2$ y a'_1 es par. Sean $a'_5 := \gcd\{a'_1, a'_3\} = 2$ y $m'_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba'_i \in \sum_{j \in \{2,4,5\}, j \neq i} \mathbb{N}a_j\}$ para $i = 2, 4$, entonces $m'_2 = 1$ o $m'_4 = 1$. En efecto, si a'_2 es par entonces $m'_2 = 1$, si a'_4 es par entonces $m'_4 = 1$ y si ambos son impares y, por ejemplo, $a'_2 < a'_4$ entonces $a'_4 \in \mathbb{N}\{a'_2, a'_5\}$ y $m'_4 = 1$; de nuevo por la Proposición 3.2.9, $I_{\mathcal{B}}$ no es intersección completa. En caso de que $m_1 a'_1 \notin \{m_2 a'_2, m_3 a'_3\}$ entonces $m_1 a'_1, m_2 a'_2$ y $m_3 a'_3$ son todos distintos y por la Proposición 2.2.1 y la Nota 2.2.2, tenemos que $I_{\mathcal{B}}$ será intersección completa si y solo si $\mathcal{B}_{red} = \emptyset$, veamos pues cuándo $\mathcal{B}_{red} = \emptyset$. Sea $B'_i := \gcd(\mathcal{B} \setminus \{a'_i\})$ para todo $1 \leq i \leq 4$, entonces $B'_3 = B'_4 = 1$ y por tanto $B'_i a'_i \notin \mathbb{N}(\mathcal{B} \setminus \{a'_i\})$ para $i = 3, 4$. Sean $d', h' \in \mathbb{Z}^+$, tales que $a'_2 = h' a'_1 + d'$, $a'_3 = a'_2 + d'$, entonces $\gcd\{a'_1, d'\} = \gcd\{a'_1, a'_2, a'_3\} = 1$. Separamos dos casos, supongamos primero que a'_1 y a'_4 son ambos pares, entonces tendremos que $B'_2 := \gcd\{a'_1, a'_3, a'_4\} = \gcd\{a'_1, 2d', a'_4\} = \gcd\{a'_1, 2, a'_4\} = 2$ y $2a'_2 = h' a'_1 + a'_3$, por tanto $\mathcal{B}_{red} = \emptyset$ si y solo si $\mathcal{C}_{red} = \emptyset$, donde $\mathcal{C} = \{a_1, a_3, a_4\}$. Supongamos por último que a'_1 o a'_4 es impar, entonces $B'_2 = 1$ y $B'_2 a'_2 \notin \mathbb{N}\{a'_1, a'_3, a'_4\}$, entonces consideramos $B'_1 := \gcd\{a'_2, a'_3, a'_4\} = \gcd\{h' a'_1 + d', a'_2 + d', a'_4\} = \gcd\{h', d', a'_4\}$, de donde $B'_1 a'_1 \mid h' a'_1 < a'_2 < a'_3$; por tanto $B'_1 a'_1 \in \mathbb{N}\{a'_2, a'_3, a'_4\}$ si y solo si $B'_1 a'_1$ es múltiplo de a'_4 . Además en este caso tendríamos que $\mathcal{B}_{red} = \emptyset$ si y solo si lo es \mathcal{B}'_{red} con $\mathcal{B}' := \{a'_2, a'_3, a'_4\}$. Como $a'_4 \mid B'_1 a'_1 \mid h' a'_1$, entonces $a'_4 < a'_2 < a'_3$ están en sucesión aritmética generalizada y, por la Proposición 3.2.8 y el Teorema 3.3.5, $\mathcal{B}'_{red} = \emptyset$ si y solo si a'_4/B'_1 es par, pero esto

no es posible pues tanto a'_1 como a'_4 serían pares, lo que supone una contradicción. Entonces podemos concluir que si a'_1 o a'_4 es impar, entonces $\mathcal{B}_{red} \neq \emptyset$ y $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa. \square

Nota 3.3.10. Cuando $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, si denotamos por \mathcal{S} al semigrupo numérico generado por $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y por $h \in \mathbb{Z}^+$ al entero tal que $\{ha_1, a_2, a_3\}$ es una sucesión aritmética, es decir, $h = (2a_2 - a_3)/a_1$, tenemos los siguientes resultados (ver Nota 1.2.24 y Proposición 3.1.7):

1. Si $a_1/\gcd\{a_1, a_2\}$ es par y $\gcd\{a_1, a_2\}a_4 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$ y tomamos $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{N}$ tales que $ba_4 = \beta_1a_1 + \beta_2a_2 + \beta_3a_3$, donde $b := \gcd\{a_1, a_2\}$, entonces

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_4^b - x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3}, x_2^2 - x_1^h x_3, x_1^{a_3/2b} - x_3^{a_1/2b} \right); y$
- $g(\mathcal{S}) = (a_1a_3/2b) - a_1 + a_2 - a_3 + (b-1)a_4.$

2. Si a_1 y a_4 son pares y $\mathcal{C}_{red} = \emptyset$ con $\mathcal{C} := \{a_1, a_3, a_4\}$ y denotamos por \mathcal{S}' al semigrupo numérico $\mathbb{N}\{a_1/2, a_3/2, a_4/2\}$, entonces

- $I_{\mathcal{A}} = (x_2^2 - x_1^h x_3) + I_{\mathcal{C}} \cdot k[x_1, x_2, x_3, x_4]; y$
- $g(\mathcal{S}) = 2g(\mathcal{S}') + a_2.$

3.3.2 Intersecciones completas y sucesiones de Fibonacci.

Dados $p, q \in \mathbb{Z}^+$ con $\gcd\{p, q\} = 1$, el siguiente objetivo es el de caracterizar cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa siendo $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{Z}^+$ con $a_i = F_{d_i}$ para $1 \leq i \leq n$, donde d_1, \dots, d_n es una sucesión aritmética generalizada y $\{F_n\}$ es la (p, q) -sucesión de Fibonacci. Para llegar a la caracterización buscada primero introduciremos algunas propiedades básicas de las sucesiones obtenidas como solución de ecuaciones de recurrencia lineales de segundo orden, haciendo especial énfasis en las propiedades particulares de las (p, q) -sucesiones de Fibonacci y también de las de Lucas. Algunas de estas propiedades son generalizaciones directas de las encontradas en [98], otras se pueden encontrar por ejemplo en [56, Section 5] o [60] y el resto se pueden demostrar fácilmente.

Si denotamos por $[a]_2$ a la 2-valoración de un entero positivo cualquiera a , i.e., $[a]_2 := \max\{t \in \mathbb{N} : 2^t | a\}$, se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.3.11. [56, Teoremas \bar{f} , $\bar{\ell}$ y $\bar{f}\bar{\ell}$] Sean a, b enteros positivos y sea $d := \gcd\{a, b\}$. Entonces,

- $\gcd\{F_a, F_b\} = F_d.$
- $\gcd\{L_a, L_b\} = \begin{cases} L_d & \text{si } [a]_2 = [b]_2 \\ 2 & \text{si } [a]_2 \neq [b]_2, p, q \text{ son impares y } 3|d \\ 2 & \text{si } [a]_2 \neq [b]_2, p \text{ es par y } q \text{ impar} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$

$$\bullet \gcd\{L_a, F_b\} = \begin{cases} L_d & \text{si } [a]_2 < [b]_2 \\ 2 & \text{si } [a]_2 \geq [b]_2, p, q \text{ son impares y } 3|d \\ 2 & \text{si } [a]_2 \geq [b]_2, p, b \text{ son pares y } q \text{ es impar} \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta el Lema 3.3.11 y tras observar que toda (p, q) -sucesión de Fibonacci es estrictamente creciente salvo si $p = 1$ (en cuyo caso $F_1 = F_2$), y que toda (p, q) -sucesión de Lucas es estrictamente creciente salvo si $p \in \{1, 2\}$ (en cuyo caso $L_0 \geq L_1$), se obtienen las siguientes propiedades de divisibilidad.

Corolario 3.3.12. *Para todo $a, b \in \mathbb{Z}^+$ se tienen las siguientes propiedades:*

- (1) Si $a \mid b$ entonces $F_a \mid F_b$.
- (2) Si $F_a \mid F_b$ entonces $a \mid b$, salvo que $p = b = 1$ y $a = 2$.
- (3) Si $a \geq 2$, entonces $L_a \mid L_b$ si y solo si b/a es impar.
- (4) Si b es par, entonces $\gcd\{L_a, L_{a+b}\} = \gcd\{L_a, F_b\}$.

Denotamos por $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cualquier sucesión que satisfaga que $U_{n+2} = pU_{n+1} + qU_n$ para todo $n \geq 2$ y $U_0, U_1 \in \mathbb{N}$ no son ambos nulos, como la (p, q) -sucesión de Fibonacci o la de Lucas. En el siguiente Lema se obtienen propiedades básicas de estas sucesiones que usaremos posteriormente, todas ellas de fácil verificación. El apartado (4) se encuentra en [56, Proposiciones 5.1 y 5.2] y los apartados (1) y (3) son generalizaciones directas de los correspondientes resultados para el caso particular $p = q = 1$ que se pueden encontrar en [98].

Lema 3.3.13. *Sean a, b, c, d, e enteros positivos. Entonces,*

- (1) $U_{a+b} = F_a U_{b+1} + q F_{a-1} U_b$.
- (2) Si $b \in \mathbb{N}\{a_1, \dots, a_k\}$ donde $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}^+$, entonces $F_b \in \mathbb{N}\{F_{a_1}, \dots, F_{a_k}\}$.
- (3) $F_a U_b - F_c U_d = (-1)^e q^e (F_{a-e} U_{b-e} - F_{c-e} U_{d-e})$ si $a+b = c+d$ y $e \leq \min\{a, b, c, d\}$.
- (4) $L_a = F_{2a}/F_a = F_{a+1} + qF_{a-1}$.
- (5) $U_{a+2b} + (-1)^b q^b U_a = L_b U_{a+b}$.

Con estas propiedades básicas, las siguientes desigualdades son fáciles de probar.

Corolario 3.3.14. *Sean a, b, c, d enteros positivos. Se satisfacen las siguientes desigualdades:*

- (1) $q^b U_a \leq U_{a+2b}$ y se tiene la igualdad si y solo si $a = U_1 = 0, b = 1$.
- (2) $L_a < F_{a+2}$.

- (3) $U_{a+b-2} < F_a U_b < U_{a+b-1}$ si $a, b \geq 2$.
- (4) $F_a U_b < F_c U_d$ si $a + b < c + d$.
- (5) Si $a < c$, $a < d$ y $a + b = c + d$, entonces $F_a U_b < F_c U_d$ si y solo si a es par.
- (6) $L_{a+b-1} < L_a L_b < \min\{L_{a+b+1}, 2L_{a+b}\}$.
- (7) Si $a \leq b$, entonces $L_a L_b < L_{a+b}$ si a es impar y $L_a L_b > L_{a+b}$ si a es par.

Denotaremos por a_i al d_i -ésimo término de la (p, q) -sucesión de Fibonacci, donde $\{d_1, \dots, d_n\}$ es una sucesión aritmética generalizada. Esto es, existen $h, a, d \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a_1 := F_a$ y $a_i := F_{ha+(i-1)d}$ para todo $i \geq 2$. Tal y como ya hemos indicado, nuestro objetivo es caracterizar cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa en función de los datos de entrada. Este objetivo se alcanza con el siguiente Teorema.

Teorema 3.3.15. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ primos entre sí y sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la (p, q) -sucesión de Fibonacci. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ con $a_1 := F_a$ y $a_i := F_{ha+(i-1)d}$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$ donde $h, a, d \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 3$. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- (a) d es impar,
- (b) $d \geq a$,
- (c) $a = 2d$,
- (d) $\gcd\{a, d\} = a - d$ y a es impar, o
- (e) $n = 3$ y $2d \mid a$.

Para demostrar este Teorema probaremos dos resultados previos; el Lema 3.3.16 y la Proposición 3.3.18. En el primero de ellos se caracteriza cuándo $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ y además se demuestra que si $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \geq 3$, lo que en particular implica que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. En el segundo de ellos se estudia el caso en que $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ y se caracteriza cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Lema 3.3.16. $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ si y solo si d es impar o $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$. Además si $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \geq 3$.

Demostración. Si d es impar, por el Lema 3.3.13.(5) sabemos que $a_3 = (q^d F_{ha}/F_a)a_1 + L_d a_2 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ y que $a_{i+2} = L_d a_{i+1} + q^d a_i$ para todo $i \geq 2$, de donde obtenemos que $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \geq 3$.

Supongamos que d es par, sea $e := \gcd\{a_1, a_2\} = F_{\gcd\{a, d\}}$ y consideremos el semigrupo numérico $\mathcal{S} := \mathbb{N}\{a_1/e, a_2/e\}$. Por el Teorema 3.1.6 tenemos que el número de Frobenius de \mathcal{S} cumple que $eg(\mathcal{S}) = (a_1 a_2)/e - a_1 - a_2$.

Si $d \geq a$, tenemos que $eg(\mathcal{S}) < (a_1 a_2)/e \leq a_1 a_2 \leq F_d a_2 < a_i$ para todo $i \geq 3$, de donde $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$. En este caso $F_{2d} > a_1 F_d \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$. Supongamos ahora que

$a > d$ y estudiemos la existencia o no de soluciones $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ a la ecuación diofántica lineal

$$a_1 x + a_2 y = a_3. \quad (3.1)$$

Por el Lema 3.3.13, sabemos que $\left(-q^d \frac{F_{ha}}{a_1}, L_d\right) \in \mathbb{Z}^2$ es una solución a la ecuación y que el conjunto de soluciones enteras de la ecuación será

$$\left\{ \left(-q^d \frac{F_{ha}}{a_1} + \lambda \frac{a_2}{e}, L_d - \lambda \frac{a_1}{e} \right), \lambda \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Afirmamos que $-q^d \frac{F_{ha}}{a_1} + \frac{a_2}{e} > 0$; de hecho como $a > d$, entonces $e = F_{\gcd\{a,d\}} \leq F_{a-d}$ y $q^d e F_{ha} = q^{d/2} e q^{d/2} F_{ha} < q^{d/2} F_{a-d} a_2 < a_1 a_2$. Por tanto (3.1) tiene una solución entera no negativa si y solo si $\frac{a_1}{e} \leq L_d$, lo que equivale a que $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$. Finalmente tenemos que

$$g(\mathcal{T}) e \leq \frac{a_1 a_2}{e} \leq L_d a_2 < F_{d+2} a_2 < F_{ha+2d+1} < a_i \text{ para todo } i \geq 4$$

y $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \geq 4$. □

Ahora estudiamos el caso en que $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$.

Lema 3.3.17. Si $2d \mid a$ y $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $a_4 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$.

Demostración. Nótese primero que $\gcd\{a_1, a_2\} = F_{\gcd\{a,d\}} = F_d$ y $a \geq 4d$ (pues si $a = 2d$ entonces $a_1 \mid a_3$ pero $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$). Supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ tales que $a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$. Como $a_4 = -q^d a_2 + L_d a_3$, si denotamos $\beta := L_d - \alpha_3$ tenemos que $\beta a_3 = \alpha_1 a_1 + (\alpha_2 + q^d) a_2$. Entonces la ecuación $\beta a_3 = x a_1 + y a_2$ tiene una solución $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Por otra parte, sabemos que $\beta a_3 = -\beta q^d a_1 + \beta L_d a_2$, entonces el conjunto de soluciones enteras a la ecuación es

$$\left\{ \left(-\beta q^d + \lambda \frac{a_2}{F_d}, \beta L_d - \lambda \frac{a_1}{F_d} \right), \lambda \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sin embargo, para todo $\lambda > 0$, tenemos que

$$\beta L_d - \lambda \frac{a_1}{F_d} \leq (L_d)^2 - \frac{a_1}{F_d} \leq (L_d)^2 - \frac{F_{4d}}{F_d} = (L_d)^2 - L_{2d} L_d < 0;$$

de donde se concluye que no hay solución $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, lo que es una contradicción. □

Proposición 3.3.18. Si $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff n = 3$ y $2d \mid a$.

Demostración. Si $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, en particular d es par por el Lema 3.3.16 y por el Lema 3.3.13 se tiene que $a_3 + q^d F_{ha} = L_d a_2$ y $a_{i+1} + q^d a_{i-1} = L_d a_i$ para $3 \leq i \leq n-1$. Esto implica que $m_i \leq L_d$ para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Tomemos ahora $2 \leq i < j \leq n$ y

supongamos que $m_i a_i = m_j a_j$. En particular, $m_i a_i \leq L_d a_i = a_{i+1} + q^d a_{i-1} < 2 a_{i+1}$; esto implica que $j = i + 1$, y que $m_i a_i = a_{i+1}$, de donde $a_i \mid a_{i+1}$, pero esto no es posible pues $ha + (i - 1)d$ no divide a $ha + id$. Por tanto $m_2 a_2, \dots, m_n a_n$ son todos distintos, entonces en virtud de la Proposición 2.2.1, la Nota 2.2.2 y del Teorema 1.2.21, tenemos que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$.

Sea \mathcal{A}' al sistema minimal de generadores del semigrupo $\mathbb{N}\mathcal{A}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ y ciertos $4 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tales que $\mathcal{A}' = \{a_1, a_2, a_3, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$. Definimos

$$B'_j := \frac{\gcd(\mathcal{A}' \setminus \{a_j\})}{\gcd(\mathcal{A}')} \text{ para todo } j \in \{1, 2, 3, i_1, \dots, i_k\}.$$

Se tiene que $B'_j = 1$ para todo $j \in \{3, i_1, \dots, i_k\}$ pues $\gcd\{a_1, a_2\} = \gcd(\mathcal{A}')$ y $B'_1 = \frac{F_{\gcd\{ha, d\}}}{\gcd(\mathcal{A}')}$. Además $B'_1 a_1 \notin \mathbb{N}(\mathcal{A}' \setminus \{a_1\})$ pues $B'_1 a_1 \leq F_d a_1 < a_2$. Si $[a]_2 \leq [d]_2$ o existe un $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que i_j es par, se tiene además que $B'_2 = 1$, lo que implica que \mathcal{A}_{red} tiene $k + 3$ elementos y que $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa. Si $[a]_2 > [d]_2$ e i_j es impar para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\gcd\{a, 2d\} = 2 \gcd\{a, d\}$ y $B_2 = L_{\gcd\{a, d\}}$. Supongamos primero que $\gcd\{a, d\} < d$, entonces $B_2 a_2 \leq L_{d-1} a_2 < L_{ha+2d-2} < a_3$ para todo $i \in \{3, \dots, n\}$ y a_1 no divide a $B_2 a_2$; en caso contrario a_1 dividiría a $B_2 \gcd(\mathcal{A}') = \gcd(\mathcal{A}' \setminus \{a_2\})$ pero esto no puede ser porque a_1 dividiría a a_3 . En este caso también llegamos a que \mathcal{A}_{red} tiene $k + 3$ elementos y, por tanto, $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa. Finalmente, asumamos que $[a]_2 > [d]_2$ y que $\gcd\{a, d\} = d$ o, lo que es lo mismo, que $2d \mid a$; si $n \geq 4$, por el Lema 3.3.17 tenemos que $a_4 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$, de donde $i_1 = 4$ y estamos en el caso anterior; si $n = 3$, entonces $L_d d_2 = q^d F_{ha} + a_3 \in \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_3$ y por la Proposición 3.2.8 podemos concluir que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. \square

Demostración del Teorema 3.3.15. Como vimos en el Lema 3.3.16, $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ si y solo si d es impar o $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$. A su vez $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$ si y solo si $F_{2d} F_{\gcd\{a, d\}} \geq a_1 F_d$. Además, en vista de (4) y (5) en Corolario 3.3.14, esto equivale a que $\gcd\{a, d\} > a - d$ o $a = 2d$ o $\gcd\{a, d\} = a - d$ y $a - d$ es impar. Además, $\gcd\{a, d\} > a - d$ si y solo si $d \geq a$. Por tanto, se tiene que $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ si y solo si d es impar, $d \geq a$, $a = 2d$ o $\gcd\{a, d\} = a - d$ y a es impar. En este caso, además se tiene que $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \in \{3, \dots, n\}$ y aplicando el Lema 1.2.17 se concluye que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Si $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, por la Proposición 3.3.18 se sigue el resultado. \square

Vale la pena destacar el hecho de que la caracterización obtenida en el Teorema 3.3.15 no depende de los valores de p , q o h , sino que solo depende de a , d y n .

Nota 3.3.19. Denotando por $e := F_{\gcd\{a, d\}}$ y $\mathcal{S} := \mathbb{N}\{a_1/e, \dots, a_n/e\}$, en los casos en que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, se obtiene la siguiente información adicional (ver Nota 1.2.24 y Proposición 3.1.7):

1. Si d es impar. Entonces,

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_1^{a_2/e} - x_2^{a_1/e}, x_3 - x_1^{q^d F_{ha}/a_1} x_2^{L_d}, x_4 - x_2^{q^d} x_3^{L_d}, \dots, x_n - x_{n-2}^{q^d} x_{n-1}^{L_d} \right); y$
- $g(\mathcal{S}) = \frac{1}{e} (a_1 a_2 / e - a_1 - a_2).$

2. Si $d \geq a$, o $a = 2d$, o $\gcd\{a, d\} = a - d$ y a es impar. Entonces,

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_1^{a_2/e} - x_2^{a_1/e}, x_3 - x_1^{b_{3,1}} x_2^{b_{3,2}}, x_4 - x_1^{b_{4,1}} x_2^{b_{4,2}}, \dots, x_n - x_1^{b_{n,1}} x_2^{b_{n,2}} \right),$
donde $b_{3,1}, \dots, b_{n,2} \in \mathbb{Z}^+$ son tales que $b_{i,1} a_1 + b_{i,2} a_2 = a_i$ para todo $i \in \{3, \dots, n\}; y$
- $g(\mathcal{S}) = \frac{1}{e} (a_1 a_2 / e - a_1 - a_2).$

3. Si $n = 3$, $2d \mid a$, $a \neq 2d$ y d es par. Entonces $e = F_d$ y

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_1^{a_3/F_{2d}} - x_3^{a_1/F_{2d}}, x_2^{L_d} - x_1^{q^d F_{ha}/a_1} x_3 \right); y$
- $g(\mathcal{S}) = \frac{1}{F_d} (a_1 a_3 / F_{2d} - a_1 + (L_d - 1) a_2 - a_3).$

3.3.3 Intersecciones completas y sucesiones de Lucas

En esta subsección denotaremos por a_i el d_i -ésimo término de la (p, q) -sucesión de Lucas, donde $\{d_i\}_{1 \leq i \leq n}$ es una sucesión aritmética. Esto es, existen $a, d \in \mathbb{Z}^+$ tales que $a_i := L_{a+(i-1)d}$ para todo $i \geq 1$. Nuestro objetivo es caracterizar cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa en función de los datos de entrada p, q, n, a y d . Este objetivo se alcanza en el Teorema 3.3.20. Recordamos que $[a]_2$ (respect. $[d]_2$) denota la 2-valoración de a (respect. d).

Teorema 3.3.20. Sean p, q dos enteros positivos primos entre sí y sea $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la (p, q) -sucesión de Lucas. Sea $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ donde $a_i := L_{a+(i-1)d}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ con $a, d \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 3$. Entonces, $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

- d es impar,
- $d \geq a$,
- $\gcd\{a, d\} = a - d$ y $[d]_2 > [a]_2 \geq 1$,
- $n = 3$, p y a/d son impares y q es par, o
- $n = 3$, p y q y a/d son impares y $3 \nmid d$.

Para demostrar este Teorema se seguirá un esquema análogo al seguido con las sucesiones de Fibonacci. Al igual que en la subsección anterior, la prueba del Teorema se basa en dos resultados, el Lema 3.3.21 y la Proposición 3.3.23, que son, respectivamente, las versiones para la sucesión de Lucas del Lema 3.3.16 y la Proposición 3.3.18. En el primero de

ellos se caracteriza cuándo $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ y además se demuestra que si $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \geq 3$, lo que en particular implica que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. En el segundo de ellos se estudia el caso en que $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ y se caracteriza cuándo $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa.

Lema 3.3.21. $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ si y solo si d es impar o $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$. Además si $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \geq 3$.

Demostración. Si d es impar, por el Lema 3.3.13 se tiene que $a_{i+2} = q^d a_i + L_d a_{i+1}$ para todo $i \geq 1$. Supongamos ahora que d es par y denotamos por $e := \text{gcd}\{a_1, a_2\} = \text{gcd}\{a_1, F_d\}$ y por \mathcal{S} al semigrupo numérico $\mathbb{N}\{a_1/e, a_2/e\}$. Nótese que e divide a_i para todo $i \geq 3$. En efecto,

- si $[a]_2 = [a + d]_2$, entonces $[d]_2 > [a]_2$ y $e = L_{\text{gcd}\{a, a+d\}} = L_{\text{gcd}\{a, d\}}$; por tanto $a/\text{gcd}\{a, d\}$ es impar y $d/\text{gcd}\{a, d\}$ es par, por consiguiente $\frac{a+(i-1)d}{\text{gcd}\{a, d\}}$ es impar y e divide a a_i para todo $i \geq 1$,
- si p, q son impares $3|a, 3|a+d$ y $[a]_2 \neq [a+d]_2$, entonces $e = 2, [a]_2 \neq [a+(i-1)d]_2$ y $3 | a + (i-1)d$ para todo $i \geq 2$, por tanto e divide a a_i para todo $i \geq 1$,
- si p es par, q impar y $[a]_2 \neq [a+d]_2$, entonces $[a]_2 \neq [a+(i-1)d]_2$ para todo $i \geq 2$ y e divide a a_i para todo $i \geq 1$,
- en el resto de casos $e = 1$.

Si $d > a$, entonces $g(\mathcal{S})e < \frac{a_1 a_2}{e} < a_1 a_2 \leq a_1 L_{2d-1} < a_i$ para todo $i \geq 3$, de aquí $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$. Nótese que si $d > a$, entonces $F_{2d} > a_1 F_d \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$. Si $a = d$, entonces $a_1 | a_3$ y $g(\mathcal{S})e < \frac{a_1 a_2}{e} < a_1 a_2 \leq a_1 L_{2d} < a_i$ para todo $i \geq 4$ y $\text{lcm}\{a_1, F_d\} = \text{lcm}\{F_{2d}/F_d, F_d\} \leq F_{2d}$. Para el caso en que $a > d$ estudiaremos la existencia de soluciones $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ de la ecuación

$$a_1 x + a_2 y = a_3 \quad (3.2)$$

Por el Lema 3.3.13, sabemos que $(-q^d, L_d) \in \mathbb{Z}^2$ es solución entera a (3.2) y, por tanto, el conjunto de soluciones enteras a dicha ecuación será

$$\left\{ \left(-q^d + \lambda \frac{a_2}{e}, L_d - \lambda \frac{a_1}{e} \right), \lambda \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Afirmamos que $-q^d + \frac{a_2}{e} > 0$; de hecho

- si $e \leq 2$, entonces $e q^d \leq L_0 q^d < L_{2d} < a_2$
- si $e = L_{\text{gcd}\{a, d\}} = L_{\text{gcd}\{a-d, d\}}$, entonces $e q^d \leq L_{a-d} q^d < a_2$.

Por tanto, (3.2) tiene solución entera no negativa si y solo si $L_d - \frac{L_a}{e} \geq 0$, lo que equivale a que $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$.

Finalmente tenemos que $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$, lo que implica que $a_1 \leq L_d e$, entonces

$$g(\mathcal{S}) e \leq \frac{a_1 a_2}{e} \leq L_d a_2 < L_{a+2d+1} < a_i \text{ para todo } i \geq 4$$

y $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \geq 4$. \square

Ahora estudiamos el caso en que $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$.

