Lógica Temporal y Autómatas Finitos

Universidad de La Laguna

Alumno: Martín Alexis Sócola Ramos

Tutora: Margarita Vázquez Campos

Año Académico: 2014-2015

«Why do you ask what, when the delicious question is when?. The only difference between past and present is semantics. Lives, lived, will live. Dies, died, will die. If we could perceive time as it really was, what reason would grammar professors have to get out of bed? . . . »

Robert and Rosalind Lutece - Bioshock Infinite

Agradecimientos

Debo expresar mi más profundo agradecimiento a Margarita Vázquez, tutora del presente trabajo, por su paciencia y comentarios. Gracias a ella, la *lógica* es un buen motivo para estar entusiasmado un lunes por la mañana.

Índice general

1. Introducción

La interacción entre disciplinas ha producido grandes desarrollos y desafíos. La lógica temporal ofrece un ejemplo de lo fructífera que puede ser la relación entre distintos campos de investigación. Disciplinas como filosofía, ética, lógica, matemática, lingüística e informática teórica han jugado roles fundamentales en su desarrollo. Considerando la influencia que han tenido unas en otras, la tesis del presente trabajo es el estudio de las relaciones entre la lógica temporal y los autómatas finitos.

Para lograr nuestro objetivo, en la sección titulada «antecedentes» haremos un breve recorrido histórico por la lógica temporal y la teoría de autómatas. En este apartado se pretende dar a conocer las principales aportaciones que contribuyeron a la creación de ambos campos de investigación, proporcionando así una visión general. Más adelante, en «estado actual», entraremos de lleno en la tesis central de nuestro trabajo. Para lograr tal meta, hemos dividido la sección en tres apartados. El primero explora la sintaxis, semántica y sistema axiomático de sistema mínimo de lógica temporal $\mathbf{K}_t$. El segundo introduce las nociones básicas de los autómatas finitos. El tercer apartado está dedicado exclusivamente a mostrar la construcción de un autómata finito para las fórmulas $\mathbf{F}p$ y $\mathbf{G}p$. Dicha construcción muestra el patrón que siguen ambas fórmulas y su explicación. En la sección «discusión y posicionamiento» mostramos una reflexión filosófica sobre los axiomas que representan el flujo temporal y su relación con la tesis del trabajo. Finalmente, en la sección «conclusiones y vías abiertas» se apuntan los resultados de este trabajo, así como algunos problemas filosóficos que pueden surgir al considerar la relación lógica-autómatas.

2. Antecedentes

En esta sección se esbozan los antecedentes *históricos* de las dos disciplinas que pretendemos relacionar, a saber: la lógica temporal y la teoría de autómatas. Para ello, por un lado se presenta un recorrido histórico de la relación de tiempo y lógica y por otro lado, se introducen los antecedentes históricos y una visión general de la teoría de autómatas.

2.1. Tiempo y Lógica a través de la historia

Hay verdades que parecen no depender del tiempo, como que «7 es un número primo» o que «$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$». Otras sin embargo, parecen estar sujetas al tiempo, como por ejemplo «en julio estaré en Varsovia» o algo tan habitual como «iré a hacer la compra a las 18:00». De hecho, utilizamos nociones temporales en la mayoría de nuestras expresiones cotidianas, como por ejemplo; «dame un minuto», «ahora es el momento», etc....

Si se nos propone la tarea de formalizar este tipo de expresiones con herramientas básicas como la lógica clásica, nos damos rápidamente cuenta de que es muy difícil expresar proposiciones temporales sólo con variables proposicionales y constantes lógicas; hace falta mucho más. Aquí es donde nace la lógica temporal como una extensión de la lógica clásica destinada a la formalización de expresiones que involucren o demanden una descripción formal del momento en el que fueron proferidas[1]. Hoy en día contamos con numerosas *lógicas temporales* que pueden abastecer a un gran número de formalizaciones que precisen de la referencia al tiempo y que además pueden ser clasificadas en alguno de los cuatro grados de *tense-logical involvement* que propone Arthur Prior (1914 - 1969)[2]. Por esta razón, no sólo queda justificado utilizar el término lógica temporal como aquella familia de lógicas o técnicas lógicas aplicadas a un amplio rango de problemas lógicos y filosóficos que involucren de alguna manera u otra una relación con el tiempo, sino que también podemos entender la lógica temporal como una herramienta que, en tanto que nos ayuda a clarificar las relaciones temporales, arroja luz sobre la naturaleza del tiempo y sus propiedades[3].

