



Universidad
de La Laguna

Geometría Simpléctica y Mecánica Analítica

Symplectic Geometry and Analytical Mechanics

Inés Duranza Rodríguez

Trabajo de Fin de Grado

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

La Laguna, 17 de junio de 2015

Dr. D. **David Baldomero Iglesias Ponte**, con N.I.F. 44.705.752-P, contratado Ramón y Cajal adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

“Geometría Simpléctica y Mecánica Analítica”

ha sido realizada bajo su dirección por D^a. **Inés Duranza Rodríguez**, con N.I.F. 54.062.555-C.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 17 de junio de 2015

Agradecimientos

A mi tutor,
por la orientación y supervisión de este trabajo
con persistencia, dedicación y entusiasmo.

A mi familia,
por su confianza y ánimos.

A mis amigos y compañeros,
por la motivación y el apoyo.

Y a todos los implicados en mi formación,
por el conocimiento compartido
imprescindible para la realización de este trabajo.

*”Los encantos de esta ciencia sublime,
las matemáticas,
sólo se le revelan a aquellos
que tienen el valor de profundizar en ella.”
(Carl Friedrich Gauss)*

Resumen

La mecánica clásica trata la dinámica de partículas, cuerpos rígidos, medios continuos (fluidos, plasmas, ...) y otros campos (tales como el electromagnetismo, la gravedad, etc.). A lo largo de la historia esta teoría ha jugado un papel crucial en muchos campos de la física y la ingeniería, pero también ha sido fundamental en el desarrollo de las matemáticas, desde la creación del cálculo infinitesimal estimulada por la mecánica newtoniana hasta el desarrollo de la geometría diferencial y la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos en un intento de comprender el problema de los n -cuerpos en mecánica celeste. La geometría simpléctica nace precisamente de estos últimos estudios.

La aproximación geométrica de la mecánica es fundamental para la comprensión de fenómenos físicos y la búsqueda de soluciones. En este trabajo presentamos una interpretación geométrica de la formulación hamiltoniana de la mecánica. El formalismo hamiltoniano es, en esencia, una reformulación de las ecuaciones de movimiento de Newton que trata de simplificar la resolución de sistemas mecánicos con ligaduras en las posiciones. Esta reformulación nos obliga a introducir las estructuras simplécticas en variedades.

Abordamos el estudio de la mecánica analítica desde una introducción a la geometría simpléctica de variedades de dimensión finita. Además, describimos las ecuaciones hamiltonianas y estudiamos la evolución del sistema desde el operador corchete de Poisson, y reinterpretemos el formalismo lagrangiano desde un punto de vista simpléctico. Para concluir, como ejemplo ilustrador, estudiamos la dinámica del cuerpo rígido, donde el espacio de configuración es el grupo de rotaciones de orden 3.

Palabras clave: Geometría simpléctica, mecánica analítica, mecánica hamiltoniana, mecánica lagrangiana.

Abstract

Classical mechanics deals with particle dynamics, rigid bodies, continuous media (fluids, plasma, ...) and other fields (such as electromagnetism, gravity, etc.). Throughout history this theory has played a crucial role in many fields of physics and engineering, but it has also been fundamental in the development of mathematics, beginning with the creation of calculus stimulated by Newtonian mechanics and also the development of differential geometry and the qualitative theory of dynamical systems attempting to understand the n -body problem in celestial mechanics. Symplectic geometry arises precisely from these last studies.

The geometric approach in mechanics is fundamental to understand physical phenomena and to find solutions. In this paper we present a geometric interpretation of the Hamiltonian formulation of mechanics. The Hamiltonian formalism is essentially a reformulation of Newton's equations of motion trying to simplify the resolution of mechanical systems with constraints in the positions. This reformulation forces us to introduce symplectic structures on manifolds.

We give an approach to analytical mechanics beginning with an introduction to symplectic geometry on finite-dimensional manifolds. Also, we describe Hamiltonian equations and study the evolution of a system through the so-called Poisson bracket operator, and we will reinterpret the Lagrangian formalism from the symplectic point of view. To conclude, as an example illustrating the theory, we will study the dynamics of a rigid body, where the configuration space is the 3-dimensional group of rotations.

Keywords: *Symplectic geometry, analytical mechanics, Hamiltonian mechanics, Lagrangian mechanics*

Índice general

Introducción	1
Motivación y objetivos	1
Estructura del trabajo	2
Geometría Simpléctica y Mecánica Analítica	4
1. Álgebra lineal simpléctica	4
2. Variedades simplécticas	9
3. Simplectomorfismos	13
4. Teorema de Darboux	15
5. Sistemas hamiltonianos y mecánica	17
6. Corchetes de Poisson	22
7. Sistemas lagrangianos	25
8. El cuerpo rígido	33
Conclusiones	39
Apéndice: Campos de vectores y formas diferenciables	41
Bibliografía	48

Introducción

Motivación y objetivos

A lo largo de la historia, las matemáticas y la mecánica clásica han ido siempre de la mano. Muchos modelos matemáticos se han creado por la necesidad de interpretar los procesos mecánicos y físicos matemáticamente. De hecho, la geometría simpléctica surge, a principios del siglo XIX, de los trabajos de Lagrange sobre mecánica celeste en el desarrollo de unas ecuaciones que simplificaran las ecuaciones de los movimientos planetarios. Hamilton, posteriormente, fue quien extendió estos estudios a la dinámica de partículas determinando unas ecuaciones diferenciales de primer orden basadas en estructuras simplécticas.

A grosso modo, los sistemas hamiltonianos aparecen como una reescritura de las ecuaciones del movimiento de Newton. Si consideramos una partícula de masa $m > 0$ moviéndose en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 bajo el influjo de un potencial $V(q)$, con $q = (q^1, q^2, q^3) \in \mathbb{R}^3$, la segunda ley de Newton establece entonces que $m\ddot{q} = -\nabla V(q)$, donde ∇V es el gradiente de V . Si $p_i = m\dot{q}^i$ es el momento de la partícula y $H(q, p) = \frac{m}{2}\|p\|^2 + V(q)$ es la energía total del sistema, entonces las ecuaciones de Newton se transforman en

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases}$$

que son las ecuaciones de Hamilton. Desarrollemos este sistema desde el enfoque algebraico. Para una función de energía $H(q, p)$ cualquiera, el sistema anterior se expresa matricialmente por $\dot{\xi} = \mathbb{J} \cdot \nabla H(\xi)$, donde $\xi = (q, p)$ y \mathbb{J} es una matriz antisimétrica de la forma $\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ (I es la matriz identidad de dimensión 3). Si definimos el campo de vectores $X_H: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ por $X_H = \mathbb{J} \cdot \nabla H$, las soluciones $\xi(t)$ de las ecuaciones de Hamilton serán las curvas integrales del campo X_H , esto es, $\dot{\xi}(t) = X_H(\xi(t))$. La relación entre X_H y H puede ser reescrita de la siguiente manera: introducimos una aplicación bilineal antisimétrica ω en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ definida por

$$\omega(v_1, v_2) = v_1 \mathbb{J} v_2 \quad (v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3).$$

Con esta ω , llamada la forma simpléctica de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, dado $\xi \in \mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, se satisface la siguiente relación:

$$\omega(X_H(\xi), v) = dH(\xi)v,$$

donde $dH = \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}, \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^T \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$.

Hasta ahora hemos considerado que la partícula se mueve en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Sin embargo, a menudo suelen haber limitaciones al movimiento, denominadas ligaduras, de tal forma que el sistema mecánico se desarrolla en un subconjunto Q del espacio euclídeo \mathbb{R}^n , llamado espacio de configuración. De hecho, para muchos sistemas físicos importantes, Q es una variedad diferenciable que localmente se comporta como un espacio euclídeo, pero topológicamente (globalmente) no lo es. Por ejemplo, el espacio de configuración de un péndulo es la circunferencia S^1 . Además, la aproximación geométrica, utilizando las formas simplécticas, nos permite una mejor comprensión de la estructura básica de los sistemas mecánicos.

El objetivo de este trabajo es ofrecer una introducción a la geometría simpléctica y su relación con la formulación hamiltoniana de la mecánica. Para ello, desarrollaremos las propiedades elementales de las variedades simplécticas e ilustraremos los resultados obtenidos con ejemplos interesantes. Desde el punto de vista de la mecánica, veremos cómo las estructuras simplécticas nos permiten obtener las ecuaciones de movimiento del sistema. Además, veremos que usando el conocido como corchete de Poisson podemos hallar propiedades de la dinámica a partir de la energía del sistema. Estudiaremos también algunos aspectos del formalismo lagrangiano y cómo se relaciona con la mecánica hamiltoniana y la geometría simpléctica. Para concluir, estudiaremos la dinámica del cuerpo rígido en el espacio determinado por la variedad $SO(3)$.

Estructura del trabajo

El presente Trabajo de Fin de Grado consta de cuatro partes: este primer texto introductorio, el desarrollo teórico que da título a este trabajo, un apéndice y las conclusiones.

La segunda parte está dividida en ocho secciones. En la primera sección, definimos el concepto de forma simpléctica en un espacio vectorial, extendiendo la noción de área orientada en \mathbb{R}^2 , y obteniendo un modelo que nos permite describir los espacios vectoriales simplécticos. Generalizando a variedades diferenciables, en la sección 2 y 3 introducimos las formas simplécticas, definimos la forma simpléctica canónica en el fibrado cotangente de cualquier variedad que será esencial en la formulación de la mecánica e introducimos el concepto de morfismo entre variedades simplécticas, los llamados simplectomorfismos. La cuarta sección la dedicamos al teorema de Darboux cuyo resultado nos permitirá identificar localmente las variedades simplécticas con \mathbb{R}^{2n} con la forma canónica. Al término de estas secciones, damos algunos ejemplos con aplicaciones a la mecánica.

De la sección 5 en adelante, tratamos de argumentar la aplicación de la geometría simpléctica a la mecánica clásica. Concretamente, en la quinta sección estudiamos los sistemas hamiltonianos y la relación de la geometría simpléctica con la dinámica de un sistema mecánico. Al final de la sección, exponemos dos ejemplos que justifican los resultados: el movimiento de una partícula en presencia de un potencial y la dinámica de una partícula cargada en un campo magnético. En la sección 6, definimos el corchete de

Poisson. Además, estudiaremos la conservación de la energía del sistema y veremos cómo el corchete permite describir y encontrar cantidades conservadas del sistema. En la sección 7, hacemos una breve descripción del principio de acción crítica para la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange, vemos la relación de la mecánica lagrangiana con la geometría simplética y relacionamos el formalismo hamiltoniano y lagrangiano. Para finalizar esta parte, en la sección 8 estudiamos el movimiento rotacional del cuerpo rígido recuperando las ecuaciones de Euler.

Para facilitar la lectura de este trabajo, hemos creído conveniente incluir un apéndice que recoge algunos conceptos básicos de geometría diferencial que el lector debe conocer. No obstante, sí hemos supuesto que el lector posee conocimientos matemáticos y físicos básicos. Por último, dedicamos un apartado para el desarrollo de las conclusiones de esta memoria.

Geometría Simpléctica y Mecánica Analítica

1. Álgebra lineal simpléctica

Esta primera sección la dedicaremos a presentar la definición de forma simpléctica en un espacio vectorial. Así mismo, estudiaremos algunas de sus caracterizaciones y varios ejemplos que nos ayudarán a ilustrar el concepto. Algunas construcciones relacionadas se pueden encontrar en [3].

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n . Una **forma simpléctica** en V es una aplicación $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

i) ω es \mathbb{R} -bilineal:

$$\begin{aligned}\omega(\lambda u_1 + \mu u_2, v) &= \lambda \Omega(u_1, v) + \mu \Omega(u_2, v), \\ \omega(v, \lambda u_1 + \mu u_2) &= \lambda \Omega(v, u_1) + \mu \Omega(v, u_2),\end{aligned}$$

para todo $u_1, u_2, v \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

ii) ω es antisimétrica:

$$\omega(u, v) = -\omega(v, u), \quad \text{para todo } u, v \in V.$$

iii) ω es no degenerada:

$$\omega(u, v) = 0, \quad \text{para todo } v \in V \implies u = 0.$$

Al par (V, ω) lo denominamos **espacio vectorial simpléctico**.

Nota 1.2. De la antisimetría de ω se deduce que

$$\omega(u, u) = 0. \tag{1.1}$$

Si ω es una forma simpléctica en V y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V , para todo $u, v \in V$

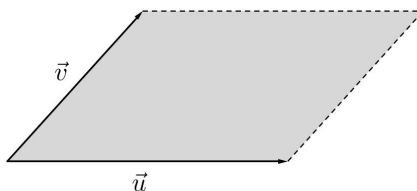
$$\begin{aligned}\omega(u, v) &= \omega\left(\sum_{i=1}^n u^i e_i, \sum_{j=1}^n v^j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n u^i v^j \omega(e_i, e_j) \\ &= (u^1, \dots, u^n) (\omega(e_i, e_j)) \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, dada una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V , la matriz asociada a ω es $(\omega_{ij}) = (\omega(e_i, e_j))$. La antisimetría de ω implica que (ω_{ij}) es antisimétrica y ω es no degenerada si y sólo si (ω_{ij}) es invertible.

Veamos un ejemplo de forma simpléctica que ilustra geoméricamente el concepto.

Ejemplo 1.3. La forma simpléctica sobre el plano \mathbb{R}^2 es el ejemplo más representativo. Sea $\omega : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación en el plano \mathbb{R}^2 que asocia a un par de vectores $\vec{u} = (u^1, u^2)$ y $\vec{v} = (v^1, v^2)$ en \mathbb{R}^2 el área orientada $\omega(\vec{u}, \vec{v})$ del paralelogramo en \mathbb{R}^2 , es decir,

$$\omega(\vec{u}, \vec{v}) = u^1 v^2 - u^2 v^1. \quad (1.2)$$



La bilinealidad y la antisimetría de ω es fácil de probar aplicando la definición de ω . Veamos que ω es no degenerada. Dado $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ con $\omega(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, para todo $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Usando (1.2), para $\vec{v} = (0, 1)$ nos queda $u^1 = 0$ y para $\vec{v} = (1, 0)$, $-u^2 = 0$. Por tanto, $\vec{u} = \vec{0}$. En consecuencia, ω es no degenerada. Notar que, geoméricamente, las únicas áreas nulas resultan cuando \vec{u} y \vec{v} son proporcionales.