Lema 3.3.22. *Si d divide a a , a/d es impar, $\gcd\{a_1, a_2\} = 1$ y $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $a_4 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$.*

Demostración. Se observa que $a \geq 3d$, pues en caso contrario $a = d$ y $a_1 \mid a_3$. Supongamos que existen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ tales que $a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$. Por otro lado, tenemos que $a_4 = -q^d a_2 + L_d a_3$, entonces si denotamos $\beta := L_d - \alpha_3$ tendremos que $\beta a_3 = \alpha_1 a_1 + (\alpha_2 + q^d) a_2$. Entonces la ecuación $\beta a_3 = x a_1 + y a_2$ tiene una solución $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sabemos que $\beta a_3 = -\beta q^d a_1 + \beta L_d a_2$, por tanto, el conjunto de soluciones enteras de la ecuación es

$$\left\{ (-\beta q^d + \lambda a_2, \beta L_d - \lambda a_1), \lambda \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sin embargo, para cada $\lambda > 0$, tenemos que

$$\beta L_d - \lambda a_1 \leq (L_d)^2 - a_1 < L_{2d+1} - a_1 < 0;$$

por tanto no puede existir una solución $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, lo que es una contradicción. \square

Proposición 3.3.23. *Si $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa $\iff n = 3$, d es par, p y a/d son impares y, o bien q es par o $3 \nmid d$.*

Demostración. Como $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, por el Lema 3.3.16 se sigue que d es par y que a no divide a d ; ya que si a divide a d , entonces $a + 2d/a$ es impar y $a_1 \mid a_3$. Si procedemos tal y como en la demostración de la Proposición 3.3.18 obtendremos que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa si y solo si $\mathcal{A}_{red} = \emptyset$. Denotando por \mathcal{A}' al sistema minimal de generadores de $\mathbb{N}\mathcal{A}$, se tiene que $\mathcal{A}' = \{a_1, a_2, a_3, a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\}$ con $k \in \mathbb{N}$, $4 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ y definimos

$$B'_j := \frac{\gcd(\mathcal{A}' \setminus \{a_j\})}{\gcd(\mathcal{A}')} \text{ para todo } j \in \{1, 2, 3, i_1, \dots, i_k\}.$$

Como demostramos en el Lema 3.3.21, $e := \gcd(\mathcal{A}') = \gcd\{a_1, a_2\}$ y se puede comprobar fácilmente que $e = \gcd\{a_2, a_3\}$; entonces $B'_j = 1$ para todo $j \in \{1, 3, i_1, \dots, i_k\}$. Estudiemos los posibles valores de B'_2 . Si $[d]_2 > [a]_2$, entonces $[a]_2 = [a + td]_2$ para todo $t \in \mathbb{N}$ y $\gcd\{a, d\} = \gcd\{a, 2d\}$, de donde $B'_2 = 1$. En caso de que $[d]_2 < [a]_2$, entonces $[a]_2, [a + d]_2$ y $[a + 2d]_2$ son todos distintos, por lo que se obtiene de nuevo que $B'_2 = 1$. Si $[d]_2 = [a]_2$, entonces $[a]_2 = [a + sd]_2$ si y solo si s es par. Si existiese $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que i_j es par, entonces $e = \gcd\{a_1, a_3, a_{i_j}\}$ y tendríamos de nuevo que $B'_2 = 1$. En todos los casos estudiados hasta el momento tenemos que $B'_j = 1$ para todo $j \in \{1, 2, 3, i_1, \dots, i_k\}$,

entonces \mathcal{A}_{red} tiene $k + 3$ elementos y podemos concluir que $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa. Supongamos por contra que $[d]_2 = [a]_2$ y que i_j es impar para todo $j \in \{1, \dots, k\}$, entonces $\gcd(\mathcal{A}' \setminus \{a_2\}) = L_{\gcd\{a,d\}}$, $e \in \{1, 2\}$ y $B'_2 = \frac{L_{\gcd\{a,d\}}}{e}$. Si $e = 2$ o $\gcd\{a, d\} < d$, se puede comprobar que $B_2 a_2 < a_3$ y a_1 no divide a $B_2 a_2$; en caso contrario $\frac{a_1}{e} \mid B_2 \frac{a_2}{e}$ y $a_1 \mid e B_2 = L_{\gcd\{a,d\}}$, por tanto $a \mid d$, cosa que no es posible, y de nuevo obtendríamos que $\mathcal{A}_{red} \neq \emptyset$ y que $I_{\mathcal{A}}$ no es intersección completa. Finalmente, supongamos que $e = 1$, $[a]_2 = [d]_2$ y $\gcd\{a, d\} = d$ (o, equivalentemente, que a/d es impar) si $n \geq 4$ por el Lema 3.3.22 $a_4 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2, a_3\}$, en cuyo caso $i_1 = 4$ y estaríamos en el caso anterior; pero si $n = 3$, entonces $L_d a_2 = q^d a_1 + a_3 \in \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_3$ y por la Proposición 3.2.8 podemos concluir que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Además, del Lema 3.3.11 se concluye que si a/d es impar, entonces $e = \gcd\{a_1, a_2\} = 1$ si y solo si p es impar y q par o si p y q son impares y $3 \nmid d$. \square

Demostración del Teorema 3.3.20. Como vimos en el Lema 3.3.21, $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ si y solo si d es impar o $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$. A su vez, la condición $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$ es equivalente a que $d \geq a$ o $[d]_2 > [a]_2 \geq 1$ y $\gcd\{a, d\} = a - d$. En efecto, si $[d]_2 > [a]_2$, entonces que $F_{2d} \geq \text{lcm}\{a_1, F_d\}$ es equivalente a que $L_d L_{\gcd\{a,d\}} \geq a_1$ y por (6), (7) del Corolario 3.3.14 esto ocurre si y solo si $\gcd\{a, d\} = a - d$ y $a - d$ es par o $\gcd\{a, d\} > a - d$ o, lo que es lo mismo, $d \geq a$. Si $[d]_2 \leq [a]_2$ y $\gcd\{a_1, F_d\} = 2$, entonces o bien $3 \mid \gcd\{a, d\}$ o p es par; por tanto $2 F_{2d} \geq a_1 F_d$ si y solo si $2 L_d \geq a_1$ y esto solo puede pasar si $d \geq a$. En el resto de casos, tenemos que $\gcd\{a_1, F_d\} = 1$ y $F_{2d} \geq a_1 F_d$ si y solo si $d \geq a$. Recopilando lo anterior, se obtiene que $a_3 \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ si y solo si d es impar, o $d \geq a$, o $\gcd\{a, d\} = a - d$ y $[d]_2 > [a]_2 \geq 1$. En tal caso, además se tiene que $a_i \in \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$ para todo $i \in \{4, \dots, n\}$ y aplicando el Lema 1.2.17 se concluye que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa. Si $a_3 \notin \mathbb{N}\{a_1, a_2\}$, por la Proposición 3.3.23 se sigue el resultado. \square

Nota 3.3.24. Denotando por $e := \gcd(\mathcal{A})$ y por $\mathcal{S} := \mathbb{N}\{a_1/e, \dots, a_n/e\}$, en los casos en que $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa, tenemos la siguiente información adicional (ver Nota 1.2.24 y Proposición 3.1.7):

1. Si d es impar. Entonces,

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_1^{a_2/e} - x_2^{a_1/e}, x_3 - x_1^{q^d} x_2^{L_d}, \dots, x_n - x_{n-2}^{q^d} x_{n-1}^{L_d} \right);$ y
- $g(\mathcal{S}) = \frac{1}{e} (a_1 a_2 / e - a_1 - a_2).$

2. Si $d \geq a$, o $\gcd\{a, d\} = a - d$ y $[d]_2 > [a]_2 \geq 1$. Entonces,

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_1^{a_2/e} - x_2^{a_1/e}, x_3 - x_1^{b_{3,1}} x_2^{b_{3,2}}, x_4 - x_1^{b_{4,1}} x_2^{b_{4,2}}, \dots, x_n - x_1^{b_{n,1}} x_2^{b_{n,2}} \right),$ con $b_{i,1}, b_{i,2} \in \mathbb{N}$ tales que $b_{i,1} a_1 + b_{i,2} a_2 = a_i$ para todo $i \in \{3, \dots, n\}$; y
- $g(\mathcal{S}) = \frac{1}{e} (a_1 a_2 / e - a_1 - a_2).$

3. Si $n = 3$, d es par, a/d y p son impares y, o bien q es par, o $3 \nmid d$. Entonces $e = 1$ y

- $I_{\mathcal{A}} = \left(x_1^{a_3/L_d} - x_3^{a_1/L_d}, x_2^{L_d} - x_1^{q^d} x_3 \right)$; y
- $g(\mathcal{S}) = a_1 a_3 / L_d - a_1 + (L_d - 1) a_2 - a_3$.

El Teorema 3.3.20 depende de los valores de a, d, n y de la paridad de p y q , cosa que no ocurre en el caso análogo de la sucesión de Fibonacci para el que los valores de p, q e incluso de h no intervienen en el resultado (ver Teorema 3.3.15). Esta dependencia de "todos" los valores iniciales hace pensar que en un resultado más general en el que se caracterice la propiedad de ser intersección completa de $I_{\mathcal{A}}$ donde $a_i = L_{d_i}$ con d_1, d_2, \dots, d_n en sucesión aritmética generalizada, el valor de h tal que $h d_1, d_2, \dots, d_n$ están en sucesión aritmética también sería relevante. El siguiente ejemplo pone de manifiesto la dependencia de este valor $h \in \mathbb{Z}^+$, cosa que da una idea de la dificultad que entraña la resolución del caso más general en el que d_1, \dots, d_n están en sucesión aritmética generalizada.

Ejemplo 3.3.25. Sea \mathcal{A}_h el conjunto $\{L_5, L_{h5+d}, L_{h5+2d}\}$, donde $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es la $(1, 1)$ -sucesión de Lucas y $h \in \mathbb{Z}^+$. Para $h = 1$ y $h = 3$, los conjuntos $\mathcal{A}_1 = \{L_5 = 11, L_6 = 18, L_7 = 29\}$ y $\mathcal{A}_3 = \{L_5 = 11, L_{16} = 2207, L_{17} = 3571\}$ determinan ideales tóricos intersección completa. En cambio, para $h = 2$ y $h = 4$, los conjuntos $\mathcal{A}_2 = \{L_5 = 11, L_{11} = 199, L_{12} = 322\}$ y $\mathcal{A}_4 = \{L_5 = 11, L_{21} = 24476, L_{22} = 39603\}$ determinan sendos ideales tóricos que no son intersección completa.

3.4 Intersecciones completas en ciertas curvas monomiales proyectivas

Sean $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\} \subset \mathbb{Z}^+$ y $d := \max\{d_1, \dots, d_n\}$ y consideremos

$$\mathcal{A}^* := \{a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}\} \subset \mathbb{N}^2,$$

donde $a_i := (d_i, d - d_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a_{n+1} := (0, d)$.

El conjunto \mathcal{A}^* determina un ideal tórico simplicial homogéneo $I_{\mathcal{A}^*} \subset k[x_1, \dots, x_{n+1}]$, que es la homogeneización de $I_{\mathcal{A}}$ respecto de x_{n+1} . La variedad simplicial proyectiva $X_{\mathcal{A}} = V(I_{\mathcal{A}^*}) \subset \mathbb{P}_k^n$ es una *curva monomial proyectiva* y es la clausura proyectiva de la curva monomial afín $V(I_{\mathcal{A}})$.

Tanto $I_{\mathcal{A}}$ como $I_{\mathcal{A}^*}$ tienen altura $n - 1$ y puesto que $I_{\mathcal{A}}$ es la deshomogeneización de $I_{\mathcal{A}^*}$ respecto de x_{n+1} , si $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa entonces $I_{\mathcal{A}}$ también lo es, no siendo cierto el opuesto en general.

El objetivo de esta sección es caracterizar en función de \mathcal{A} cuándo $I_{\mathcal{A}^*}$ es una intersección completa en ciertos casos. Para ello, haremos uso del Algoritmo IC-curva-monomial-proyectiva (ver Tabla 3.2) que pasamos a justificar.

Como $I_{\mathcal{A}^*}$ es un ideal tórico simplicial homogéneo, en virtud del Corolario 2.3.2 se verifica lo siguiente:

Corolario 3.4.1. $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa $\iff \mathcal{A}_{red}^* = \emptyset$.

Para calcular \mathcal{A}_{red}^* podemos utilizar el Algoritmo de reducción de la Tabla 1.1. Sin embargo, el cálculo de \mathcal{A}_{red}^* en el caso de curvas monomiales proyectivas que estamos tratando se simplifica si se tienen en cuenta las observaciones de la Nota 3.4.2 siguiente.

Nota 3.4.2. (1) Siendo $B_i = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{j \in \{1, \dots, n+1\}, j \neq i} \mathbb{Z}a_j\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, como $\min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{j \in \{1, \dots, n+1\}, j \neq i} \mathbb{Z}a_j\} = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid bd_i \in \sum_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i} \mathbb{Z}d_j\}$, se tiene que $B_i = \gcd(\mathcal{A} \setminus \{d_i\}) / \gcd(\mathcal{A})$. Por tanto, el cálculo de B_i es directo y para obtenerlo no es necesario recurrir al método general de la Subsección 2.4.2.

(2) $\forall i \in \{1, \dots, n\} : B_i a_i \in \sum_{j \in \{1, \dots, n+1\}, j \neq i} \mathbb{N}a_j \iff B_i d_i = \sum_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i} \alpha_j d_j \in \sum_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i} \mathbb{N}d_j$ con $\sum_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i} \alpha_j \leq B_i$. Esto es, el problema de determinar si $B_i a_i \in \sum_{j \in \{1, \dots, n+1\}, j \neq i} \mathbb{N}a_j$ se reduce al de comprobar si un elemento pertenece a un semigrupo de \mathbb{N} con una condición adicional.

(3) Si $i = n + 1$ o $d_i = d = \max\{d_1, \dots, d_n\}$, entonces $B_i a_i \notin \sum_{j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i} \mathbb{N}a_j$ ya que $a_i \notin \text{Cone}(\mathcal{A}^* \setminus \{a_i\})$.

Haciendo uso del Algoritmo de reducción de la Tabla 1.1 y teniendo en cuenta la Nota 3.4.2, el Algoritmo IC-curva-monomial-proyectiva que se muestra en la Tabla 3.2 recibe como entrada un conjunto $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\} \subset \mathbb{Z}^+$ y determina si $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa. Nótese que este algoritmo determina si el ideal tórico de una curva monomial proyectiva cualquiera es intersección completa. Además el algoritmo está en esencia contenido en [19, Theorem 3.6].

Para $n = 3$, el procedimiento anterior nos lleva al siguiente criterio, que utilizaremos más adelante.

Corolario 3.4.3. Sean $\mathcal{A} = \{d_1, d_2, d_3\}$ con $d_1 < d_2 < d_3$. Entonces, $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa si y solo si se verifica alguna de las siguientes condiciones:

- $B_1 d_1 = \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3$ para ciertos $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{N}$, o
- $B_2 d_2 = \alpha_1 d_1 + \alpha_3 d_3$ para ciertos $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ tales que $B_2 \geq \alpha_1 + \alpha_3$.

Demostración. Basta con observar que si $B_1 d_1 = \alpha_2 d_2 + \alpha_3 d_3$, entonces $B_1 \geq \alpha_2 + \alpha_3$ ya que $d_1 < d_2 < d_3$. Aplicando el Corolario 3.4.1 y en vista de la Nota 3.4.2 se sigue el resultado. \square

Pasamos ya a estudiar cuándo $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa siendo \mathcal{A} de cada una de las familias de la sección anterior. Comenzamos estudiando los casos en que \mathcal{A} o $\mathcal{A} \setminus \{d_n\}$ una sucesión aritmética generalizada y supondremos que $\gcd(\mathcal{A}) = 1$.

Algoritmo IC-curva-monomial-proyectiva

Entrada : $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\} \subset \mathbb{Z}^+$
Salida : VERDADERO o FALSO

```

d := max{d1, ..., dn}
repeat
  B := A
  for all di ∈ A \ {d} do
    Bi := gcd(A \ {di}) / gcd(A)
    if Bi di = ∑j≠i αj dj ∈ ∑j≠i αj dj y ∑ αj ≤ Bi then
      A := A \ {di}
    end if
  end for
until (A = {d}) OR (A = B)
if A = {d} then
  return VERDADERO
end if
return FALSO

```

Tabla 3.2: Algoritmo IC-curva-monomial-proyectiva

Teorema 3.4.4. *Sea* $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\}$ *una sucesión aritmética generalizada con* $n \geq 3$. *Entonces,* $I_{\mathcal{A}^*}$ *es intersección completa* $\iff n = 3$, \mathcal{A} *es una sucesión aritmética y* d_1 *es par.*

Demostración. (\implies) *Sea* $h \in \mathbb{Z}^+$ *tal que* $\{hd_1, d_2, \dots, d_n\}$ *es una sucesión aritmética. Para todo* $i \in \{3, \dots, n-1\}$ *se tiene que* $B_i = 1$ *y* $B_1 = \gcd\{d_1, h\}$, *por tanto* $B_1 d_1 \leq hd_1 < d_2 < \dots < d_n$ *y* $B_1 a_1 \notin \sum_{j=2}^{n+1} \mathbb{N} a_j$. *Si* $n \geq 4$ *o* d_1 *es impar, se tiene que* $B_2 = 1$ *y, por tanto* $\mathcal{A}_{red}^* \neq \emptyset$ *y* $I_{\mathcal{A}^*}$ *no puede ser intersección completa por el Corolario 3.4.1. Supongamos ahora que* $n = 3$ *y* d_1 *par, en estas condiciones tenemos que* $B_2 = 2$. *Si* \mathcal{A} *no es sucesión aritmética, es decir, si* $h \geq 2$, *entonces* $B_2 d_2 \neq \alpha_1 d_1 + \alpha_3 d_3$ *con* $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{N}$ *y* $\alpha_1 + \alpha_3 \leq 2$. *Por el Corolario 3.4.3, en todos estos casos* $I_{\mathcal{A}^*}$ *no es intersección completa.*

(\impliedby) *En estas condiciones* $B_2 = 2$ *y* $2d_2 = d_1 + d_3$. *Por el Corolario 3.4.3,* $I_{\mathcal{A}^*}$ *es intersección completa.* □

Nota 3.4.5. *En caso de que* $I_{\mathcal{A}^*}$ *sea intersección completa, teniendo en cuenta la Nota 1.2.24 y el Corolario 3.4.1, obtenemos el siguiente sistema minimal de generadores del ideal tórico:*

$$I_{\mathcal{A}^*} = \left(x_2^2 - x_1 x_3, x_1^{d_3/2} - x_3^{d_1/2} x_4^{d_2-d_1} \right).$$

Respecto del caso en que $\mathcal{A} \setminus \{d_n\}$ es una sucesión aritmética generalizada, supon-
dremos sin pérdida de generalidad que $\{d_n, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ no es una sucesión aritmética
creciente. Si así fuera, intercambiamos d_1 y d_n y tomamos $d'_1 := d_n$, $d'_i = d_i$ para todo
 $2 \leq i \leq n-1$ y $d'_n = d_1$ y se tiene que $\mathcal{A} \setminus \{d'_n\} = \{d'_1, \dots, d'_{n-1}\}$ es una sucesión
aritmética.

Teorema 3.4.6. *Sea $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\}$ tal que $\mathcal{A} \setminus \{d_n\}$ es una sucesión aritmética gene-
ralizada con $n \geq 4$. Entonces, $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa $\iff n = 4$, $\{d_1, d_2, d_3\}$ es
una sucesión aritmética y se satisface una de las siguientes condiciones:*

1. $d_1 / \gcd\{d_1, d_2\}$ es par y $\gcd\{d_1, d_2\} d_4 = \beta_1 d_1 + \beta_2 d_2 + \beta_3 d_3$ con $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq$
 $\gcd\{d_1, d_2\}$, o
2. d_1, d_4 son pares y $\mathcal{C}_{red}^* = \emptyset$ con $\mathcal{C} = \{d_1, d_3, d_4\}$.

Demostración. Sea $h \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\{hd_1, d_2, \dots, d_{n-1}\}$ es una sucesión aritmética. Por el
Corolario 3.4.1, tenemos que $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa si y solo si $\mathcal{A}_{red}^* = \emptyset$.

Separamos dos casos, si $B_n a_n \in \sum_{j \in \{1, \dots, n-1, n+1\}} \mathbb{N} a_j$ o, equivalentemente, si $B_n d_n =$
 $\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j d_j$ con $\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j \leq B_4$ (ver Nota 3.4.2), entonces por la Proposición 1.2.19 y el
Lema 1.2.17 tenemos que $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa si y solo si lo es $I_{\mathcal{A}^* \setminus \{a_n\}}$. Es fácil
comprobar que $I_{\mathcal{A}^* \setminus \{a_n\}} = I_{\mathcal{A}_1^*}$ con $\mathcal{A}_1 = \{d_1/B_n, \dots, d_{n-1}/B_n\}$. Además $\gcd(\mathcal{A}_1) = 1$ y
 \mathcal{A}_1 es una sucesión aritmética generalizada, entonces por el Teorema 3.4.4, concluimos que
 $I_{\mathcal{A}_1^*}$ es intersección completa si y solo si $n = 4$, d_1/B_4 es par y $\{d_1, d_2, d_3\}$ es una sucesión
aritmética; nótese además que $B_4 = \gcd\{d_1, d_2, d_3\} = \gcd\{d_1, d_2\}$.

Supongamos ahora que $B_n a_n \notin \sum_{j \in \{1, \dots, n-1, n+1\}} \mathbb{N} a_j$. Como $B_i = 1$ para todo $i \in$
 $\{3, \dots, n-1\}$, entonces $B_i a_i \notin \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n+1\} \\ j \neq i}} \mathbb{N} a_j$; estudiemos los posibles valores de B_1
y B_2 . Si $n \geq 5$, d_1 es impar o d_4 es impar entonces $B_2 = 1$ y $B_2 a_2 \notin \sum_{\substack{j \in \{1, \dots, n+1\} \\ j \neq 2}} \mathbb{N} a_j$;
en caso contrario, i.e., $n = 4$ y d_1 y d_4 son pares, se tiene que $B_2 = 2$. Este caso tenemos
que $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa si y solo si lo es $I_{\mathcal{C}^*}$ con $\mathcal{C} := \{d_1, d_3, d_4\}$. Además
 $2a_2 \in \mathbb{N}\{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ si y solo si $2d_2 = \alpha_1 d_1 + \alpha_3 d_3 + \alpha_4 d_4$ con $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 2$, lo
que solo ocurre si:

- (a) $2d_2 = d_1 + d_3$,
- (b) $2d_2 = d_1 + d_4$, o
- (c) $2d_2 = d_3 + d_4$.

En (a) se tiene que $\{d_1, d_2, d_3\}$ es una sucesión aritmética. En (b) se tiene que $\{d_1, d_2, d_4\}$
una sucesión aritmética y se tiene la igualdad $(h-1)d_1 + d_3 = d_4$, de la que se deduce
además que $\mathcal{C}_{red}^* \neq \emptyset$ y, por tanto, que $I_{\mathcal{A}^*}$ no es intersección completa. En efecto, si
denotamos por $B'_i := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid ba_i \in \sum_{\substack{j \in \{1, 3, 4\} \\ j \neq i}} \mathbb{Z} a_j\}$ para todo $i \in \{1, 3, 4\}$, de la
igualdad anterior se tiene que $B'_3 = B'_4 = 1$ y que $B'_1 \leq h-1$ y, por tanto, $B'_1 d_1 \notin$
 $\mathbb{N}\{d_3, d_4\}$, ya que $B'_1 d_1 < d_3 < d_4$. En (c) se tiene que $\{d_4, d_2, d_3\}$ es una sucesión
aritmética creciente, pero habíamos supuesto que esto no se podía dar.

Finalmente si tomamos $h, r \in \mathbb{Z}^+$ tales que $d_i = hd_1 + (i-1)r$ para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$, tenemos que $B_1 = \gcd\{d_2, \dots, d_{n-1}, d_n\} = \gcd\{hd_1, r, d_n\} = \gcd\{h, r, d_n\} \leq h$, de donde $B_1d_1 < d_2 < \dots < d_{n-1}$ y se tiene que $B_1d_1 \in \mathbb{N}\{d_2, \dots, d_n\}$ si y solo si d_n divide a B_1d_1 . Además en este caso, por la Proposición 1.2.19 y el Lema 1.2.17, $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa si y solo si $I_{\mathcal{B}^*}$ lo es, donde $\mathcal{B} := \{d_2, \dots, d_n\}$. No obstante, $d_n \mid B_1d_1 \mid hd_1$ y \mathcal{B} es una sucesión aritmética generalizada. Lo que por el Teorema 3.4.4 implica que $n = 4$ y $\{d_4, d_2, d_3\}$ es una sucesión aritmética creciente, pero habíamos supuesto que esto no se podía dar. En el resto de casos se tiene que $B_ia_i \notin \mathbb{N}(\mathcal{A}^* \setminus \{a_i\})$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, por tanto $\mathcal{A}_{red}^* \neq \emptyset$ y $I_{\mathcal{A}^*}$ no es intersección completa. \square

Nota 3.4.7. Cuando $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa, obtenemos los siguientes sistemas minimales de generadores del ideal tórico $I_{\mathcal{A}^*}$ dependiendo de los casos (ver Nota 1.2.24 y Corolario 3.4.1):

1. Siendo $b = \gcd\{d_1, d_2\}$, si $n = 4$, $\{d_1, d_2, d_3\}$ es una sucesión aritmética, d_1/b es par y $bd_4 = \beta_1d_1 + \beta_2d_2 + \beta_3d_3$ con $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq b$, entonces

$$I_{\mathcal{A}^*} = \left(x_4^b - x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} x_3^{\beta_3} x_5^{b-\sum \beta_i}, x_2^2 - x_1x_3, x_1^{d_3/2b} - x_3^{d_1/2b} x_5^{(d_2-d_1)/b} \right).$$

2. Si $n = 4$, $\{d_1, d_2, d_3\}$ es una sucesión aritmética, d_1, d_4 son pares y $\mathcal{C}_{red}^* = \emptyset$ con $\mathcal{C} = \{d_1, d_3, d_4\}$, entonces

$$I_{\mathcal{A}^*} = (x_2^2 - x_1x_3) + I_{\mathcal{C}^*} \cdot k[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5].$$

Finalizamos esta sección estudiando cuándo $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa en las siguientes familias, donde $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\}$, $n \geq 3$ y $p, q \in \mathbb{Z}^+$ son primos entre sí:

- \mathcal{A} está formado por términos de la (p, q) -sucesión de Fibonacci cuyos índices están en sucesión aritmética generalizada, i.e., existen $h, a, d \in \mathbb{Z}^+$ tales que $d_1 = F_a$, $d_i = F_{ha+(i-1)d}$ para todo $i \geq 2$.
- \mathcal{A} está formado por términos de la (p, q) -sucesión de Lucas cuyos índices están en sucesión aritmética, i.e., existen $a, d \in \mathbb{Z}^+$ tales que $d_1 = L_a$, $d_i = L_{ha+(i-1)d}$ para todo $i \geq 2$.

En ambos casos caracterizaremos cuándo $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa en función de los datos de entrada; es decir, de los valores de p, q, n, a y d (y h en el caso de la sucesión de Fibonacci).

Teorema 3.4.8. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ primos entre sí y sea $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la (p, q) -sucesión de Fibonacci. Sea $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\}$ con $d_1 := F_a$ y $d_i := F_{ha+(i-1)d}$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$ donde $h, a, d \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 3$. Entonces, $I_{\mathcal{A}^*}$ es intersección completa $\iff n = 3, h = 1, d$ es par y $2d \mid a$.