Los trabajos de A. Prior[4] durante los años 50 y 60 son la base de esta disciplina, dándole así el título de padre fundador de la lógica temporal. Se reconocen distintas influencias en Prior; empezó trabajando en temas concernientes a la ética y teología, pero luego se interesó en las lecturas de los filósofos antiguos, así como también los megárico-estóicos. Prior desarrolló la lógica temporal como una herramienta para aclarar los temas concernientes al determinismo e indeterminismo que surgieron en la antigüedad, y también como una lógica capaz de formalizar proposiciones cuya verdad cambia con el tiempo.

[1] VÁZQUEZ, M. *Introducción a la Lógica Temporal*, Publicado en Revista La Laguna, 9/07/2001, p. 187.

[2] UCKELMAN, S. *Lecture Notes: Temporal Logic*, ILLC, Ámsterdam, 2010.

[3] RESCHER, N. AND URQUHART, A. *Temporal Logic*, Springer-Verlag/Wien, 1971, pp. 1.-13.

[4] Cf. PRIOR, A. *Time and Modality*, Oxford, Oxford University Pres, 1957; PRIOR, A. *Past, Present and Future*, Oxford, Oxford University Press, 1967; PRIOR, A. *Papers on Time and Tense*, Oxford, Oxford University Press, 1968.

Hay una serie de autores que influyeron de algún modo u otro a su trabajo, dotándolo de distintas perspectivas pero con un elemento en común; la reflexión lógico-filosófica sobre los enunciados temporales. En las líneas siguientes mostramos un rastreo de los aportaciones lógico-filosóficos con más relevancia que jugaron un papel importante en la configuración actual de la lógica temporal. La exposición sigue el esquema planteado por Øhrstrøm y Hasle (1995, 6 - 240).

Una de las primeras referencias sobre este problema son las consideraciones de Aristóteles (384 a. C. - 322 a. C.) y Diodoro Cronos (405 a. C. - 304 a. C.) sobre el determinismo, indeterminismo, naturaleza de los condicionales y los futuros contingentes[5]. Aristóteles en el Περι Ἑρμενείας presenta una visión indeterminista respecto a los posibles eventos futuros que pueden o no ocurrir. Diodoro, en su famoso *argumento maestro* sustenta que los eventos del futuro están determinados. El debate entre Aristóteles y Diodoro constituye el primer indicio de análisis lógico temporal bajo la lente de la modalidad.

La modalidad es el estudio de las nociones de necesidad, posibilidad y contingencia. Dichos estudios tuvieron gran repercusión en la escuela megárico-estóica y en la escolástica. El punto de inicio de las investigaciones lógicas en la Edad Media se basaba en la traducción que Boecio (480 - 525 d. C.) hizo de las obras que conformaban la *logica vetus*, es decir los trabajos de Aristóteles; Κατεγορίαι y Περι Ἑρμενείας y Porfirio (232 - 304 d. C.); Εισαγογέ. Gracias a la traducción de Boecio, los temas más recurrentes fueron los que versan sobre la modalidad y el problema de los futuros contingentes descrito en el Περι Ἑρμενείας[6]. Sin embargo, la lógica desarrollada por los escolásticos estuvo caracterizada también por la idea de que el tiempo juega un papel importante en el lenguaje natural, y su afán de construir una lógica basada en el lenguaje natural les llevó a considerar las proposiciones temporales desde un punto de vista formal[7]. Dentro de este marco, los escolásticos se fueron dando cuenta de que el análisis de las relaciones temporales entre proposiciones guardaba estrecho vínculo con algunos problemas de índole teológica. De ahí a que el papel de la lógica en la Edad Media se vea principalmente caracterizado como una herramienta de análisis aplicada a la argumentación teológica[8].

---

[5]Cf. GONZÁLEZ RIQUELME, M. *En torno al argumento de Diodoro Cronos*, Publicado en Revista La Laguna, 9 de Julio de 2001, pp. 177 - 185.

[6]Cf. MAREBON, J. *Latin Tradition of Logic to 1100* en Handbook of the History of Logic. Volume 2: Mediaeval and Renaissance Logic, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), Elsevier, 2008, pp. 1 - 63.

[7]Cf. MATES, B. *Stoic Logic*, University of California Press, 1961.