Análogamente, uno puede construir una forma simpléctica ω en \mathbb{R}^{2n} . Basta con definir ω como la 2-forma sobre \mathbb{R}^{2n} tal que si $(u^1, \dots, u^{2n}), (v^1, \dots, v^{2n})$ son dos vectores de \mathbb{R}^{2n} ,

$$\omega((u^1, \dots, u^{2n}), (v^1, \dots, v^{2n})) = \sum_{i=1}^n (u^i v^{n+i} - u^{n+i} v^i). \quad (1.3)$$

Interpretando \mathbb{R}^{2n} como el producto de los planos $\mathbb{R}^2 \times \dots \times \mathbb{R}^2$, entonces el área orientada de un paralelogramo sobre \mathbb{R}^{2n} es la suma de las áreas orientadas de sus proyecciones sobre cada uno de estos planos. En este caso, la matriz regular y antisimétrica respecto de la base canónica es

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n .

Ejemplo 1.4. Si V es un espacio vectorial, $(V \times V^*, \omega)$ es simpléctico con

$$\omega((u, \alpha), (v, \beta)) = \alpha(v) - \beta(u).$$

Claramente ω es antisimétrica y bilineal. Veamos que es no degenerada. Sea $(u, \alpha) \in V \times V^*$ tal que $\omega((u, \alpha), (v, \beta)) = 0$, para todo $(v, \beta) \in V \times V^*$. Luego, para $(v, 0)$ tenemos

$$\omega((u, \alpha), (v, 0)) = \alpha(v) = 0,$$

para todo $v \in V$, y para $(0, \beta)$

$$\omega((u, \alpha), (0, \beta)) = -\beta(u) = 0,$$

para todo $\beta \in V^*$. Por tanto, $(u, \alpha) = (0, 0)$.

Dada la base de $V \times V^*$ $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e^1), \dots, (0, e^n)\}$, la matriz asociada a la forma simpléctica ω es

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Definición 1.5. Dada una forma simpléctica ω en V , se define la aplicación lineal $\tilde{\omega}: V \rightarrow V^*$ por

$$\tilde{\omega}(v_1)(v_2) = \omega(v_1, v_2),$$

para todo $v_1, v_2 \in V$.

Proposición 1.6. Sea ω una aplicación bilineal antisimétrica en V . Entonces, ω es no degenerada si y sólo si $\tilde{\omega}$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar la implicación a la derecha. Como $\dim V = \dim V^*$, sólo es necesario probar la inyectividad de $\tilde{\omega}$.

Sea $u \in V$ tal que $\tilde{\omega}(u) = 0$, es decir, $\tilde{\omega}(u)(v) = 0$ para todo $v \in V$. Como $0 = \tilde{\omega}(u)(v) = \omega(u, v)$ para todo $v \in V$, entonces por la no degeneración de ω llegamos a que efectivamente $u = 0$.

Nótese que la implicación a la izquierda se demuestra de forma análoga partiendo de la hipótesis de que el núcleo de $\tilde{\omega}$ es trivial. □

A continuación mostraremos que todo espacio vectorial simpléctico es isomorfo a \mathbb{R}^{2n} con la forma simpléctica de Ejemplo 1.3. De hecho, estudiaremos el proceso de construcción de una base en un espacio vectorial simpléctico de tal manera que su matriz asociada es la matriz canónica (1.4). Más generalmente, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.7. Sea $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación bilineal y antisimétrica. Entonces, existe una base de V $\{g_1, \dots, g_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ con base dual $\{g^1, \dots, g^k, e^1, \dots, e^n, f^1, \dots, f^n\}$ tal que

$$\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge f^i,$$

es decir, la matriz asociada a ω con respecto de esa base es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el enunciado aplicando una versión antisimétrica del método de Gram-Schmidt. Sea $U = \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0, \forall v \in V\} = \ker \tilde{\omega}$.

Si $U = V$, tendríamos que $\omega = 0$ y eligiendo cualquier base ya estaría. En otro caso, tomamos $V = U \oplus W$, donde W es un subespacio de V complementario a U .

En primer lugar, cogemos $e_1 \in W$ ($e_1 \neq 0$). Entonces, existe al menos un elemento $f_1 \in W$ tal que $\omega(e_1, f_1) \neq 0$ (se puede suponer que $\omega(e_1, f_1) = 1$). Llamamos W_1 al espacio generado por $\{e_1, f_1\}$ y tomamos W_1^\perp el espacio ortogonal a W_1 en W , es decir,

$$W_1^\perp = \{w \in W \mid \omega(w, v) = 0, \text{ para todo } v \in W_1\}.$$

Veamos que $W_1 \cap W_1^\perp = \{0\}$. Supongamos que existe $v = ae_1 + bf_1 \in W_1 \cap W_1^\perp$. De la bilinealidad de ω se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(v, e_1) = \omega(ae_1, e_1) + \omega(bf_1, e_1) = -b, \\ 0 &= \omega(v, f_1) = \omega(ae_1, f_1) + \omega(bf_1, f_1) = a. \end{aligned}$$

Por tanto, $v = 0$.

Queda probar que $W = W_1 \oplus W_1^\perp$. Si $v \in W$ satisface que $\omega(v, e_1) = c$ y $\omega(v, f_1) = d$, entonces podemos escribir v como suma de un elemento de W_1 y otro de W_1^\perp ,

$$v = (-cf_1 + de_1) + (v + cf_1 - de_1).$$

Ahora cogemos $e_2 \in W_1^\perp$ ($e_2 \neq 0$). De nuevo podemos asegurar que existe al menos un elemento $f_2 \in W_1^\perp$ tal que $\omega(e_2, f_2) \neq 0$. Supongamos $\omega(e_2, f_2) = 1$ y llamemos W_2 al espacio generado por e_2 y f_2 . Procediendo de igual manera llegamos a que $W = W_1 \oplus W_2 \oplus W_2^\perp$.

Repitiendo este proceso llegamos finalmente ($\dim V < \infty$) a que

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n \tag{1.5}$$

con todos los sumandos W_i generados por e_i, f_i con $\omega(e_i, f_i) = 1$ y, por construcción,

$$\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = \omega(e_i, f_j) = 0 \quad (i \neq j).$$

Si $\dim U = k$ (nótese que $\dim U = \ker \tilde{\omega}$ es independiente de los vectores elegidos), entonces de (1.5) $\dim V = k + 2n$. Por tanto, dada la base $\{g_1, \dots, g_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$, con $\{g_1, \dots, g_k\}$ base de U , se llega a la matriz asociada a ω

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Del teorema anterior deducimos que el rango de la matriz asociada va a ser siempre par y, en consecuencia, para espacios vectoriales simplécticos (V, ω) , donde $\ker \tilde{\omega} = \{0\}$, se tiene que $\dim V = 2n$. Desde un punto de vista geométrico, esto significa que no se puede definir un concepto de área orientada sobre un espacio de dimensión impar sin introducir degeneraciones. El siguiente corolario recoge esta caracterización.

Corolario 1.8. *Si ω es una forma simpléctica en V , entonces existe $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ base de V tal que su matriz asociada es*

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

y $\dim V = 2n$. La base $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ se dice que es **simpléctica** o **canónica**.

Si estamos en \mathbb{R}^2 con la forma de área es interesante estudiar las aplicaciones que conservan el área. Más generalmente, consideramos los simplectomorfismos, también llamados transformaciones simplécticas, que son las aplicaciones entre espacios simplécticos que preservan la forma simpléctica.

Definición 1.9. *Un **simplectomorfismo** f entre espacios vectoriales simplécticos (U, ω_U) y (V, ω_V) es una aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ tal que*

$$f^* \omega_V = \omega_U.$$

En tal caso, se dice que (U, ω_U) y (V, ω_V) son simplectomorfos.

Nota 1.10. Recordamos que, para todo $u_1, u_2 \in U$, $(f^* \omega_V)(u_1, u_2) = \omega_V(f(u_1), f(u_2))$. Por tanto, f es un simplectomorfismo si

$$\omega_V(f(u_1), f(u_2)) = \omega_U(u_1, u_2).$$

Proposición 1.11. *Sean (U, ω_U) y (V, ω_V) espacios vectoriales simplécticos y $f : U \rightarrow V$ una aplicación lineal. Entonces, f es un simplectomorfismo si y sólo si*

$$f^* \circ \tilde{\omega}_V \circ f = \tilde{\omega}_U. \tag{1.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean u_1, u_2 dos vectores en U . Entonces,

$$\begin{aligned} f^*\omega_V = \omega_U &\iff \omega_V(f(u_1), f(u_2)) = \omega_U(u_1, u_2), \\ &\iff [f^*(\tilde{\omega}_V(f(u_1)))](u_2) = (\tilde{\omega}_U(u_1))(u_2), \\ &\iff f^*(\tilde{\omega}_V(f(u_1))) = \tilde{\omega}_U(u_1), \\ &\iff f^* \circ \tilde{\omega}_V \circ f = \tilde{\omega}_U. \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de esta proposición obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.12. *Si f verifica $f^*\omega_V = \omega_U$, entonces f es una aplicación inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in \ker f$. Veamos que $u = 0$. Efectivamente, por (1.6)

$$\tilde{\omega}_U(u) = (f^* \circ \tilde{\omega}_V \circ f)(u) = f^*(\tilde{\omega}_V(f(u))) = 0.$$

De la inyectividad de $\tilde{\omega}_U$ llegamos a que $u = 0$.

□

Nota 1.13. De Proposición 1.6 se deduce que todos los espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión son simplectomorfos,

$$(U, \omega_U) \cong (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0) \cong (V, \omega_V).$$

Es decir, hay sólo un modelo para espacios vectoriales simplécticos de dimensión $2n$.

2. Variedades simplécticas

Ahora introduciremos el concepto de variedad simpléctica y atenderemos algunos ejemplos de importancia que nos servirán en secciones posteriores, en particular, por su relación con la mecánica. Desde el punto de vista mecánico, el fibrado tangente de las variedades simplécticas describirá el espacio de fases de los sistemas. Se pueden encontrar más ejemplos y otras propiedades en [3, 6].

Definición 2.1. *Se denomina **variedad simpléctica** al par (M, ω) , donde M es una variedad y $\omega \in \Omega^2(M)$ es una 2-forma en M , satisfaciendo*

- i) $\omega(x)$ es no degenerada, para todo $x \in M$;
- ii) ω es cerrada, es decir, $d\omega = 0$.

Diremos que ω es una **forma simpléctica** en M .

Nota 2.2. De la definición de forma simpléctica deducimos que toda variedad simpléctica M tiene necesariamente dimensión par, es decir, $\dim M = 2n$.

Presentamos a continuación algunos ejemplos interesantes de variedades simplécticas.

Ejemplo 2.3. En \mathbb{R}^{2n} con coordenadas globales $(x^1, \dots, x^n, y_1, \dots, y_n)$, consideramos la 2-forma

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy_i.$$

Notar que, identificando $T_p\mathbb{R}^{2n}$ con \mathbb{R}^{2n} , $\omega_0(p)$ es la forma bilineal y antisimétrica del Ejemplo 1.3, que es no degenerada. Además, usando que $d^2 = 0$, es trivial ver que ω_0 es cerrada. La base

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p, \frac{\partial}{\partial y_1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}|_p \right\}$$

es una base simpléctica para ω_0 .

Ejemplo 2.4. Sea $\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ con coordenadas (z^1, \dots, z^n) . Se define en \mathbb{C}^n la 2-forma simpléctica ω dada por

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{k=1}^n dz^k \wedge d\bar{z}^k.$$

Para ver que es simpléctica, notar que podemos identificar \mathbb{C}^n con \mathbb{R}^{2n} mediante la aplicación $z^k = x^k + iy^k$ y, usando que $\bar{z}^k = x^k - iy^k$, esto se reduce al ejemplo anterior.

Ejemplo 2.5. Sea $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la esfera $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Dado $p = (x, y, z) \in S^2$, $T_p S^2 = \{v = (v^1, v^2, v^3) \in \mathbb{R}^3 \mid v \cdot p = xv^1 + yv^2 + zv^3 = 0\}$. Definimos la forma en S^2 por

$$\omega(p)(u, v) = p \cdot (u \times v)$$

para todo $u, v \in T_p S^2$, donde \times denota el producto vectorial. Probemos que ω es una forma simpléctica. Primero de todo, de las propiedades del producto vectorial, ω es bilineal y antisimétrica. Por otra parte, para todo $u \neq 0$, existe v con $p \cdot (u \times v) \neq 0$. De hecho, si cogemos $v = u \times p$, como u y p no son paralelos (recordar que $T_p S^2$ son los vectores ortogonales a p), entonces $v \neq 0$ y $p \cdot (u \times v) \neq 0$. Por consiguiente, ω es no degenerada. Además, ω es cerrada por ser de grado máximo.

En general, dada una superficie $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$, una forma simpléctica en Σ es equivalente a una forma de área en Σ .

Ejemplo 2.6. Otro ejemplo de especial interés desde el punto de vista de la mecánica es el del fibrado cotangente de cualquier variedad Q : el fibrado cotangente T^*Q del espacio de configuración Q de un sistema mecánico determina el espacio de fases de momentos.

Se define la **1-forma de Liouville** λ_Q como la 1-forma en T^*Q

$$\lambda_Q: T^*Q \longrightarrow T^*(T^*Q),$$

tal que para todo $\alpha_q \in T_q^*Q$ se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_Q(\alpha_q): T_{\alpha_q}(T^*Q) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \alpha_q((T_{\alpha_q}\tau_Q)(v)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $\tau_Q: T^*Q \rightarrow Q$ es la proyección en T^*Q y $T_{\alpha_q}\tau_Q: T_{\alpha_q}(T^*Q) \rightarrow T_qQ$ es la aplicación inducida.