Demostración. Comenzamos observando que $B_i = \gcd(\mathcal{A} \setminus \{d_i\})/\gcd(\mathcal{A}) = 1$ para todo $i \geq 3$ (ver Lema 3.3.11) y que $B_1 = F_{\gcd\{ha,d\}}/F_{\gcd\{a,d\}}$ y, por tanto $B_1 d_1 \leq F_d d_1 < d_2 < \dots < d_n$, de donde $B_1 a_1 \notin \sum_{j=2}^{n+1} \mathbb{N}a_j$. Estudiemos los posibles valores de B_2 , si $n \geq 4$ o $[d]_2 \geq [a]_2$, entonces $B_2 = 1$, y si $n = 3$ y $[d]_2 < [a]_2$ entonces $B_2 = F_{\gcd\{a,2d\}}/F_{\gcd\{a,d\}} = L_{\gcd\{a,d\}}$. Si $d \nmid a$, entonces $B_2 d_2 \leq L_{d-1} d_2 < L_{ha+2d-2} < d_3$ y se tiene que $B_2 d_2 \in \mathbb{N}d_1 + \mathbb{N}d_3$ si y solo si $B_2 d_2 = \alpha d_1$, en cuyo caso se tiene que $\alpha > B_2$ y, por la Nota 3.4.2, $B_2 a_2 \notin \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$. Supongamos ahora que $d \mid a$, si d es impar entonces $L_d d_2 = -q^d (F_{ha}/d_1) d_1 + d_3 < d_3$ y de nuevo se tiene que $B_2 d_2 \in \mathbb{N}d_1 + \mathbb{N}d_3$ si y solo si $B_2 d_2 = \alpha d_1$, y por tanto $B_2 a_2 \notin \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$. Finalmente si d es par se tiene la igualdad $B_2 d_2 = q^d (F_{ha}/d_1) d_1 + d_3 < 2d_3$, de la que se deduce que si $B_2 d_2 = \alpha_1 d_1 + \alpha_3 d_3$ con $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha_3 < 2$; además si $\alpha_3 = 0$, entonces $\alpha_1 > B_2$. Por tanto, teniendo en cuenta la Nota 3.4.2, se tiene que $B_2 a_2 \in \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$ si y solo si $q^d (F_{ha}/d_1) + 1 \leq L_d$. Si $h > 1$, entonces $F_{ha}/d_1 \geq F_{2a}/F_a = L_a \geq L_d$ y si $h = 1$ se tiene que $L_d = F_{d+1} + qF_{d-1} > q^{d/2} F_1 + q q^{d/2-1} F_1 = q^d$, de donde se concluye el resultado. \square

Nota 3.4.9. Cuando I_{A^*} es intersección completa, esto es, cuando $\mathcal{A} = \{d_1, d_2, d_3\}$ con $d_1 = F_a$, $d_2 = F_{a+d}$, $d_3 = F_{a+2d}$, d es par y $2d \mid a$, se obtiene el siguiente sistema minimal de generadores de I_{A^*} (ver Nota 1.2.24) :

$$I_{A^*} = \left(x_1^{d_3/F_{2d}} - x_3^{d_1/F_{2d}} x_4^{(d_3-d_1)/F_{2d}}, x_2^{L_d} - x_1^{q^d} x_3 x_4^{L_d-q^d-1} \right).$$

Teorema 3.4.10. Sean $p, q \in \mathbb{Z}^+$ primos entre sí y sea $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la (p, q) -sucesión de Lucas. Sea $\mathcal{A} = \{d_1, \dots, d_n\}$ donde $d_i := L_{a+(i-1)d}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ con $a, d \in \mathbb{Z}^+$ y $n \geq 3$. Entonces, I_{A^*} es intersección completa $\iff n = 3$, d es par, p y a/d son impares y, o bien q es par o $3 \nmid d$

Demostración. Comenzamos observando que $B_i = \gcd(\mathcal{A} \setminus \{d_i\})/\gcd(\mathcal{A}) = 1$ para todo $i \geq 3$ (ver Lema 3.3.11). Estudiemos los posibles valores de B_2 , si $n \geq 4$ o $[d]_2 \neq [a]_2$, entonces $B_2 = 1$, y si $n = 3$ y $[d]_2 = [a]_2$ entonces $B_2 = \gcd\{d_1, d_3\} / \gcd(\mathcal{A}) = L_{\gcd\{a,d\}} / \gcd(\mathcal{A})$ y $\gcd(\mathcal{A}) \in \{1, 2\}$. Si $\gcd(\mathcal{A}) = 2$ o $\gcd\{a,d\} < d$, entonces $B_2 d_2 < d_3$ y, por tanto $B_2 a_2 \notin \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$. Si en cambio, $\gcd(\mathcal{A}) = 1$ y $\gcd\{a,d\} = d$, entonces $B_2 d_2 = L_d d_2 = (-1)^d q^d d_1 + d_3$, si d fuese impar entonces $L_d d_2 < d_3$ y de nuevo se tendría que $B_2 a_2 \notin \mathbb{N}a_1 + \mathbb{N}a_3 + \mathbb{N}a_4$; en caso contrario $B_2 d_2 = q^d d_1 + d_3$ y $q^d + 1 \leq L_d$. De aquí se tiene que $\mathcal{A}_{red}^* = \emptyset$ si y solo si $n = 3$, $[d]_2 = [a]_2$, $\gcd\{a,d\} = d$, $\gcd\{d_1, d_2, d_3\} = 1$ y d es par, de donde se sigue el resultado si tenemos en cuenta el Lema 3.3.11. \square

Nota 3.4.11. Cuando I_{A^*} es intersección completa, esto es, cuando $\mathcal{A} = \{d_1, d_2, d_3\}$ con $d_1 = L_a$, $d_2 = L_{a+d}$, $d_3 = L_{a+2d}$, d es par, p y a/d son impares y, o bien q es par o $3 \nmid d$, se obtiene el siguiente sistema minimal de generadores de I_{A^*} (ver Nota 1.2.24) :

$$I_{A^*} = \left(x_1^{d_3/L_d} - x_3^{d_1/L_d} x_4^{(d_3-d_1)/L_d}, x_2^{L_d} - x_1^{q^d} x_3 x_4^{L_d-q^d-1} \right).$$

Capítulo 4

Intersecciones completas en ideales tóricos de grafos

4.1 Generalidades

A todo grafo G simple y no dirigido, es decir, sin aristas múltiples ni bucles, se le puede asociar un ideal tórico de la siguiente manera. Denotamos por $V(G) = \{v_1, \dots, v_m\}$ al conjunto de vértices del grafo y por $E(G) = \{f_1, \dots, f_n\}$ al conjunto de aristas. Para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ denotamos por a_i al vector característico de la arista f_i , es decir, si $f_i = \{v_j, v_k\} \in E(G)$, entonces $a_i := e_j + e_k \in \mathbb{N}^m$; donde $\{e_1, \dots, e_m\}$ denota la base canónica de \mathbb{Z}^m . El ideal tórico determinado por $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$, que denotaremos por I_G , se denomina el *ideal tórico de G* . Asimismo, la imagen de φ se denomina el *álgebra de aristas de G* y se denota por $k[G] := k[t_j t_k \mid \{v_j, v_k\} \in E(G)]$.

Basta con tomar $w = (1/2, \dots, 1/2) \in \mathbb{Q}^m$ y aplicar la Proposición 1.1.7 para comprobar que el ideal tórico de un grafo siempre es homogéneo. Además, si denotamos por $b(G)$ al número de componentes conexas de G que son bipartitas, entonces la dimensión de $\mathbb{Q}\mathcal{A}$ vale $m - b(G)$ (ver [101]), lo que en virtud de la Proposición 1.1.12 implica que la altura de I_G es $n - m + b(G)$. Diremos que el grafo G es *intersección completa* si su correspondiente ideal I_G lo es.

En vista de que el ideal tórico I_G se define en función del grafo G , cabe pensar que las propiedades del ideal se puedan leer a partir de la combinatorias del grafo. Un primer ejemplo de esto es que la altura de I_G se expresa en términos de el número de aristas, el número de vértices y el número de componentes conexas que son bipartitas. Además, como ya vimos en la Sección 1, la propiedad de ser intersección completa es independiente del cuerpo k , hecho que aporta más sentido a intentar describir cuándo I_G es intersección completa en términos puramente combinatorios del grafo.

En este capítulo nos centraremos en dos objetivos principales. El primero de ellos será el de proponer un algoritmo de naturaleza combinatoria que reciba como entrada un grafo simple no dirigido G y determine si es intersección completa o no. El segundo consistirá en aportar una caracterización combinatoria de la estructura de los grafos que son intersección

completa.

Cuando G es bipartito, el problema de determinar cuándo G es intersección completa ha sido ampliamente estudiado por varios autores como por ejemplo Doering y Gunston [34], Simis [93], Katzman [65], Gitler y Valencia [49] o Gitler, Reyes y Villarreal [47, 48].

Aquí estudiaremos la situación más general en que G no es necesariamente bipartito, en particular veremos que esta situación complica notablemente el problema. Los principales resultados de esta sección son los Teoremas 4.4.8, 4.6.5 y 4.6.18. Del primero de estos se deduce el Algoritmo IC-grafo que recibe como entrada un grafo G y devuelve VERDADERO si G es intersección completa y FALSO en caso contrario. Además, siempre que G sea intersección completa el algoritmo devuelve sin ningún esfuerzo adicional un sistema minimal de generadores de I_G formado por binomios homogéneos. Por otra parte, un grafo cualquiera G se puede particionar en dos subgrafos inducidos disjuntos C y R tales que $V(C) = V(C_1) \sqcup \dots \sqcup V(C_s)$ donde C_1, \dots, C_s son ciclos primitivos impares y R es bipartito. Con esta notación, en el Teorema 4.6.5 se da una condición necesaria para que G sea intersección completa en función de los grafos C y R . Finalmente, bajo las hipótesis adicionales de que C es conexo y R es 2-conexo, en el Teorema 4.6.18 se listan todas las familias de grafos cuyo ideal tórico es intersección completa.

Los contenidos de este capítulo son los siguientes. En la Sección 2, comenzaremos por introducir algo de notación básica y terminología sobre grafos que será necesaria para describir en función de la combinatoria del grafo un sistema de generadores de I_G . En esta sección también recordaremos la caracterización obtenida por Gitler, Reyes y Villarreal [48] de los grafos bipartitos intersección completa por medio de los grafos anillados y veremos cómo la situación se complica cuando el grafo en cuestión no es necesariamente bipartito. La tercera sección comienza aplicando el Corolario 1.2.15 al contexto de ideales tóricos de grafos para demostrar en el Teorema 4.3.3 que la propiedad de ser intersección completa en grafos es hereditaria, es decir, que cualquier subgrafo de uno intersección completa también lo es. La aplicación de este resultado nos permite obtener en el Teorema 4.3.6 una cota superior para el número de aristas en función del número de vértices, cota que mejora las conocidas (ver Corolario 4.3.7). Como consecuencia inmediata del Teorema 4.3.6 se obtiene que un grafo intersección completa o tiene un vértice de grado ≤ 2 o es 3-regular (ver Corolario 4.3.8). La sección cuarta está dedicada al diseño del Algoritmo IC-grafo, un algoritmo para determinar si un grafo es intersección completa. Este algoritmo surge como consecuencia directa del Teorema 4.4.8 y funciona de la siguiente manera: se quitan todos los vértices de grado 1 y 2, cada vez que se quita un vértice de grado 2 se comprueban ciertas condiciones, en caso de que estas condiciones no se satisfagan el algoritmo devuelve FALSO; en caso contrario, se construye un binomio e iteramos este proceso hasta llegar a un grafo trivial o a un grafo en el que todos los vértices tienen grado ≥ 3 . Si existiese un vértice de grado > 3 , el algoritmo devuelve FALSO, en caso contrario usamos la caracterización de los grafos intersección completa 3-regulares obtenida en el Teorema 4.4.4. Finalmente, si no se ha devuelto FALSO en ningún paso previo, hemos construido un sistema de $h = \text{ht}(I_G)$ binomios f_1, \dots, f_h y el grafo G es intersección completa si y solo si $I_G = (f_1, \dots, f_h)$, para comprobar si esta igualdad se satisface y, por

ende, si G es intersección completa, usamos el Teorema 1.2.11. En la sección quinta se aborda el problema de encontrar subgrafos prohibidos en un grafo intersección completa. El principal resultado de esta sección es el Teorema 4.5.8, donde se prueba que los grafos theta impares cuyos vértices base no son adyacentes y los grafos theta pares son subgrafos prohibidos de uno intersección completa (ver Definición 4.5.5 para una definición de grafos theta pares e impares). Para probar esto, usamos el Lema 4.5.1 y la Proposición 4.5.3, dos resultados técnicos sobre los vértices de grado 2 en un grafo intersección completa. En la Sección 6 aplicamos los resultados previos con el fin de obtener los ya citados Teorema 4.6.5 y Teorema 4.6.18 junto con sus versiones normales Corolario 4.6.20 y Corolario 4.6.21.

Los resultados de este capítulo se pueden encontrar en el trabajo conjunto con Isabel Bermejo y Enrique Reyes [10].

4.2 El ideal tórico de un grafo

Comenzamos esta sección fijando algo de notación y terminología sobre grafos de la que haremos uso con posterioridad. Como referencia sobre terminología y resultados básicos de teoría de grafos se recomiendan los libros de Harary [51] y Diestel [32].

Un *camino* w que conecta $u, v \in V(G)$ es una sucesión finita de vértices $w = (u = v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_q} = v)$ tal que cualesquiera dos vértices consecutivos están unidos por una arista, i.e., $\{v_{i_{j-1}}, v_{i_j}\} \in E(G)$ para todo $1 \leq j \leq q$. En caso de que el camino no pase dos veces por el mismo vértice, es decir, $v_{i_j} \neq v_{i_k}$ para todo $0 \leq j < k \leq q$, entonces se dice que w es un *camino simple*. El conjunto de vértices del camino w es $V(w) := \{v_{i_0}, \dots, v_{i_q}\}$ y su conjunto de aristas es $E(w) := \{\{v_{i_{j-1}}, v_{i_j}\} \mid 1 \leq j \leq q\}$, la *longitud del camino* w es q , el número de aristas en el mismo. Un camino se dice que es *par* (respectivamente *impar*) si su longitud es par (respectivamente impar). El camino es *cerrado* si comienza y termina en el mismo vértice. Un *ciclo* es un camino cerrado que no pasa dos veces por el mismo vértice salvo, claro está, al principio y al final, esto es, $v_{i_k} \neq v_{i_j}$ para todo $1 \leq k < j \leq q$. Un ciclo se denomina *ciclo primitivo* si las únicas aristas que hay en G conectando vértices de w son las propias de w , i.e., si $\{v_{i_k}, v_{i_j}\} \notin E(G)$ para todo $1 \leq k < k+1 < j \leq q$.

Para todo camino $w = (u = v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_q} = v)$ denotamos por $-w$ a su *camino inverso* ($v = v_{i_q}, \dots, v_{i_1}, v_{i_0} = u$) y si tenemos w_1, \dots, w_r caminos, donde w_i conecta u_i, u_{i+1} para todo $1 \leq i \leq r$, entonces (w_1, \dots, w_r) denota el camino que conecta u_1 y u_{r+1} y que se obtiene concatenando los caminos w_1, \dots, w_{r-1} y w_r .

A todo camino cerrado par $w = (v_{i_0}, \dots, v_{i_{2q}} = v_{i_0})$, donde $e_{k_j} = \{v_{i_{j-1}}, v_{i_j}\}$ para todo $1 \leq j \leq 2q$, se le asocia el binomio B_w definido como

$$B_w := \prod_{l=1}^q x_{k_{2l-1}} - \prod_{l=1}^q x_{k_{2l}}.$$

Es fácil comprobar que $B_w \in I_G$; es más, Villarreal probó en [99, Proposition 3.1] que I_G está generado por este tipo de binomios, i.e., $I_G = (\{B_w \mid w \text{ es un camino cerrado par}\})$.

En un trabajo posterior, Hibi y Ohsugi [79] mejoran este resultado dando una condición necesaria para que un binomio de I_G sea primitivo. Recordamos que un binomio $\mathbf{x}^\alpha - \mathbf{x}^\beta \in I_G$ es *primitivo* si no existe otro binomio $\mathbf{x}^{\alpha'} - \mathbf{x}^{\beta'} \in I_G$ tal que $\mathbf{x}^{\alpha'} \mid \mathbf{x}^\alpha$ y $\mathbf{x}^{\beta'} \mid \mathbf{x}^\beta$. Es fácil demostrar que si un binomio pertenece a un sistema minimal de generadores de I_G , entonces es primitivo, de donde se deduce que el conjunto de binomios primitivos de I_G , la denominada *base de Graver* de I_G , es sistema generador del ideal.

Lema 4.2.1. [79, Lemma 3.2] *Si B_w es un binomio primitivo, entonces se da una de las siguientes condiciones:*

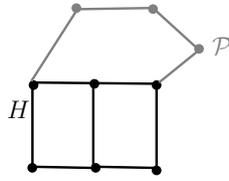
- w es un ciclo par,
- $w = (C_1, C_2)$ donde C_1 y C_2 son ciclos impares que tienen exactamente un vértice en común, o
- $w = (C_1, w_1, C_2, -w_2)$ donde C_1, C_2 son ciclos impares disjuntos por vértices y w_1, w_2 son caminos que conectan un vértice $v_1 \in V(C_1)$ y un vértice $v_2 \in V(C_2)$.

En un trabajo reciente Reyes, Tatakis y Thoma [87] mejoran este resultado aportando una caracterización completa de los binomios primitivos y de todos los posibles sistemas de generadores de I_G formados por binomios. Sin embargo, solo haremos uso del Lema 4.2.1 ya enunciado y no de la descripción completa.

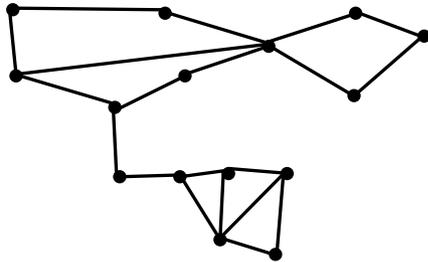
Respecto a la caracterización de los grafos que son intersección completa, como ya comentamos en la introducción, el problema ha sido estudiado por varios autores cuando el grafo G es bipartito. En este contexto, Simis en [93, Theorem 2.5.(ii)] demostró que I_G es intersección completa si y solo si el número de ciclos primitivos coincide con $n - m + b(G)$, que es la altura del ideal I_G . Posteriormente Katzman en [65] demuestra que si G es bipartito, I_G es intersección completa si y solo si cualesquiera dos ciclos primitivos tienen a lo sumo una arista en común. Recientemente, Gitler, Reyes y Villarreal aportan en [48] una nueva caracterización de esta propiedad que además nos muestra cómo construir todos los grafos bipartitos intersección completa.

Teorema 4.2.2. [48, Corollary 3.3] *Si G es bipartito, entonces G intersección completa $\iff G$ es un grafo anillado.*

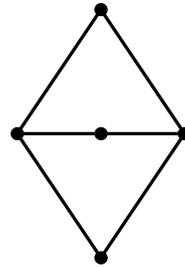
Recordamos que un *bloque* B es un subgrafo conexo maximal de G tal que si quitamos cualquier vértice de B , sigue siendo conexo. Un grafo se dice *2-conexo* si tiene más de 2 vértices y si quitamos uno cualquiera de sus vértices sigue siendo conexo. Por consiguiente, un bloque de G puede ser o un subgrafo 2-conexo maximal, dos vértices unidos por una arista o un vértice aislado. Dado un subgrafo H de G , un camino \mathcal{P} se dice que es un *H -camino* si comienza y termina en H y no tiene más vértices en común con H . Un grafo G se dice que es un *grafo anillado* si todo bloque de G es o bien un vértice, o dos vértices unidos por una arista o se puede construir añadiendo sucesivamente H -caminos que comienzan y terminan en vértices adyacentes.



\mathcal{P} es un H -camino que comienza y termina en vértices no adyacentes



Grafo anillado

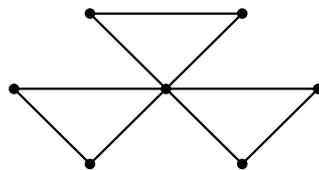


Grafo no anillado

De la propia definición de grafo anillado es fácil probar que todo grafo anillado es planar. Por tanto, todo grafo bipartito que sea intersección completa también es planar (este resultado ya había sido demostrado anteriormente por Katzman [65] sin hacer uso del concepto de grafo anillado).

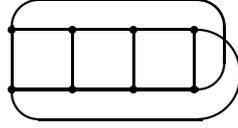
Aquí, como ya hemos reseñado, estudiaremos la situación más general en que G no es necesariamente bipartito. Esta situación complica notablemente el problema ya que no todo grafo anillado es intersección completa y no todo grafo intersección completa es anillado, como muestran los siguientes ejemplos:

Sea G_1 el grafo con vértices $\{v_1, \dots, v_7\}$ y aristas $\{e_1, \dots, e_9\}$ donde $e_i = \{v_i, v_7\}$ para $1 \leq i \leq 6$, $e_7 = \{v_1, v_2\}$, $e_8 = \{v_3, v_4\}$ y $e_9 = \{v_5, v_6\}$, que se observa en la siguiente figura.



G_1 tiene tres bloques y cada uno de ellos es un ciclo de longitud 3, por tanto G_1 es un grafo anillado. Por otra parte, G_1 es conexo y no bipartito, de donde $b(G_1) = 0$ y $ht(I_{G_1}) = 9 - 7 = 2$; además I_{G_1} está generado minimalmente por los binomios $f_1 = x_1x_2x_8 - x_3x_4x_7$, $f_2 = x_1x_2x_9 - x_5x_6x_7$ y $f_3 = x_3x_4x_9 - x_5x_6x_8$, por tanto G_1 no es intersección completa.

Sea G_2 el siguiente grafo:



Se observa que G_2 no es planar pues es una subdivisión de $\mathcal{K}_{3,3}$ y por tanto no es un grafo anillado; sin embargo, G_2 es lo que denominamos una *banda parcial impar* y, como veremos en la Proposición 4.6.4, es intersección completa.

4.3 Una cota superior para el número de aristas de un grafo intersección completa

En esta sección buscamos una cota superior para el número de aristas de un grafo intersección completa en función del número de vértices. Recordamos que Katzman en [65, Corollary 3.8] demostró que $|E(G)| + 4 \leq 2|V(G)|$ para todo grafo bipartito intersección completa. Por otra parte, Fischer, Morris y Shapiro en [38, Corollary 3.4] demostraron que para un ideal tórico cualquiera, si $I_{\mathcal{A}}$ es intersección completa y $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) = r$, entonces el número de rayos extremos del cono de \mathcal{A} es $\leq 2r - 2$. Para un ideal tórico de un grafo es directo comprobar que el número de rayos extremos coincide con el número de aristas, de donde se deduce que si G es un grafo conexo intersección completa, entonces $|E(G)| + 4 \leq 2|V(G)|$ si G es bipartito y $|E(G)| + 2 \leq 2|V(G)|$ si G no lo es. En esta sección mejoramos todas estas cotas en Corolario 4.3.7, ya que probamos que si G es un grafo conexo intersección completa, entonces $2|E(G)| + 4 \leq 3|V(G)|$ si G es bipartito y $2|E(G)| \leq 3|V(G)|$ si G no lo es. Para llegar a esta cota antes demostraremos en el Teorema 4.3.3 que la propiedad de ser intersección completa en grafos se hereda a todos los subgrafos inducidos. Recordemos la definición de subgrafo inducido.

Definición 4.3.1. Sea G un grafo, G' es un subgrafo inducido de G si $V(G') \subset V(G)$ y

$$E(G') = \{e \in E(G) \mid e \subset V(G')\}.$$

Si $V' \subset V(G)$, denotaremos por $[V']$ al subgrafo inducido de G cuyo conjunto de vértices es el propio V' y si v_1, \dots, v_s son vértices de G , al subgrafo inducido $[V(G) \setminus \{v_1, \dots, v_s\}]$ también lo denotaremos por $G \setminus \{v_1, \dots, v_s\}$.

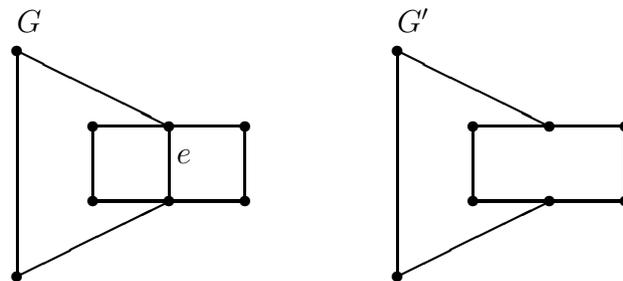
Sea G' un subgrafo inducido de G , si tomamos el vector $w := \sum_{v_i \notin V(G')} e_i \in \mathbb{R}^m$, entonces $a_i \cdot w \geq 0$ para todo $a_i \in \mathcal{A}$ y si $\mathcal{F} := \{y \in \text{Cone}(\mathcal{A}) \mid y \cdot w = 0\}$, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{F} = \{a_i \in \mathcal{A} \mid f_i \in E(G')\}$. Por tanto, $I_{G'} = I_{\mathcal{A} \cap \mathcal{F}}$ y de la Proposición 1.2.14 y el Corolario 1.2.15 se deducen los siguientes resultados.

Proposición 4.3.2. Sea G' un subgrafo inducido de G . Si $I_G = (B_{w_1}, \dots, B_{w_s})$ donde w_1, \dots, w_s son caminos cerrados pares de G , entonces $I_{G'} = (\{B_{w_i} \mid V(w_i) \subset V(G'), 1 \leq i \leq s\})$.

Teorema 4.3.3. *Sea G' un subgrafo inducido de G . Si G es intersección completa, entonces G' también lo es.*

En general, si quitamos la hipótesis de que el subgrafo G' sea inducido, no se cumple el Teorema 4.3.3, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.3.4. *G' es un subgrafo de G y ambos son bipartitos. Sin embargo, G es un grafo anillado mientras que G' no lo es. Por tanto, G es intersección completa y G' no.*



Una consecuencia casi inmediata del Teorema 4.3.3 es que un grafo es intersección completa si y solo si lo son todas sus componentes conexas, hecho que nos permite reducir el estudio a grafos conexos.

Corolario 4.3.5. *Sea G un grafo con componentes conexas G_1, \dots, G_s . Entonces, G es intersección completa si y solo si lo son G_1, \dots, G_s .*

Demostración. (\Rightarrow) Es directa del Teorema 4.3.3, puesto que G_i es un subgrafo inducido de G para todo $1 \leq i \leq s$. (\Leftarrow) Sea \mathfrak{B}_i un sistema minimal de generadores de I_{G_i} para todo $1 \leq i \leq s$. Como $I_G = (\{B_w \mid w \text{ es camino cerrado par}\})$ y todo camino cerrado par está contenido en una única componente conexa de G , es evidente que $B_1 \cup \dots \cup B_s$ genera I_G . Además, se tiene que $\text{ht}(I_G) = n - m + b(G) = \text{ht}(I_{G_1}) + \dots + \text{ht}(I_{G_s})$, de donde se sigue el resultado. \square

Para un vértice $v \in V(G)$, la *vecindad de v* es el conjunto de vértices que son adyacentes a v , i.e., $N_G(v) := \{u \in V(G) \mid \{u, v\} \in E(G)\}$. El cardinal de este conjunto se denomina el *grado de v* y se denota por $\deg_G(v)$, o $\deg(v)$ cuando se sobrentiende el grafo al que nos referimos. Un grafo es *d -regular* si todos sus vértices son de grado d .

Ahora pasamos a presentar una cota superior del número de aristas de un grafo intersección completa. La existencia esta cota superior da la idea de que los grafos intersección completa no pueden ser muy densos.

Teorema 4.3.6. *Sea G un grafo conexo intersección completa, entonces:*

- $2|E(G)| + 4 \leq 4|V(G)| - \sum_{v \in V(G)} b(G \setminus \{v\})$ si G es bipartito.
- $2|E(G)| \leq 3|V(G)| - \sum_{v \in V(G)} b(G \setminus \{v\})$ si G no es bipartito.

En ambos casos se tiene la igualdad $\iff I_G$ está generado por binomios de grado 2.

Demostración. Sea $\{B_{w_1}, \dots, B_{w_h}\}$ un sistema minimal de generadores de I_G , donde w_i es un camino cerrado par para todo $i : 1 \leq i \leq h = \text{ht}(I_G)$. En virtud de la Proposición 4.3.2, para todo $v \in V(G)$ sabemos que $I_{G \setminus \{v\}} = (\{B_{w_i} \mid v \notin V(w_i)\})$ y por el Lema 4.2.1, se tiene que $|V(w_i)| \geq 4$ y además, $|V(w_i)| = 4$ si y solo si w_i es un ciclo de longitud 4 o, equivalentemente, si B_{w_i} es de grado 2. Teniendo esto en cuenta se obtiene la siguiente desigualdad:

$$4\text{ht}(I_G) \leq \sum_{i=1}^h |V(w_i)| = \sum_{v \in V(G)} \mu(I_G) - \mu(I_{G \setminus \{v\}})$$

y habrá igualdad si y solo si B_{w_1}, \dots, B_{w_h} son binomios de grado 2.

Supongamos ahora que G es intersección completa, entonces $G \setminus \{v\}$ también lo es para todo $v \in V(G)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} 4\text{ht}(I_G) &\leq \sum_{v \in V(G)} (\mu(I_G) - \mu(I_{G \setminus \{v\}})) = \sum_{v \in V(G)} (\text{ht}(I_G) - \text{ht}(I_{G \setminus \{v\}})) = \\ &= \sum_{v \in V(G)} (\deg(v) - 1 + b(G) - b(G \setminus \{v\})) = 2n - m + b(G)m - \sum_{v \in V(G)} b(G \setminus \{v\}). \end{aligned}$$

Si G es bipartito, entonces $b(G) = 1$, $\text{ht}(I_G) = n - m + 1$ y se tiene que $2n + 4 \leq 4m - \sum_{v \in V(G)} b(G \setminus \{v\})$; y si G no es bipartito, entonces $b(G) = 0$, $\text{ht}(I_G) = n - m$ y se tiene que $2n \leq 3m - \sum_{v \in V(G)} b(G \setminus \{v\})$. Como ya dijimos con anterioridad, en ambos casos se tiene la igualdad si y solo si I_G está generado por binomios de grado 2. \square

Como consecuencia directa de este teorema tenemos la cota superior para el número de aristas de un grafo conexo intersección completa que andábamos buscando y que mejora las ya citadas de Katzman [65] y Fischer, Morris y Shapiro [38].

Corolario 4.3.7. *Sea G un grafo conexo intersección completa, entonces*

- $2|E(G)| + 4 \leq 3|V(G)|$ si G es bipartito, y
- $2|E(G)| \leq 3|V(G)|$ si G no es bipartito.