[8]Cf. ØHRSTRØM AND HASLE. *Temporal Logic, From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*, Dordrecht,

Considere, por ejemplo, las siguientes proposiciones: «Cristo nació», «El Anticristo vendrá »[9] y «La virgen María fue virgen antes, durante y perpetuamente después del parto»[10]. Dichas proposiciones son dogmas de la fe cristiana, pero a su vez dan lugar a problemas lógico-filosóficos. Por un lado el objeto de fe es el mismo. Por otro, hay al menos algunas diferencias entre lo que ha sido creído por los contemporáneos de Cristo (primera proposición), lo que ha sido creído por los creyentes de los siglos posteriores (segunda proposición) y en el caso de la tercera proposición; hay diferencia entre lo que creyeron los contemporáneos de María (que fue virgen antes del parto), los que estuvieron en el momento del parto (durante el parto) y los creyentes de los siglos posteriores. Lo curioso de estas proposiciones es que aún suponiendo que la fe puede ser mantenida con independencia del tiempo, los dogmas principales son descritos por estados temporales cuyo significado varía con el tiempo de la misma manera que cualquier otro enunciado[11].

Esta clase de problemas lógico-teológicos dieron lugar nuevos temas de discusión. Øhrstrøm y Hasle señalan importantes paradigmas en la investigación lógica-filosófica medieval[12]. Ejemplo de ello es el estudio sobre cómo determinar la referencia temporal de un sujeto. Este problema es conocido como *Ampliatio*. Otros como *Incipit - Desinit*, plantean el problema del inicio y finalización de una acción dentro de un límite temporal. Fueron recurrentes también los problemas que respectan a la presciencia divina, al problema de la libertad y del determinismo tratados por Tomás de Aquino, Agustin de Hipona, Ockham, Buridan y Leibniz principalmente, así como también las denominadas *sophismatas*[13].

Después del periodo escolástico, la lógica renacentista fue tornándose más como un *ars docendi* o arte de pensar que un análisis lógico del lenguaje natural[14]. El nuevo paradigma renacentista criticó fuertemente los estudios escolásticos sobre el tiempo y la lógica. El trabajo de Rodolphus Agricola (1444 - 1485): *De inventione dialectica libri tres*, escrita en 1479 y publicada en 1515 dio un giro radical a la lógica, centrándose más en la *dialéctica* que en la

Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 33 - 35.

[9]Íbid, pp. 37 - 42

[10]MARTÍN I, *Concilio ed Letrán* (649), Dz: 256 Can. 3.

[11]Cf. ØHRSTRØM AND HASLE. *Temporal Logic, From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995, p. 33

[12]Cf. Íbid, pp. 39 - 117.

[13]Una *sophismata* es un puzzle lógico, una frase ambigua, desconcertante o simplemente difícil que tiene que ser resuelta.

[14]Cf. ASHWORTH, E. J. *Language and Logic in the Post-Medieval Period, Vol. 12 Synthese Historical Library*, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1974, pp. 8 - 30.

silogística[15]. La motivación de este giro fue «la gran importancia que se le dio a los debates en el contexto de la vida cívica en el Renacimiento»[16]. Durante el Renacimiento y los siglos posteriores se abandona el interés de la relación entre tiempo y lógica. El nuevo paradigma viene representado por dos personajes; Juan Caramuel y Lobkowitz (1606 - 1682) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), ambos autores buscaron una lógica orientada a ser una herramienta general que sirva para determinar qué inferencias son formalmente válidas [17][18].

A pesar de que la época moderna vino marcada por el trabajo de Leibniz, supone también un redescubrimiento de la relación lógica-tiempo. Los aportes más representativos son los de McTaggart, Boole, Peirce, Łukasiewicz, Reichenbach y por supuesto todos estos estudios condensados en los trabajos de A. Prior. A principios del siglo XX, McTaggart publica un polémico artículo titulado *The Unreality of Time* donde intenta demostrar que el tiempo no existe y que el orden temporal es una mera apariencia. Para apoyar su tesis, McTaggart introdujo dos descripciones distintas del orden temporal de los eventos; la serie - A y la serie - B. Según la serie - A los sucesos se ordenan a través del tiempo en pasado, presente y futuro, mientras que la serie - B sólo hace referencia a un orden de antes y después[19]. Veamos el siguiente ejemplo para ilustrar la distinción:

> «Una vez más todo el problema consistía en matar el tiempo. [...] Me ponía a veces a pensar en mi cuarto, [...] detallando mentalmente todo lo que encontraba en el camino [...] Así pasó el tiempo, con las horas de sueño, los recuerdos [...] No había comprendido hasta qué punto los días podían ser a la vez largos y cortos. [...]. Las palabras ayer y mañana eran las únicas que conservaban un sentido para mí».
>
> CAMUS, A. - *L'étranger*.

[15]Cf. ASHWORTH, E. J. *Developments in the Fifteenth and Sixteenth Centuries* en Handbook of the History of Logic, Volume 2: Mediaeval and Renaissance Logic, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), Elsevier, 2008, p. 625.