Sean (q^1, \dots, q^n) coordenadas locales de Q . Entonces, $\{dq^1|_q, \dots, dq^n|_q\}$ es base de T_q^*Q y podemos escribir cualquier vector como $\alpha = \sum_{i=1}^n p_i dq^i|_q$. De este modo se inducen coordenadas locales $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ en T^*Q . Con estas coordenadas

$$\left\{ dq^1|_{\alpha_q}, \dots, dq^n|_{\alpha_q}, dp_1|_{\alpha_q}, \dots, dp_n|_{\alpha_q} \right\}$$

es una base de $T_{\alpha_q}^*(T^*Q)$. Así, λ_Q se puede escribir localmente como

$$\lambda_Q = \sum_{i=1}^n p_i dq^i. \quad (2.2)$$

Por tanto, λ_Q es diferenciable, pues las coordenadas p_i son funciones diferenciables (Nota A.8 del Apéndice).

La **2-forma canónica** en T^*Q se define como

$$\omega_Q = -d\lambda_Q. \quad (2.3)$$

Tomando coordenadas,

$$\omega_Q = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i. \quad (2.4)$$

Es fácil ver que ω_Q es simpléctica, ya que (2.4) es no degenerada (ver Ejemplo 2.3) y cerrada, $d\omega_Q = -d^2\lambda_Q = 0$.

Nótese que, si Q es un espacio vectorial V , entonces $T^*Q \cong V \times V^*$ y $\omega_Q \in \Omega^2(V \times V^*)$ se puede identificar con la 2-forma del Ejemplo 1.4.

Ejemplo 2.7. Sea Q una variedad y B una 2-forma cerrada en Q ($dB = 0$). Definimos en la variedad T^*Q la 2-forma

$$\omega = \omega_Q + \tau_Q^*B,$$

donde ω_Q es la forma simpléctica canónica (2.3) y $\tau_Q^*: \Omega^2(Q) \rightarrow \Omega^2(T^*Q)$ el pull-back de la proyección $\tau_Q: T^*Q \rightarrow Q$. Probemos que ω es una forma simpléctica. ω es cerrada, pues $d(\omega_Q + \tau_Q^*B) = \tau_Q^*(dB) = 0$. Veamos que ω es no degenerada.

Sean (q^1, \dots, q^n) coordenadas locales en Q . Si

$$B = \sum_{i < j} B_{ij} dq^i \wedge dq^j,$$

entonces para las coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$

$$\tau_Q^*B = \sum_{i < j} (\tau_Q^*B_{ij}) dq^i \wedge dq^j,$$

con $\tau_Q^* B_{ij}(q^i, p_j) = B_{ij}(q^i)$. Así, la matriz asociada a ω es

$$\begin{pmatrix} B_{ij} & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que ω es no degenerada.

En ciertos sistemas mecánicos el espacio de configuración viene dado por un grupo de Lie G (ver Apéndice). Para grupos de Lie existe el difeomorfismo

$$\begin{aligned} F: G \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow T^*G \\ (g, \mu) &\longmapsto (T_g^* l_{g^{-1}})(\mu) \end{aligned}$$

donde $\mathfrak{g}^* = T_e^* G$ y l_g es la traslación a izquierda. Notar que $(\tau_G \circ F^{-1})(g, \mu) = g$. Sean $\theta_B \in \Omega^1(G \times \mathfrak{g}^*)$ y $\omega_B \in \Omega^2(G \times \mathfrak{g}^*)$ las formas tales que

$$\theta_B = F^* \lambda_G, \quad \omega_B = F^* \omega_B.$$

En la siguiente proposición describiremos θ_B y ω_B .

Proposición 2.8. *Sea $(g, \mu) \in G \times \mathfrak{g}^*$ y $(v, \rho), (w, \sigma) \in T_{(g, \mu)}(G \times \mathfrak{g}^*) = T_g G \times \mathfrak{g}^*$. Entonces, la 1-forma θ_B en $G \times \mathfrak{g}^*$ viene dada por*

$$\theta_{B(g, \mu)}(v, \rho) = \mu((T_g l_{g^{-1}})(v)), \quad (2.5)$$

y la 2-forma ω_B por

$$\begin{aligned} \omega_{B(g, \mu)}((v, \rho), (w, \sigma)) &= -\rho((T_g l_{g^{-1}})(w)) + \sigma((T_g l_{g^{-1}})(v)) \\ &\quad + \mu([(T_g l_{g^{-1}})(v)], [(T_g l_{g^{-1}})(w)]). \end{aligned} \quad (2.6)$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \theta_{B(g, \mu)}(v, \rho) &= (F^* \lambda_G)_{(g, \mu)}(v, \rho) \\ &= \lambda_G((T_g^* l_{g^{-1}})(\mu))((T_{(g, \mu)} F)(v, \rho)) \\ &= (T_g^* l_{g^{-1}})(\mu)((T \tau_G \circ T_{(g, \mu)} F)(v, \rho)) \\ &= (T_g^* l_{g^{-1}})(\mu)(v) \\ &= \mu((T_g l_{g^{-1}})(v)). \end{aligned}$$

Para calcular ω_B usaremos la fórmula

$$\omega_B(X, Y) = -d\theta_B(X, Y) = -\mathcal{L}_X(\theta_B(Y)) + \mathcal{L}_Y(\theta_B(X)) + \theta_B([X, Y]), \quad (2.7)$$

con $X, Y \in \mathfrak{X}(G \times \mathfrak{g}^*)$. Si $X = (X^1, X^2)$, $Y = (Y^1, Y^2)$ con

$$X^2 = \rho, \quad Y^2 = \sigma,$$

y X^1 e Y^1 son campos invariantes a izquierda en G con

$$X^1(e) = (T_g l_{g^{-1}})(v), \quad Y^1(e) = (T_g l_{g^{-1}})(w). \quad (2.8)$$

Usando que el flujo $\{\phi_t\}$ de X es igual a $\phi_t(h, v) = (\phi_t^1(h), \phi_t^2(v))$ con $\{\phi_t^1\}$ flujo de X^1 y $\phi_t^2(v) = v + t\rho$ flujo de X^2 se tiene, por (2.5), (2.8) y la invarianza a izquierda de Y^1 (A.42),

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X(\theta_B(Y)))(g, \mu) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \theta_B(\phi_t^1(g), \phi_t^2(\mu))(Y^1(\phi_t^1(g)), Y^2(\phi_t^2(\mu))) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi_t^2(\mu)((T_{\phi_t^1(g)} l_{(\phi_t^1(g))^{-1}})(Y^1(\phi_t^1(g)))) \\ &= \rho(Y^1(e)) = \rho((T_g l_{g^{-1}})(w)). \end{aligned}$$

Análogamente, $\mathcal{L}_Y \theta_B(X) = \sigma((T_g l_{g^{-1}})(v))$.

Finalmente, como $[X, Y](g, \mu) = ([X^1, Y^1](g), [X^2, Y^2](\mu))$, de (2.5), (2.8) y (A.43),

$$\begin{aligned} (\theta_B([X, Y]))(g, \mu) &= \theta_B(g, \mu) ([X^1, Y^1](g), [X^2, Y^2](\mu)) \\ &= \mu((T_g l_{g^{-1}})([X^1, Y^1](g))) \\ &= \mu([X^1(e), Y^1(e)]) \\ &= \mu([(T_g l_{g^{-1}})(v), (T_g l_{g^{-1}})(w)]). \end{aligned}$$

□

El resultado de la proposición anterior nos será útil para encontrar las ecuaciones hamiltonianas del cuerpo rígido en la sección 8. En este caso, el espacio de configuración del sistema será el grupo de Lie $SO(3)$ de matrices ortogonales de orden 3.

3. Simplectomorfismos

En la primera sección hemos visto la definición de simplectomorfismos entre espacios vectoriales simplécticos. A nivel de variedades, también tenemos aplicaciones que preservan la forma simpléctica. En esta sección estudiaremos los simplectomorfismos entre variedades simplécticas y trabajaremos algunos ejemplos que nos serán útiles más adelante.

Definición 3.1. Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) dos variedades simplécticas y $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ una aplicación diferenciable. Diremos que φ es un **simplectomorfismo** si verifica

$$\varphi^* \omega_2 = \omega_1.$$

Ejemplo 3.2. Sean M_1 y M_2 dos variedades arbitrarias. Sabemos que (T^*M_i, ω_{M_i}) es una variedad simpléctica (ver Ejemplo 2.6) donde $\omega_{M_i} = -d\lambda_{M_i}$ y λ_{M_i} es la 1-forma de Liouville. Sea ahora $f: M_1 \rightarrow M_2$ un difeomorfismo. Definimos

$$\begin{aligned} F = T^*f: \quad T^*M_2 &\longrightarrow T^*M_1 \\ \alpha_y \in T_y^*M_2 &\longmapsto F(\alpha_y): \quad T_{f^{-1}(y)}M_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ &v \longmapsto \alpha_y(T_{f^{-1}(y)}f(v)). \end{aligned}$$

Notar que $\tau_{M_1} \circ T^*f = f^{-1} \circ \tau_{M_2}$. Veamos que F es un simplectomorfismo. Primero probaremos que $F^*\lambda_{M_1} = \lambda_{M_2}$.

Tomamos $\alpha_y \in T^*M_2$ y $X \in T_{\alpha_y}(T^*M_2)$. Entonces, usando (2.1) y la definición de T^*f se tiene

$$\begin{aligned} (F^*\lambda_{M_1})(\alpha_y)(X) &= \lambda_{M_1}(F(\alpha_y))(TF(X)) \\ &= F(\alpha_y)(T(\tau_{M_1} \circ F)(X)) \\ &= T^*f(\alpha_y)(T(\tau_{M_1} \circ T^*f)(X)) \\ &= \alpha_y(Tf(Tf^{-1}(T\tau_{M_2}(X)))) \\ &= \lambda_{M_2}(\alpha_y)(X). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $F^*\lambda_{M_1} = \lambda_{M_2}$. Como $d \circ F^* = F^* \circ d$ (ver (A.12)) y $\omega_{M_i} = -d\lambda_{M_i}$,

$$\omega_{M_2} = F^*\omega_{M_1}.$$

Ejemplo 3.3. Sea Q una variedad diferenciable y (T^*Q, ω_Q) una variedad simpléctica. Para $\alpha \in \Omega^1(Q)$ cerrada se define la aplicación

$$\begin{aligned} l_\alpha: T^*Q &\longrightarrow T^*Q \\ \gamma_q &\longmapsto \gamma_q + \alpha(q) \end{aligned}$$

que denominamos **traslación de fibras** del espacio cotangente. Notar que $\tau_Q \circ l_\alpha = \tau_Q$. En coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ de T^*Q , la traslación de fibras se expresa por

$$l_\alpha(q^i, p_i) = (q^i, p_i + \alpha_i(q)),$$

donde $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dq^i$. Luego, l_α es diferenciable. Veamos que l_α es un simplectomorfismo.

$$\begin{aligned} (l_\alpha^*\lambda_Q)(\gamma_q)(X) &= \lambda_Q(l_\alpha(\gamma_q))(Tl_\alpha(X)) \\ &= \lambda_Q(\gamma_q + \alpha(q))(Tl_\alpha(X)) \\ &= (\gamma_q + \alpha(q))(T(\tau_Q \circ l_\alpha)(X)) \\ &= (\gamma_q + \alpha(q))(T\tau_Q(X)) \\ &= (\lambda_Q + \tau_Q^*\alpha)(\gamma_q)(X). \end{aligned}$$

Y procediendo de igual modo que en el ejemplo anterior,

$$\begin{aligned} l_\alpha^*\omega_Q &= -l_\alpha^*d\lambda_Q = -d(\lambda_Q + \tau_Q^*\alpha) \\ &= \omega_Q. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.4. En Ejemplo 1.3 vimos que una forma simpléctica en una superficie Σ (variedad de dimensión 2) es una forma de área. Por tanto, un simplectomorfismo entre superficies es una aplicación que preserva las áreas.

La versión infinitesimal de simplectomorfismo es la siguiente.

Definición 3.5. Se dice que un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ es **simpléctico** si su flujo $\{\phi_t\}$ es un simplectomorfismo para todo t , es decir,

$$\phi_t^* \omega = \omega.$$

Proposición 3.6. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) X es simpléctico;
- ii) $\mathcal{L}_X \omega = 0$;
- iii) $i_X \omega$ es cerrada;
- iv) para todo $x \in M$, existe $U \subset M$ abierto y $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que

$$i_X \omega = df \text{ en } U.$$

DEMOSTRACIÓN. i) \iff ii) es consecuencia del Corolario A.15.

ii) \iff iii) se deduce de (A.40) y de ser ω cerrada ($d\omega = 0$).

iii) \iff iv) es simplemente el lema de Poincaré (Proposición A.13) aplicado a la forma cerrada $i_X \omega$. □

4. Teorema de Darboux

Habíamos visto en la primera sección que dos espacios vectoriales simplécticos de la misma dimensión son simplectomorfos. Ahora bien, la esfera S^2 y el plano \mathbb{R}^2 son dos variedades simplécticas diferentes (S^2 es compacto y \mathbb{R}^2 no lo es). Sin embargo, localmente las variedades simplécticas son indistinguibles. Ello se debe al conocido como teorema de Darboux: Toda variedad simpléctica n -dimensional es localmente la variedad $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Teorema 4.1 (Darboux). Sea (M, ω) una variedad simpléctica $2n$ -dimensional y x un punto en M . Entonces, existe una carta local $(U, \varphi \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$ centrada en x tal que

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos $M = \mathbb{R}^{2n}$ y $x = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{2n}$. Como $\omega(0)$ es no degenerada, podemos suponer que existen $(\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^n, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ coordenadas en \mathbb{R}^{2n} tal que $\bar{q}^i(0) = 0 = \bar{p}_i(0)$ para todo i , y $\omega(0) = \sum_{i=1}^n d\bar{q}^i|_0 \wedge d\bar{p}_i|_0$ (usando los resultados lineales).