Demostración. Es consecuencia del Teorema 4.3.6 y del hecho de que si G es bipartito, entonces $b(G \setminus \{v\}) \geq 1$ para todo $v \in V(G)$. \square

Terminamos esta sección con algunos resultados que también son consecuencia del Teorema 4.3.6.

Corolario 4.3.8. *Si G es intersección completa, entonces o bien*

- (a) existe un vértice de grado ≤ 2 , o
- (b) G es 3-regular, $b(G \setminus \{v\}) = 0$ para todo $v \in V(G)$ y I_G está generado por binomios de grado 2.

Demostración. Asumimos que G es conexo y que no tiene vértices de grado ≤ 2 . Entonces $2n = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3m$, entonces, por el Corolario 4.3.7, G no es bipartito y $2n = 3m$. Cosa que por el Teorema 4.3.6 solo puede ocurrir si se da (b). \square

Como mostramos en el Ejemplo 4.3.4, no siempre es cierto que un subgrafo de otro intersección completa también lo sea. No obstante, haciendo uso del Teorema 4.3.3 encontramos que $\mathcal{K}_{2,3}$ es un subgrafo prohibido en un grafo intersección completa.

Denotamos por \mathcal{K}_m al *grafo completo* con m vértices y por \mathcal{K}_{m_1, m_2} al *grafo completo bipartito* con particiones de tamaño m_1 y m_2 .

Corolario 4.3.9. *Si G es intersección completa, entonces no tiene a $\mathcal{K}_{2,3}$ como subgrafo.*

Demostración. Supongamos que G tiene un subgrafo $\mathcal{K}_{2,3}$ y denotemos por H a un subgrafo inducido de G de 5 vértices que tiene a $\mathcal{K}_{2,3}$ como subgrafo. Si $H = \mathcal{K}_{2,3}$, entonces H es bipartito y $2|E(H)| + 4 = 16 > 15 = 3|V(H)|$. Si $E(H) = E(\mathcal{K}_{2,3}) \cup \{e_1, \dots, e_s\}$ con $s \geq 1$, entonces H no es bipartito y si $s = 1$ y $e_1 = \{v_1, v_2\} \subset V(H)$, entonces $b(H \setminus \{v_i\}) = 1$ para $i = 1, 2$. Por tanto,

$$2|E(H)| = 12 + 2s > 15 + 2(s - 2) \geq 3|V(H)| - \sum_{v \in V(H)} b(H \setminus \{v\}).$$

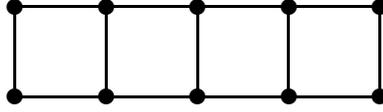
En ambos casos obtenemos que H no es intersección completa, en el primero por el Corolario 4.3.7 y en el segundo por el Teorema 4.3.6, entonces por el Teorema 4.3.3 podemos concluir que tampoco lo es G . \square

4.4 Algoritmo IC-grafo

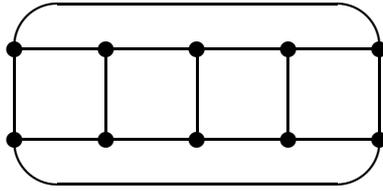
El objetivo de esta sección es el de presentar el Algoritmo IC-grafo y demostrar la corrección del mismo. Este es un algoritmo para comprobar si un grafo es intersección completa o no que se obtiene como consecuencia del Teorema 4.4.8, que es el principal resultado de esta sección.

Por el Corolario 4.3.8 sabemos que si un grafo es intersección completa y todo vértice tiene grado ≥ 3 , entonces es 3-regular. Es por ello que en esta sección comenzaremos por estudiar concienzudamente los grafos 3-regulares para probar en el Teorema 4.4.4 que un grafo 3-regular es intersección completa si y solo si todas sus componentes conexas son bandas impares o bandas de Möbius pares. Para demostrar este resultado, que será esencial para demostrar el Teorema 4.4.8, antes introduciremos algunas definiciones y dos lemas técnicos.

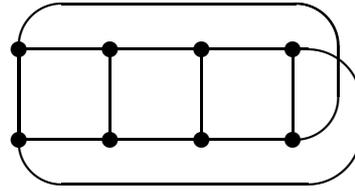
Definición 4.4.1. *Un grafo cadena G es aquel que tiene como conjunto de vértices $V(G) = \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r\}$ y como aristas $\{a_i, a_{i+1}\}, \{b_i, b_{i+1}\}$ y $\{a_j, b_j\}$ para todo $1 \leq i < r$ y $1 \leq j \leq r$.*



Sea H un grafo cadena y G un grafo con $V(G) = V(H)$, si el conjunto de aristas de G es $E(G) = E(H) \cup \{\{a_1, a_r\}, \{b_1, b_r\}\}$ diremos que G es una banda y si $E(G) = E(H) \cup \{\{a_1, b_r\}, \{a_r, b_1\}\}$ diremos que G es una banda de Möbius. Además, según r sea par o impar, diremos que la banda o la banda de Möbius es par o impar.



Banda impar



Banda de Möbius par

Lema 4.4.2. Sea G un grafo 3-regular intersección completa. Entonces, o bien $G = \mathcal{K}_4$ o para todo $v \in V(G)$ existe un subgrafo H de G que es una cadena con 6 vértices tal que $v \in V(H)$ y $\deg_H(v) = 3$.

Demostración. Primero observamos que por el Corolario 4.3.8 I_G está generado por binomios de grado 2 y que $b(G \setminus \{v\}) = 0$ para todo $v \in V(G)$; en particular $b(G) = 0$ y G no es bipartito. Sea $\mathfrak{B} := \{B_{w_1}, \dots, B_{w_r}\}$ un sistema minimal de generadores de I_G donde w_i es un ciclo de longitud cuatro para todo $1 \leq i \leq r$. Sea $v \in V(G)$ y denotemos por u_1, u_2, u_3 a sus tres vértices vecinos. Por un lado, tenemos que

$$\text{ht}(I_G) - \text{ht}(I_{G \setminus \{v\}}) = \deg(v) - 1 + b(G) - b(G \setminus \{v\}) = 2,$$

y de la Proposición 4.3.2 y el Teorema 4.3.3 se tiene que $I_{G \setminus \{v\}}$ es intersección completa y está generado minimalmente por $\{B_{w_i} \mid v \notin V(w_i)\}$; entonces $|\{w_i \mid v \in V(w_i), 1 \leq i \leq r\}| = 2$ y podemos suponer que $v \in V(w_1) \cap V(w_2)$. Por otro lado, sabemos que $|N_G(u_i) \cap N_G(u_j)| \leq 2$ para todo $1 \leq i < j \leq 3$; ya que en caso contrario $\mathcal{K}_{2,3}$ sería un subgrafo de G y eso no es posible por el Corolario 4.3.9. De esta forma, podemos suponer que $w_1 = (v, u_1, v_1, u_2, v)$ y $w_2 = (v, u_2, v_2, u_3, v)$ para ciertos vértices v_1, v_2 . De nuevo como $\mathcal{K}_{2,3}$ no es subgrafo de G , se tiene que $v_1 \neq v_2$. Si $v_1 = u_3$ o $v_2 = u_1$, entonces $G = \mathcal{K}_4$. En caso contrario existe una cadena H con $V(H) = \{v, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\}$ y $\deg_H(v) = 3$. \square

Para concluir con la caracterización de los grafos 3-regulares necesitamos antes demostrar un lema previo relacionado con las matrices dominantes (ver Definición 1.2.9 para recordar la definición de matriz dominante).

Lema 4.4.3. *Sea B una matriz $h \times n$ entera con vectores columna $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}^h$ tales que c_i tiene una única entrada no nula para algún $1 \leq i \leq n$ y sea B' la matriz $h \times n - 1$ con vectores columna $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n$. Entonces, B es dominante si y solo si B' es dominante.*

Demostración. Si B es dominante, entonces B' también lo es. Supongamos que B no es dominante y que $c_n = (0, \dots, 0, c) \in \mathbb{Z}^h$. Denotamos por $B[j_1, \dots, j_s][i_1, \dots, i_s]$ a la submatriz cuadrada que se corresponde con las filas $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq h$ y columnas $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq n$ de B . Si $B[j_1, \dots, j_s][i_1, \dots, i_s]$ es mezclada y $i_s \neq n$, entonces $B[j_1, \dots, j_s][i_1, \dots, i_s]$ es también submatriz de B' y si $i_s = n$ entonces la matriz cuadrada mezclada $B[j_1, \dots, j_{s-1}][i_1, \dots, i_{s-1}]$ es submatriz de B' , de donde concluimos que B' tampoco es dominante. \square

Teorema 4.4.4. *Sea G un grafo 3-regular. Entonces, G es intersección completa si y solo si todas las componentes conexas de G son bandas impares o bandas de Möbius pares.*

Demostración. Por el Corolario 4.3.5 podemos asumir que G es un grafo conexo.

(\Rightarrow) Como \mathcal{K}_4 es una banda de Möbius par asumimos que $G \neq \mathcal{K}_4$. Por el Corolario 4.3.8 sabemos que G tiene que ser 3-regular y que $b(G \setminus \{v\}) = 0$ para todo $v \in V(G)$, lo que en particular implica que no es bipartito. Además del Lema 4.4.2 se deduce que existe un subgrafo cadena de G con 6 vértices. Tomamos H un subgrafo cadena de G que sea maximal con respecto al número de vértices; y denotamos $V(H) = \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r\}$ y $\{a_i, b_i\}, \{a_j, a_{j+1}\}, \{b_j, b_{j+1}\} \in E(H)$ para $1 \leq i \leq r, 1 \leq j < r$, donde $r \geq 3$. Si aplicamos el Lema 4.4.2 con $v = a_r$, llegamos a que existen $a_{r+1}, b_{r+1} \in V(G)$ tales que $\{a_r, a_{r+1}\}, \{b_r, b_{r+1}\}$ y $\{a_{r+1}, b_{r+1}\} \in E(G)$. Nuestro objetivo es demostrar que $\{a_1, b_1\} = \{a_{r+1}, b_{r+1}\}$.

De la maximalidad de H tenemos que o bien a_{r+1} o b_{r+1} pertenece a $V(H)$. Asumimos que $a_{r+1} \in V(H)$, por tanto $a_{r+1} = a_1$ o $a_{r+1} = b_1$. Si $a_{r+1} = a_1$, por el Lema 4.4.2 se tiene que $b_{r+1} = b_1$ puesto que $\{a_1, b_{r+1}\}, \{b_r, b_{r+1}\} \in E(G)$ y $a_2 \neq a_r$. Si $a_{r+1} = b_1$, dado que $\{b_1, b_{r+1}\}, \{b_r, b_{r+1}\} \in E(G)$, se puede concluir que $b_{r+1} = a_1$ o $b_{r+1} = b_2$ y $r = 3$. No obstante, si $b_{r+1} = b_2$ y $r = 3$ entonces G tendría a $\mathcal{K}_{2,3}$ como subgrafo con vértices a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 , lo que contradice el Corolario 4.3.9.

Ya hemos demostrado que $\{a_1, b_1\} = \{a_{r+1}, b_{r+1}\}$, por consiguiente H es o bien una banda o una banda de Möbius. Pero además G es conexo y 3-regular, por tanto $G = H$. Finalmente, G no puede ser una banda par ni una banda de Möbius impar ya que G no es bipartito.

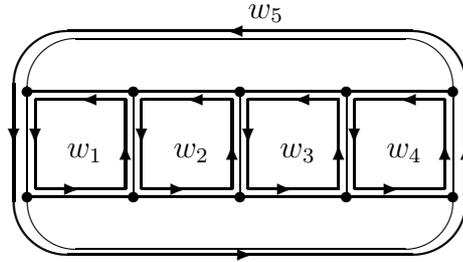
(\Leftarrow) Supongamos que G es una banda impar o una banda de Möbius par. Denotamos $f_i := \{a_i, b_i\}$ para todo $i : 1 \leq i \leq r$, $f_{r+i} := \{a_i, a_{i+1}\}$ y $f_{2r+i} := \{b_i, b_{i+1}\}$ para todo $i : 1 \leq i < r$, si G es una banda impar, denotamos $f_{2r} := \{a_1, a_r\}$ y $f_{3r} := \{b_1, b_r\}$ y si G es una banda de Möbius par, denotamos $f_{2r} := \{a_1, b_r\}$ y $f_{3r} := \{a_r, b_1\}$. En ambos casos G no es bipartito, tiene $3r$ aristas y $2r$ vértices, por tanto $\text{ht}(I_G) = r$.

Denotamos por w_i al ciclo de longitud 4, $w_i := (a_i, b_i, b_{i+1}, a_{i+1}, a_i)$ para $1 \leq i \leq r - 1$. Si G es una banda impar, denotamos $w_r := (a_1, b_1, b_r, a_r, a_1)$ y si G es una banda de Möbius par denotamos $w_r := (a_1, b_1, a_r, b_r, a_1)$. En ambos casos tenemos que $B_{w_i} = x_i x_{i+1} -$

$x_{r+i} x_{2r+i}$ para $1 \leq i < r$ y $B_{w_r} = x_1 x_r - x_{2r} x_{3r}$. Entonces $\widehat{B_{w_i}} = e_i + e_{i+1} - e_{r+i} - e_{2r+i}$ para $1 \leq i < r$ y $\widehat{B_{w_r}} = e_1 + e_r - e_{2r} - e_{3r}$. Ahora tomamos B la matriz $r \times 3r$ tal que su fila i -ésima es $\widehat{B_{w_i}}$ para todo $1 \leq i \leq r$. Es fácil comprobar que $\Delta_r(B) = 1$, ya que para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, en la columna $r+i$ solo hay una entrada no nula, que está en la fila i -ésima y vale -1 ; por tanto hay un menor $r \times r$ que vale ± 1 . Además, si denotamos por B' la submatriz $r \times r$ de B que consiste en sus primeras r columnas se tiene que toda entrada de B' es no negativa. Entonces B' es dominante y por el Lema 4.4.3, se deduce que B también lo es. Del Teorema 1.2.11, concluimos que I_G es intersección completa y está generado minimalmente por $\{B_{w_1}, \dots, B_{w_r}\}$. \square

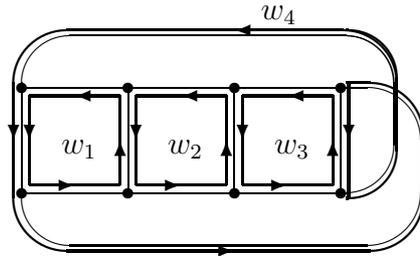
Merece la pena destacar que en la demostración se explicita un sistema minimal de generadores de I_G en los casos en que es intersección completa, esto es, si G es una banda impar o una banda de Möbius par.

Corolario 4.4.5. *Si G es una banda impar, entonces $I_G = (B_{w_1}, \dots, B_{w_r})$, donde $w_i := (a_i, b_i, b_{i+1}, a_{i+1}, a_i)$ para $1 \leq i \leq r-1$ y $w_r := (a_1, b_1, b_r, a_r, a_1)$.*



Banda impar con 10 vértices

Corolario 4.4.6. *Si G es una banda de Möbius par, entonces $I_G = (B_{w_1}, \dots, B_{w_r})$, donde $w_i := (a_i, b_i, b_{i+1}, a_{i+1}, a_i)$ para $1 \leq i \leq r-1$ y $w_r := (a_1, b_1, a_r, b_r, a_1)$.*



Banda de Möbius par con 8 vértices

Nota 4.4.7. *Cualquier banda de Möbius de al menos 6 vértices es no planar ya que contiene una subdivisión de $\mathcal{K}_{3,3}$ (ver por ejemplo [67] o [51]). En consecuencia, el Teorema 4.4.4 aporta una familia infinita de grafos no planares que son intersección completa. Tanto Katzman en [65] como Gitler, Reyes y Villarreal en [47] demuestran que todo grafo*

bipartito intersección completa es planar, resultado que como hemos apuntado deja de ser cierto si se elimina la hipótesis de que el grafo es bipartito. Esto ya había sido observado por Katzman en el artículo citado anteriormente, en el que precisamente propuso una banda de Möbius con 8 vértices como ejemplo. Recientemente, Tatakis y Thoma en [96] propusieron otro ejemplo de un grafo que no es planar y sí es intersección completa que no es una banda de Möbius.

Ahora podemos proceder con el principal resultado de esta sección.

Teorema 4.4.8. *Sea G un grafo sin vértices aislados. Entonces, G es intersección completa si y solo si se satisface una de las siguientes condiciones:*

1. $\exists v \in V(G)$ de grado 1 y $G \setminus \{v\}$ es intersección completa.
2. $\exists v \in V(G)$ de grado 2 tal que $b(G \setminus \{v\}) = b(G) + 1$ y $G \setminus \{v\}$ es intersección completa.
3. $\exists v \in V(G)$ de grado 2 tal que $b(G \setminus \{v\}) = b(G)$, $G \setminus \{v\}$ es intersección completa y

$$I_G = I_{G \setminus \{v\}} \cdot k[\mathbf{x}] + (B_w),$$

donde w es un camino cerrado par tal que

$$V(w) = \{v\} \cup N_G(v) \cup \{u \in V(G) \mid b(G \setminus \{u, v\}) > b(G \setminus \{u\})\}.$$

4. todas las componentes conexas de G son bandas impares o bandas de Möbius pares.

Demostración. Comenzamos la demostración observando que si v es un vértice de grado 1, entonces $b(G \setminus \{v\}) = b(G)$ y si v es un vértice de grado 2, entonces $b(G \setminus \{v\}) - b(G) \in \{0, 1\}$. Por tanto, es natural dividir la demostración en los siguientes cuatro casos:

- (a) existe $v \in V(G)$ de grado 1
- (b) existe $v \in V(G)$ de grado 2 tal que $b(G \setminus \{v\}) = b(G) + 1$,
- (c) existe $v \in V(G)$ de grado 2 tal que $b(G \setminus \{v\}) = b(G)$, o
- (d) todo vértice tiene grado > 2 .

Se observa que $J := I_{G \setminus \{v\}} \cdot k[\mathbf{x}]$ es un ideal primo de igual altura a $I_{G \setminus \{v\}}$ (ver [3, Ejercicios 4.7 y 11.7]) y $J \subset I_G$. Si se satisface (a) o (b), entonces $\text{ht}(I_{G \setminus \{v\}}) = \text{ht}(I_G)$, por tanto $I_G = I_{G \setminus \{v\}} \cdot k[\mathbf{x}]$ y se tiene que G es intersección completa si y solo si $G \setminus \{v\}$ lo es.

Si se satisface (c), entonces $\text{ht}(I_G) = \text{ht}(I_{G \setminus \{v\}}) + 1$. Si además $G \setminus \{v\}$ es intersección completa y existe un camino cerrado par w en G tal que $I_G = I_{G \setminus \{v\}} \cdot k[\mathbf{x}] + (B_w)$, entonces evidentemente G es intersección completa. Supongamos ahora que G es intersección completa y sean w_1, \dots, w_h caminos cerrados pares en G tales que $I_G = (B_{w_1}, \dots, B_{w_h})$, donde $h = \text{ht}(I_G)$. Por la Proposición 4.3.2 y el Teorema 4.3.3 se tiene que $I_{G \setminus \{v\}}$ es intersección completa y está generado minimalmente por $\{B_{w_i} \mid v \notin V(w_i)\}$. Como además

$\text{ht}(I_{G \setminus \{v\}}) = h - 1$, entonces existe un único $i \in \{1, \dots, h\}$ tal que $v \in V(w_i)$ y $I_G = J + (B_{w_i})$. Sean $v_1, v_2 \in V(G)$ los vértices vecinos de G , es obvio que $\{v_1, v_2\} \subset V(w_i)$ porque $v \in V(w_i)$, $\deg(v) = 2$ y B_{w_i} es un binomio primitivo. Aplicando de nuevo la Proposición 4.3.2 y el Teorema 4.3.3, para todo $u \in V(G) \setminus \{v, v_1, v_2\}$, tenemos que $u \in V(w_i)$ si y solo si $\{B_{w_j} \mid u \notin V(w_j)\} = \{B_{w_j} \mid v, u \notin V(w_j)\}$, o equivalentemente si $\mu(I_{G \setminus \{u\}}) = \mu(I_{G \setminus \{u, v\}}) \Leftrightarrow \text{ht}(I_{G \setminus \{u\}}) = \text{ht}(I_{G \setminus \{u, v\}})$ y, dado que $\deg_{G \setminus \{u\}}(v) = 2$, esto equivale a que $b(G \setminus \{u, v\}) > b(G \setminus \{u\})$.

Finalmente, en caso de que se satisfaga (d), por el Corolario 4.3.8 y el Teorema 4.4.4, G es intersección completa si y solo si todas sus componentes conexas son bandas impares o bandas de Möbius pares. \square

Del Teorema 4.4.8 y de su demostración se deduce el Algoritmo IC-grafo, un método efectivo para determinar si un grafo es intersección completa o no. El método comienza quitando sucesivamente los vértices que tienen grado 1 y 2 iterativamente. Siempre que se quite un vértice v de grado 2, comprobamos si $b(G) = b(G \setminus \{v\})$. En caso afirmativo, construimos el conjunto $W := \{v\} \cup N_G(v) \cup \{u \in V(G) \mid b(G \setminus \{u, v\}) > b(G \setminus \{u\})\}$ y buscamos un camino cerrado par de la forma de alguno de los del Lema 4.2.1 tal que $V(w) = W$; es decir, w puede ser un ciclo par, dos ciclos impares con un vértice en común o de la forma $(C_1, w_1, C_2, -w_2)$ donde C_1, C_2 son ciclos impares y w_1, w_2 son dos caminos que unen un vértice de C_1 y un vértice de C_2 . Si no existiese tal camino, entonces G no es intersección completa y en caso contrario tomamos w uno de los caminos mínimos tales que $V(w) = W$ y definimos el binomio B_w . Una vez que hemos eliminado todos los vértices de grado ≤ 2 , o bien hemos llegado a un grafo trivial o a un grafo G' cuyos vértices tienen todos grado > 2 . Si alguna de las componentes de G' no fuese una banda impar o una banda de Möbius par, entonces G no es intersección completa. En caso contrario y aplicando los Corolarios 4.4.5 y 4.4.6, se puede construir un conjunto de $h = \text{ht}(I_G)$ binomios $B_{w_1}, \dots, B_{w_h} \in I_G$ de forma que G es intersección completa si y solo si $I_G = (B_{w_1}, \dots, B_{w_h})$. Como ya indicamos en el Capítulo 1, la comprobación de la igualdad $I_G = (B_{w_1}, \dots, B_{w_h})$ se puede llevar a cabo en tiempo polinomial siguiendo el algoritmo propuesto en [39]; en consecuencia, haciendo uso del algoritmo que proponemos se puede decidir en tiempo polinomial si I_G es intersección completa.

En el pseudocódigo de la Tabla 4.1 se describe el Algoritmo IC-grafo, cuya idea ha sido explicada anteriormente.

Ilustremos el funcionamiento del algoritmo con algunos ejemplos.

Ejemplo 4.4.9. *Veamos haciendo uso del Algoritmo IC-grafo que el grafo completo bipartito con particiones de tamaño 3 y 3; $\mathcal{K}_{3,3}$ no es intersección completa. En efecto, $\mathcal{K}_{3,3}$ tiene 6 vértices y todo vértice tiene grado = 3, sin embargo $\mathcal{K}_{3,3}$ no es la banda impar de 6 vértices por tanto el algoritmo devuelve FALSO.*

Ejemplo 4.4.10. *Sea G el grafo de 5 vértices y 7 aristas de la siguiente figura:*

Algoritmo IC-grafo

Entrada: G un grafo simple.

Salida: VERDADERO si G es intersección completa o
FALSO en caso contrario

$H := G; \mathfrak{B} := \emptyset$

while $\exists v \in V(H)$ con $\deg_H(v) \leq 2$ **do**

if $\deg_H(v) = 2$ y $b(H \setminus \{v\}) = b(H)$ **then**

$W := \{v\} \cup N_H(v) \cup \{u \in V(H) \mid b(H \setminus \{u, v\}) > b(H \setminus \{u\})\}$

if no existe un camino cerrado par w como en Lema 4.2.1 tal
 que $V(w) = W$ **then**

return FALSO

end if

 Sea w un camino cerrado par como en Lema 4.2.1 mínimo con
 $V(w) = W$.

$\mathfrak{B} := \mathfrak{B} \cup \{B_w\}$

end if

$H := H \setminus \{v\}$

end while

Sean H_1, \dots, H_s las componentes conexas de H

if existe H_i que no es banda impar ni banda de Möbius par **then**

return FALSO

end if

Sea \mathfrak{B}_i un sistema minimal de generadores de I_{H_i} para $1 \leq i \leq s$.

if $I_G = (\mathfrak{B} \cup \mathfrak{B}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{B}_s)$ **then**

return VERDADERO

end if

return FALSO

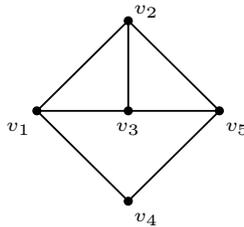
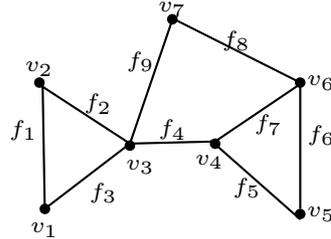


Tabla 4.1: Algoritmo IC-grafo

Al arrancar el algoritmo se observa que $\deg(v_4) = 2$ y que $b(G) = b(G \setminus \{v_4\}) = 0$, ya que $G \setminus \{v_4\}$ es conexo y no bipartito. Ahora bien, denotamos por W al conjunto $W := \{v_4\} \cup N_G(v_4) \cup \{u \in V(G) \mid b(G \setminus \{v_4, u\}) > b(G \setminus \{u\})\} = \{v_1, v_4, v_5\}$. Como

no existe ningún camino cerrado par de los descritos en el Lema 4.2.1 que pase por tan solo 3 vértices, entonces G no es intersección completa.

Ejemplo 4.4.11. Veamos ahora que G no es intersección completa, siendo G es el grafo con vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_7\}$ y aristas $E(G) = \{f_1, \dots, f_9\}$; donde $f_1 = \{v_1, v_2\}$, $f_2 = \{v_2, v_3\}$, $f_3 = \{v_1, v_3\}$, $f_4 = \{v_3, v_4\}$, $f_5 = \{v_4, v_5\}$, $f_6 = \{v_5, v_6\}$, $f_7 = \{v_4, v_6\}$, $f_8 = \{v_6, v_7\}$ y $f_9 = \{v_3, v_7\}$.



Primero se observa que $\deg(v_7) = 2$ y $b(G) = 0 = b(G \setminus \{v_7\})$. Denotamos $W_1 := \{v_7\} \cup N_G(v_7) \cup \{u \in V(G) \mid b(G \setminus \{u, v_7\}) > b(G \setminus \{u\})\} = \{v_3, v_4, v_6, v_7\}$ y construimos w_1 un camino cerrado par mínimo de los descritos en el Lema 4.2.1 tal que $V(w_1) = W_1$. Obtenemos el ciclo par $w_1 = (v_7, v_6, v_4, v_3, v_7)$ y por tanto $B_{w_1} = x_4x_8 - x_7x_9$.

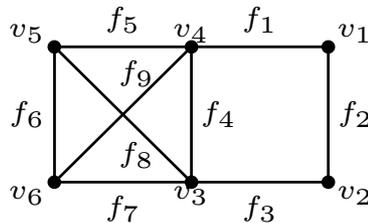
Consideramos el grafo $H := G \setminus \{v_7\}$ y se observa que $\deg_H(v_1) = 2$ y $b(H) = 0 = b(H \setminus \{v_1\})$. Denotamos $W_2 := \{v_1\} \cup N_H(v_1) \cup \{u \in V(H) \mid b(H \setminus \{u, v_1\}) > b(H \setminus \{u\})\} = V(H)$ y construimos w_2 un camino cerrado par mínimo de los descritos en el Lema 4.2.1 tal que $V(w_2) = W_2$. Se obtiene que $w_2 = (C_1, \mathcal{P}_1, C_2, -\mathcal{P}_1)$ donde $C_1 := (v_3, v_1, v_2, v_3)$ y $C_2 := (v_4, v_5, v_6, v_4)$ son ciclos impares y $\mathcal{P}_1 = (v_3, v_4)$ es un camino de longitud 1, entonces $B_{w_2} = x_1x_4^2x_6 - x_2x_3x_5x_7$.

Consideramos el grafo $H' := G \setminus \{v_1\}$. Todo vértice $u \in V(H')$, $u \neq v_4$ o bien tiene grado 1 o tiene grado 2 y $b(H') \neq b(H' \setminus \{u\})$. Es por ello que podemos ir quitando los vértices de H' uno por uno hasta llegar a un grafo trivial con un solo vértice aislado.