[16]Cf. CASTRILLO CRIADO, P. *El impacto del Humanismo Renacentista en la concepción de la Lógica*, Publicado en Éndoxa: Series Filosóficas Nro. 5. 1995, Madrid, UNED, pp. 91 - 114.

[17]Cf. LENZEN, W. *Leibniz's Logic* en Handbook of the History of Logic. Volume 3: Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), North-Holland Publish Co, 2004, pp. 1 - 83.

[18]Cf. DVOŘÁK, P. *Relational Logic of Juan Caramuel* en Handbook of the History of Logic. Volume 2: Mediaeval and Renaissance Logic, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), Elsevier, 2008, pp. 645 - 666.

[19]MCTAGGART, E. J. *The Unreality of Time*, Mind, October - 1908, p. 458

El ejemplo propuesto muestra a una misma persona (Monsieur Meursault) que experimenta el tiempo de dos maneras distintas; primero experimenta recuerdos de cuando estaba en libertad, tiene una percepción más profunda del pasado, en otras palabras ordena el tiempo según la serie - A. Sin embargo, finalmente, en la cárcel, sin experiencia del cambio temporal termina percibiendo el tiempo sólo como si existiera «ayer y mañana», establece un orden temporal de antes y después, es decir, ordena el tiempo según la serie - B. Hemos de notar que la serie - B implica una noción estática del tiempo, con lo cual McTaggart argumenta que en realidad la serie - B no es precisamente una serie de tiempo, dado que asume una posición fija. Para McTaggart, la serie esencial es la serie - A, la razón es que el cambio es lo primordial para entender el tiempo, y la serie - B sin la serie A no supone un cambio genuino[20]. La serie - A, en cambio está en constante cambio, lo que hace que sea contradictoria, por un lado el tiempo que es presente ahora es pasado y así sucesivamente. Ningún tiempo puede ser presente, pasado y futuro al mismo tiempo, de modo que si la serie - A nos lleva a una contradicción y el tiempo no puede ser visto según la serie - B, entonces, concluye McTaggart, el tiempo es irreal[21]. La distinción entre serie - A y serie - B del tiempo constituye un aporte importante en el sentido de que nos proporciona un aparato ontológico-conceptual que nos permite definir qué tipo de *compromiso ontológico* tenemos con los conceptos primitivos del tiempo. Por ejemplo, en la lógica temporal podemos asumir modelos de tiempo basados en instantes o en intervalos. Los instantes corresponderán a la serie - A, mientras que los intervalos de tiempo tienen su reflejo en la serie - B.

Años después, G. Boole (1815 - 1864), en un manuscrito titulado *Sketch of a Theory and Method of Probabilities Founded upon the Calculus of Logic*, escrito probablemente entre 1848 y 1854, encuentra interesante el aspecto temporal de proposiciones como; «Llueve» o «Graniza». Considera que los símbolos $x,\ y$ son representaciones del tiempo al cual las proposiciones se refieren[22]. La idea principal se puede ilustrar con el siguiente ejemplo[23]: «Si llueve, (entonces) me mojo», según Boole se puede expresar por la ecuación: $x = vy$. Donde x, y, v son funciones booleanas[24]. La función x está definida sobre el conjunto de momentos cuyo valor es 1 cuando «llueve» es verdadero y 0 cuando es falso. La función y

[20] Íbid, p. 459

[21] Íbid, p. 464

[22] Cf. BOOLE, G. *Studies in Logic and Probability*, London, 1953, p. 146.

[23] El ejemplo propuesto es similar al que aparece en ØHRSTRØM AND HASLE. *Temporal Logic, From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 126 - 127.

[24] Las funciones booleanas son aquellas que estan definidas bajo el domino $\{0,\ 1\}$.

y la función v estan definidas de manera análoga a la función x. y representa «me mojo» y v, de acuerdo a Boole, es el representante del tiempo parcialmente indefinido. El papel que juega v en la ecuación es asegurar que el conjunto de verdades de x es un subconjunto de verdades de y[25]. En otras palabras, que sea cual sea el momento al que «llueva» se refiera, no se puede dar jamás que «llueva $= 1$», y «me mojo $= 0$». Eso equivaldría a decir: «llueve (x)» entonces «en el momento que llueve (v) no me estoy mojando (y) », lo cual supondría una contradicción. De este modo, la implicación «si llueve, (entonces) me mojo» queda descrita por una ecuación con una variable temporal. La idea de Boole no es lo suficientemente *expresiva* para hablar propiamente de lógica temporal. Al tratarse de un álgebra que reduce el tiempo a una variable relativa al discurso, es difícil formalizar proposiciones que contengan elementos temporales más complejos como por ejemplo: «Son las 2 am, pero no me iré a dormir *hasta* que acabe la fiesta».