Tomamos $w_1 = \sum_{i=1}^n d\bar{q}^i \wedge d\bar{p}_i$ en \mathbb{R}^{2n} y definimos $\omega_t = \omega + t(w_1 - \omega)$, con $t \in [0, 1]$. Nótese que para $t = 0$, $\omega_0 = \omega$, para $t = 1$, $\omega_1 = w_1$ y $\omega_t(0) = \omega(0) + t(w_1(0) - \omega(0)) = \omega(0)$ es no degenerado para todo t .

De esta última condición, existe un entorno abierto U de centro el origen ($U = B(0, r)$ con $r \in \mathbb{R}$) tal que ω_t es no degenerada en dicho entorno para todo $t \in [0, 1]$.

Como en U se verifica $d(\omega_1 - \omega) = 0$, por el lema de Poincaré (Proposición A.13) existe $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que

$$\omega_1 - \omega = d\alpha. \quad (4.1)$$

Sustituyendo α por $\alpha - \alpha(0)$ podemos suponer $\alpha(0) = 0$.

Como ω_t es no degenerada en U para todo t , definimos entonces el campo de vectores $X_t \in \mathfrak{X}(U)$ dependiente del tiempo $t \in [0, 1]$ por

$$i_{X_t}\omega_t = -\alpha. \quad (4.2)$$

Como $\alpha(0) = 0$, entonces $X_t(0) = 0$. Sea $\{\phi_{t,0}\}$ el flujo de X_t , para todo $t \in [0, 1]$. Localmente, $\{\phi_{t,0}\}$ es un difeomorfismo satisfaciendo $\phi_{0,0} = I$ (A.25). Veamos que $\phi_{t,0}^*\omega_t = \omega_0$.

Usando (4.1), (4.2), (A.36) y (A.40),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*\omega_t) &= \frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*(\omega + t(\omega_1 - \omega))) \\ &= \frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*\omega) + \frac{d}{dt}(t\phi_{t,0}^*(\omega_1 - \omega)) \\ &= \phi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega) + \phi_{t,0}^*(\omega_1 - \omega) + t\frac{d}{dt}(\phi_{t,0}^*(\omega_1 - \omega)) \\ &= \phi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega) + \phi_{t,0}^*(d\alpha) + t\phi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}(\omega_1 - \omega)) \\ &= \phi_{t,0}^*(\mathcal{L}_{X_t}\omega_t) + \phi_{t,0}^*(d\alpha) \\ &= \phi_{t,0}^*(di_{X_t}\omega_t) + \phi_{t,0}^*(d\alpha) = 0 \end{aligned}$$

Luego, $\phi_{t,0}^*\omega_t$ es constante para todo $t \in [0, 1]$. Pero,

$$\omega = \phi_{0,0}^*\omega_0 = \phi_{1,0}^*\omega_1 = \phi_{1,0}^*\left(\sum_{i=1}^n d\bar{q}^i \wedge d\bar{p}_i\right),$$

con lo que $\phi_{t,0}$ es el cambio de coordenadas buscado. \square

Nota 4.2. La carta $(U, \varphi \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$ para la que $\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$ se denomina **carta de Darboux** y las coordenadas, **coordenadas canónicas**.

Ejemplo 4.3. Sea $(T^*Q, \omega = \omega_Q + \tau_Q^*B)$ una variedad, donde ω_Q es la 2-forma canónica y B es una 2-forma cerrada (ver Ejemplo 2.7). Por el lema de Poincaré (Proposición A.13), existe $\alpha \in \Omega^1(U)$ tal que $B = d\alpha$, con U abierto de Q . Tomando coordenadas (q^1, \dots, q^n) en U , si $\alpha = \sum_{i=1}^n A_i dq^i$, entonces

$$B(q^i, p_i) = -\frac{\partial A_i}{\partial q^j} dq^i \wedge dq^j.$$

Elegimos coordenadas inducidas (q^i, p_i) en T^*Q . Así, por (2.4),

$$\omega(q^i, p_i) = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial q^j} dq^i \wedge dq^j.$$

Tomamos ahora nuevas coordenadas (\bar{q}^i, \bar{p}_i) en T^*Q con

$$\bar{q}^i = q^i, \quad \bar{p}_i = p_i - A_i.$$

Veamos que (\bar{q}^i, \bar{p}_i) son coordenadas canónicas para ω .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d\bar{q}^i \wedge d\bar{p}_i &= \sum_{i=1}^n dq^i \wedge d(p_i - A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n dq^i \wedge \left(dp_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial q^j} dq^j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial q^j} dq^i \wedge dq^j. \end{aligned}$$

Notar que $(\bar{q}^i, \bar{p}_i) = l_{-\alpha}(q^i, p_i)$, donde $l_{-\alpha}$ es la traslación de fibras de Ejemplo 3.3, pero en este caso α no es cerrada.

5. Sistemas hamiltonianos y mecánica

La mecánica es posible estudiarla desde dos formalismos distintos, el hamiltoniano o el lagrangiano. El primero se fundamenta en estructuras simplécticas y de Poisson, mientras que el segundo en principios variacionales. Veamos más precisamente la relación entre geometría simpléctica y mecánica (para más detalles [1, 4, 6]).

Definición 5.1. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en M . Un campo de vectores $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ se dice que es **hamiltoniano** con función de energía H si

$$i_{X_H}\omega = dH. \quad (5.1)$$

A la terna (M, ω, X_H) se le denomina **sistema hamiltoniano**.

El flujo del campo hamiltoniano lo van a determinar las curvas integrales del campo. Probaremos a continuación que dicho flujo es un simplectomorfismo.

Proposición 5.2. Sea (M, ω, X_H) un sistema hamiltoniano y $\{\phi_t\}$ el flujo de X_H . Entonces, $\phi_t^*\omega = \omega$ para todo t , esto es, X_H es un campo simpléctico.

DEMOSTRACIÓN. De Proposición 3.6, (A.40) y que ω es cerrada se tiene

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = i_{X_H}d\omega + di_{X_H}\omega = d^2H = 0.$$

□

Definición 5.3. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores en una variedad simpléctica (M, ω) . Se dice que X es **localmente hamiltoniano** si, para todo $x \in M$, existe un entorno abierto $U \subset M$ de x tal que $X|_U$ es hamiltoniano.

Por Proposición 3.6 iv) se tiene que los campos localmente hamiltonianos son aquellos cuyo flujo está formado por simplectomorfismos.

Proposición 5.4. Un campo de vectores X es localmente hamiltoniano si y sólo si es simpléctico.

Nótese que todo campo hamiltoniano es localmente hamiltoniano (su flujo preserva la forma simpléctica), sin embargo, existen campos localmente hamiltonianos que no son hamiltonianos como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.5. Sea $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$. Tomamos $\Theta \in \Omega^1(S^1)$ tal que, para todo $p \in S^1$, $\Theta(p) \neq 0$. Elegimos $\{X(p)\} \subseteq T_p S^1$ base dual de $\{\Theta(p)\} \subseteq T_p^* S^1$. Por tanto, X es un campo de vectores de S^1 tal que $X(p) \neq 0$, para todo $p \in S^1$ y $\Theta(X) = 1$.

Construimos una forma simpléctica ω en $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ con $\omega = pr_1^* \Theta \wedge pr_2^* \Theta$, donde pr_i^* es el pull-back de la proyección $pr_i: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$. ω es cerrada y, dado que $\{\Theta(p)\}$ es una base, ω es no degenerada.

Sea ahora \bar{X} un campo de vectores en \mathbb{T}^2 , $\bar{X} = (X, 0)$ con $X \in \mathfrak{X}(S^1)$, tal que $\Theta(X) = 1$. Entonces, por (A.40)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{X}} \omega &= i_{\bar{X}} d\omega + di_{\bar{X}} \omega &= d(i_{(X,0)}(pr_1^* \Theta \wedge pr_2^* \Theta)) \\ & &= d(\Theta(Tpr_1(X, 0))pr_2^* \Theta - \Theta(Tpr_2(X, 0))pr_1^* \Theta) \\ & &= d(pr_2^* \Theta) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, \bar{X} es simpléctico.

Sin embargo, \bar{X} no es hamiltoniano. Supongamos lo contrario. Entonces, existe una función $H \in C^\infty(\mathbb{T}^2)$ satisfaciendo $i_{\bar{X}} \omega = dH$. Por la compacidad de \mathbb{T}^2 , existe un punto $p \in \mathbb{T}^2$ tal que $dH(p) = 0$, pero esto implica que $X(p) = 0$. Por consiguiente, el campo de vectores \bar{X} de \mathbb{T}^2 no es hamiltoniano.

Mostraremos ahora cuáles son las ecuaciones diferenciales de las curvas integrales de un campo hamiltoniano.

Sea (M, ω, X_H) un sistema hamiltoniano y $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ coordenadas canónicas de ω . Dada la función de energía H y usando que $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$, el campo hamiltoniano toma la forma

$$X_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}. \quad (5.2)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} i_{X_H} \omega &= \sum_{i=1}^n i_{X_H} (dq^i \wedge dp_i) \\ &= \sum_{i=1}^n X_H(q^i) dp_i - X_H(p_i) dq^i. \end{aligned}$$

Pero, por otra parte,

$$dH = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i.$$

Por la definición de campo hamiltoniano (5.1) tenemos

$$X_H(q^i) = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad X_H(p_i) = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

y llegamos a la correspondiente expresión local del campo X_H (5.2). Así, $\sigma(t) = (q^i(t), p_i(t))$ es curva integral de X_H si y sólo si se cumplen las **ecuaciones de Hamilton**

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Dado un sistema hamiltoniano, la energía H se conserva a lo largo de las trayectorias.

Teorema 5.6 (Conservación de la energía). *Sea (M, ω, X_H) un sistema hamiltoniano. Entonces, la energía H se mantiene constante a lo largo de las trayectorias*

$$(H \circ \sigma) = cte,$$

donde σ es una curva integral del campo hamiltoniano.

DEMOSTRACIÓN. De (5.1), (A.22), (A.28) y la antisimetría de ω ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(\sigma(t))) &= dH(\sigma(t))(X_H(\sigma(t))) \\ &= \omega(X_H(\sigma(t)), X_H(\sigma(t))) = 0. \end{aligned}$$

□

Si tenemos un simplectomorfismo entre variedades, los campos hamiltonianos están relacionados de la siguiente manera.

Proposición 5.7. *Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) dos variedades simplécticas y $H \in C^\infty(M_2)$. Si el difeomorfismo $F: M_1 \rightarrow M_2$ es un simplectomorfismo, entonces*

$$F_*(X_{H \circ F}) = X_H. \quad (5.3)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado $x \in M_1$, entonces probar (5.3) es equivalente a probar

$$(T_x F)(X_{H \circ F}(x)) = X_H(F(x)), \quad \text{para todo } x \in M_1.$$

Por Definición 3.1, (5.1) y (A.28) tenemos que, para todo $v \in T_x M_1$,

$$\begin{aligned} v(H \circ F)(x) &= ((T_x F)(v))(H) = dH(F(x))((T_x F)(v)) \\ &= \omega_2(X_H(F(x)), (T_x F)(v)). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando que F es un symplectomorfismo,

$$\begin{aligned} v(H \circ F)(x) &= d(H \circ F)(x)(v) = \omega_1(X_{H \circ F}(x), v) = F^* \omega_2(X_{H \circ F}(x), v) \\ &= \omega_2((T_x F)(X_{H \circ F}(x)), (T_x F)(v)). \end{aligned}$$

De la bilinealidad de ω_2 ,

$$0 = \omega_2((T_x F)(X_{H \circ F}(x)) - X_H(F(x)), (T_x F)(v)).$$

Pero, al ser $T_x F$ sobreyectiva y de la no degeneración de ω_2 , tenemos que $(T_x F)(X_{H \circ F}(x)) = X_H(F(x))$, para todo $x \in M_1$. \square

Presentamos ahora dos ejemplos de sistemas hamiltonianos. El primero es un ejemplo sencillo en el que se muestran las ecuaciones de movimiento de las partículas en el espacio bajo el influjo de un potencial. En el segundo, estudiaremos el movimiento de una partícula cargada sometida a un campo magnético.

Ejemplo 5.8. Sea $(T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}, \omega, X_H)$ un sistema hamiltoniano y $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ coordenadas canónicas de ω . Si $H = T + V$ es la energía, esto es, la suma de la energía cinética y potencial del sistema,

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n (p_i)^2 + V(q^1, \dots, q^n),$$

el campo hamiltoniano viene dado por

$$X_H = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{m} \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial V}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Si $\sigma(t) = (q^i(t), p_i(t))$ es una curva integral del campo, las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \frac{p_i}{m} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial V}{\partial q^i}. \end{cases}$$

Sustituyendo $m\dot{q}^i = p_i$ y denotando $F_i = -\frac{\partial V}{\partial q^i}$, las ecuaciones se reducen a la segunda ley de Newton

$$m\ddot{q}^i = F_i.$$

Ejemplo 5.9. Sea $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ un campo magnético en \mathbb{R}^3 con divergencia cero

$$\frac{\partial B_x}{\partial q^1} + \frac{\partial B_y}{\partial q^2} + \frac{\partial B_z}{\partial q^3} = 0.$$

Según la ley de Lorentz de las fuerzas magnéticas, las ecuaciones de movimiento para una partícula con masa m y carga e son

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \frac{e}{c} \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}, \quad (5.4)$$

donde c es la constante de la velocidad de la luz. Veamos que estas ecuaciones son hamiltonianas, es decir, son las ecuaciones de las curvas integrales de un sistema hamiltoniano.

En el espacio de fases de momentos $T^*\mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6$, consideramos la 2-forma simpléctica (ver Ejemplo 2.7)

$$\omega = \omega_Q - \frac{e}{c} \pi_{\mathbb{R}^3}^* B,$$

donde ω_Q es la forma canónica (ver Ejemplo 2.6) en $T^*\mathbb{R}^3$ y B es la 2-forma en \mathbb{R}^3 $B = B_x dq^2 \wedge dq^3 - B_y dq^1 \wedge dq^3 + B_z dq^1 \wedge dq^2$ con coordenadas globales (q^1, q^2, q^3) en \mathbb{R}^3 . Notar que B es cerrada puesto que \mathbf{B} es de divergencia cero.