Para ver si G es intersección completa bastaría con comprobar si se satisface la igualdad $I_G = (B_{w_1}, B_{w_2})$. Si denotamos por B a la matriz 2×9 cuyas filas son \widehat{B}_{w_1} y \widehat{B}_{w_2} , esto es, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces se observa que

$\Delta_2(B) = 1$ y que tiene una submatriz cuadrada mezclada $B' := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto, $(B_{w_1}, B_{w_2}) \subsetneq I_G$ y podemos concluir que I_G no es intersección completa.

Ejemplo 4.4.12. Veamos que el grafo G con vértices $V(G) = \{v_1, \dots, v_6\}$ y aristas $E(G) = \{f_1, \dots, f_9\}$ que se muestra en la figura, es intersección completa.



Primero se observa que $\deg_G(v_2) = 2$ y que $b(G) = b(G \setminus \{v_2\}) = 0$, por tanto denotamos $W := \{v_2\} \cup N_G(v_2) \cup \{u \in V(G) \mid b(G \setminus \{u\}) < b(G \setminus \{u, v_2\})\}$. Para $i = 5, 6$ se tiene que $b(G \setminus \{v_i\}) = b(G \setminus \{v_i, v_2\}) = 0$; sin embargo, $G \setminus \{v_2, v_4\}$ tiene 2 componentes conexas, una con un solo vértice v_1 y la otra es un ciclo de longitud 3 con vértices en v_3, v_5 y v_6 ; por tanto $0 = b(G \setminus \{v_2\}) < b(G \setminus \{v_2, v_4\}) = 1$ y $W = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. El único camino cerrado par de los enunciados en el Lema 4.2.1 cuyo conjunto de vértices es W es $w_1 := (v_2, v_1, v_4, v_3, v_2)$ y se tiene que $B_{w_1} = x_2x_4 - x_1x_3$.

Tomamos $H := G \setminus \{v_2\}$ y como $\deg_H(v_1) = 1$, entonces definimos $H' := H \setminus \{v_1\}$. Se observa que H' no tiene vértices de grado ≤ 2 . H' tiene una única componente conexa que es una banda de Möbius par, más concretamente $H' = \mathcal{K}_4$. Por lo demostrado en el Corolario 4.4.6, tenemos que $I_{H'}$ está generado por $\{B_{w_2}, B_{w_3}\}$, donde $w_2 = (v_5, v_6, v_3, v_4, v_5)$ y $w_3 = (v_5, v_6, v_4, v_3, v_5)$ y por tanto $I_{H'} = (B_{w_2} = x_4x_6 - x_5x_7, B_{w_3} = x_4x_6 - x_8x_9)$.

Para ver si G es intersección completa bastaría con comprobar si se cumple la igualdad $I_G = (B_{w_1}, B_{w_2}, B_{w_3})$. Si denotamos por B a la matriz 3×9 cuyas filas son $\widehat{B}_{w_1}, \widehat{B}_{w_2}$ y

$$\widehat{B}_{w_3}, \text{ esto es, } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \text{ Se observa que } \Delta_3(B) =$$

1 y aplicando el Lema 4.4.3 tenemos que B es dominante si lo es $B' := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

que evidentemente es dominante puesto que no tiene entradas negativas. Por tanto podemos concluir que I_G sí es intersección completa y además hemos obtenido que $I_G = (B_{w_1}, B_{w_2}, B_{w_3})$.

4.5 Grafos theta e intersecciones completas

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 4.5.8, que afirma que si G es intersección completa y hay tres caminos simples $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 de igual paridad que conectan $x, y \in V(G)$ y que solo se tocan en sus extremos, i.e., $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{x, y\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$, entonces $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ son impares y $\{x, y\} \in E(G)$. Para llegar a este resultado antes expondremos dos resultados relativos a los vértices de grado 2 en un grafo intersección completa, el Lema 4.5.1 y la Proposición 4.5.3. El primero de ellos es un resultado técnico que será de mucha utilidad en el resto de este capítulo. El segundo describe una operación en un grafo G que conduce a otro grafo G' que es más simple que G pues tiene menos vértices y menos que aristas que G . Además G' es intersección completa si G lo es.

Lema 4.5.1. *Sea v un vértice de grado 2 de G y H_1, H_2 dos subgrafos inducidos tales que $v \in V(H_i)$ es de grado 2 en H_i y $b(H_i) = b(H_i \setminus \{v\})$ para $i = 1, 2$. Si G es intersección completa, entonces $b(H \setminus \{v\}) = b(H)$, donde $H := [V(H_1) \cap V(H_2)]$.*

Demostración. Sea $\{B_{w_1}, \dots, B_{w_h}\}$ un sistema minimal de generadores de I_G donde w_j es un camino cerrado par para $1 \leq j \leq h$. Para todo $G' \in \{G, H_1, H_2, H\}$, de la Proposi-

ción 4.3.2 y el Teorema 4.3.3, tenemos que G' y $G' \setminus \{v\}$ son intersecciones completas generadas minimalmente por $\{B_{w_i} \mid V(w_i) \subset V(G')\}$ y $\{B_{w_i} \mid v \notin V(w_i) \subset V(G')\}$ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + b(G') - b(G' \setminus \{v\}) &= \deg_{G'}(v) - 1 + b(G') - b(G' \setminus \{v\}) = \\ &= \text{ht}(I_{G'}) - \text{ht}(I_{G' \setminus \{v\}}) = |\{i \mid v \in V(w_i) \subset V(G')\}|. \end{aligned}$$

En particular, para $i = 1, 2$ se tiene que existe un único $j_i \in \{1, \dots, h\}$ tal que $v \in V(w_{j_i}) \subset V(H_i)$. Veamos que $j_1 = j_2$, en efecto $v \in V(w_{j_1}) \cap V(w_{j_2})$ y $1 \geq 1 + b(G) - b(G \setminus \{v\}) = |\{i \mid v \in V(w_i)\}| \geq |\{j_1, j_2\}|$. Entonces, $V(w_{j_1}) \subset V(H_1) \cap V(H_2) = V(H)$ y podemos concluir que $1 + b(H) - b(H \setminus \{v\}) = |\{j \mid v \in V(w_j) \subset V(H)\}| = 1$ y $b(H) = b(H \setminus \{v\})$. \square

El segundo resultado trata sobre una operación en el grafo que preserva la propiedad de ser intersección completa, a dicha operación la denominamos la *contracción de un grafo en un vértice de grado 2*.

Definición 4.5.2. Dado G un grafo con un vértice de grado 2 que no es vértice de ningún triángulo, i.e., si u_1, u_2 son los vértices vecinos de v , entonces $\{u_1, u_2\} \notin E(G)$, se define la *contracción de G en v* como el grafo G_v^c que se obtiene al contraer las dos aristas incidentes en v . De forma más precisa, G_v^c es el grafo con

$$V(G_v^c) := (V(G) \setminus \{v, u_1, u_2\}) \cup \{u\} \text{ y}$$

$$E(G_v^c) := E(G \setminus \{v, u_1, u_2\}) \cup \left\{ \{u, z\} \mid \{u_1, z\} \in E(G) \text{ o } \{u_2, z\} \in E(G) \text{ y } z \neq v \right\}.$$

Proposición 4.5.3. Sea G un grafo con un vértice de grado 2 que no pertenece a un triángulo. Si G es intersección completa, entonces G_v^c también lo es.

Demostración. Para todo camino cerrado par (respect. impar) $w = (z_1, \dots, z_r = z_1)$ en G , se define \widehat{w} como el camino cerrado par (respect. impar) en G_v^c construido como sigue: asumimos sin pérdida de generalidad que $z_1 \notin \{v, u_1, u_2\}$ y siempre que exista $i \in \{2, \dots, r-1\}$ tal que $z_i = v$ (entonces $z_{i-1}, z_{i+1} \in \{u_1, u_2\}$), tomamos $\widehat{w} := (z_1, \dots, z_{i-2}, u, z_{i+2}, \dots, z_r = z_1)$ y siempre que $z_i \in \{u_1, u_2\}$ con $z_{i-1} \neq v, z_{i+1} \neq v$ entonces tomamos el camino $\widehat{w} := (z_1, \dots, z_{i-1}, u, z_{i+1}, \dots, z_r = z_1)$, es importante recalcar que puede ser que w pase por u_1, u_2 o v más de una vez. Además, para todo camino cerrado w' en G_v^c es fácil encontrar otro w en G tal que $w' = \widehat{w}$.

Por otra parte, tenemos que G es bipartito si y solo si G_v^c lo es, en efecto es fácil comprobar que si V_1, V_2 es una bipartición de G y $u_1 \in V_1$, entonces V'_1, V'_2 es una bipartición de G_v^c donde $u \in V'_1, V_1 \setminus \{u_1, u_2\} = V'_1 \setminus \{u\}$ y $V_2 \setminus \{v\} = V'_2$. Como además G_v^c tiene $m-2$ vértices y $n - |N_G(u_1) \cap N_G(u_2)| - 1$ aristas, se deduce que

$$\text{ht}(I_{G_v^c}) = \text{ht}(I_G) - |N_G(u_1) \cap N_G(u_2)| + 1.$$

Además, $|N_G(u_1) \cap N_G(u_2)| \leq 2$, ya que en caso contrario existiría un subgrafo $\mathcal{K}_{2,3}$ en G , cosa que no es posible por el Corolario 4.3.9. Dividiremos la demostración en 2 partes.

Si $N_G(u_1) \cap N_G(u_2) = \{v\}$, suponemos que $f_{n-1} = \{u_1, v\}$, $f_n = \{u_2, v\}$ y para todo $1 \leq i \leq n-2$, tomamos $f'_i := f_i$ si $f_i \in E(G_v^c)$ y $f'_i := \{u, z\}$ si $f_i = \{u_1, z\}$ o $f_i = \{u_2, z\}$. Entonces se tiene que $E(G_v^c) = \{f'_1, \dots, f'_{n-2}\}$.

Consideremos el morfismo $\psi : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n-2}]$ inducido por $x_{n-1} \mapsto 1$, $x_n \mapsto 1$ y $x_i \mapsto x_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n-2\}$. De la propia definición es fácil comprobar que para todo camino cerrado par w en G se tiene que $\psi(B_w) = B_{\bar{w}}$. Lo que implica que $\psi(I_G) = I_{G_v^c}$ y como $\text{ht}(I_G) = \text{ht}(I_{G_v^c})$, tenemos que G_v^c es intersección completa ya que si \mathfrak{B} es sistema minimal de generadores de I_G , entonces $\psi(\mathfrak{B})$ lo es de $I_{G_v^c}$.

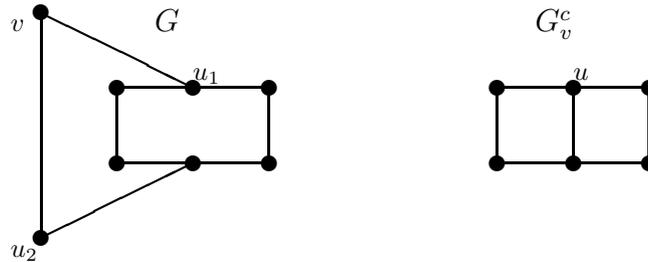
Si $N_G(u_1) \cap N_G(u_2) = \{v, z\}$, suponemos que $f_{n-3} = \{u_1, z\}$, $f_{n-2} = \{u_2, z\}$, $f_{n-1} = \{u_2, v\}$ y $f_n = \{u_1, v\}$ y tomamos $f'_i := f_i$ si $f_i \in E(G_v^c)$, $f'_i := \{u, t\}$ si $f_i = \{u_1, t\}$ o $f_i = \{u_2, t\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-4\}$ y $f'_{n-3} := \{u, z\}$. Entonces se tiene que $E(G_v^c) = \{f'_1, \dots, f'_{n-3}\}$.

Consideramos el morfismo $\psi : k[\mathbf{x}] \rightarrow k[x_1, \dots, x_{n-3}]$ inducido por $x_{n-2} \mapsto x_{n-3}$, $x_{n-1} \mapsto 1$, $x_n \mapsto 1$ y $x_i \mapsto x_i$ para todo $1 \leq i \leq n-3$. Procediendo como en el caso anterior, tenemos que $\psi(I_G) = I_{G_v^c}$.

Supongamos que G es intersección completa y consideremos el ciclo de longitud 4, $w := (v, u_1, z, u_2, v)$, entonces el binomio de grado 2, $B_w = x_{n-2}x_n - x_{n-3}x_{n-1} \in I_G$. Dado que I_G es un ideal homogéneo que no contiene ninguna forma lineal, entonces existe un sistema minimal de generadores \mathfrak{B} de I_G tal que $B_w \in \mathfrak{B}$, es decir, $\mathfrak{B} = \{B_{w_1}, \dots, B_{w_{h-1}}, B_w\}$ donde w_1, \dots, w_{h-1} son caminos cerrados pares en G y $h = \text{ht}(I_G)$. Como $\psi(I_G) = I_{G_v^c}$ y $\psi(B_w) = 0$ llegamos a que $\{\psi(B_{w_1}), \psi(B_{w_2}), \dots, \psi(B_{w_{h-1}})\}$ genera $I_{G_v^c}$ y $\text{ht}(I_{G_v^c}) = h-1$, por tanto es intersección completa. \square

La otra implicación de la Proposición 4.5.3 no es cierta en general, veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.5.4. *El grafo G aquí expuesto es bipartito, sin embargo no es un grafo anillado. No obstante, el vértice v tiene grado 2, no pertenece a ningún triángulo y G_v^c es un grafo anillado. Por tanto, G no es intersección completa, mientras que G_v^c sí lo es.*



Ahora introducimos el concepto de grafo theta y usamos los resultados anteriores para demostrar el Teorema 4.5.8, que es el principal resultado de esta sección. Dicho resultado afirma que los grafos theta impares con vértices base no adyacentes y los grafos theta pares son subgrafos prohibidos de uno intersección completa.

Definición 4.5.5. Un grafo theta T con vértices base u, v es aquel que tiene como conjunto de vértices $V(T) := V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2) \cup V(\mathcal{P}_3)$, donde $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 son tres caminos simples de longitud ≥ 2 que conectan u y v tales que $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{u, v\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$. Si $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 son todos pares (respect. impares), entonces diremos que T es un grafo theta par (respect. impar).

Nota 4.5.6. En la literatura se suelen definir los grafos theta como aquellos que además no tienen más aristas que las propias de los caminos $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ y \mathcal{P}_3 . No obstante, nuestra definición de grafos theta es más general, ya que solo hemos impuesto la condición de que $E(\mathcal{P}_1) \cup E(\mathcal{P}_2) \cup E(\mathcal{P}_3) \subset E(T)$. Por tanto, en un grafo theta puede haber aristas conectando un vértice de \mathcal{P}_i y otro de \mathcal{P}_j con $1 \leq i < j \leq 3$ o incluso conectando dos vértices a_i, a_j de $\mathcal{P}_k = (u = a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, a_r = v)$ donde $0 \leq i < i+1 < j \leq r$ y $1 \leq k \leq 3$.

Antes de proceder con el Teorema 4.5.8, incluiremos un lema cuya prueba es casi inmediata.

Lema 4.5.7. Sea v un vértice de grado 2 y C un ciclo par tal que $v \in V(C)$. Entonces, G es bipartito $\iff G \setminus \{v\}$ es bipartito.

Demostración. (\Leftarrow) Es evidente. (\Rightarrow) Sean u_1 y u_2 los vértices vecinos de v en G , entonces $u_1, u_2 \in V(C)$ y sea V_1, V_2 una bipartición de $G \setminus \{v\}$. Supongamos que $u_1 \in V_1$, como u_1 y u_2 son vértices del ciclo par C , entonces existe un camino par en $G \setminus \{v\}$ que une u_1 y u_2 , de donde se deduce que $u_2 \in V_1$. Por tanto $V_1, V_2 \cup \{v\}$ es una bipartición de G . \square

Teorema 4.5.8. Los grafos theta impares cuyos vértices base no son adyacentes y los grafos theta pares no son intersecciones completas.

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que existe un grafo theta impar cuyos vértices base no son adyacentes o un grafo theta par que es intersección completa y denotamos por G al menor grafo con esta propiedad, esto es, el que menos vértices tenga. En particular, G no puede tener un subgrafo propio theta impar con vértices base no adyacentes ni un subgrafo propio theta par. Sean u, v los vértices base de G y $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ los tres caminos simples de igual paridad que conectan u y v tales que $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{u, v\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$.

Si G es 3-regular, se puede escribir $N_G(u) = \{u_1, u_2, u_3\}$ con $u_i \in V(\mathcal{P}_i)$ y afirmamos que $b(G \setminus \{u_i\}) = b(G \setminus \{u, u_i\})$ para todo $1 \leq i \leq 3$. En efecto, si suponemos que $i = 1$, entonces u tiene grado 2 en $G \setminus \{u_1\}$ y pertenece al ciclo par $(\mathcal{P}_2, -\mathcal{P}_3)$; entonces por el Lema 4.5.7 se tiene que $b(G \setminus \{u_1\}) = b(G \setminus \{u, u_1\})$. Por otro lado, al ser G un grafo 3-regular intersección completa, entonces por el Teorema 4.4.4 es una banda impar o una banda de Möbius par. Por tanto podemos escribir $V(G) = \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_r\}$ y suponer sin pérdida de generalidad que $u = a_i$ para algún $1 \leq i \leq r$. Pero $b_i \in N_G(u)$ y $G \setminus \{u, b_i\}$ es bipartito mientras que $G \setminus \{u\}$ no lo es, por tanto $b(G \setminus \{b_i\}) \neq b(G \setminus \{u, b_i\})$, lo que supone una contradicción y G no puede ser 3-regular.

Por el Corolario 4.3.8 debe existir un v3rtice z de grado 2, que supondremos que pertenece a $V(\mathcal{P}_3)$. Ahora consideramos $C_i := (\mathcal{P}_i, -\mathcal{P}_3)$ y $H_i := [V(C_i)]$ para $i = 1, 2$. Como C_i es un ciclo par y $z \in V(C_i)$, entonces $b(H_i) = b(H_i \setminus \{z\})$ para $i = 1, 2$ y por el Lema 4.5.1, $b(H) = b(H \setminus \{z\})$ donde $H := [V(H_1) \cap V(H_2)] = [V(\mathcal{P}_3)]$, veamos que esto no puede ser ya que $b(H) \neq b(H \setminus \{z\})$.

Denotamos $\mathcal{P}_3 := (u = a_0, a_1, \dots, a_r = v)$ y tenemos que $z = a_i$ para un cierto $i : 1 \leq i < r$.

Si $r = 2$, entonces necesariamente G es un grafo theta par y $z = a_1$. Si $\{a_0, a_2\} \in E(G)$ tenemos que $b(H) = 0 \neq 1 = b(H \setminus \{z\})$ y si $\{a_0, a_2\} \notin E(G)$ tenemos que $b(H) = 1 \neq 2 = b(H \setminus \{z\})$.

Si $r = 3$, entonces necesariamente G es un grafo theta impar cuyos v3rtices base u, v no son adyacentes y podemos asumir que $z = a_1$. Entonces si $\{a_0, a_2\} \in E(G)$ tenemos que $b(H) = 0 \neq 1 = b(H \setminus \{z\})$ y si $\{a_0, a_2\} \notin E(G)$ tenemos que $b(H) = 1 \neq 2 = b(H \setminus \{z\})$.

Si $r \geq 4$ veamos que $\{a_{i-1}, a_{i+1}\} \in E(G)$. De no ser as3 consideremos el grafo G_z^c , que es un grafo theta par o impar. Adem3s si G es un grafo theta impar con v3rtices base u, v tales que $\{u, v\} \notin E(G)$, si $z \notin \{a_1, a_{r-1}\}$ entonces G_z^c tambi3n es un grafo theta impar con v3rtices base u, v y $\{u, v\} \notin E(G_z^c)$ que es intersecci3n completa por la Proposici3n 4.5.3 y adem3s cumple que $|V(G_z^c)| < |V(G)|$, lo que ser3a una contradicci3n. Si $z = a_1$, entonces $V(G_z^c) = V(G) \setminus \{u, a_1, a_2\} \cup \{u'\}$ y G_z^c es un grafo theta impar con v3rtices base u', v . Adem3s $\{a_2, v\} \notin E(G)$ ya que en caso contrario el subgrafo inducido $G' := [V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2) \cup V(\mathcal{P}'_3)]$ con $\mathcal{P}'_3 = (u, a_1, a_2, v)$ ser3a un grafo theta impar con v3rtices base no adyacentes que adem3s es intersecci3n completa, lo que de nuevo contradice la minimalidad de G . Por tanto, como $\{a_2, v\}, \{u, v\} \notin E(G)$, entonces $\{u', v\} \notin E(G_z^c)$; pero esto de nuevo contradice la minimalidad de G . Finalmente podemos concluir que $\{a_{i-1}, a_{i+1}\} \in E(G)$.

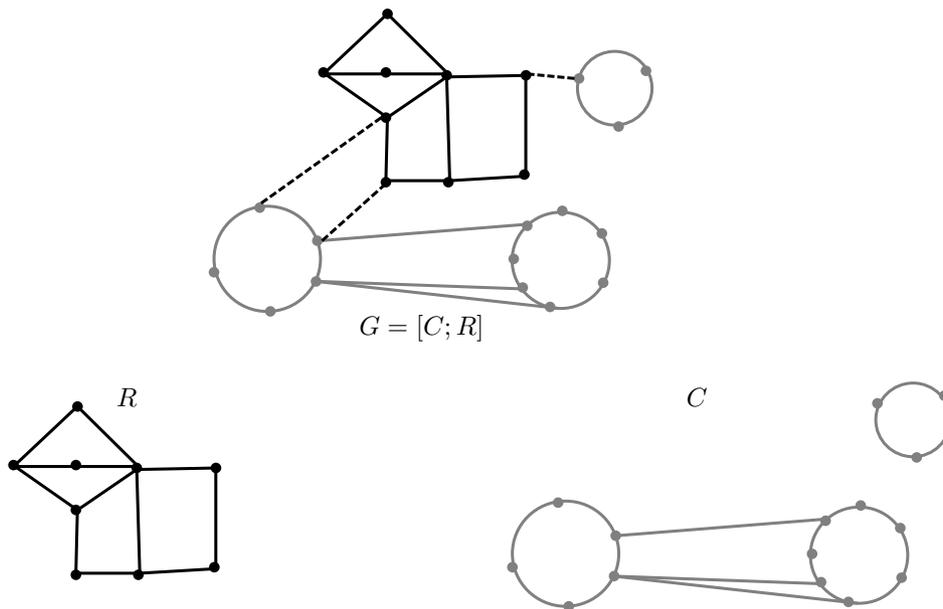
Hemos visto que $\{a_{i-1}, a_{i+1}\} \in E(G)$, lo que significa que $b(H) = 0$; si demostramos que $H \setminus \{z\}$ es bipartito tendr3amos que $b(H \setminus \{z\}) = 1$ y habr3amos terminado. En efecto, supongamos que $H \setminus \{z\}$ no es bipartito. Denotamos $a'_j := a_j$ para todo $1 \leq j \leq i - 1$ y $a'_j := a_{j+1}$ para todo $i \leq j < r$. Dado que $\{a'_j, a'_{j+1}\} \in E(H \setminus \{z\})$ para todo $1 \leq j < r$, entonces debe existir $1 \leq j < k < r$ tal que $\{a'_j, a'_k\} \in E(H)$ y $j \equiv k \pmod{2}$. Separamos tres casos:

- (a) si $k < i$, entonces $\{a_j, a_k\} \in E(T')$.
- (b) si $j \geq i$, entonces $\{a_{j+1}, a_{k+1}\} \in E(T')$
- (c) si $j < i \leq k$, entonces $\{a_j, a_{k+1}\} \in E(T')$.

Si se satisface (a), denotamos $\mathcal{P}'_3 = (u = a_0, \dots, a_j, a_k, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r = v)$. Si se satisface (b), denotamos $\mathcal{P}'_3 = (u = a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j+1}, a_{k+1}, \dots, a_r = v)$. Si se satisface (c), denotamos $\mathcal{P}'_3 = (u = a_0, \dots, a_j, a_{k+1}, \dots, a_r = v)$. En los tres casos \mathcal{P}'_3 es un camino simple de la misma paridad que \mathcal{P}_3 y que conecta u y v y adem3s $V(\mathcal{P}'_3) \subsetneq V(\mathcal{P}_3)$, pero esto contradice la minimalidad de G . \square

4.6 Teoremas de estructura de grafos intersección completa

El objetivo de esta sección es demostrar dos teoremas de estructura para ideales tóricos de grafos, los Teoremas 4.6.5 y 4.6.18. Sea G un grafo, G se puede particionar en dos subgrafos inducidos C y R tales que $V(C) = V(C_1) \sqcup \dots \sqcup V(C_s)$, donde C_1, \dots, C_s son ciclos primitivos impares y R es un grafo bipartito. Esta partición siempre existe pero no tiene porqué ser única. Cuando G es bipartito, entonces C es el grafo vacío. Siempre que tengamos una partición con estas características lo denotaremos por $G = [C; R]$.



Como tanto C como R son subgrafos inducidos de G , si G es intersección completa entonces R y C también lo son. Es por ello que para determinar cuándo G es intersección completa proponemos la siguiente estrategia: primero caracterizamos cuándo C y R son intersección completa para después estudiar y caracterizar qué aristas que conectan C y R son admisibles en un grafo intersección completa. Dado que R es un grafo bipartito, sabemos que R es intersección completa si y solo si es un grafo anillado (ver Teorema 4.2.2). El Teorema 4.6.5 dará condiciones necesarias para que un grafo sea intersección completa dando una caracterización de cuándo C es intersección completa. Finalmente, si C es conexo y R es 2-conexo, el Teorema 4.6.18 caracteriza la propiedad de ser intersección completa obteniendo todas las posibles aristas que conectan C y R .

Nuestro primer objetivo de esta sección es demostrar la siguiente proposición.

Proposición 4.6.1. *Sea G un grafo conexo intersección completa, entonces a lo sumo hay dos ciclos impares disjuntos por vértices en G .*

Para probar este resultado necesitamos el siguiente resultado técnico que está incluido en la prueba de [96, Theorem 5.3].

Lema 4.6.2. *Sea G un grafo 2-conexo intersección completa y sean C_1, C_2 dos ciclos impares de G .*

- (a) *Si $V(C_1) \cap V(C_2) = \{v\}$ entonces existe una arista $e \in E(G)$ tal que $v \notin e$ y $e \cap V(C_i) \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$.*
- (b) *Si C_1 y C_2 son disjuntos por vértices, entonces existen $e_1, e_2 \in E(G)$ tales que $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ y $e_i \cap V(C_j) \neq \emptyset$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.*

Demostración de la Proposición 4.6.1. Supongamos por reducción al absurdo que G es intersección completa y que existen tres ciclos impares disjuntos por vértices. Sea G' el menor subgrafo inducido que contiene tres ciclos primitivos impares, que denotaremos por $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1}, a_1)$, $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2}, b_1)$ y $C_3 = (c_1, \dots, c_{r_3}, c_1)$. Por [96, Theorem 4.2] se tiene que G' tiene uno o dos bloques no bipartitos, dividiremos la demostración en dos casos según el número de bloques no bipartitos de G' .

Si G' tiene un único bloque no bipartito, entonces C_1, C_2 y C_3 pertenecen a él y, por tanto G' es 2-conexo. En virtud del Lema 4.6.2, para todo $1 \leq i < j \leq 3$ existen dos aristas que conectan un vértice de C_i y un vértice de C_j ; por tanto $G' = [V(C_1) \cup V(C_2) \cup V(C_3)]$. Además G' no puede ser una banda ni una banda de Möbius puesto que tiene 3 ciclos impares disjuntos por vértices. Entonces existe un vértice $z \in V(G')$ de grado 2. Supongamos sin pérdida de generalidad que $z \in V(C_3)$ y denotamos $H_i := [V(C_i) \cup V(C_3)]$ para $i = 1, 2$. Como $H_i \setminus \{z\}$ es conexo y $V(C_i) \subset V(H_i \setminus \{z\})$, entonces $b(H_i) = b(H_i \setminus \{z\}) = 0$ para $i = 1, 2$. Del Lema 4.5.1 se sigue que $b(H) = b(H \setminus \{z\})$ donde $H := [V(H_1) \cap V(H_2)] = [V(C_3)]$. Sin embargo, C_3 es un ciclo primitivo impar, lo que significa que $b(H) = 0$ y $b(H \setminus \{z\}) = 1$, lo que es una contradicción.

Si G' tiene dos bloques no bipartitos, entonces dos de los ciclos primitivos impares, que llamaremos C_1 y C_2 , se encuentran en el mismo bloque de G' . Por el Lema 4.6.2, por lo menos hay dos aristas que conectan C_1 y C_2 . Además, C_3 no se encuentra en el mismo bloque que C_1 y C_2 . Entonces denotamos $G_1 := [V(C_1) \cup V(C_2)]$ y tomamos \mathcal{P} un camino simple en G' de longitud mínima que conecta un vértice cualquiera de C_3 con otro de G_1 . De la minimalidad de G' se sigue que $G' = [V(G_1) \cup V(\mathcal{P}) \cup V(C_3)]$. Además podemos suponer que $\mathcal{P} = (c_1 = u_0, u_1, \dots, u_s, a_1)$ con $s \geq 0$ y de la minimalidad de \mathcal{P} se puede deducir que $u_i \notin V(G_1) \cup V(C_3)$ para todo $1 \leq i \leq s$, $\{c_j, u_i\} \notin E(G')$ para $1 \leq j \leq r_3$, $i > 1$ y $\{a_j, u_i\} \notin E(G')$ para todo $1 \leq j \leq r_1$, $i < s$.

Primero supongamos que $\deg_{G'}(c_j) = 2$ para todo $j > 1$ y tomemos $u := c_2$. Tomamos \mathcal{P}' un camino simple mínimo en G' que conecta c_1 con un vértice de C_2 . Entonces, $\mathcal{P}' = (c_1 = v_0, v_1, \dots, v_t = b_1)$ y se tienen las siguientes propiedades:

- (a) $v_i = u_i$ para todo $0 \leq i \leq s$, $v_i \in V(C_1)$ para $s \leq i \leq t - 1$ y $v_t \in V(C_2)$, $v_i \in V(C_1)$ para $t' < i \leq t - 1$ y $v_t \in V(C_2)$
- (b) $\{v_i, v_j\} \notin E(G')$ para $0 \leq i < i + 1 < j \leq t$.

Ahora denotamos $H_1 := [V(C_1) \cup V(\mathcal{P}) \cup V(C_3)]$ y $H_2 := [V(C_2) \cup V(\mathcal{P}') \cup V(C_3)]$ y claramente obtenemos que $b(H_i) = b(H_i \setminus \{u\}) = 0$ para $i = 1, 2$. Sin embargo, si denotamos $H := [V(H_1) \cap V(H_2)] = [V(C_3) \cup \{v_1, \dots, v_{t-1}\}]$, entonces $V(C_3) \subset V(H)$, $\deg_H(c_1) = 3$, $\deg_H(v_{t-1}) = 1$ y $\deg_H(v) = 2$ para el resto de vértices de H . Entonces $b(H) = 0$ y $b(H \setminus \{u\}) = 1$, lo que contradice el Lema 4.5.1.

Supongamos que $\deg_{G'}(c_j) > 2$ para algún $j > 1$ y veamos que $s = 0$, i.e., $\{a_1, c_1\} \in E(G')$. En efecto, si $s \geq 1$, de la minimalidad de G' se sigue que $\{u_1, c_j\} \in E(G')$ pero en ese caso existiría un ciclo primitivo impar C' tal que $u_1 \in V(C') \subset V(C_3) \cup \{u_1\}$, lo que contradiría la minimalidad de G' . Entonces, $s = 0$, $\{a_1, c_1\} \in E(G')$ y si $\{c_k, a_i\} \in E(G')$ necesariamente $i = 1$ puesto que G' tiene dos bloques. Escogemos C'_3 un ciclo primitivo impar tal que $a_1 \in V(C'_3) \subset V(C_3) \cup \{a_1\}$ y tomamos u un vértice cualquiera de $V(C'_3) \setminus \{a_1\}$. Definimos \mathcal{P}' como uno de los caminos mínimos en G' que conectan a_1 con un vértice de C_2 . Podemos asumir que $\mathcal{P}' = (a_1 = v_0, v_1, \dots, v_t = b_1)$ y se tienen las siguientes propiedades:

- (a) $v_i \in V(C_1)$ para todo $0 \leq i \leq t - 1$
- (b) $\{v_i, v_j\} \notin E(G')$ para todo $0 \leq i < i + 1 < j \leq t$.

Ahora denotamos $H_1 := [V(C_1) \cup V(C'_3)]$ y $H_2 := [V(C_2) \cup V(\mathcal{P}') \cup V(C'_3)]$; claramente u tiene grado 2 en $[V(H_1) \cup V(H_2)]$ y $b(H_i) = b(H_i \setminus \{u\}) = 0$ para $i = 1, 2$. No obstante si denotamos $H := [V(H_1) \cap V(H_2)] = [V(C'_3) \cup \{v_1, \dots, v_{t-1}\}]$, entonces $V(C'_3) \subset V(H)$, $\deg_H(a_1) = 3$, $\deg_H(v_{t-1}) = 1$ y $\deg_H(v) = 2$ para el resto de vértices de H . De donde $b(H) = 0$ y $b(H \setminus \{v\}) = 1$, que una vez más contradice el Lema 4.5.1. \square

En vista de este resultado, tenemos que un grafo conexo intersección completa tendrá a lo sumo 2 ciclos primitivos impares disjuntos por vértices. Nuestro siguiente objetivo será determinar cómo se pueden conectar 2 ciclos primitivos impares en un grafo intersección completa.

Definición 4.6.3. *Un grafo G es una banda parcial impar si existen dos ciclos primitivos impares disjuntos por vértices $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1}, a_1)$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2}, b_1)$ tales que $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2)$ y $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_{j_1}, b_{k_1}\}, \{a_{j_2}, b_{k_2}\}, \dots, \{a_{j_s}, b_{k_s}\}\}$ para ciertos $s \geq 1$, $1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_s$, $1 \leq k_1 \leq \dots \leq k_s$ y $j_i \equiv k_i \pmod{2}$.*

Proposición 4.6.4. *Sea G un grafo conexo tal que $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2)$ donde C_1 y C_2 son ciclos impares disjuntos por vértices. Entonces, G es intersección completa $\iff G$ es una banda parcial impar.*

Demostración. (\Rightarrow) Procederemos por inducción sobre $|V(G)|$, el número de vértices de G . Comenzamos por $|V(G)| = 6$, i.e., C_1 y C_2 son triángulos. El número de aristas debe ser ≤ 9 ya que $2|E(G)| \leq 18 = 3|V(G)|$ por el Corolario 4.3.7. Si $7 \leq |E(G)| \leq 8$, es fácil ver que G siempre es una banda parcial impar. Si $|E(G)| = 9$, entonces G es una banda parcial impar salvo cuando $C_1 = (a_1, a_2, a_3, a_1)$, $C_2 = (b_1, b_2, b_3, b_1)$ y $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{f_1, f_2, f_3\}$ donde $f_1 = \{a_1, b_1\}$, $f_2 = \{a_1, b_3\}$ y

(a) $f_3 = \{a_1, b_2\}$, o

(b) $f_3 = \{a_2, b_2\}$.

En (a) se tiene que $\deg(a_2) = 2$ y tomando $H_i := [\{a_1, a_2, a_3, b_i, b_3\}]$ se observa que $b(H_i) = b(H_i \setminus \{a_2\})$ para $i = 1, 2$. Sin embargo, tomando $H := [V(H_1) \cap V(H_2)] = [\{a_1, a_2, a_3, b_3\}]$, se tiene que $b(H) = 0$ y $b(H \setminus \{a_2\}) = 1$; entonces por el Lema 4.5.1, G no es intersección completa. En (b), G tiene un subgrafo $\mathcal{K}_{2,3}$ con vértices $\{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$, lo que contradice el Corolario 4.3.9.

Supongamos que $|V(G)| > 6$. Observamos que G no puede ser una banda de Möbius por puesto que G tiene dos ciclos primitivos impares disjuntos por vértices. Si $\deg(v) > 2$ para todo $v \in V(G)$, entonces G es una banda impar, que en particular es una banda parcial impar.

Si todo vértice de grado 2 pertenece a un triángulo, entonces podemos suponer que $\deg(v) \geq 3$ para todo $v \in V(C_1)$, C_1 tiene al menos 5 vértices y C_2 es un triángulo. Como $|V(C_1)| \geq 5$, entonces $2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) \geq 3|V(C_1)| + 2|V(C_2)| + 5 > 3|V(G)|$, lo que contradice el Corolario 4.3.7.

Si existe un $v \in V(G)$ que tiene grado 2 y no pertenece a un triángulo y supongamos sin pérdida de generalidad que $v \in V(C_1)$. Consideramos el grafo G_v^c , la contracción de G en v . Por hipótesis de inducción G_v^c es una banda parcial impar, entonces tenemos que $V(G_v^c) = \{a'_1, \dots, a'_{r_1-2}, b_1, \dots, b_{r_2}\}$, donde $C'_1 := (a'_1, \dots, a'_{r_1-2}, a'_1)$ y $C_2 := (b_1, \dots, b_{r_2}, b_1)$ son ciclos primitivos impares. Además, existe un $i \in \{2, \dots, r_1 - 1\}$ tal que $v = a_k$, $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1})$ y

$$\{a'_i, b_j\} \in E(G_v^c) \iff \begin{cases} \{a_i, b_j\} \in E(G) & \text{y } i \leq k-1, \text{ o} \\ \{a_{i+2}, b_j\} \in E(G) & \text{y } i \geq k-1. \end{cases}$$

De aquí se deduce que si $\{a_i, b_j\} \in E(G)$ entonces $i \equiv j \pmod{2}$, y para todo par de aristas $\{a_{i_1}, b_{j_1}\}, \{a_{i_2}, b_{j_2}\} \in E(G)$ con $i_1 < i_2$ tales que $(i_1, i_2) \neq (i-1, i+1)$, entonces $j_1 \leq j_2$. Por tanto, podemos asegurar G es una banda parcial impar salvo que existan dos aristas $\{a_{i-1}, b_{j_1}\}, \{a_{i+1}, b_{j_2}\} \in E(G)$ con $j_1 > j_2$.

Si hay dos vértices adyacentes en C_1 de grado 2, entonces basta con tomar $v = a_i$ uno cualquiera de esos vértices y no podrá pasar que $\{a_{i-1}, b_{j_1}\}, \{a_{i+1}, b_{j_2}\} \in E(G)$ porque el grado de a_{i-1} o el de a_{i+1} es 2 y, por tanto, G es una banda parcial impar.

Si no estamos en esta situación, entonces debe haber al menos tres vértices de grado ≥ 3 en C_1 . Sea $v = a_i \in V(C_1)$ un vértice de grado 2 y supongamos que existen dos aristas $\{a_{i-1}, b_{j_1}\}, \{a_{i+1}, b_{j_2}\} \in E(G)$ con $j_1 > j_2$, el resto de la demostración lo dedicaremos a probar que en este caso G no es intersección completa. Sea $u := b_{j_2+1}$, afirmamos que u tiene grado 2. De hecho, $\{a_{i-1}, u\}, \{a_{i+1}, u\} \notin E(G)$ porque $j_2 + 1 \not\equiv j_2 \equiv i - 1 \equiv i + 1 \pmod{2}$, $\{a_l, u\} \notin E(G)$ si $l < i - 1$ porque $\{a_{i+1}, b_{j_2}\} \in E(G)$ y $j_2 < j_2 + 1$ y $\{a_l, u\} \notin E(G)$ si $l > i + 1$ porque $\{a_{i-1}, b_{j_1}\} \in E(G)$ y $j_2 + 1 < j_1$.

Tomemos ahora $i' \notin \{i-1, i+1\}$ de grado ≥ 3 , supongamos sin pérdida de generalidad que $i' < i-1$ y tomemos $j' := \max\{j \mid \{a_{i'}, b_j\} \in E(G)\}$. Necesariamente $i' \equiv j' \pmod{2}$ y $j' \leq j_2$. Ahora tomamos el ciclo par

$$w_1 := (b_{j'}, b_{j'+1}, \dots, b_{j_1}, a_{i-1}, a_{i-2}, \dots, a_{i'}, b_{j'})$$

y el camino cerrado par

$$w_2 := (b_{j'}, b_{j'-1}, \dots, b_1, b_{r_2}, \dots, b_{j_2}, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{r_1}, a_1, \dots, a_{i'}, b_{j'}),$$

que es un ciclo par si $j' \neq j_2$ o dos ciclos impares con el vértice b_{j_2} en común si $j' = j_2$. Para $i = 1, 2$ denotamos $H_i := [V(w_i)]$, claramente $\deg_{H_i}(u) = 2$ y $b(H_i) = b(H_i \setminus \{u\})$. Demostremos que $b(H) \neq b(H \setminus \{u\})$ donde $H := [V(H_1) \cap V(H_2)] = [\{a_{i'}, b_{j'}, b_{j_2}, \dots, b_{j_1}\}]$. En efecto, si $j' < j_2 - 1$, entonces los vértices $a_{i'}, b_{j'}$ unidos por una arista forman una componente conexa de H , entonces $b(H) = 2$ y $b(H \setminus \{v\}) = 3$, y si $j' = j_2$ o $j' = j_2 - 1$ entonces $b(H) = 1$ y $b(H \setminus \{v\}) = 2$. En ambos casos podemos concluir que G no es intersección completa por el Lema 4.5.1.

(\Leftarrow) Supongamos que G es una banda parcial impar, tomamos $f_i := \{a_{j_i}, b_{k_i}\}$ para $1 \leq i \leq s$, $f_{s+i} := \{a_i, a_{i+1}\}$ para $1 \leq i < r_1$, $f_{s+r_1} := \{a_1, a_{r_1}\}$, $f_{s+r_1+i} := \{b_i, b_{i+1}\}$ para $1 \leq i < r_2$ y $f_{s+r_1+r_2} := \{b_1, b_{r_2}\}$. Entonces $\text{ht}(I_G) = s$.

Para todo $i \in \{1, \dots, s-1\}$, denotamos por w_i el ciclo primitivo par

$$w_i := (b_{k_i}, a_{j_i}, a_{j_i+1}, \dots, a_{j_{i+1}}, b_{k_{i+1}}, b_{k_{i+1}-1}, \dots, b_{k_i})$$

y $w_s := (b_{k_s}, a_{j_s}, a_{j_s+1}, \dots, a_{r_1}, a_1, \dots, a_{j_1}, b_{k_1}, \dots, b_1, b_{r_2}, \dots, b_{k_s})$.

Sea $i \in \{1, \dots, s\}$, denotamos $\widehat{B}_{w_i} = \sum_{j=1}^{s+r_1+r_2} \alpha_j e_j$ donde $\{e_j\}_{j=1}^{s+r_1+r_2}$ es la base canónica de $\mathbb{Z}^{s+r_1+r_2}$. Entonces $\alpha_i = 1$ y para $i \leq s$, además si $i < s$, entonces $\alpha_{i+1} = 1$ si y solo si $j_{i+1} - j_i$ es impar y $\alpha_{i+1} = -1$ en caso contrario. Para $i = s$, entonces $\alpha_1 = 1$ si y solo si $r_1 - j_s + j_1$ es impar y $\alpha_1 = -1$ en caso contrario.

Denotamos por B la matriz $s \times (s + r_1 + r_2)$ cuya fila i -ésima es \widehat{B}_{w_i} para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Es fácil comprobar que $\Delta_s(B) = 1$ y para todo $j > s$, la j -ésima columna de B tiene una sola entrada no nula. Por tanto, B será dominante si y solo si B' lo es, donde B' es la submatriz $s \times s$ que forman las primeras s columnas de B . Como ya hemos visto, si denotamos $B' := (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq s}$, entonces $b_{i,j} \neq 0$ si y solo si $j - i \in \{0, 1\}$ o si $i = s, j = 1$. Por tanto, en caso de existir una submatriz cuadrada mezclada C de B' , necesariamente se tendría que $C = B'$. Veamos pues que B' no es mezclada; en efecto, r_1 es impar y, si denotamos por $l_1 := j_2 - j_1, l_2 := j_3 - j_2, \dots, l_{s-1} := j_s - j_{s-1}$ y $l_s := r_1 - j_s + j_1$; entonces $r_1 = l_1 + \dots + l_s$ y existe $i : 1 \leq i \leq s$ tal que l_i es impar. Por tanto, las dos únicas entradas no nulas de la fila i -ésima de B' son positivas y B' no sería mezclada. Del Teorema 1.2.11 podemos concluir que I_G es intersección completa y está generado minimalmente por $\{B_{w_1}, \dots, B_{w_s}\}$. \square

Ahora ya podemos enunciar y demostrar el siguiente teorema de estructura de grafos intersección completa.

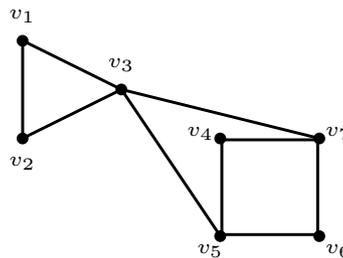
Teorema 4.6.5. *Sea $G = [C; R]$ un grafo conexo intersección completa. Entonces,*

- R es un grafo anillado
- C es o bien el grafo nulo, o un ciclo primitivo impar, o una banda parcial impar, o dos ciclos impares primitivos sin aristas que los unen.

Demostración. Este resultado es consecuencia del hecho de que la propiedad de ser intersección completa es hereditaria en grafos (Teorema 4.3.3), ya que si $G = [C; R]$ es intersección completa, entonces tanto R como C son intersección completa. Entonces por el Teorema 4.2.2 se tiene que R es un grafo anillado y por las Proposiciones 4.6.1 y 4.6.4, se deduce que C es o bien el grafo vacío, un ciclo primitivo impar, una banda parcial impar o C tiene dos componentes conexas y cada una de ellas es un ciclo primitivo impar. \square

La otra implicación de este resultado no es cierta en general, como muestra el siguiente ejemplo:

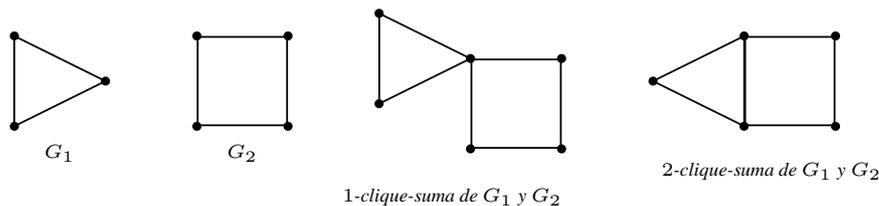
Ejemplo 4.6.6. Sea G el grafo siguiente:



Se tiene que $G = [C; R]$, donde $C := [\{v_1, v_2, v_3\}]$ es un ciclo primitivo impar y $R := [\{v_4, v_5, v_6, v_7\}]$ es un grafo anillado bipartito. Sin embargo G no es intersección completa porque tiene como subgrafo inducido a $[V(R) \cup \{v_3\}]$, que es $K_{2,3}$; ver Corolario 4.3.9.

Si añadimos las hipótesis de que R es 2-conexo y C conexo, se obtiene la caracterización dada en la Proposición 4.6.8 que en particular afirma que hay un conjunto de a lo sumo dos vértices en R tal que toda arista que conecta R y C es incidente a uno de los vértices en este conjunto. Para enunciar la Proposición 4.6.8 necesitamos una definición previa.

Definición 4.6.7. G es la 1-clique-suma de dos grafos G_1 y G_2 si se puede obtener identificando un vértice v_1 de G_1 y un vértice v_2 de G_2 . Análogamente se define una 2-clique-suma de dos grafos G_1 y G_2 como el grafo que se obtiene al identificar una arista e_1 de G_1 y una arista e_2 de G_2 (identificando los 2 vértices incidentes a la arista).



Proposición 4.6.8. Sea $G = [C; R]$ un grafo conexo tal que R es 2-conexo y C es conexo. Entonces, G es intersección completa si y solo si R es un grafo anillado y se da una de las siguientes situaciones:

- existe $u_1 \in V(R)$ tal que G es una 1-clique-suma de R y $[V(C) \cup \{u_1\}]$, con $[V(C) \cup \{u_1\}]$ intersección completa, o
- existen dos vértices adyacentes $u_1, u_2 \in V(R)$ tales que G es una 2-clique-suma de R y $[V(C) \cup \{u_1, u_2\}]$, con $[V(C) \cup \{u_1, u_2\}]$ intersección completa.

Este resultado se obtiene como consecuencia inmediata del Lema 4.6.9 y el Lema 4.6.10.

Lema 4.6.9. Sea $G = [C; R]$ un grafo intersección completa. Si R es 2-conexo y C es conexo, entonces existen dos vértices adyacentes $u_1, u_2 \in V(R)$ tales que si $\{u, v\} \in E(G)$ con $u \in V(R)$ y $v \in V(C)$, entonces $u = u_1$ o $u = u_2$.

Demostración. En virtud del Teorema 4.6.5, R es necesariamente un grafo anillado y C puede ser el grafo nulo, un ciclo primitivo impar o una banda parcial impar. Vamos a probar que si existen dos aristas $\{u_1, v_1\}$ y $\{u_2, v_2\}$ tales que $u_1, u_2 \in V(R)$, $v_1, v_2 \in V(C)$ entonces o bien $u_1 = u_2$ o u_1 y u_2 son adyacentes. Supongamos que existen $f_1 = \{u_1, v_1\}$ y $f_2 = \{u_2, v_2\}$ tales que $u_1, u_2 \in V(R)$, $v_1, v_2 \in V(C)$ de forma que $u_1 \neq u_2$ y no son adyacentes. Sean \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 dos caminos simples en R que conectan u_1 y u_2 de forma que $V(\mathcal{P}_1) \cap V(\mathcal{P}_2) = \{u_1, u_2\}$ y $|V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2)|$ es mínimo. Entonces, el subgrafo inducido $[V(\mathcal{P}_i)]$ es un grafo camino para $i = 1, 2$. Como R es bipartito, \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 tienen la misma paridad.

Supongamos primero que \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son ambos pares. Si $v_1 = v_2$, entonces tomamos $\mathcal{P}_3 := (u_1, v_1, u_2)$. Si $v_1 \neq v_2$, siempre que exista un camino par \mathcal{P}'_3 en C que conecte v_1 y v_2 , podemos definir el camino simple $\mathcal{P}_3 := (u_1, v_1, \mathcal{P}'_3, v_2, u_2)$. En ambos casos tenemos que \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 y \mathcal{P}_3 son tres caminos simples que conectan u_1 y u_2 y tales que $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{u_1, u_2\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$, pero esto no se puede dar por el Teorema 4.5.8. Además es fácil comprobar que siempre podemos encontrar el camino simple par \mathcal{P}'_3 cuando C es una banda parcial impar que consta de dos ciclos primitivos impares $C_1 = (a_1, \dots, a_{r_1}, a_1)$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_{r_2}, b_2)$ tales que $E(C) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}\}$ y $\{a_1, b_1\} = \{v_1, v_2\}$. En este caso denotamos $G' := [V(C) \cup V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2)]$ y como G' es intersección completa y $\deg_{G'}(a_1) \geq 4$, entonces por el Corolario 4.3.8 existe un vértice $v \in V(G')$ de grado 2. Si $v \in V(C)$, supondremos que $v \in V(C_1)$ y tomamos $H_1 := [V(C_1) \cup V(\mathcal{P}_1) \cup \{b_1\}]$, entonces $b(H_1) = b(H_1 \setminus \{v\}) = 0$ puesto que $(u_1, \mathcal{P}_1, u_2, v_2, v_1, u_1)$ es un camino impar en $H_1 \setminus \{v\}$; además $b(C) = b(C \setminus \{v\}) = 0$. Entonces por el Lema 4.5.1, se sigue que $b(H) = b(H \setminus \{v\})$ donde $H = [V(C) \cap V(H_1)] = [V(C_1) \cup \{b_1\}]$. Sin embargo, $b(H) = 0$ porque $V(C_1) \subset V(H)$ y $b(H \setminus \{v\}) = 1$ porque $H \setminus \{v\}$ es acíclico, lo que es una contradicción. Si $v \in V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2)$, podemos asumir que $v \in V(\mathcal{P}_1)$ y denotamos $H_1 := [V(\mathcal{P}_1) \cup V(C_1) \cup \{b_1\}]$ y $H_2 := [V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2)]$, entonces $b(H_1) = b(H_1 \setminus \{v\}) = 0$ y $b(H_2) = b(H_2 \setminus \{v\}) = 1$. Por tanto del Lema 4.5.1 se sigue que $b(H) = b(H \setminus \{v\})$ donde $H = [V(H_1) \cap V(H_2)] = [V(\mathcal{P}_1)]$. No obstante, $b(H) = 1$ y $b(H \setminus \{v\}) = 2$ puesto que H es un grafo camino y $\deg_H(v) = 2$, cosa que no es posible.

Supongamos ahora que \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 son impares. Si $v_1 \neq v_2$, entonces podemos encontrar fácilmente un camino impar \mathcal{P}'_3 en C que conecte v_1, v_2 . Por tanto, si denotamos $\mathcal{P}_3 := (u_1, v_1, \mathcal{P}'_3, v_2, u_2)$, entonces \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 y \mathcal{P}_3 son todos caminos impares que conectan u_1 y

u_2 ; pero esto no es posible de nuevo por el Teorema 4.5.8. Solo nos resta considerar el caso en que $v_1 = v_2$. Como $v_1 \in V(C)$, entonces v_1 pertenece a un ciclo primitivo impar C' y denotamos $G' := [V(C') \cup V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2)]$. Afirmamos que todo v3rtice de C' excepto v_1 tiene grado 2. En caso contrario existir3a un v3rtice $v' \in V(C')$ y $u \in V(\mathcal{P}_1) \cup V(\mathcal{P}_2)$ tales que $\{u, v'\} \in E(G')$. Si $u = u_1$, aplicando lo anterior con $\{u_1, v'\}$ y $\{u_2, v_2\}$ llegamos a que u_1 y u_2 son adyacentes y si $u = u_2$ actuar3amos de forma an3loga con $\{u_1, v_1\}$ y $\{u_2, v'\}$. As3a pues asumiremos que $u \in V(\mathcal{P}_1)$ y $u \neq u_1, u \neq u_2$. Como ya probamos anteriormente, $\{u, u_1\}, \{u, u_2\} \in E(R)$ y el camino de longitud 2, (u_1, u, u_2) que est3a contenido en R conecta u_1 y u_2 ; sin embargo esto no es posible puesto que R es bipartito y \mathcal{P}_2 es un camino impar en R que tambi3n conecta u_1 y u_2 . Entonces tomamos v un v3rtice cualquiera de C' excepto v_1 y $H_i := [V(\mathcal{P}_i) \cup V(C')]$ para $i = 1, 2$. Entonces $C_i := (u_1, \mathcal{P}_i, u_2, v_1, u_1)$ es un ciclo impar con $v \notin V(C_i) \subset V(H_i)$, de donde se deduce que $b(H_i) = b(H_i \setminus \{v\}) = 0$. Entonces por el Lema 4.5.1, se sigue que $b(H) = b(H \setminus \{v\})$ donde $H = [V(H_1) \cap V(H_2)] = [V(C') \cup \{u_1, u_2\}]$. Pero $b(H) = 0$ porque $V(C) \subset V(H)$ y $b(H \setminus \{v\}) = 1$ porque $H \setminus \{v\}$ es un 3rbol, lo que es una contradicci3n.