Tomamos como función hamiltoniana H la energía cinética del sistema

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 (p_i)^2,$$

con (q^i, p_i) coordenadas globales en \mathbb{R}^6 . Por consiguiente, si $X_H = \zeta^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \eta_i \frac{\partial}{\partial p_i}$,

$$\begin{aligned} dH &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 p_i dp_i, \\ i_{X_H} \omega &= \zeta^1 dp_1 + \zeta^2 dp_2 + \zeta^3 dp_3 - (\eta_1 dq^1 + \eta_2 dq^2 + \eta_3 dq^3) \\ &\quad - \frac{e}{c} [B_z \zeta^1 dq^2 - B_z \zeta^2 dq^1 - B_y \zeta^1 dq^3 + B_y \zeta^3 dq^1 + B_x \zeta^2 dq^3 - B_x \zeta^3 dq^2]. \end{aligned}$$

Igualando componentes obtenemos $\frac{p_i}{m} = \zeta^i$ y

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{e}{c} [B_z \zeta^2 - B_y \zeta^3], \\ \eta_2 &= \frac{e}{c} [B_x \zeta^3 - B_z \zeta^1], \\ \eta_3 &= \frac{e}{c} [B_y \zeta^1 - B_x \zeta^2]. \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las curvas integrales de X_H son

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \zeta^i &= \frac{p_i}{m} \\ \dot{p}_i &= \eta_i &. \end{cases}$$

De aquí, las ecuaciones se reducen a

$$\begin{cases} m\ddot{q}^1 &= \frac{e}{c} [B_z \dot{q}^2 - B_y \dot{q}^3] \\ m\ddot{q}^2 &= \frac{e}{c} [B_x \dot{q}^3 - B_z \dot{q}^1] \\ m\ddot{q}^3 &= \frac{e}{c} [B_y \dot{q}^1 - B_x \dot{q}^2] \end{cases}$$

que son las ecuaciones de movimiento según la ley de Lorentz (5.4). Por tanto, las ecuaciones de movimiento de una partícula en un campo magnético son hamiltonianas.

6. Corchetes de Poisson

Desde el punto de vista de la mecánica, el corchete de Poisson es un operador importante en los sistemas hamiltonianos que nos proporcionará una reformulación de las ecuaciones de movimiento.

Definición 6.1. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Se define el operador **corchete de Poisson** por

$$\begin{aligned} \{\cdot, \cdot\}: C^\infty(M) \times C^\infty(M) &\longrightarrow C^\infty(M) \\ (f, g) &\longmapsto \{f, g\} = \omega(X_f, X_g). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Nota 6.2. Para $f, g \in C^\infty(M)$, de (5.1) y la antisimetría de ω , se verifica

$$\{f, g\} = X_g(f). \quad (6.2)$$

Teorema 6.3. Sea (M, ω) una variedad simpléctica. El operador corchete de Poisson satisface las siguientes propiedades:

i) $\{\cdot, \cdot\}$ es \mathbb{R} -bilineal

$$\{\lambda f + \mu g, h\} = \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\};$$

ii) $\{\cdot, \cdot\}$ es antisimétrico

$$\{f, g\} = -\{g, f\};$$

iii) $\{\cdot, \cdot\}$ satisface la identidad de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0;$$

iv) $\{\cdot, \cdot\}$ satisface la regla de Leibniz

$$\{f, gh\} = h\{f, g\} + g\{f, h\},$$

con $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. Para probar i) - iv) aplicaremos (6.1) y (6.2). Sean $f, g, h \in C^\infty(M)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces

i)

$$\begin{aligned} \{\lambda f + \mu g, h\} &= X_h(\lambda f + \mu g) = \lambda X_h(f) + \mu X_h(g) \\ &= \lambda\{f, h\} + \mu\{g, h\}. \end{aligned}$$

ii) De la antisimetría de ω ,

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) \\ &= -\{g, f\}. \end{aligned}$$

iii) Como ω es cerrada, $d\omega(X_h, X_g, X_f) = 0$. Por tanto, de (A.33), (A.39) (A.40) y (A.41),

$$\begin{aligned}
0 &= d\omega(X_h, X_g, X_f) = X_h(\omega(X_g, X_f)) - X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_f(\omega(X_h, X_g)) \\
&\quad - \omega([X_h, X_g], X_f) + \omega([X_h, X_f], X_g) - \omega([X_g, X_f], X_h) \\
&= \{\{g, f\}, h\} - \{\{h, f\}, g\} + \{\{h, g\}, f\} \\
&\quad - i_{[X_h, X_g]}\omega(X_f) + i_{[X_h, X_f]}\omega(X_g) - i_{[X_g, X_f]}\omega(X_h) \\
&= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\
&\quad - (\mathcal{L}_{X_h} i_{X_g} \omega)(X_f) + (\mathcal{L}_{X_h} i_{X_f} \omega)(X_g) - (\mathcal{L}_{X_g} i_{X_f} \omega)(X_h) \\
&= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\
&\quad - (\mathcal{L}_{X_h} dg)(X_f) + (\mathcal{L}_{X_h} df)(X_g) - (\mathcal{L}_{X_g} df)(X_h) \\
&= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\
&\quad - (d\{g, h\})(X_f) + (d\{f, h\})(X_g) - (d\{f, g\})(X_h) \\
&= 2(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}).
\end{aligned}$$

iv) Por (A.39) se tiene

$$\begin{aligned}
\{f, gh\} &= -\{gh, f\} = -X_f(gh) \\
&= -hX_f(g) - gX_f(h) \\
&= h\{f, g\} + g\{f, h\}.
\end{aligned}$$

□

Proposición 6.4. Sean X un campo de vectores en M y $f, g \in C^\infty(M)$. Entonces,

$$[X_f, X_g] = -X_{\{f, g\}},$$

donde $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie.

DEMOSTRACIÓN. Tomando $h \in C^\infty(M)$ y de (6.2) y Proposición 6.3 iii),

$$\begin{aligned}
[X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\
&= \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} \\
&= -\{h, \{f, g\}\} \\
&= -X_{\{f, g\}}(h).
\end{aligned}$$

□

Nota 6.5. $(C^\infty(M), \{\cdot, \cdot\})$ es un **álgebra de Lie**, pues el corchete satisface i) - iii) de Proposición 6.3.

Proposición 6.6. Si $\varphi: (M_1, \omega_1) \rightarrow (M_2, \omega_2)$ es un *simplectomorfismo*, entonces

$$\varphi^*\{f, g\} = \{\varphi^*f, \varphi^*g\}, \quad (6.3)$$

para todo $f, g \in C^\infty(M_2)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in M_1$. Por Proposición 5.7 y (6.1) se tiene

$$\begin{aligned} [\varphi^*\{f, g\}](x) &= \{f, g\}(\varphi(x)) = (X_g(f))(\varphi(x)) \\ &= X_g(\varphi(x))(f) = [(T_x\varphi)(X_{\varphi^*g})(x)](f) \\ &= (X_{\varphi^*g}(x))(\varphi^*f) \\ &= \{\varphi^*f, \varphi^*g\}(x). \end{aligned}$$

□

Desde un punto de vista dinámico, el corchete de Poisson nos permite medir la evolución de cualquier observable (función). Concretamente nos interesan aquellos observables que se conservan a lo largo de las soluciones, pues nos ayudarán a resolver las ecuaciones diferenciales del movimiento.

Proposición 6.7. Sean $f \in C^\infty(M)$ y σ una curva integral de X_H . Entonces,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma) = \{f, H\} \circ \sigma. \quad (6.4)$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando (5.1), (6.2) y (A.23),

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma) = X_H(\sigma(t))(f) = \{f, H\} \circ \sigma(t).$$

□

Nota 6.8. $\frac{d}{dt}(f \circ \sigma) = \{f, H\} \circ \sigma$ se suele escribir $\dot{f} = \{f, H\}$.

Definición 6.9. Se dice que $f \in C^\infty(M)$ es **cantidad conservada** para el sistema hamiltoniano (M, ω, H) si $\{f, H\} = 0$.

Corolario 6.10. Sea $f \in C^\infty(M)$ una cantidad conservada para el sistema hamiltoniano (M, ω, H) . Si σ es curva integral de X_H , entonces $(f \circ \sigma)$ es constante.

Nota 6.11. De la antisimetría del corchete, la energía H es una cantidad conservada. Así, $H \circ \sigma$ se mantiene constante a lo largo de las trayectorias σ .

Proposición 6.12. Si f, g son cantidades conservadas, entonces $\{f, g\}$ es cantidad conservada.

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la identidad de Jacobi (Proposición 6.3, iii),

$$\{\{f, g\}, H\} = -\{H, \{f, g\}\} = \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} = 0.$$

□

Ejemplo 6.13. En \mathbb{R}^{2n} , con coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ y forma simpléctica $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$ (ver Ejemplo 2.3), el corchete de Poisson viene dado por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i}, \quad (6.5)$$

para todo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Este es el corchete introducido por Poisson en [7].

Proposición 6.14. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica conexa y $\{\cdot, \cdot\}$ el corchete de Poisson en $C^\infty(M)$. Entonces,*

$$\{f, g\} = 0, \text{ para todo } g \in C^\infty(M) \iff f \text{ es constante.}$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero la implicación a la derecha. De (6.2) y (A.39) tenemos

$$\{f, g\} = X_g(f) = df(X_g) = 0.$$

Como ω es simpléctica, $\tilde{\omega}(x)$ es un isomorfismo, en particular, sobreyectiva. Por tanto, $df = 0$ y de la conexidad de M , f es constante.

La otra implicación es trivial usando la relación anterior. \square

Ejemplo 6.15. En Ejemplo 5.8, supongamos ahora que $\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0$. Con esta condición, usando (6.5), tenemos que el momento total del sistema

$$P(q^i, p_i) = \sum_{i=1}^n p_i$$

es una cantidad conservada,

$$\{H, P\} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^i} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0.$$

Nótese que esto es la **ley de conservación del momento** cuando la suma de las fuerzas actuando sobre el sistema se anula.

7. Sistemas lagrangianos

Hasta ahora hemos dado una aproximación de las ecuaciones de movimiento desde el punto de vista de la mecánica hamiltoniana. En esta sección pasaremos a estudiar el formalismo lagrangiano, basado en principios variacionales, y su relación con la geometría simpléctica. Concluiremos la sección con un ejemplo interesante en el que el lagrangiano es determinado por una métrica. Más detalles se pueden encontrar en [1].

Definición 7.1. *Sea Q una variedad diferenciable y TQ su fibrado tangente. Se denomina función **lagrangiana** a la aplicación $L: TQ \rightarrow \mathbb{R}$.*

Principio de acción crítica

Dada $\mathcal{M} = \{\alpha: [a, b] \rightarrow Q, \alpha \in C^\infty([a, b]) \mid \alpha(a) = p \text{ y } \alpha(b) = q\}$, se llama **acción** a la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: \mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\longmapsto \mathcal{A}(\alpha) = \int_a^b L(\dot{\alpha}(t)) dt, \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde $\dot{\alpha}$ es el levantamiento tangente de α .

Los puntos críticos de \mathcal{A} se obtienen mediante

$$d \int_a^b L(\dot{\alpha}(t)) dt = 0 \quad (7.2)$$

tomando variaciones a lo largo de caminos en Q con puntos frontera fijos.

Sean $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ coordenadas en TQ . Aplicando la regla de la cadena, la integración por partes y que $\frac{d}{dt}(\delta q^i) = \delta \dot{q}^i$, donde $\delta q^i, \delta \dot{q}^i$ son variaciones infinitesimales, se tiene

$$\begin{aligned} d \int_a^b L(q(t), \dot{q}(t)) dt &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i \right) dt - \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i \right) dt + \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right) dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \delta q^i dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_a^b = 0. \end{aligned}$$

Como $\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta q^i \right]_a^b = 0$, debido a que los puntos frontera de la variación son fijos, entonces (7.2) es equivalente a las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0, \quad (7.3)$$

que se conocen como **ecuaciones de Euler-Lagrange**.

Notar que \mathcal{M} es una variedad de dimensión infinita. Desde el punto de vista del análisis hemos sido poco precisos. Para más detalles ver, por ejemplo, [5]. Daremos un enfoque geométrico a las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Definición 7.2. Dada una función lagrangiana L , se llama **transformada de Legendre** a la aplicación $\mathbb{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$ tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{F}L(v): TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \mathbb{F}L(v)(w) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} L(v + tw), \end{aligned} \quad (7.4)$$

donde $v, w \in T_q Q$.

Si $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ son coordenadas inducidas en TQ por Q ,

$$\mathbb{F}L(q^i, \dot{q}^i) = \left(q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right). \quad (7.5)$$

Nota 7.3. Las funciones $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ son los momentos generalizados de la mecánica clásica.

Definición 7.4. La **función de energía** E_L asociada al lagrangiano L se define por

$$\begin{aligned} E_L: TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto E_L(v) = \mathbb{F}L(v)(v) - L(v). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Expresada en coordenadas se tiene

$$E_L(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i).$$

Definición 7.5. Dado un lagrangiano L , se definen la **1-forma lagrangiana** y la **2-forma lagrangiana** asociadas a L por

$$\Theta_L = \mathbb{F}L^*(\lambda_Q) \in \Omega^1(TQ) \quad (7.7)$$

$$\Omega_L = \mathbb{F}L^*(\omega_Q) \in \Omega^2(TQ), \quad (7.8)$$

donde $\mathbb{F}L$ es la transformada de Legendre (7.4), λ_Q la 1-forma de Liouville (2.1) y ω_Q la forma simpléctica canónica en T^*Q (2.3).

Nótese que Ω_L es cerrada, pues de la conmutatividad de la diferencial con el pull-back y (2.3), $\Omega_L = -d\Theta_L$. Estudiemos la posible no degeneración de Ω_L .