En resumen, lo que hemos probado es que siempre que $\{u_1, v_1\}, \{u_2, v_2\} \in E(G)$ con $v_1, v_2 \in V(C)$, $u_1, u_2 \in V(R)$ y $u_1 \neq u_2$, entonces $\{u_1, u_2\} \in E(G)$. Si existiesen tres v3rtices distintos $u_1, u_2, u_3 \in E(G)$ tales que $\{u_i, v_i\} \in E(G')$ con $v_1, v_2, v_3 \in V(C)$, entonces u_1, u_2, u_3 forman un tri3ngulo en R , pero esto no se puede dar porque R es bipartito. \square

Lema 4.6.10. *Sea G una 1-clique-suma o una 2-clique-suma de un grafo H y un grafo anillado bipartito R . Entonces, G es intersecci3n completa $\iff H$ es intersecci3n completa.*

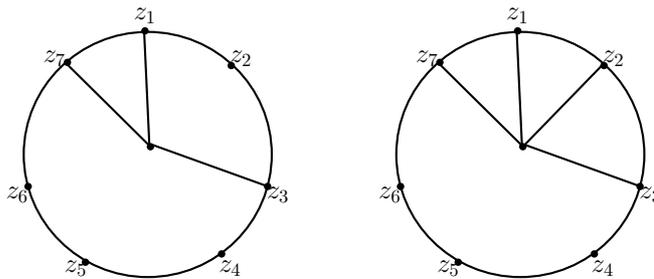
Demostraci3n. (\implies) Es obvia en vista del Teorema 4.3.3 puesto que H es un subgrafo inducido de G . (\impliedby) Como los grafos anillados bipartitos se construyen mediante 1-clique-sumas y 2-clique-sumas de ciclos pares primitivos y aristas, solo tenemos que probar que G es intersecci3n completa cuando es una 1-clique-suma o una 2-clique-suma de un grafo intersecci3n completa H y K , donde K es un ciclo par primitivo o 2 v3rtices conectados por una arista. Si K es una arista $f = \{v_1, v_2\}$ y G es una 1-clique-suma de H y K , entonces $\deg_G(v_i) = 1$ para $i = 1$ o $i = 2$ y, por el Teorema 4.4.8, G es intersecci3n completa. Supongamos ahora que K es un ciclo primitivo impar C y G es una 1-clique-suma o una 2-clique-suma de H y un ciclo primitivo C , y veamos que G es intersecci3n completa. Sea $\mathfrak{B} = \{B_{w_1}, \dots, B_{w_h}\}$ un sistema minimal de generadores de I_H , con $h = \text{ht}(I_H)$. Denotamos por $\mathfrak{B}' := \mathfrak{B} \cup \{B_C\}$. Si demostramos que \mathfrak{B}' genera I_G , entonces G es intersecci3n completa puesto que $\text{ht}(I_G) = \text{ht}(I_H) + 1$. Sea B a la matriz $h \times n$ cuya i -3sima fila es \widehat{B}_{w_i} , por el Teorema 1.2.11 se tiene que B es dominante y $\Delta_h(B) = 1$. Si denotamos por B' la matriz resultante de a3adirle a B una nueva fila \widehat{B}_C , veamos que B' es dominante y que $\Delta_{h+1}(B') = 1$. En efecto, C es un ciclo par que pasa por a lo sumo una arista de H , por tanto B' es tambi3n dominante y como adem3s el vector \widehat{B}_C solo tiene entradas $+1$ y -1 en las columnas que se corresponden con aristas de $E(C)$, entonces $\Delta_{h+1}(B') = \Delta_h(B) = 1$. \square

Ahora abordaremos los problemas de caracterizar cuándo $[V(C) \cup \{u_1\}]$ es intersección completa con $u_1 \in V(R)$ y cuándo $[V(C) \cup \{u_1, u_2\}]$ es intersección completa con $u_1, u_2 \in V(R)$ dos vértices adyacentes. Por el Teorema 4.3.3, si $[V(C) \cup \{u_1\}]$ o $[V(C) \cup \{u_1, u_2\}]$ es intersección completa, se tiene que C también lo es y entonces, del Teorema 4.6.5, C es o bien un ciclo primitivo impar o una banda parcial impar. En consecuencia estudiaremos las intersecciones completas en los siguientes grafos:

1. $[V(C) \cup \{u_1\}]$, donde C es un ciclo primitivo impar,
2. $[V(C) \cup \{u_1, u_2\}]$, donde u_1, u_2 son vértices adyacentes y C es un ciclo primitivo impar,
3. $[V(C) \cup \{u_1\}]$, donde C es una banda parcial impar, y
4. $[V(C) \cup \{u_1, u_2\}]$, donde u_1, u_2 son vértices adyacentes y C es una banda parcial impar.

Estudiaremos en detalle cada una de estas cuatro situaciones en los siguientes cuatro lemas. Comenzamos con una definición.

Definición 4.6.11. Una rueda parcial impar W está formada por un ciclo impar primitivo C y al menos una arista que conecta C con un vértice v ajeno a C . Al vértice v se le denomina vértice central de W y a C ciclo principal de W . Una rueda parcial impar W diremos que es una IC-rueda-parcial-impar si y solo si $C = (z_1, \dots, z_r, z_1)$ y $N_W(v) = \{z_1, z_{s_2}, \dots, z_{s_k}\}$, donde $k \geq 1$, $1 < s_2 < \dots < s_k$, $s_2 = 2$ o s_2 es impar, y s_3, \dots, s_k son impares.



Lema 4.6.12. Sea W una rueda parcial impar. W es intersección completa si y solo si W es una IC-rueda-parcial-impar.

Demostración. Sea u el vértice central y C el ciclo principal de W , denotamos por r al número de vértices de C .

(\Rightarrow) Procedemos por inducción sobre $r := |V(C)|$. Si $r = 3$, entonces W siempre es una IC-rueda-parcial-impar. Si $r \geq 5$ y $\deg(u) \leq 2$ entonces evidentemente W es una IC-rueda-parcial-impar. Supongamos pues que $\deg_W(u) \geq 3$, entonces existe un vértice $v \in V(C)$ de grado 2, ya que en caso contrario $\deg_W(u) = r > 3$, lo que contradice el Corolario 4.3.8. Entonces podemos considerar el grafo $W' := W_v^c$, que de nuevo es

una rueda parcial impar intersección completa y, por hipótesis de inducción es una IC-rueda-parcial-impar. Por tanto W' tiene como ciclo principal a $C' = (z'_1, \dots, z'_{r-2})$ y $N_{W'}(u) = \{z'_1, z'_{t_2}, \dots, z'_{t_k}\}$ con $1 < t_2 < \dots < t_k \leq r-2$, $k \geq 1$, t_3, \dots, t_k son impares y $t_2 = 2$ o t_2 es impar. Entonces $C = (z_1, \dots, z_r, z_1)$ y existe un $l \in \{2, \dots, r-1\}$ tal que

$$\{u, z'_i\} \in E(W') \iff \begin{cases} \{u, z_i\} \in E(W) & \text{e } i \leq l-1, \text{ o} \\ \{u, z_{i+2}\} \in E(W) & \text{e } i \geq l-1. \end{cases}$$

Si $\{u, z_1\} \notin E(W)$ entonces denotamos $y_i := z_{i+2}$ para todo $1 \leq i \leq r-2$, $y_1 = z_{r-1}$ e $y_2 = z_r$ y tenemos que W es una IC-rueda-parcial-impar. Si $l \neq 3$ o $\{u, z_4\} \notin E(W)$, entonces W también es una IC-rueda-parcial-impar. Así que solo falta estudiar el caso en que $\{u, z_1\}, \{u, z_4\} \in E(W)$ y $l = 3$. Supongamos primero que $\{u, z_2\} \in E(W)$. Si $\deg_W(u) = 3$, entonces denotamos $y_i := z_{i+1}$ para $1 \leq i < r$ e $y_r := z_1$ y tenemos que $C = (y_1, \dots, y_r, y_1)$ con $N_W(u) = \{y_1, y_3, y_r\}$ y W es una IC-rueda-parcial-impar. Si $N_W(u) = \{z_1, z_2, z_4, z_r\}$, entonces basta con tomar $y_1 := z_r$, $y_i := z_{i-1}$ para todo $2 \leq i \leq r$ y tenemos que $N_W(u) = \{y_1, y_2, y_3, y_5\}$ y de nuevo llegamos a que W es una IC-rueda-parcial-impar. Si $\deg_W(u) \geq 4$ y $N_W(u) \neq \{z_1, z_2, z_4, z_r\}$, entonces tomamos $j = \min\{i > 4 \mid z_i \in N_W(u)\}$, y existen dos ciclos $C_1 := (z_1, z_2, u, z_1)$ y $C_2 := (z_4, \dots, z_j, u, z_4)$ que son impares pues j es impar, pero no hay ninguna arista que conecte C_1 y C_2 , lo que contradice el Lema 4.6.2.

Ahora supongamos que $l = 3$ y $\{u, z_2\} \notin E(W)$. Si $\deg_W(u) = 3$ y $\{u, z_j\} \in E(W)$ con $j = 5$ o $j = r$, entonces W es una IC-rueda-parcial-impar. En efecto, si $j = r$ denotamos $y_1 := z_r$, $y_i = z_{i-1}$ para todo $2 \leq i \leq r$ y se tiene que $N_W(u) = \{y_1, y_2, y_5\}$; por tanto W es una IC-rueda-parcial-impar. Si $j = 5$ procederíamos de forma análoga.

Si $\deg_W(u) \geq 3$ y no estamos en ninguno de los casos tratados anteriormente, entonces $\deg_G(z_2) = 2$ y existen $5 \leq j_1 \leq j_2 \leq r$ tales que $z_{j_1}, z_{j_2} \in N_W(u)$, $(j_1, j_2) \neq (5, 5)$ y $(j_1, j_2) \neq (r, r)$. Como j_1 y j_2 son impares, tenemos los dos ciclos pares $C_1 := (z_1, \dots, z_{j_1}, u, z_1)$ y $C_2 := (z_{j_2}, \dots, z_r, z_1, \dots, z_4, u, z_{j_2})$ y denotamos $H_i := [V(C_i)]$ para $i = 1, 2$. Entonces, por el Lema 4.5.7 $b(H_i) = b(H_i \setminus \{z_2\})$; sin embargo si denotamos $H := [V(H_1) \cap V(H_2)]$, entonces $b(H) = 0$ y $b(H \setminus \{z_2\}) = 1$, lo que contradice el Lema 4.5.1.

(\Leftarrow) Escribimos $C = (z_1, \dots, z_r, z_1)$ con $N_W(u) = \{z_1, z_{s_2}, \dots, z_{s_k}\}$ donde $k \geq 1$, $s_1 := 1 < s_2 < \dots < s_k$, s_3, \dots, s_k son impares y, o bien $s_2 = 2$ o s_2 es impar. Si s_2 es impar, tomamos \overline{W} la rueda parcial impar con ciclo principal $C' = (z'_1, \dots, z'_{r+2}, z'_1)$, vértice central u' y tal que $\{u', z'_i\} \in E(\overline{W})$ si y solo si $\{u, z_i\} \in E(W)$. Claramente z'_{r+1} y z'_{r+2} tienen grado 2 en \overline{W} y W es la contracción de \overline{W} en z'_{r+1} , entonces bastará con probar que \overline{W} es intersección completa para demostrar que W también lo es. Sea $R := \overline{W} \setminus \{z'_{r+2}\}$, como $b(\overline{W}) = 0$ y R es bipartito y por tanto $b(R) = 1$, por el Teorema 4.4.8, \overline{W} es intersección completa si y solo si lo es R . Como R es un grafo anillado bipartito, hemos terminado.

Supongamos ahora que $s_2 = 2$, denotamos $f_i = \{u, z_{s_i}\}$ para todo $1 \leq i \leq k$, $f_{k+i} = \{z_i, z_{i+1}\}$ para todo $1 \leq i \leq r-1$ y $e_{k+r} = \{z_1, z_r\}$. Como W tiene $r+1$ vértices y $r+k$ aristas, se tiene que $\text{ht}(I_W) = k-1$. Sean $C_1 := (u, z_{s_k}, z_{s_k+1}, \dots, z_r, z_1, z_2, u)$, $C_2 := (u, z_1, z_2, \dots, z_{s_3}, u)$ y $C_i := (u, z_{s_i}, z_{s_i+1}, \dots, z_{s_{i+1}}, u)$ para todo $3 \leq i \leq k-1$;

entonces

$$B_{C_1} = x_k x_{k+1} x_{k+s_k+1} \cdots x_{k+r-1} - x_2 x_{k+s_k} \cdots x_{k+r},$$

$$B_{C_2} = x_1 x_{k+2} \cdots x_{k+s_3-1} - x_3 x_{k+1} \cdots x_{k+s_3-2}, \text{ y}$$

$$B_{C_i} = x_i x_{k+s_i+1} \cdots x_{k+s_{i+1}-1} - x_{i+1} x_{k+s_i} \cdots x_{k+s_{i+1}-2} \text{ para } 3 \leq i \leq k-1,$$

nuestro objetivo es demostrar que $I_W = (B_{C_1}, \dots, B_{C_{k-1}})$. Tenemos que

$$\widehat{B}_{w_1} = -e_2 + e_k + e_{k+1} - e_{k+s_k} + e_{k+s_k+1} - \cdots + e_{k+r-1} - e_{k+r} \in \mathbb{Z}^{k+r},$$

$$\widehat{B}_{w_2} = e_1 - e_3 - e_{k+1} + e_{k+2} - \cdots - e_{k+s_3-2} + e_{k+s_3-1} \in \mathbb{Z}^{k+r}, \text{ y}$$

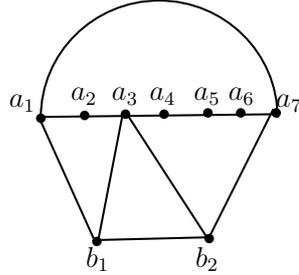
$$\widehat{B}_{w_i} := e_i - e_{i+1} - e_{k+s_i} + e_{k+s_i+1} \cdots - e_{k+s_{i+1}-2} + e_{k+s_{i+1}-1} \in \mathbb{Z}^{k+r} \text{ para } 3 \leq i \leq k-1$$

y denotamos por B a la matriz $(k-1) \times (k+r)$ cuya fila i -ésima es \widehat{B}_{w_i} . Es evidente que $\Delta_{k-1}(B) = 1$ y para todo $j \in \{1, 2, k+2, \dots, k+r\}$ la columna j -ésima de B tiene una única entrada no nula. Por tanto, B es dominante si y solo si lo es B' , la submatriz cuadrada de B de tamaño $(k-1) \times (k-1)$ formada por las columnas $3, 4, \dots, k+1$ de B . Es fácil comprobar que B' es dominante, por tanto W es intersección completa e $I_W = (B_{C_1}, \dots, B_{C_{k-1}})$. \square

Definición 4.6.13. Un grafo conexo G se denomina una IC-rueda-doble si $V(G) = V(C) \cup \{b_1, b_2\}$, donde $C = (a_1, \dots, a_r, a_1)$ es un ciclo primitivo impar y

$$E(G) = E(C) \cup \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, a_{j_1}\}, \dots, \{b_1, a_{j_s}\}, \{b_2, a_{k_1}\}, \dots, \{b_2, a_{k_t}\}\},$$

con $s, t \geq 1$, $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq k_1 < \dots < k_t$ y $j_1, \dots, j_s, k_1, \dots, k_t$ son impares.



Lema 4.6.14. Sea G un grafo conexo con $V(G) = V(C) \cup \{b_1, b_2\}$ donde C es un ciclo primitivo impar, $\{b_1, b_2\} \in E(G)$ y $\deg_G(b_1), \deg_G(b_2) \geq 2$. Entonces, G es intersección completa si y solo si G es una IC-rueda-doble.

Demostración. (\Rightarrow) Procederemos por inducción sobre $r := |V(C)|$. Si $r = 3$, por el Corolario 4.3.7 se tiene que hay ≤ 7 aristas. Si todo vértice de C tiene grado ≥ 3 , entonces G tiene un subgrafo $\mathcal{K}_{2,3}$, lo que contradice el Corolario 4.3.9. Entonces podemos escribir $V(G) = V(C) \cup \{b_1, b_2\}$, donde $C = (a_1, a_2, a_3, a_1)$, $\deg_G(a_2) = \deg_G(b_2) = 2$ y $\deg_G(b_1) \leq 3$ y se obtiene que G es una IC-rueda-doble. Supongamos ahora que $r \geq 5$, veamos que existe un vértice de grado 2 en C . De hecho, si $\deg_G(v) \geq 3$ para todo $v \in V(C)$, entonces por el Teorema 4.3.6 tenemos que $4r + 2 \leq 2|E(G)| \leq$

$3|V(G)| = 3r + 6$, cosa que no es posible. Entonces sea $v \in V(C)$ un vértice de grado 2 y consideramos $G' := G_v^c$, que por hipótesis de inducción es una IC-rueda-doble. Entonces $V(G') = V(C') \cup \{b_1, b_2\}$, donde $C' = (a'_1, \dots, a'_{r-2}, a'_1)$ es un ciclo primitivo impar y $E(G) = E(C) \cup \{\{b_1, b_2\}, \{b_1, a'_{j_1}\}, \dots, \{b_1, a'_{j_s}\}, \{b_2, a'_{k_1}\}, \dots, \{b_2, a'_{k_t}\}\}$ con $1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq k_1 < \dots < k_t \leq r$ y $j_1, \dots, j_s, k_1, \dots, k_t$ son impares. Además, existe un $l \in \{2, \dots, r-1\}$ tal que

$$\{b_i, a'_j\} \in E(G') \iff \begin{cases} \{b_i, a'_j\} \in E(G) & \text{y } j \leq l-1, \text{ o} \\ \{b_i, a'_{j+2}\} \in E(G) & \text{y } j \geq l-1. \end{cases}$$

Si $\{b_1, a_{l+1}\} \notin E(G)$ o $\{b_2, a_{l-1}\} \notin E(G)$ entonces G es una IC-rueda-doble, también si $\deg(b_1) = \deg(b_2) = 2$ se tiene que G es una IC-rueda-doble. Entonces, si G no fuese una IC-rueda-doble podemos asumir que $\{b_1, a_{l+1}\}, \{b_2, a_{l-1}\} \in E(G)$ y $\deg(b_1) > 2$. Entonces, $l-1 = j_s = k_1, k_1, \dots, k_t$ son impares y $\{b_1, a_{j_1}\}, \{b_1, a_{l+1}\}, \{b_2, a_{l-1}\} \in E(G)$.

Separamos dos casos, si b_2 tiene grado > 2 entonces $\{b_2, a'_{k_t}\} \in E(G')$ y $\{b_2, a_{k_t+2}\} \in E(G)$ y existen tres caminos simples pares

$$\mathcal{P}_1 := (a_{l-1}, a_l, a_{l+1}), \mathcal{P}_2 := (a_{l-1}, a_{l-2}, \dots, a_{j_1}, b_1, a_{l+1}) \text{ y}$$

$$\mathcal{P}_3 := (a_{l-1}, b_2, a_{k_t+2}, a_{k_t+1}, \dots, a_{l+1})$$

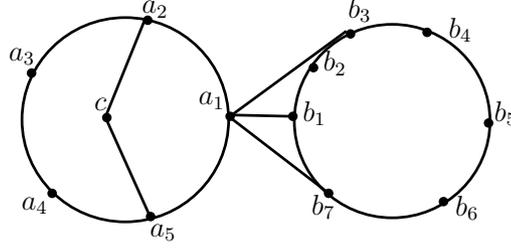
que conectan a_{l-1} y a_{l+1} y satisfacen que $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{a_{l-1}, a_{l+1}\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$, pero esto no es posible por el Teorema 4.5.8. Si b_2 tiene grado 2, entonces tomamos $C_1 := (b_1, b_2, a_{l-1}, \dots, a_r, a_1, \dots, a_{j_1}, b_1)$, $C_2 := (b_1, b_2, a_{l-1}, \dots, a_1, a_r, \dots, a_{l+1}, b_1)$ y los subgrafos inducidos $H_i := [V(C_i)]$, que satisfacen que $b(H_i) = b(H_i \setminus \{b_2\})$. Sin embargo si consideramos $H := [V(C_1) \cap V(C_2)] = [\{a_1, \dots, a_{j_1}, a_{l-1}, a_{l+1}, \dots, a_r, b_1, b_2\}]$, si $\{b_1, a_{l-1}\} \notin E(G)$, entonces $b(H) = 0$ puesto que $V(C_3) \subset V(H)$ siendo C_3 el ciclo impar $C_3 := (b_1, a_{l+1}, \dots, a_r, a_1, \dots, a_{j_1}, b_1)$ y $b(H \setminus \{b_2\}) = 1$ porque a_{l-1} es un vértice aislado en $H \setminus \{b_2\}$. Solo queda estudiar la situación en que $\{b_1, a_{l-1}\} \in E(G)$; en este caso G es 2-conexo, hay dos ciclos impares $C_3 = (b_1, a_{l-1}, b_2, b_1)$ y $C_4 = (b_1, a_{l+1}, \dots, a_r, a_1, \dots, a_{j_1}, b_1)$ con un vértice en común y no hay arista que los conecte, pero esto no es posible por el Lema 4.6.2.

(\Leftarrow) Si denotamos por G' el grafo obtenido añadiendo un nuevo vértice b_3 y dos aristas $\{b_1, b_3\}$ y $\{b_2, b_3\}$, entonces G' es una banda parcial impar y por la Proposición 4.6.4 es intersección completa. Además $G = G' \setminus \{b_3\}$ y del Teorema 4.3.3 se deduce que G es intersección completa. \square

Definición 4.6.15. *Un IC-vértice-banda es un grafo conexo G con $V(G) = V(C_1) \cup V(C_2) \cup \{c\}$, donde $C_1 = (a_1, \dots, a_r, a_1)$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_s, b_1)$ son ciclos primitivos impares disjuntos por vértices y*

$$E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_{i_2}\}, \dots, \{a_1, b_{i_k}\}, \{c, a_2\}, \{c, a_r\}\},$$

donde $k \geq 1$ y i_2, \dots, i_k son impares.



Lema 4.6.16. *Sea G un grafo conexo con $V(G) = V(C) \cup \{c\}$, donde C es una banda parcial impar. Entonces, G es intersección completa si y solo si $\deg_G(c) = 1$ o G es una IC-vértice-banda.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que G es intersección completa y C es una banda parcial impar con $V(C) = V(C_1) \cup V(C_2)$, donde C_1 y C_2 son dos ciclos primitivos impares disjuntos por vértices. Veamos primero que el grado de c es ≤ 2 . Para ello, probaremos antes que para todo $v \in V(C)$ de grado 2, si v no pertenece a ningún triángulo, entonces $\deg_G(c) = \deg_{G_c^v}(c)$. Supongamos que no fuese así y que $\deg_G(c) > \deg_{G_c^v}(c)$; esto significa que $N_G(v) = \{v_1, v_2\}$ y que $\{v_1, c\}, \{v_2, c\} \in E(G)$. Consideramos $H := [\{v, v_1, v_2, c\}]$, entonces $v \in V(H) \cap V(C)$, $b(H) = b(H \setminus v) = 1$, $b(C) = b(C \setminus v) = 0$. No obstante, si consideramos $H' := [V(H) \cap V(C)] = [\{v, v_1, v_2\}]$, entonces $b(H' \setminus \{v\}) = b(H') + 1$, lo que contradice el Lema 4.5.1.

Supongamos que c tiene grado ≥ 3 . Siempre que exista un vértice $v \in V(C)$ de grado 2 que no pertenece a un triángulo, consideramos G_c^v y repetimos el argumento hasta llegar a un grafo G' en que todo vértice de grado 2 pertenece a un triángulo, por lo ya demostrado anteriormente tenemos que $\deg_G(c) = \deg_{G'}(c)$. Nótese que $V(G') = V(C') \cup \{c\}$ donde C' es una banda parcial impar con ciclos primitivos C'_1 y C'_2 . Como G' tiene un número impar de vértices, entonces no puede ser 3-regular y por el Corolario 4.3.8 se sigue que debe existir un vértice $v \in V(G')$ de grado 2, que supondremos sin pérdida de generalidad que pertenece a $V(C'_1)$. Por construcción C'_1 es un triángulo, veamos que C'_2 también lo es. Supongamos que C'_2 no es un triángulo, entonces $s := |V(C'_2)| \geq 5$ y $\deg_{G'}(u) \geq 3$ para todo $u \in V(C'_2)$, lo que implica que $|E(G')| \geq 2s + 3$ y $|V(G')| = s + 4$ y por el Corolario 4.3.7 tenemos que $4s + 6 \leq 2|E(G')| \leq 3|V(G')| = 3s + 12$; entonces $s = 5$ y $|E(G')| = 13$. Esto obliga a que $\deg_{G'}(z) = 3$ para todo $z \in V(C'_2)$ y $\{c, u\} \notin E(G')$ para todo $u \in V(C'_1)$. Por simetría podemos asumir que $C'_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $C'_2 = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_1)$ y $E(G') = E(C'_1) \cup E(C'_2) \cup \{\{a_1, b_1\}\} \cup E$, donde E es uno de los siguientes:

- (a) $E = \{\{b_2, c\}, \{b_3, c\}, \{b_4, c\}, \{b_5, c\}\}$,
- (b) $E = \{\{b_2, a_1\}, \{b_3, c\}, \{b_4, c\}, \{b_5, c\}\}$,
- (c) $E = \{\{b_2, a_2\}, \{b_3, c\}, \{b_4, c\}, \{b_5, c\}\}$,
- (d) $E = \{\{b_2, c\}, \{b_3, a_1\}, \{b_4, c\}, \{b_5, c\}\}$, o
- (e) $E = \{\{b_2, c\}, \{b_3, a_2\}, \{b_4, c\}, \{b_5, c\}\}$.

Si ocurre (a) denotamos $H_i := [V(C'_1) \cup \{c, b_1, b_{i-1}, b_i\}]$ y tenemos que $b(H_i) = b(H_i \setminus \{a_2\}) = 0$ para $i = 3, 5$; sin embargo si tomamos $H := [V(H_3) \cap V(H_5)] = [V(C'_1) \cup \{c, b_1\}]$, entonces $b(H) = 1$ y $b(H \setminus \{a_2\}) = 2$, que no es posible por el Lema 4.5.1. Si ocurre (b) o (c), tomamos $\mathcal{P}_1 := (b_3, b_4, b_5)$, $\mathcal{P}_2 := (b_3, c, b_5)$, en (b) tomamos también $\mathcal{P}_3 := (b_3, b_2, a_1, b_1, b_5)$ y en (c) tomamos $\mathcal{P}_3 := (b_3, b_2, a_2, a_3, a_1, b_1, b_5)$, en ambas situaciones tenemos tres caminos pares que conectan b_3 y b_5 y $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{b_3, b_5\}$ para todo $1 \leq i < j \leq 3$, cosa que contradice el Teorema 4.5.8. En los últimos dos casos tomamos $\mathcal{P}_1 := (b_3, b_2, b_1)$, $\mathcal{P}_2 := (b_3, b_4, c, b_5, b_1)$, en (d) también tomamos $\mathcal{P}_3 := (b_3, a_1, b_1)$ y en (e) tomamos $\mathcal{P}_3 := (b_3, a_2, a_3, a_1, b_1)$, cosa que contradice de nuevo el Teorema 4.5.8.

Ahora supongamos que tanto C'_1 como C'_2 son triángulos y que $\deg_{G'}(c) \geq 3$, entonces necesariamente $\deg_{G'}(c) = 3$ y $E(C') = E(C'_1) \cup E(C'_2) \cup \{\{a_1, b_1\}\}$, ya que en caso contrario $2|E(G')| > 3|V(G')|$. Entonces podemos escribir $C'_1 = (a_1, a_2, a_3, a_1)$, $C'_2 = (b_1, b_2, b_3, b_1)$ y $N_{G'}(c)$ es uno de los siguientes:

- $N_{G'}(c) = \{b_1, b_2, b_3\}$,
- $N_{G'}(c) = \{a_1, b_1, b_2\}$,
- $N_{G'}(c) = \{a_2, b_1, b_2\}$,
- $N_{G'}(c) = \{a_1, b_2, b_3\}$, o
- $N_{G'}(c) = \{a_2, b_2, b_3\}$.

Tomamos $u := a_3$, $H_1 := C'$ y, en los primeros tres casos $H_2 := G' \setminus \{b_3\}$ y en los dos últimos $H_2 := G' \setminus \{b_1\}$. En todos ellos se tiene que $b(H_1) = b(H_1 \setminus \{u\}) = 0$, $b(H_2) = b(H_2 \setminus \{u\}) = 0$, pero $b(H) \neq b(H \setminus \{u\})$ donde $H := [V(H_1) \cap V(H_2)]$, lo que contradice el Lema 4.5.1. Entonces $\deg_G(c) \leq 2$.

Si $\deg_G(c) = 2$, como $b(G) = b(G \setminus \{c\}) = 0$, en virtud del Teorema 4.4.8 tenemos que $I_G = I_C \cdot k[\mathbf{x}] + (B_w)$, donde w es un camino cerrado par con

$$V(w) = \{c\} \cup N_G(c) \cup \{v \in V(G) \mid b(G \setminus \{v\}) < b(C \setminus \{v\})\}.$$

A partir de ahora escribimos $C_1 = (a_1, \dots, a_r, a_1)$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_s, b_1)$ con $\{a_1, b_1\} \in E(C)$. Además si $v \in V(w)$ y $v \notin N_G(c) \cup \{c\}$, entonces necesariamente $v \in \{a_1, b_1\}$ porque $b(C \setminus \{v\}) > 0$ y $b(C \setminus \{a_j\}) = b(C \setminus \{b_j\}) = 0$ para todo $j \geq 2$. Como por el Lema 4.2.1 w debe pasar por al menos cuatro vértices, podemos suponer que $a_1 \in V(w)$, $a_1 \notin N_G(c)$; entonces $b(G \setminus \{a_1\}) = 0$ y $b(C \setminus \{a_1\}) = 1$. Como $b(C \setminus \{a_1\}) = 1$ podemos asumir que $E(C) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_{j_2}\}, \dots, \{a_1, b_{j_k}\}\}$ para algún $k \geq 1$ y j_2, \dots, j_k son impares. Además, como $b(G \setminus \{a_1\}) = 0$ entonces $N_G(c) = \{a_i, b_j\}$ para algunos $1 < i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ o $N_G(c) = \{a_i, a_j\}$ con $1 < i < j \leq r$, $i \not\equiv j \pmod{2}$. Si $N_G(c) = \{a_i, a_j\}$, entonces $b_1 \notin V(w)$ porque $b(G \setminus \{b_1\}) = b(C \setminus \{b_1\})$. Además si $N_G(c) = \{a_i, b_j\}$ para algún $1 < i \leq r$, $1 \leq j \leq s$, entonces G no puede ser 2-conexo por el Lema 4.6.2, de donde obtenemos que $j = 1$ y $\{a_1, b_1\}$ es la única arista que conecta C_1 y C_2 . Teniendo todo esto en cuenta, se tiene que estamos en una de estas situaciones:

- (a) $V(w) = \{c, a_1, a_i, b_1\}$, donde $N_G(c) = \{a_i, b_1\}$ con $1 < i \leq r$ y $E(C) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}\}$, o
- (b) $V(w) = \{c, a_1, a_i, a_j\}$, donde $N_G(c) = \{a_i, a_j\}$ con $1 < i < j \leq r$, $i \not\equiv j \pmod{2}$ y $E(C) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_{j_2}\}, \dots, \{a_1, b_{j_k}\}\}$ para algún $k \geq 1$, y j_2, \dots, j_k son impares.

En ambos casos por el Lema 4.2.1, w tiene que ser un ciclo de longitud 4. En (a) tenemos que $w = (c, a_i, a_1, b_1)$, y podemos asumir que $i = 2$. Como probamos en la Proposición 4.6.4 que $I_C = (B_{w'})$ donde $w' = (a_1, \dots, a_r, a_1, b_1, \dots, b_s, b_1, a_1)$; entonces $I_G = (B_w, B_{w'})$. Sin embargo esto no es posible porque si denotamos por f_1 y f_2 las aristas $\{a_1, b_1\}$ y $\{a_1, a_2\}$, entonces $(B_w, B_{w'}) \subsetneq J := (x_1, x_2)$ y $2 = \text{ht}(I_G) < \text{ht}(J) = 2$. Finalmente si ocurre (b) tenemos que $w = (c, a_i, a_1, a_j)$, lo que implica que $i = 2$, $j = r$ y G es una IC-vértice-banda.

(\Leftarrow) Si $\deg_G(c) = 1$, G es intersección completa si y solo si lo es C y como C es una banda parcial impar, por la Proposición 4.6.4 hemos terminado.

Si G es un IC-vértice-banda con $V(G) = V(C) \cup \{c\}$, donde C está formado por dos ciclos impares disjuntos por vértices $C_1 = (a_1, \dots, a_r, a_1)$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_s, b_1)$ y $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup \{\{a_1, b_1\}, \{a_1, b_{i_2}\}, \dots, \{a_1, b_{i_k}\}, \{c, a_2\}, \{c, a_r\}\}$, $k \geq 1$ y b_{i_2}, \dots, b_{i_k} son impares, veamos que $I_G = I_C \cdot k[\mathbf{x}] + (B_w)$ donde $w = (c, a_r, a_1, a_2, c)$.

Tenemos que $\text{ht}(I_G) = k + 1$, denotamos $f_j := \{a_1, b_{i_j}\}$ para $1 \leq j \leq k$, $f_{k+j} := \{a_j, a_{j+1}\}$ para $1 \leq j < r$, $f_{k+r} := \{a_1, a_r\}$, $f_{k+r+j} := \{b_j, b_{j+1}\}$ para $1 \leq j < s$ y $f_{k+r+s} := \{b_1, b_s\}$, $f_{k+r+s+1} := \{c, a_2\}$ y $f_{k+r+s+2} := \{c, a_r\}$.

Para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$, sea w_j en ciclo primitivo par

$$w_j := (b_{i_j}, a_1, b_{i_{j+1}}, b_{i_{j+1}-1}, \dots, b_{i_j})$$

y $w_k := (b_{i_k}, a_1, C_1, a_1, b_1, b_s, \dots, b_{i_k})$.

Si denotamos $B_{w_j} = \mathbf{x}^{\alpha_j} - \mathbf{x}^{\beta_j}$ con $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{N}^{k+r+s+2}$ para todo $j \in \{1, \dots, k\}$ y denotamos por B la matriz $k \times (k+r+s+2)$ cuya fila j -ésima es $\alpha_j - \beta_j$; como probamos en la Proposición 4.6.4, la matriz B es dominante y $\Delta_k(B) = 1$.

Denotamos por B' a la matriz obtenida añadiendo a B la fila $f_{k+1} - f_{k+r} - f_{k+r+s+1} + f_{k+r+s+2} \in \mathbb{Z}^{k+r+s+2}$. Entonces $\Delta_{k+1}(B') = 1$ porque $\Delta_k(B) = 1$, si probamos que B' es dominante tendremos que $I_G = (B_{w_1}, \dots, B_{w_k}, B_w)$ y por tanto es intersección completa. Como las columnas $k+r+s+1$ y $k+r+s+2$ tienen solo una entrada no nula, si denotamos por B'' a la matriz obtenida al quitar esas dos columnas de B' , por el Lema 4.4.3 B' es dominante si y solo si B'' lo es. Supongamos que B'' tiene una submatriz cuadrada mezclada D , si la última fila de B'' está en D , entonces las columnas $k+1$ y $k+r$ de B'' tienen que estar en D también puesto que son las dos únicas entradas no nulas en la última fila de B'' . Además las columnas $k+1$ y $k+r$ de B'' solo tienen entradas no nulas en las filas k y $k+1$ y las dos entradas no nulas de la fila k -ésima son negativas. Entonces, si quitamos la última fila de D y la columna $k+1$ obtenemos una matriz cuadrada D' de B'' que es mezclada; pero D' también sería submatriz de B , lo que sería una contradicción.

□

Lema 4.6.17. *Sea G un grafo conexo con $V(G) = V(C) \cup \{c_1, c_2\}$ donde C es una banda parcial impar, $\{c_1, c_2\} \in E(G)$ y c_1, c_2 tienen grado ≥ 2 . Entonces, G es intersección completa si y solo si G es una 2-clique-suma de C y de un ciclo de longitud 4.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos que G es intersección completa, entonces $G_i := G \setminus \{c_i\}$ también lo es para $i = 1, 2$. Entonces por el Lema 4.6.16, $\deg_{G_i}(c_{3-i}) = 1$ o G_i es a IC-vértice-banda para $i = 1, 2$. Denotamos $C_1 = (a_1, \dots, a_r, a_1)$ y $C_2 = (b_1, \dots, b_s, b_1)$ de modo que $\{a_1, b_1\} \in E(G)$. Supongamos primero que tanto G_1 como G_2 son ambos IC-vértice-banda. Si $\{c_i, a_j\} \in E(G)$ para $i = 1, 2, j = 2, r$, entonces G tendría un subgrafo $\mathcal{K}_{2,3}$ con vértices $\{c_1, c_2, a_1, a_2, a_r\}$, cosa que no es posible. Si en cambio se tiene que $\{c_1, a_r\}, \{c_1, a_2\}, \{c_2, b_s\}, \{c_2, b_2\} \in E(G)$, entonces hay tres caminos simples pares conectando c_1 y a_1 , a saber $\mathcal{P}_1 := (c_1, a_2, a_1)$, $\mathcal{P}_2 := (c_1, a_r, a_1)$ y $\mathcal{P}_3 := (c_1, c_2, b_2, b_1, a_1)$ tales que $V(\mathcal{P}_i) \cap V(\mathcal{P}_j) = \{c_1, a_1\}$ para $1 \leq i < j \leq 3$ y esto no es posible por el Teorema 4.5.8. Supongamos pues que $\deg_G(c_1) = 2$ y que G_1 es una IC-vértice-banda, esto es, $N_G(c_2) = \{c_1, a_2, a_r\}$; entonces $I_G = I_{G_1} \cdot k[\mathbf{x}] + (B_w)$ donde w es un camino cerrado par con $V(w) = \{c_1\} \cup N_G(c_1) \cup \{u \in V(G) \mid b(G \setminus \{u\}) < b(G \setminus \{u, c_1\})\}$. Como $c_1, c_2 \in V(w)$, entonces necesariamente a_2 o $a_r \in V(w)$, supondremos que $a_2 \in V(w)$. Pero $b(G \setminus \{c_1, a_2\}) = 0$, por tanto $a_2 \in N_G(c_1)$ y $V(w) = \{c_1, c_2, a_2, b_1\}$ pero no existe ningún camino cerrado par con esos vértices.

En conclusión, se tiene que $\deg_G(c_1) = \deg_G(c_2) = 2$ y existen $u_1, u_2 \in V(C)$ tales que $\{c_1, u_1\}, \{c_2, u_2\} \in E(G)$. Entonces en virtud del Teorema 4.4.8, $I_G = I_{G \setminus \{c_2\}} \cdot k[\mathbf{x}] + (B_w)$ donde w es un camino cerrado par con $V(w) = \{c_2\} \cup N_G(c_2) \cup \{u \in V(G) \mid b(G \setminus \{u\}) < b(G \setminus \{u, c_2\})\}$. Entonces, $w = (u_1, c_1, c_2, u_2, v_1, \dots, v_t, u_1)$ para algún $t \geq 0$ y $b(G \setminus \{v_i\}) < b(G \setminus \{v_i, c_2\})$ para todo $1 \leq i \leq t$. Además, $b(G \setminus \{z, c_2\}) \geq 1$ si y solo si $z = u_1$ o $z = a_1$ y $\deg_C(a_i) = 2$ para todo $i \geq 2$ o $z = b_1$ y $\deg_C(b_i) = 2$ para todo $i \geq 2$. Entonces $\{c_1, c_2, u_1, u_2\} \subset V(w) \subset \{c_1, c_2, u_1, u_2, a_1, b_1\}$. Si $|V(w)| = 6$, entonces podemos asumir que $u_1 = a_2, u_2 = b_2$ y que $\{a_1, b_1\}$ es la única arista que conecta C_1 y C_2 pero esto no es posible por el Lema 4.6.2. Si $|V(w)| = 5$, entonces w no es un ciclo par y por el Lema 4.2.1, $u_1 = u_2$; sin embargo, si $u_1 \in V(C_1)$, entonces $b(G \setminus \{b_1, c_2\}) = b(G \setminus \{b_1\})$ y $b_1 \notin V(w)$, lo que es una contradicción. Entonces $|V(w)| = 4$, w es un ciclo y $\{u_1, u_2\} \in E(G)$, de donde se concluye que G es una 2-clique-suma de C y el ciclo de longitud 4 $(c_1, c_2, u_2, u_1, c_1)$.

(\Leftarrow) Es directo del Lema 4.6.10 y de la Proposición 4.6.4. □

Ahora podemos proceder a enunciar el siguiente teorema de caracterización, que nos lista todos los grafos intersección completa $G = [C; R]$ tales que R es 2-conexo y C es conexo.

Teorema 4.6.18. *Sea $G = [C; R]$ un grafo conexo. Si R es 2-conexo y C es conexo. Entonces, G es intersección completa $\iff G$ es uno de los siguientes grafos:*

- (a) un grafo anillado bipartito,
- (b) una 1-clique-suma de un grafo anillado bipartito y o bien

- (b.1) una IC-rueda-parcial-impar,
- (b.2) una 1-clique-suma de una banda parcial impar y una arista, o
- (b.3) una IC-vértice-banda,

(c) una 2-clique-suma de un grafo anillado bipartito y o bien

- (c.1) una IC-rueda-doble, o
- (c.2) una banda parcial impar.

Demostración. (\Rightarrow) Como C es conexo, del Teorema 4.6.5 se tiene que R es un grafo anillado bipartito y C es o bien el grafo vacío, un ciclo primitivo impar o una banda parcial impar. Si C es el grafo vacío, entonces $G = R$ es un grafo anillado bipartito. En caso contrario, por la Proposición 4.6.8, o bien

- (1) existe $b_1 \in V(R)$ tal que $[V(C) \cup \{b_1\}]$ es intersección completa, o
- (2) existen dos vértices adyacentes $b_1, b_2 \in V(R)$ tales que $[V(C) \cup \{b_1, b_2\}]$ es intersección completa.

Si se cumple (1), si C es ciclo impar primitivo, por el Lema 4.6.12 obtenemos (b.1), y si C es una banda parcial impar, del Lema 4.6.16 obtenemos (b.2) o (b.3). Si se satisface (2), si C es un ciclo primitivo impar, por el Lema 4.6.14 tenemos (c.1), y si C es una banda parcial impar, por el Lema 4.6.17 tenemos (c.2).

(\Leftarrow) Es consecuencia directa de los Lemas 4.6.10, 4.6.12, 4.6.14, 4.6.16 y 4.6.17. \square

Simis, Vasconcelos y Villarreal [92] e independientemente Ohsugi y Hibi en [78, Corollary 2.3] caracterizaron de forma combinatoria la normalidad de $k[G]$ de la siguiente forma:

Teorema 4.6.19. *Si G es conexo, entonces $k[G]$ es normal si y solo si por cada dos ciclos impares disjuntos por vértices hay una arista que los conecta.*

De esta descripción se deduce directamente que para todo grafo $G = [C; R]$, si $k[G]$ es normal entonces C es conexo. Además si $k[G]$ es normal, entonces no puede tener un subgrafo inducido que sea un IC-vértice-banda. En efecto, si G' es un IC-vértice-banda con $V(G') = V(C_1) \cup V(C_2) \cup \{c\}$, donde $C_1 = (a_1, \dots, a_r, a_1)$ y C_2 son ciclos impares y $N_{G'}(c) = \{a_2, a_r\}$, entonces los ciclos impares $C'_1 = (c, a_2, \dots, a_r, c)$ y C_2 son disjuntos por vértices y no hay ninguna arista en G que los conecte.

Finalmente y teniendo esto en cuenta, se obtienen los siguientes resultados, que son las versiones normales del Teorema 4.6.5 y del Teorema 4.6.18:

Corolario 4.6.20. *Sea $G = [C; R]$ un grafo conexo tal que $k[G]$ es normal. Si G es intersección completa, entonces*

- R es un grafo anillado bipartito
- C es el grafo nulo, un ciclo primitivo impar o una banda parcial impar.

Corolario 4.6.21. *Sea $G = [C; R]$ un grafo conexo tal que $k[G]$ es normal. Si R es 2-conexo, entonces G es intersección completa $\iff G$ es uno de los siguientes grafos:*

- (a) *un grafo anillado bipartito,*
- (b) *una 1-clique-suma de un grafo anillado bipartito y o bien*
 - (b.1) *una IC-rueda-parcial-impar, o*
 - (b.2) *una 1-clique-suma de una banda parcial impar y una arista,*
- (c) *una 2-clique-suma de un grafo anillado bipartito y o bien*
 - (c.1) *una IC-rueda-doble, o*
 - (c.2) *una banda parcial impar.*

Bibliografía

- [1] W. W. Adams and P. Loustau, *An Introduction to Gröbner bases, Graduate Studies in Mathematics*, Volume **3**, American Mathematical Society, 1994.
- [2] A. Alcántar and R. H. Villarreal, Critical binomials of monomial curves, *Comm. Algebra* **22** (1994), 3037–3052.
- [3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [4] M. Barile, M. Morales and A. Thoma, Set theoretic complete intersections on binomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), 1893-1903.
- [5] I. Bermejo, I. García-Marco and J. J. Salazar-González, An algorithm for checking whether the toric ideal of an affine monomial curve is a complete intersection, *J. Symbolic Computation* **42** (2007) 971–991.
- [6] I. Bermejo, I. García-Marco and J. J. Salazar-González, `cimonom.lib`. A SINGULAR 3-0-2 library for determining whether the toric ideal of an affine monomial curve is a complete intersection (2007).
- [7] I. Bermejo and I. García-Marco, `cisimplicial.lib`. A distributed SINGULAR 3-1-4 library for determining whether a simplicial toric ideal is a complete intersection (2012).
- [8] I. Bermejo and I. García-Marco, Complete intersections in certain affine and projective monomial curves, preprint (2013).
- [9] I. Bermejo and I. García-Marco, Complete intersections in simplicial toric varieties, arXiv:1302.6706.
- [10] I. Bermejo, I. García-Marco and E. Reyes, Complete intersection graphs, arXiv:1210.1950.
- [11] I. Bermejo, Ph. Gimenez, E. Reyes and R. H. Villarreal, Complete intersections in affine monomial curves, *Bol. Soc. Mat. Mexicana 3a. Serie* **11** (2) (2005) 191–204.
- [12] J. Bertin and P. Carbonne, Sur la structure des semi-groupes d’entiers et application aux branches. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **280** (1975), no. 25, 1745–1748.

- [13] A. Biggati, R. La Scala and L. Robbiano, Computing Toric Ideals, *J. Symb. Comput.* **27** (1999), 351–365.
- [14] H. Bresinsky, Binomial generating sets for monomial curves, with applications in \mathbb{A}^4 , *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* **46** (1988), 353–370.
- [15] H. Bresinsky and B. Renschuch, Basisbestimmung Veronesischer Projektionsideale mit allgemeiner Nullstelle $(t_0^m, t_0^{m-r}t_1^r, t_0^{m-s}t_1^s, t_1^m)$, *Math. Nachr.* **96** (1980), 257–269.
- [16] E. Briales, A. Campillo, C. Marijuán and P. Pisón, Minimal systems of generators for ideals of semigroups, *Journal of Pure and Applied Algebra* **124** (1998), 7–30.
- [17] A. Campillo and P. Gimenez, Syzygies of affine toric varieties, *J. of Algebra* **225** (2000), 142–161.
- [18] A. Campillo and P. Pisón, Generators of a monomial curve and graphs for the associated semigroup, *Bull. Soc. Math. Belgique, V. Serie A*, **45**(1-2) (1993), 45–58.
- [19] M. P. Cavaliere and G. Niesi, Sulle curve monomiali proiettive intersezione completa, *Bollettino U.M.I. Algebra e Geometria Serie VI, Vol III-D, N.1* (1984), 189–200.
- [20] B. V. Cherkassky, A. V. Goldberg and T. Radzik, Shortest paths algorithms: theory and experimental evaluation, *Mathematical Programming* **73** (1996) 129–174.
- [21] M. Clausen and A. Fortenbacher, Efficient solution of linear diophantine equations, *J. Symbolic Computation* **8** (1989) 201–216.
- [22] CoCoATeam, CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra, Available at <http://cocoa.dima.unige.it>
- [23] H. Cohen, *A Course in Computational Algebraic Number Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [24] E. Contejean and H. Devie, An efficient incremental algorithm for solving systems of linear equations, *Information and computation* **113** (1994), 143–172.
- [25] P. Conti and C. Traverso, Buchberger algorithm and integer programming. Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (New Orleans, LA, 1991), 130–139, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **539**, Springer, Berlin, 1991.
- [26] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Ideals, varieties and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, 2nd edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [27] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Using algebraic geometry*, 2nd edition, Graduate Texts in Mathematics **185**, Springer, New York, 2005.

- [28] D. Cox, J. Little and H. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics **124**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [29] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister and H. Schoenemann, SINGULAR 3-1-5, a Computer Algebra System for Polynomial Computations, Center for Computer Algebra, University of Kaiserslautern. Available at <http://www.singular.uni-kl.de> (2012).
- [30] C. Delorme, Sous-monoïdes d'intersection complète de \mathbb{N} , Ann. Sci. École Norm. Sup. **9** (1976) 145–154.
- [31] F. Di Biase and R. Urbanke, An algorithm to calculate the kernel of certain polynomial ring homomorphism, Experiment. Math **4** (1995), 227–234.
- [32] R. Diestel, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics **173**, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 2000.
- [33] E. W. Dijkstra, A note on two problems in connexion with graphs, Numer. Math. **1** (1959) 269–271.
- [34] L. Doering and T. Gunston, Algebras arising from planar bipartite graphs, Comm. Algebra **24** (1996), 3589–3598.
- [35] S. Eliahou, *Courbes monomiales et algèbre de Rees symbolique*, PhD thesis, Université de Genève, 1983.
- [36] S. Eliahou and R. H. Villarreal, On systems of binomials in the ideal of a toric variety, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2001) 345–351.
- [37] L. Fel, Symmetric numerical semigroups generated by Fibonacci and Lucas triples, Integers **9** (2009), A9, 107–116
- [38] K. Fischer, W. Morris and J. Shapiro, Affine semigroup rings that are complete intersections, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3137–3145.
- [39] K. Fischer, W. Morris and J. Shapiro, Mixed dominating matrices, Linear Algebra Appl. **270** (1998), 191–214.
- [40] K. Fischer and J. Shapiro, Mixed matrices and binomial ideals, Journal of Pure and Applied Algebra **113** (1996), 39–54.
- [41] M. L. Fredman and R. E. Tarjan, Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms, J. Assoc. Comput. Mach. **34** (1987) 596–615.
- [42] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Annals of Math. Studies 131, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

- [43] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales, On complete intersection affine semigroups, *Communications in Algebra* **23(14)** (1995), 5395–5412.
- [44] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales, On free affine semigroups, *Semigroup Forum* **58** (1999), no. 3, 367–385.
- [45] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales, Numerical semigroups generated by intervals, *Pacific J. Math.* **191 (1)** (1999) 75–83.
- [46] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales, *Numerical semigroups. Developments in Mathematics*, 20. Springer, New York, 2009. x+181 pp.
- [47] I. Gitler, E. Reyes and R. H. Villarreal, Ring graphs and toric ideals, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **28C** (2007), 393–400.
- [48] I. Gitler, E. Reyes and R. H. Villarreal, Ring graphs and complete intersection toric ideals, *Discrete Math.* **310** (2010), no. 3, 430–441.
- [49] I. Gitler and C. Valencia, Multiplicities of edge subrings, *Discrete Math.* **302** (2005), 107–123.
- [50] D. R. Grayson and M. E. Stillman, MACAULAY2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>.
- [51] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.
- [52] J. Heger, *Denkschriften, Kais. Akad. Wissensch. Mathem. Naturw. Klasse* **14** (1858), II.
- [53] J. Herzog, Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings, *Manuscripta Math.* **3** (1970) 175–193.
- [54] J. Herzog and T. Hibi, Castelnuovo Mumford regularity of simplicial semigroup rings with isolated singularity, *Proc. Amer. Math. Soc.* **131** (2003), no.9, 2641–2647.
- [55] J. Herzog and E. Kunz, Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension 1, *S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. Math. Natur. Kl* (1971), 27–67.
- [56] P. Hilton and J. Pedersen, Fibonacci and Lucas Numbers in Teaching and Research, *J. Math. Informatique* **3**, 36–57, 1991–1992.
- [57] S. Hosten and J. Shapiro, Primary Decomposition of Lattice Basis Ideals, *Journal of Symbolic Computation* **29** (2000), no. 4-5, 625–639.
- [58] S. Hosten and B. Sturmfels, GRIN: an implementation of Gröbner bases for integer programming. *Integer programming and combinatorial optimization* (Copenhagen, 1995), 267–276, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **920**, Springer, Berlin, 1995

- [59] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, second Ed., W.H. Freeman, New York, 1985.
- [60] D. Kalman and R. Mena, The Fibonacci Numbers–Exposed, *Mathematics Magazine* **76** (3) (2003), 167–181
- [61] R. Kannan, Lattice translates of a polytope and the Frobenius problem, *Combinatorica* **12** (1992), no. 2, 161–177.
- [62] A. Katsabekis, M. Morales and A. Thoma, Binomial generation of the radical of a toric ideal, *J. Algebra* **324** (2010), no. 6, 1334–1346.
- [63] A. Katsabekis and A. Thoma, Toric sets and orbits on toric varieties, *J. Pure Appl. Algebra* **181** (2003) 75–83.
- [64] A. Katsabekis and A. Thoma, Parametrizations of toric varieties over any field, *J. Algebra* **308** (2007), no. 2, 751–763.
- [65] M. Katzman, Bipartite graphs whose edge algebras are complete intersections, *J. Algebra* **220** (1999), 519–530.
- [66] G. Kempf, F.F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings I*, Lecture Notes in Math. **339**, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
- [67] K. Kuratowski, Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* **15** (1930) 271–283.
- [68] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra Jr. and L. Lovász, Factoring polynomials with rational coefficients, *Math. Ann.* **261** (1982), no. 4, 515–534.
- [69] H. W. Lenstra, Integer programming with a fixed number of variables, *Math. Oper. Res.* **8** (1983) 538–548.
- [70] G. S. Lueker, Two NP-complete problems in nonnegative integer programming, Technical Report TR-178 CSL, Princeton University, 1975.
- [71] A. K. Maloo and I. Sengupta, Criterion for complete intersection of certain monomial curves, in: *Advances in algebra and geometry* (Hyderabad, 2001), Hindustan Book Agency, New Delhi, 2003, pp. 179–184.
- [72] N. J. Michelacakis and A. Thoma, On the geometry of complete intersection toric varieties, *Arch. Math. (Basel)* **87** (2006), no. 2, 113–123..
- [73] E. Miller and B. Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 227 (2005), pp. xiv+417, Springer-Verlag, New York.
- [74] M. Morales, Syzygies of monomial curves and a linear diophantine problem of Frobenius, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, preprint 1987.

- [75] M. Morales, Noetherian Symbolic Blow-ups, *J. Algebra* **140** (1991), 12–25.
- [76] M. Morales, Equations des variétés monomiales en codimension deux, *J. Algebra* **175** (1995), 1082–1095.
- [77] M. Morales and A. Thoma, Complete intersection lattice ideals, *J. Algebra* **284** (2005), 755–770.
- [78] H. Ohsugi and T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, *Journal of Algebra* **207** (1998) 409–426.
- [79] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals generated by quadratic binomials, *J. Algebra* **218** (1999), 509–527.
- [80] C. H. Papadimitriou, *Computational Complexity*, Addison-Wesley, 1994.
- [81] D. P. Patil, Minimal sets of generators for the relation ideals of certain monomial curves, *Manuscripta Math.* **80**, Number 1 (1993), 239–248.
- [82] D. P. Patil and B. Singh, Generators for the derivation modules and the relation ideals of certain curves, *Manuscripta Math.* **68**, Number 1 (1990), 327–335.
- [83] P. Pisón and A. Vigneron-Tenorio, \mathbb{N} -solutions to linear systems over \mathbb{Z} , *Linear Algebra and its Applications*, **384** (2004), no. 1, 135–154
- [84] L. Pottier, Gröbner bases of toric ideals, Rapport de recherche 2224, INRIA Sophia Antipolis (1994).
- [85] J. L. Ramírez Alfonsín, Complexity of the Frobenius problem. *Combinatorica* **16** (1996), no. 1, 143–147.
- [86] J. L. Ramírez Alfonsín, *The Diophantine Frobenius Problem*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **30**, Oxford University Press (2005).
- [87] E. Reyes, C. Tatakis and A. Thoma, Minimal generators of toric ideals of graphs, *Adv. in Appl. Math.* **48** (2012), no. 1, 64–78.
- [88] E. Reyes, R. Villarreal and L. Zárate, A note on affine toric varieties, *Linear Algebra and its Applications* **318** (2000), 173–179.
- [89] J. C. Rosales, An algorithmic method to compute a minimal relation for any numerical semigroup, *Internat. J. Algebra Comput.* **6** (1996), no. 4, 441–455.
- [90] J. C. Rosales, On presentations of subsemigroups of \mathbb{N}^n , *Semigroup Forum* **55** (1997), 152–159.
- [91] G. Scheja, O. Scheja and U. Storch, On regular sequences of binomials, *Manuscripta Math.* **98** (1999), 115–132.

- [92] A. Simis, W. V. Vasconcelos and R. H. Villarreal, The integral closure of subrings associated to graphs, *Journal of Algebra* **199** (1998), 281–289.
- [93] A. Simis, On the Jacobian module associated to a graph, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), 989–997.
- [94] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series **8**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [95] J. J. Sylvester, Mathematical questions with their solutions, *Educational Times* **41** (1884), 21.
- [96] C. Tatakis and A. Thoma, On complete intersection toric ideals of graphs, arXiv:1110.1059.
- [97] R. R. Thomas, A geometric Buchberger Algorithm for Integer Programming, *Math. Oper. Res.* **20** (1995), no. 4, 864–884 (1995).
- [98] S. Vajda, *Fibonacci and Lucas numbers, and the Golden Section: Theory and Applications*, New York: Halsted Press, John Wiley & Sons, 1989.
- [99] R. H. Villarreal, Rees algebras of edge ideals, *Comm. Algebra* **23** (1995), 3513–3524.
- [100] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics **238**, Marcel Dekker, New York, 2001.
- [101] R. H. Villarreal, *Combinatorial Optimization Methods in Commutative Algebra*, in progress.
- [102] K. Watanabe, Some examples of one dimensional Gorenstein domains, *Nagoya Math. J.* **49** (1973) 101–109.