Tomando coordenadas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ en T^*Q y usando las ecuaciones (2.2), (2.4), (7.5),

$$\Theta_L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \quad (7.9)$$

$$\Omega_L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge dq^j + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j. \quad (7.10)$$

En forma matricial, la 2-forma lagrangiana se expresa por

$$\Omega_L = \begin{pmatrix} A & \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) & 0 \end{pmatrix},$$

donde A es la antisimetrización de $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)$. Luego, es fácil ver que Ω_L es no degenerada si y sólo si la matriz $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)$ es no degenerada.

Definición 7.6. Se dice que la función lagrangiana L es **regular** si Ω_L es simpléctica sobre TQ .

Veamos un ejemplo de función lagrangiana no regular.

Ejemplo 7.7. Sea $Q = \mathbb{R}^4$ con coordenadas (q^1, q^2, q^3, q^4) . Tomamos la función lagrangiana

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{m}{2}(\dot{q}^3 - \dot{q}^4) + \dot{q}^4 q^3 - \dot{q}^3 q^4 - \sum_{i=1}^4 (q^i)^2.$$

Este lagrangiano aparece en [2] en un modelo mecánico de teorías de campos.

La 2-forma lagrangiana, en forma matricial, se escribe

$$\Omega_L = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde A es la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pero $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) = 0$, por tanto Ω_L es degenerada y, en consecuencia, L es no regular.

Definición 7.8. Dado un lagrangiano L , un campo de vectores X_{E_L} en TQ se dice que es un **campo lagrangiano** si satisface

$$\Omega_L(v)(X_{E_L}(v), w) = dE_L(v)(w), \quad (7.11)$$

para todo $v \in T_q Q$ y $w \in T_v(TQ)$.

La siguiente proposición demuestra el principio de la conservación de la energía en sistemas lagrangianos, que también es válido cuando el lagrangiano L es no regular.

Proposición 7.9. Sean L un lagrangiano, X_{E_L} un campo lagrangiano para L y $\sigma: I \rightarrow TQ$ una curva integral de X_{E_L} . Entonces, $E_L(\sigma(t))$ es constante en t .

DEMOSTRACIÓN. Aplicando (7.11), (A.23), (A.28) y la antisimetría de Ω_L ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_L(\sigma(t)) &= dE_L(\sigma(t))(X_{E_L}(\sigma(t))) \\ &= \Omega_L(\sigma(t))(X_{E_L}(\sigma(t)), X_{E_L}(\sigma(t))) = 0. \end{aligned}$$

□

Estudiaremos a continuación las curvas integrales del campo lagrangiano X_{E_L} y su relación con las ecuaciones de Euler-Lagrange. Para ello definiremos antes un tipo particular de campos de vectores en TQ y sus curvas integrales asociadas.

Definición 7.10. Un campo de vectores $Z \in \mathfrak{X}(TQ)$ se dice que es una **ecuación diferencial de segundo orden (SODE)** si

$$T\pi_Q \circ Z = I, \quad (7.12)$$

donde $\pi_Q: TQ \rightarrow Q$ es la proyección canónica.

Proposición 7.11. Si σ es curva integral de una SODE Z , entonces $\sigma = \dot{\gamma}$, donde $\gamma = \pi_Q \circ \sigma$.

DEMOSTRACIÓN. Por (7.12), se tiene

$$\sigma(t) = (T\pi_Q \circ Z)(\sigma(t)) = T_{\sigma(t)}\pi_Q(Z_{\sigma(t)}) = T_{\sigma(t)}\pi_Q(\dot{\sigma}(t)) = T_t(\pi_Q \circ \sigma) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right).$$

Pero esto es precisamente el levantamiento tangente $\dot{\gamma}$ de $\gamma = \pi_Q \circ \sigma$ (ver (A.21)).

□

Si cogemos coordenadas $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$, por (7.12) el campo se escribe como

$$Z(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{i=1}^n \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^n \xi^i(q^i, \dot{q}^i) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Por consiguiente, si $\sigma(t) = (q^i(t), \dot{q}^i(t))$ es una curva integral de Z , entonces satisface las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i \\ \frac{d\dot{q}^i}{dt} = \xi^i. \end{cases}$$

Así, se tiene que $\frac{d^2 q^i}{dt^2} = \xi^i$. Esto justifica el nombre de ecuación diferencial de segundo orden.

Teorema 7.12. Sea X_{E_L} un campo lagrangiano. Supongamos que X_{E_L} es una SODE. Entonces, tomando coordenadas $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ en TQ , $\sigma(t) = (q^i(t), \dot{q}^i(t))$ es una curva integral de X_{E_L} si y sólo si

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \end{cases}$$

es decir, se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, X_{E_L} es una SODE, luego el campo se escribe como

$$X_{E_L}(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{i=1}^n \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^n \xi_2^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

De (7.6), localmente, podemos escribir

$$dE_L(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^k} - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right) dq^i + \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i. \quad (7.13)$$

Por otra parte,

$$i_{X_{E_L}} \Omega_L = \sum_{i,k=1}^n \left(\dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial q^i} - \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k} - \xi_2^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \right) dq^i + \sum_{i,k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i.$$

Ahora bien, de la definición de campo lagrangiano (7.11), $i_{X_{E_L}} \Omega_L = dE_L$. Entonces, tomando las componentes dq^i , nos queda la siguiente igualdad

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k} - \sum_{k=1}^n \xi_2^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} = 0. \quad (7.14)$$

Si $\sigma(t) = (q^i(t), \dot{q}^i(t))$ es curva integral de X_{E_L} , entonces $\dot{q}^i(t) = \frac{dq^i}{dt}$ y $\frac{d\dot{q}^i(t)}{dt} = \xi_2^i$. Sustituyendo en (7.14) tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k} - \sum_{k=1}^n \xi_2^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k} \frac{dq^k}{dt} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \frac{d\dot{q}^k}{dt} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \end{aligned}$$

que son precisamente las ecuaciones de Euler-Lagrange. □

Si L es regular, entonces Ω_L es simpléctica y existirá un único campo X_{E_L} que será el campo hamiltoniano de E_L respecto de Ω_L . En este caso, E_L se conserva a lo largo del flujo de X_{E_L} . Además, se prueba lo siguiente.

Proposición 7.13. *Si L es un lagrangiano regular, entonces X_{E_L} es una SODE y las curvas integrales satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange.*

DEMOSTRACIÓN. Dado un campo lagrangiano X_{E_L} , podemos expresarlo en coordenadas (q^i, \dot{q}^i) como

$$X_{E_L}(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{i=1}^n \xi_1^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^n \xi_2^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}.$$

Entonces,

$$i_{X_{E_L}} \Omega_L = \sum_{i,k=1}^n \left(\xi_1^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial q^i} - \xi_1^i \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^k} - \xi_2^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \right) dq^i + \sum_{i,k=1}^n \xi_1^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i. \quad (7.15)$$

Ahora, procediendo de forma análoga al Teorema 7.12, de (7.11) y tomando las componentes $d\dot{q}^i$ de (7.13) y (7.15), tenemos la expresión

$$\sum_{k=1}^n \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} - \sum_{k=1}^n \xi_1^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} = 0.$$

Por consiguiente, como L es regular ($\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^k} \right)$ es una matriz no degenerada) $\dot{q}^i = \xi_1^i$.

Así mismo, por el Teorema 7.12, queda probado que las curvas integrales del campo satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange. □

Veamos la relación entre la regularidad del lagrangiano y la transformada de Legendre. Esto nos permitirá estudiar la relación entre el formalismo lagrangiano y hamiltoniano.

Proposición 7.14. *El lagrangiano L es regular si y sólo si $\mathbb{F}L$ es un difeomorfismo local.*

DEMOSTRACIÓN. Si tomamos coordenadas en TQ , la matriz jacobiana de $\mathbb{F}L$ (7.5) es

$$J_{\mathbb{F}L} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la regularidad de L es equivalente a la regularidad de $J_{\mathbb{F}L}$ y del teorema de la función inversa se concluye el resultado. \square

Definición 7.15. *Se dice que L es un lagrangiano **hiperregular** si $\mathbb{F}L: TQ \rightarrow T^*Q$ es un difeomorfismo.*

Nótese que dado un lagrangiano hiperregular L , definiendo

$$H = E_L \circ \mathbb{F}L^{-1} \tag{7.16}$$

se induce un sistema hamiltoniano en T^*Q .

Proposición 7.16. *Sean L un lagrangiano hiperregular en TQ y $H = E_L \circ \mathbb{F}L^{-1}$. Entonces,*

- i) $\mathbb{F}L: (TQ, \Omega_L) \rightarrow (T^*Q, \omega_Q)$ es un symplectomorfismo;
- ii) $(\mathbb{F}L)_* X_H = X_{E_L}$;
- iii) Si $\sigma(t)$ es curva integral de X_{E_L} , entonces $\mathbb{F}L \circ \sigma$ es curva integral de X_H y

$$\tau_Q \circ \sigma = \pi_Q \circ \mathbb{F}L \circ \sigma. \tag{7.17}$$

DEMOSTRACIÓN.

i) Consecuencia de (7.8).

ii) De Proposición 5.7,

$$\mathbb{F}L_*(X_{H \circ \mathbb{F}L}) = X_H,$$

pero $H \circ \mathbb{F}L = E_L$ por (7.16).

iii) Para probar que $(\mathbb{F}L \circ \sigma)(t)$ es curva integral de X_H recurrimos a Lema A.6. Finalmente, puesto que $\tau_Q = \pi_Q \circ \mathbb{F}L$, obtenemos directamente la ecuación (7.17).

Se concluye entonces que si $\sigma(t)$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, $(\mathbb{F}L \circ \sigma)(t)$ es solución de las ecuaciones de Hamilton. \square

$$\begin{array}{ccc}
T(TQ) & \xrightarrow{T\mathbb{F}L} & T(T^*Q) \\
X_{E_L} \uparrow & & \uparrow X_H \\
TQ & \xrightarrow{\mathbb{F}L} & T^*Q \\
E_L \searrow & & \swarrow H \\
& \mathbb{R} &
\end{array}$$

A continuación daremos dos ejemplos en los que se aplica el lagrangiano. Primero, la determinación de las geodésicas en geometría riemanniana, y en la siguiente sección, el estudio del movimiento rotatorio de un cuerpo rígido.

Geometría riemanniana y lagrangianos cinéticos

Dada una variedad riemanniana (Q, g) con producto escalar g_q en T_qQ , para todo $q \in Q$. Consideramos el lagrangiano definido por

$$\begin{aligned}
L: TQ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
v \in T_qQ &\longmapsto \frac{1}{2}g_q(v, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

En este caso, la transformada de Legendre viene dada por

$$\mathbb{F}L(v)(w) = g_q(v, w), \quad \text{para } v, w \in T_qQ.$$

Notar que $\mathbb{F}L$ es hiperregular, ya que es el difeomorfismo entre TQ y T^*Q inducido por la métrica. Además,

$$E_L = L. \tag{7.19}$$

En coordenadas $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ de TQ , las expresiones del lagrangiano y la transformada de Legendre son

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \tag{7.20}$$

$$\mathbb{F}L(q^i, \dot{q}^i) = \left(q^i, \sum_{j=1}^n g_{ij} \dot{q}^j \right). \tag{7.21}$$

Si tomamos la acción \mathcal{A} (7.1)

$$\mathcal{A}(\sigma) = \frac{1}{2} \int_a^b \|\dot{\sigma}\|^2 dt,$$

estaríamos buscando curvas que minimizan la longitud. Esto es precisamente la noción de **geodésica**. Veamos la relación de las geodésicas con las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Proposición 7.17. *Sea (M, g) una variedad riemanniana y L el lagrangiano definido por (7.18). Entonces, una curva σ en Q es una geodésica para la métrica g si y sólo si satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange para el lagrangiano L .*

DEMOSTRACIÓN. Primero, si calculamos las derivadas parciales del lagrangiano L (7.20) respecto a las coordenadas (q^i, \dot{q}^i) , las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i,j=1}^n g_{kj} \dot{q}^j + g_{ik} \dot{q}^i \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \dot{q}^i \dot{q}^j \right) + 2 \sum_{i=1}^n g_{ik} \ddot{q}^i - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial g_{i,j}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j. \end{aligned}$$

Ahora, si llamamos

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right),$$

donde g^{km} es la componente (km) -ésima de la matriz inversa de (g_{ij}) , entonces las ecuaciones se transforman en

$$\ddot{q}^m + \Gamma_{ij}^k \dot{q}^i \dot{q}^j = 0 \quad (7.22)$$

que son las ecuaciones de las geodésicas. \square

Nota 7.18. Los Γ_{ij}^k se denominan **símbolos de Christoffel** de la métrica g_{ij} .

8. El cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es un sistema de masas puntuales, no todas alineadas, sujetas a la restricción de que la distancia entre dos puntos cualesquiera se mantiene constante a lo largo del tiempo. Asumiremos que el movimiento del cuerpo es continuo, con lo que se preservará la orientación del cuerpo. Esta hipótesis, junto con que la distancia entre las masas es constante implican que el cuerpo se mueve solamente por la combinación de rotaciones y traslaciones. En nuestro caso sólo estudiaremos el movimiento rotacional del cuerpo rígido alrededor de un punto fijo, el punto pivote [4].

Si fijamos una configuración de referencia y denotamos la posición y la velocidad de una partícula x del cuerpo en un instante t por $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ respectivamente, ambos considerados vectores en \mathbb{R}^3 , se tiene

$$x(t) = R(t)X, \quad (8.1)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{R}(t)X = \dot{R}(t)R^{-1}(t)x(t), \quad (8.2)$$

donde X es la posición de la partícula en la configuración de referencia y $R(t)$ es una matriz ortogonal. Por tanto, el espacio de configuración del movimiento rotacional del cuerpo lo determina la variedad

$$SO(3) = \{R \mid R \text{ matriz de orden } 3, R^T = R^{-1}, \det R = 1\}.$$

Como $R(t)$ es una matriz ortogonal, $RR^T = I$ y, derivando, $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$. Así, las matrices $R^{-1}\dot{R}$ y $\dot{R}R^{-1}$ son antisimétricas. Recordar que, para cualquier $\dot{R} \in T_R(SO(3))$, la traslación a izquierda y a derecha por R^{-1} verifica

$$T_R l_{R^{-1}}(\dot{R}) = R^{-1}\dot{R}, \quad T_R r_{R^{-1}}(\dot{R}) = \dot{R}R^{-1}.$$

Esto demuestra que las matrices antisimétricas $R^{-1}\dot{R}$ y $\dot{R}R^{-1} \in T_I(SO(3)) \cong \mathfrak{so}(3)$. De la identificación de $T_I(SO(3))$ con \mathbb{R}^3 se tiene que existe $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ tal que

$$\dot{R}R^{-1} = \hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dicho ω , conocido como el vector **velocidad angular espacial**, verifica entonces que (8.2) se puede reescribir como

$$\dot{x} = \dot{R}R^{-1}x = \hat{\omega}x = \omega \times x, \quad (8.3)$$

donde \times es el producto escalar vectorial de \mathbb{R}^3 . El vector **velocidad angular cuerpo** Ω se define como

$$\Omega = R^{-1}\omega. \quad (8.4)$$

Usando la definición de Ω y (8.3), tenemos que

$$\Omega \times X = R^{-1}\omega \times R^{-1}x = R^{-1}(\omega \times x) = R^{-1}\dot{R}R^{-1}x = R^{-1}\dot{R}X.$$

Por tanto, usando de nuevo (8.3), $\hat{\Omega}$ y $\hat{\omega}$ están relacionadas por

$$\hat{\Omega} = R^{-1}\dot{R} = R^{-1}\hat{\omega}R. \quad (8.5)$$

Consideraremos un cuerpo sólido en vez de un número finito de masas puntuales. Definimos $\rho(X)$ como la densidad de masa del cuerpo en la posición X y denotamos por \mathcal{B} a la región ocupada por el cuerpo en su configuración de referencia. Entonces, la masa del cuerpo la escribimos como

$$m = \int_{\mathcal{B}} \rho(X) d^3 X.$$

Por analogía a la energía cinética de un sistema de partículas, la energía cinética del cuerpo rígido es

$$L = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\dot{x}\|^2 d^3 X = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\dot{R}X\|^2 d^3 X.$$

Primero, notar que si $\dot{R} \in T_R(SO(3))$ y $B \in SO(3)$, entonces $T_R l_B(\dot{R}) = B\dot{R} \in T_{BR}(SO(3))$ y de la ortogonalidad de B

$$\begin{aligned} L(T_R l_B(\dot{R})) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|B\dot{R}X\|^2 d^3 X \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\dot{R}X\|^2 d^3 X = L(\dot{R}), \end{aligned}$$

es decir, L es invariante por traslaciones a izquierda.

Entonces, de (8.2), (8.5) y la ortogonalidad de R ,

$$\begin{aligned}
L(\dot{R}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\dot{R}X\|^2 d^3X &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|R^{-1}\dot{R}X\|^2 d^3X \\
& &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\hat{\Omega}X\|^2 d^3X \\
& &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\Omega \times X\|^2 d^3X \\
& &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \|\hat{X}\Omega\|^2 d^3X \\
& &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \Omega^T \hat{X}^T \hat{X} \Omega d^3X \\
& &= \frac{1}{2} \Omega^T \left(\int_{\mathcal{B}} \rho(X) \hat{X}^T \hat{X} d^3X \right) \Omega.
\end{aligned}$$

donde hemos usado las relaciones

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}X &= \Omega \times X = -X \times \Omega = -\hat{X}\Omega, \\
\|u\|^2 &= u^T \cdot u, \quad u \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

Denotando $\mathbb{I} = \int_{\mathcal{B}} \rho(X) \hat{X}^T \hat{X} d^3X$, que es una matriz simétrica conocida como **tensor momento de inercia**, la energía cinética queda

$$L(\dot{R}) = \frac{1}{2} (R^{-1}\dot{R})^T \mathbb{I} (R^{-1}\dot{R}) = \frac{1}{2} \Omega^T \mathbb{I} \Omega. \quad (8.6)$$

Si definimos el producto escalar $\langle\langle u, v \rangle\rangle = u^T \mathbb{I} v$, L es el lagrangiano asociado a una métrica invariante a izquierda en $SO(3)$. Dicha métrica es

$$g(\dot{R}_1, \dot{R}_2) = \langle\langle T_R L_{R^{-1}}(\dot{R}_1), T_R L_{R^{-1}}(\dot{R}_2) \rangle\rangle,$$

con $\dot{R}_1, \dot{R}_2 \in T_R(SO(3))$ e identificando $T_I(SO(3))$ con \mathbb{R}^3 . De Proposición 7.17:

Proposición 8.1. *Las trayectorias del movimiento del cuerpo rígido son precisamente las geodésicas de una métrica invariante a izquierda en el grupo de Lie $SO(3)$.*

Nos interesa ahora pasar al formalismo hamiltoniano. Como el lagrangiano L es hiperregular, pues lo define una métrica, usaremos la transformada de Legendre para hacer el cambio. De (7.4) tenemos que $\mathbb{F}L(\Omega) = \mathbb{I}\Omega$, donde identificamos $T_I(SO(3)) \cong \mathfrak{so}(3)$ con \mathbb{R}^3 . Denominamos **momento angular cuerpo** al vector

$$\Pi = \mathbb{I}\Omega. \quad (8.7)$$

Notar que con la identificación anterior, $\mathfrak{so}(3)^* \cong \mathbb{R}^3$, de tal manera que, dado $\Pi \in \mathbb{R}^3$, $\check{\Pi} \in \mathfrak{so}(3)^*$ viene dado por la relación

$$\check{\Pi}(\hat{\Omega}) = \Pi \cdot \Omega, \quad \text{para todo } \Omega \in \mathbb{R}^3. \quad (8.8)$$

Ahora, por (7.16) y (7.19) se tiene

$$h(\Pi) = L(\Omega) = L(\mathbb{I}^{-1}\Pi) = \frac{1}{2}\Pi^T\mathbb{I}^{-1}\Pi. \quad (8.9)$$

De Proposición 2.8, de (8.8) y (A.45) tenemos que la 2-forma simpléctica sobre el fibrado cotangente $T^*(SO(3)) \cong SO(3) \times \mathbb{R}^3$ es

$$\omega_{(R,\Pi)}((R\hat{y}, a), (R\hat{x}, b)) = -a \cdot x + b \cdot y + \Pi \cdot (y \times x), \quad (8.10)$$

para todo $(R, \Pi) \in SO(3) \times \mathbb{R}^3$ y $(R\hat{y}, a), (R\hat{x}, b) \in T_R(SO(3)) \times \mathbb{R}^3$.

A continuación veremos cuál es la expresión del campo de vectores en $SO(3) \times \mathbb{R}^3$, lo que nos permitirá hallar las ecuaciones de Hamilton para el cuerpo rígido al identificar $\mathfrak{so}(3)$ con \mathbb{R}^3 y $\mathfrak{so}(3)^*$ con \mathbb{R}^3 .

Teorema 8.2. *Sea $h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ y $H = pr_2^*(h)$ con $pr_2: SO(3) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección canónica. Entonces, el campo hamiltoniano X_H viene dado por*

$$X_H(R, \Pi) = \left(R(\widehat{\nabla H}), \Pi \times \nabla H \right). \quad (8.11)$$

DEMOSTRACIÓN. Dado un campo en $SO(3) \times \mathbb{R}^3$,

$$X_H(R, \Pi) = (X_H^1(R, \Pi), X_H^2(R, \Pi)) \in T_R(SO(3)) \times \mathbb{R}^3$$

entonces por (5.1),

$$\omega_{(R,\Pi)}((X_H^1, X_H^2), (R\hat{x}, b)) = dH(R\hat{x}, b) = \nabla H \cdot b.$$

Ahora, usando la expresión (8.10) y tomando $(0, b) \in T_R SO(3) \times \mathbb{R}^3$,

$$\check{b}(R^{-1}X_H^1) = \check{b}(\widehat{\nabla H}),$$

de lo que obtenemos que

$$X_H^1 = R(\widehat{\nabla H}). \quad (8.12)$$

Notar que, de esta expresión, $R^{-1}X_H^1 = \widehat{\nabla H}$.

Tomando ahora $(R\hat{x}, 0) \in T_R(SO(3)) \times \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} 0 &= -X_H^2 \cdot x + \Pi \cdot (\nabla H \times x) \\ &= -X_H^2 \cdot x + x \cdot (\Pi \times \nabla H) \\ &= x \cdot (-X_H^2 + \Pi \times \nabla H), \end{aligned}$$

y por tanto,

$$X_H^2 = \Pi \times \nabla H. \quad (8.13)$$

□

Corolario 8.3. Si $H = \frac{1}{2}\Pi^T\mathbb{I}^{-1}\Pi \in C^\infty(SO(3) \times \mathbb{R}^3)$, las ecuaciones de movimiento del cuerpo rígido vienen dadas por

$$\dot{R}(t) = R(t)\hat{\Omega}(t), \quad \text{con } \Omega(t) = \mathbb{I}^{-1}\Pi(t), \quad (8.14)$$

$$\dot{\Pi}(t) = \Pi(t) \times \mathbb{I}^{-1}\Pi(t). \quad (8.15)$$

Nota 8.4. Las ecuaciones (8.15) son las **ecuaciones de Euler del cuerpo rígido** y las ecuaciones (8.14) se conocen como las **ecuaciones de reconstrucción**.

Si \mathbb{I} es una matriz diagonal con autovalores I_1, I_2, I_3 , denominados **momentos principales de inercia**,

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix},$$

entonces la expresión de la energía queda

$$h(\Pi) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Pi_1^2}{I_1} + \frac{\Pi_2^2}{I_2} + \frac{\Pi_3^2}{I_3} \right)$$

y las ecuaciones de movimiento (8.15) son

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} \Pi_2 \Pi_3, \\ \dot{\Pi}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} \Pi_3 \Pi_1, \\ \dot{\Pi}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} \Pi_1 \Pi_2. \end{aligned}$$

Conclusiones

La geometría simpléctica nos ha permitido interpretar geoméricamente algunas ecuaciones que aparecen en la mecánica analítica, ofreciéndonos una reformulación de las ecuaciones del movimiento en sistemas configurados por variedades. Empezando por el desarrollo de las formas simplécticas en espacios vectoriales, hemos podido estudiar su estructura y extender los conceptos a variedades diferenciables. Destacamos de ello la dimensionalidad par de los espacios simplécticos y la isomorfía entre espacios vectoriales simplécticos con la misma dimensión. En variedades, hemos visto algunos ejemplos, entre ellos la forma canónica en el espacio cotangente de una variedad que es una herramienta fundamental para modelizar la dinámica de los sistemas mecánicos. Además, hemos estudiado los simplectomorfismos, aplicaciones que preservan las formas simplécticas, las cuales hemos aplicado para pasar del formalismo lagrangiano al hamiltoniano. Igualmente, los simplectomorfismos nos han permitido encontrar las coordenadas apropiadas para escribir toda forma simpléctica en variedades de forma canónica, hecho conocido como teorema de Darboux. Este resultado lo justificamos a través del ejemplo del campo magnético.

Tras introducir la estructuras simplécticas, hemos aplicado los conceptos al formalismo hamiltoniano. De la definición de campo hamiltoniano, hemos podido ver que las soluciones de un sistema mecánico son precisamente las curvas integrales de estos campos. Así mismo, hemos estudiado las cantidades conservadas por medio del corchete de Poisson obteniendo, en particular, que la energía permanece constante. También hemos obtenido las ecuaciones del movimiento desde el formalismo lagrangiano, las ecuaciones de Euler-Lagrange. Un ejemplo claro de estas ecuaciones han sido las geodésicas de una métrica. Hemos estudiado además la conexión entre la mecánica lagrangiana y la geometría simpléctica, destacando la importancia de la transformada de Legendre que nos ha permitido relacionar ambos formalismos. Finalmente, hemos aplicado los conceptos expuestos anteriormente en el estudio del movimiento rotacional de un cuerpo rígido en el espacio, cuyo espacio de configuración es la variedad $SO(3)$.

Apéndice: Campos de vectores y formas diferenciables

Vectores tangentes y fibrado tangente

Una **curva** en una variedad M es una aplicación diferenciable

$$\sigma: I \rightarrow M, \quad t \mapsto \sigma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)),$$

con I un intervalo abierto en M . Si $\sigma(0) = x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$, entonces el vector tangente a la curva σ en $t = 0$ (es decir, el vector velocidad en $t = 0$) viene dado por

$$\dot{\sigma}(0) = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{t=0} = (v^1, \dots, v^n).$$

Se dice que dos curvas $t \mapsto \sigma_1(t)$ y $t \mapsto \sigma_2(t)$ en una variedad M son **equivalentes** en un punto $x \in M$ si

$$\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = x_0 \quad \text{y} \quad (\varphi \circ \sigma_1)'(0) = (\varphi \circ \sigma_2)'(0),$$

para alguna carta (U, φ) . Es fácil probar que esta definición es independiente de la carta elegida y que define una relación de equivalencia.

Un **vector tangente** v a una variedad M en un punto $x \in M$ es una clase de equivalencia de curvas en x . El conjunto de vectores tangentes a M en $x \in M$ forma un espacio vectorial $T_x M$ denominado **espacio tangente** a M en x .

El conjunto de vectores tangentes a M en $x \in M$ forma un espacio vectorial $T_x M$ denominado **espacio tangente** a M en x .

Sea (U, φ) una carta coordenada en M y (x^1, \dots, x^n) coordenadas de los puntos en U . Si $v \in T_x M$ y σ es una curva perteneciente a la clase de equivalencia de v , las componentes de v respecto a la carta elegida son (v^1, \dots, v^n) , esto es,

$$v^i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\varphi \circ \sigma)^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

La **derivada direccional** de una función $f \in C^\infty(M)$ en la dirección de v en $x \in M$, respecto a las coordenadas de la carta (U, φ) se define por

$$v(f) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(x)},$$

donde $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ es la base canónica de $T_x M$.

El **fibrado tangente** TM de una variedad M es el conjunto formado por la unión disjunta de los espacios tangentes a M ,

$$TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M. \quad (\text{A.16})$$

Si M es una variedad de dimensión n , TM es una variedad de dimensión $2n$.

Sustituyendo $T_x M$ por su dual $T_x^* M$ se obtiene una $2n$ -variedad $T^* M$ denominada **fibrado cotangente**. La base dual del espacio tangente $T_x M$ se denota por

$$\{dx^1, \dots, dx^n\}. \quad (\text{A.17})$$

La **proyección canónica** π_M es la aplicación

$$\pi_M: TM \rightarrow M \quad (\text{A.18})$$

que lleva un vector tangente v al punto $x \in M$ al que v está asociado. La imagen inversa $\pi_M^{-1}(x)$ es el espacio tangente $T_x M$. Este espacio se denomina **fibra** del fibrado tangente sobre $x \in M$.

Sean M y N variedades de dimensión m y n respectivamente y $F: M \rightarrow N$ una aplicación diferenciable. Se llama **aplicación inducida** por F en $x \in M$ a la aplicación lineal

$$T_x F: T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N. \quad (\text{A.19})$$

Si σ es una curva en M con $\sigma(0) = x$ y v es su vector velocidad, entonces $(T_x F)(v)$ es el vector tangente a la curva en N dada por $F \circ \sigma$. Si $h \in C^\infty(N)$ y $v \in T_x M$,

$$((T_x F)(v))(h) = v(h \circ F). \quad (\text{A.20})$$

Proposición A.5. Sean $F: M \rightarrow N$ y $G: N \rightarrow P$ aplicaciones diferenciables en variedades M , N y P . Entonces, $G \circ F$ es diferenciable y

$$T_x(G \circ F) = T_x G \circ T_x F, \quad \text{para todo } x \in M.$$

Sea $\sigma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ una aplicación diferenciable. Se denomina **levantamiento tangente** a la aplicación diferenciable $\dot{\sigma}: I \rightarrow TM$ dada por

$$\dot{\sigma}(t) = (T_t \sigma) \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right). \quad (\text{A.21})$$

Campos de vectores y flujos

Un **campo de vectores** X de una variedad M es una aplicación $X: M \rightarrow TM$ que asigna un vector $X_x \in T_x M$ al punto $x \in M$, es decir, $\pi_M \circ X = Id$. El espacio vectorial de campos de vectores en M se denota por $\mathfrak{X}(M)$.

Una **curva integral** σ de X es una aplicación diferenciable $\sigma: I \rightarrow M$, con I un intervalo abierto conteniendo el origen, tal que $\sigma(0) = x_0$ y

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d(x^i \circ \sigma)}{dt} = X(\sigma(t)), \quad \text{para todo } t \in I. \quad (\text{A.22})$$

Si f es una función de clase $C^\infty(M)$,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma) = X_{\sigma(t)}(f). \quad (\text{A.23})$$

El **flujo** de X es una colección de aplicaciones $\phi_t: M \rightarrow M$ tal que $t \mapsto \phi_t(x)$ es una curva integral de X con $\phi_t(0) = x$. El teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales garantiza que ϕ es de clase $C^\infty(M)$ en x y t si X lo es. De la unicidad se tiene

$$\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s \quad \text{y} \quad \phi_0 = Id. \quad (\text{A.24})$$

Un **campo de vectores dependiente del tiempo** es una aplicación $X: M \times \mathbb{R} \rightarrow TM$ tal que $X_{(x,t)} \in T_x M$, para todo $x \in M$ y $t \in \mathbb{R}$. Una **curva integral** de X es una curva $\sigma(t)$ en M tal que $\sigma'(t) = X(\sigma(t), t)$. En este caso, el flujo es la colección de aplicaciones

$$\phi_{t,s}: M \longrightarrow M \quad (\text{A.25})$$

tal que $t \mapsto \phi_{t,s}(x)$ es la curva integral $\sigma(t)$ con $\sigma(s) = x$ en $t = s$. El teorema de existencia y unicidad, y en particular, la unicidad demuestra la siguiente propiedad para el flujo dependiente del tiempo

$$\phi_{t,s} \circ \phi_{s,r} = \phi_{t,r}. \quad (\text{A.26})$$

Si $F: M \rightarrow N$ es un difeomorfismo, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ se dice que X e Y están **F-relacionados** si $F_*X = Y$.

Lema A.6. *Si X e Y están F-relacionados, entonces se verifica que*

$$T_x F(X(x)) = Y(F(x)), \quad \text{para todo } x \in M. \quad (\text{A.27})$$

Además, si σ es curva integral de X , entonces $F \circ \sigma$ es curva integral de Y .

Diferenciales y covectores

Si f es una función de clase $C^\infty(M)$, la derivada de f en un punto $x \in M$ se define por la aplicación

$$T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}.$$

Se denomina **diferencial** de f en un punto x en M a la aplicación $df(x): T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, esto es, $df(x) \in T_x^* M$ es el espacio dual del espacio vectorial $T_x M$. Si v es un vector en $T_x M$,

$$df(v) = v(f), \quad \text{para todo } v \in T_x M. \quad (\text{A.28})$$

Con respecto de la base $\{dx^i\}$,

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i, \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M).$$

Formas diferenciables

Una **k -forma** α en una variedad M es una función que asigna a cada punto $x \in M$ una aplicación antisimétrica k -multilineal en el espacio tangente a M en x ,

$$\alpha(x): T_x M \times \dots \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Si α es una k -forma y β es una l -forma en V , el **producto exterior** es un operador \wedge que asigna a (α, β) una $(k+l)$ -forma $\alpha \wedge \beta$ en M definida por

$$\alpha \wedge \beta = \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn}(\pi) \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \beta(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+l)}), \quad (\text{A.29})$$

donde S_p es el grupo de todas las permutaciones del conjunto $\{1, \dots, k+l\}$ y $\text{sgn}(\pi)$ es el signo de la permutación π .

Proposición A.7. *El producto exterior satisface las siguientes propiedades:*

i) $\alpha \wedge \beta$ es asociativo:

$$\alpha \wedge (\alpha \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma;$$

ii) $\alpha \wedge \beta$ es bilineal en α, β ;

iii) $\alpha \wedge \beta$ es anticonmutativo:

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha,$$

para todo $\alpha \in \Omega^k(M)$ y $\beta \in \Omega^l(M)$.

Nota A.8. En términos de la base dual $\{dx^i\}$, toda k -forma puede escribirse localmente como

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

donde el sumatorio es para todo i_j satisfaciendo $i_1 < \dots < i_k$. La diferenciabilidad de α es equivalente a la diferenciabilidad de las funciones $\alpha_{i_1 \dots i_k}$.

Pull-back de una aplicación

Sea $F: M \rightarrow N$ una aplicación de clase $C^\infty(M)$ con M y N variedades y α una k -forma en N . Se define el **pull-back** $F^* \alpha$ en un punto $x \in M$ como la k -forma en M dada por

$$(F^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(T_x f(v_1), \dots, T_x f(v_k)), \quad (\text{A.30})$$

para todo $x \in M$ y $(v_1, \dots, v_k) \in T_x M$.

Contracción y diferencial exterior

Sea α una k -forma en una variedad M y X un campo de vectores. El operador **contracción** por X $i_X: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}$ viene dado por

$$i_X \alpha(X_1, \dots, X_{k-1}) = \alpha(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad \text{para todo } X_i \in \mathfrak{X}(M). \quad (\text{A.31})$$

Proposición A.9. *Sea α una k -forma y β una 1-forma en un variedad M . Entonces,*

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X \beta). \quad (\text{A.32})$$

Proposición A.10. *Existe una única aplicación d denominada **diferencial exterior** desde las k -formas en M a las $(k+1)$ -formas en M verificando:*

- i) Si $\alpha = f \in C^\infty(M)$ es una 0-forma, entonces df es la diferencial de f ;
- ii) $d\alpha$ es lineal en α ;
- iii) $d\alpha$ satisface la regla del producto:

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta,$$

donde α es una k -forma y β una l -forma;

iv) $d^2 = 0$, es decir, $d(d\alpha) = 0$ para toda k -forma α ;

v) d es un operador local verificando, $d(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$, con U entorno abierto en M .

Proposición A.11. *Dada una k -forma α , la diferencial exterior viene dada por*

$$d\alpha(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k). \quad (\text{A.33})$$

Proposición A.12. *La diferencial exterior conmuta con el pull-back, es decir,*

$$d(F^* \alpha) = F^*(d\alpha), \quad (\text{A.34})$$

donde α es una k -forma en N y $F: M \rightarrow N$ es una aplicación diferenciable.

Se dice que una k -forma α es **cerrada** si $d\alpha = 0$ y **exacta** si existe una $(k-1)$ -forma β tal que $\alpha = d\beta$.

Proposición A.13 (Lema de Poincaré). *Toda forma cerrada es localmente exacta, es decir, si $d\alpha = 0$, existe un entorno de cada punto tal que $\alpha = d\beta$.*

Derivada de Lie

Sean α una k -forma y X un campo de vectores con flujo $\{\phi_t\}$. La **derivada de Lie** de α a lo largo de X viene dada por

$$\mathcal{L}_X \alpha = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t^* \alpha) - \alpha] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_t^* \alpha. \quad (\text{A.35})$$

Teorema A.14 (Teorema de la derivada de Lie).

$$\frac{d}{dt} \phi_t^* \alpha = \phi_t^* \mathcal{L}_X \alpha. \quad (\text{A.36})$$

Además, esta fórmula es válida para un campo de vectores dependiente del tiempo,

$$\frac{d}{dt} \phi_{t,s}^* \alpha = \phi_{t,s}^* \mathcal{L}_X \alpha, \quad (\text{A.37})$$

donde $\mathcal{L}_X \alpha$ es el campo de vectores X evaluado en t .

De (A.24) y (A.35) se obtiene el siguiente corolario.

Corolario A.15. Sea α una k -forma y X un campo de vectores con flujo $\{\phi_t\}$. Entonces,

$$\mathcal{L}_X \alpha = 0 \iff \phi_t^* \alpha = \alpha. \quad (\text{A.38})$$

Proposición A.16. Si f es una función de clase $C^\infty(M)$ y X es un campo de vectores en M , la **derivada de Lie de f a lo largo de X** es la derivada direccional

$$\mathcal{L}_X f = X(f) = df(X). \quad (\text{A.39})$$

Teorema A.17 (Fórmula Mágica de Cartan). Sea X un campo de vectores y α una k -forma en una variedad M . Entonces,

$$\mathcal{L}_X \alpha = di_X \alpha + i_X d\alpha. \quad (\text{A.40})$$

Corolario A.18. Si α es una k -forma y X, Y campos de vectores,

$$i_{[X,Y]} \alpha = \mathcal{L}_X i_Y \alpha - i_Y \mathcal{L}_X \alpha. \quad (\text{A.41})$$

Grupos de Lie

Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo (G, \cdot) tal que las operaciones multiplicación e inversión son diferenciables.

Sea $g \in G$. Llamamos **traslación a izquierda** por g al difeomorfismo $l_g: G \rightarrow G$ dado por $l_g(x) = gx$, con $x \in G$.

Un campo de vectores X en G se dice que es **invariante a izquierda** si

$$(T_x l_g)X(x) = X(xg), \quad \text{para todo } g, x \in G. \quad (\text{A.42})$$

Denotaremos por \mathfrak{g} al conjunto de todos los campos de vectores invariantes a izquierda de G . \mathfrak{g} es un espacio vectorial isomorfo a $T_e G$, donde e es el elemento identidad de G . Esta identificación viene dada por $v \in T_e G \mapsto \tilde{v} \in \mathfrak{g}$ con

$$\tilde{v}(g) = (T_e l_g)(v).$$

Si X, Y son dos campos de vectores invariantes a izquierda, entonces $[X, Y]$ es también un campo de vectores invariante a izquierda.

De las propiedades del corchete de Lie, se tiene que $(T_e G, [\cdot, \cdot])$ es un **álgebra de Lie**, donde

$$[v, w] = [\tilde{v}, \tilde{w}](e), \quad \text{para todo } v, w \in T_e G. \quad (\text{A.43})$$

Presentamos a continuación algunos grupos de Lie interesantes en el contexto de este trabajo.

- El grupo general lineal $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices. Además, $GL(n, \mathbb{R})$ es una subvariedad abierta de $gl(n, \mathbb{R})$. Por tanto, $T_I(GL(n, \mathbb{R})) = gl(n, \mathbb{R})$ con el conmutador

$$[A, B] = AB - BA. \quad (\text{A.44})$$

- El grupo especial ortogonal $SO(n) = \{A \in gl(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1, \quad A^T A = I\}$ es un grupo de Lie con la multiplicación de matrices. Para este grupo, $T_I(SO(3))$ es el conjunto de matrices antisimétricas de orden 3 y el corchete de Lie es el conmutador de matrices (A.44). Además, existe una identificación entre $T_I(SO(3))$ y \mathbb{R}^3 tal que

$$[\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2] = (\Omega_1 \times \Omega_2)^\wedge, \quad \Omega_1, \Omega_2 \in \mathbb{R}^3. \quad (\text{A.45})$$

Bibliografía

- [1] Ralph Abraham and Jerrold E. Marsden. *Foundations of Mechanics*. Westview Press, 1987.
- [2] A.Z. Capri and M. Kobayashi. A mechanical model with constraints. *Journal of Mathematical Physics*, 23(5):736–741, 1982.
- [3] Ana Cannas da Silva. Lectures on Symplectic Geometry. volume 1764 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [4] Tanya Schmah Darryl D. Holm and Cristina Stoica. *Geometric Mechanics and Symmetry. From Finite to Infinite Dimensions*. Oxford University Press, 2009.
- [5] Cornelius Lanczos. *The Variational Principles of Mechanics, Mathematical Expositions*. Number 4. University of Toronto Press, 1970.
- [6] Jerrold E. Marsden and Tudor S. Ratiu. *Introduction to Mechanics and Symmetry. A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*. Springer-Verlag New York, 1999.
- [7] S.D. Poisson. *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, volume 8, chapter 15, pages 266–344. Journal de L'École Polytechnique, 1809.