Charles Sanders Peirce (1839 - 1914) encontró un grave fallo conceptual en el planteamiento de describir el tiempo en términos algebráicos. La crítica reside en que el futuro y el pasado son asimétricos; por un lado el pasado es algo irrevocable, mientras que el futuro se remite a las cosas que pueden o no pasar, por tanto, considerar sólo el álgebra como herramienta para describir el tiempo no es un proyecto plausible[26] ya que se hace difícil relacionar eventos cuyos estados no dependen del contexto en el que se está hablando. Por su parte, Peirce prefería analizar el concepto de tiempo bajo la luz de la modalidad, la cual consta de los siguientes términos; *potencialidad/posibilidad*, *realidad* y *necesidad*. Dichos términos se pueden definir en función del tiempo. *Realidad* sería «lo dado», lo cual haría referencia al pasado y al presente. *Posibilidad* y *necesidad* serían los conceptos relativos al futuro[27]. Es curioso que Peirce no indentificase al pasado con lo necesario, como lo muestra Diodoro Cronos en la primera asunción de su *argumento maestro*; «Toda proposición sobre el pasado es necesaria». Y la razón era simple; para Peirce la necesidad se identificaba más con las proposiciones del futuro que con las del pasado, en el sentido de que existen ciertas proposiciones del futuro determinadas por leyes naturales o incidentes predeterminados que tienen que ser necesariamente en el futuro. El futuro quedaría constituido por proposiciones del tipo; «es necesario que en el futuro . . . », «es posible que en el futuro . . . ». Dándole así un

[25]La operación vy selecciona aquellas porciones del tiempo en las que v e y son verdaderas.

[26]Cf. PEIRCE, S. *New Elements of Mathematics* Vol. II, editor Carolyn Eisele, Humanities Press, 1976, p. 9.

[27]Cf. ØHRSTRØM AND HASLE. *Temporal Logic, From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 130 - 137

toque determinista a la postura de Peirce. El tema del determinismo lógico fue crucial para el desarrollo de la lógica temporal. El primero en incidir en este problema desde el punto de vista del cálculo simbólico fue el lógico Jan Łukasiewicz (1878 - 1956), quien formalizó y analizó el problema de los futuros contingentes, llegando a la conclusión de que el principio de bivalencia de la lógica clásica es insuficiente para analizar el problema de los futuros contingentes, lo cual constituye la base de las lógicas multivaluadas[28].

En 1947, Hans Reichenbach (1981 - 1953) en su obra *Elements of Symbolic Logic* introduce una serie de conceptos que serán cruciales en el análisis del tiempo desde un punto de vista formal. Dichos conceptos son: *speech time* (S), *event time* (E) y *reference time* (R). Esta estructura basada en estos tres puntos es una herramienta que se utiliza para determinar el funcionamiento de los tiempos verbales en inglés. El ejemplo que propone Reichenbah es es: «Habré visto a John». Siendo S el primer punto, E el evento y R la referencia en el futuro. Esta oración claramente está situada en el futuro perfecto, que aunque no es muy natural, es correcta gramaticalmente hablando. La oración habla de cierto evento (ver a John) (S), también está claro que nos dirige a un tiempo futuro (R) diferente del tiempo del evento (E). Es decir, S es el momento en el que decimos «habré visto a John». E es cuando «hayamos visto a John». Pero la referencia está en un futuro distinto a cuando «hayamos visto a John». A los ojos de Prior esta estructura es bastante limitada y complicada, tendría problemas a la hora de representar una oración como: «habré estado yendo a ver a John». A pesar de que esta frase tampoco parece muy natural, Prior argumenta que es gramaticalmente correcta y que expresa una relación temporal que la estructura de Reichenbach no puede reflejar[29].

Las ideas antes mostradas son sólo algunos bocetos en los que Prior se inspiró para desarrollar la lógica temporal. Vio en ella una herramienta para aclarar los temas concernientes al determinismo e indeterminismo que surgieron en la antigüedad, como una lógica capaz de formalizar proposiciones cuya verdad cambia con el tiempo y también como una lógica que estaba íntimamente relacionada con la lógica modal[30].

[28]Cf. ŁUKASIEWICZ, J. *Estudios de Lógica y Filosofía*, Caps. 2 - 3, edición y selección de Alfredo Deaño, Ed. Electrónica de www.philosophia.cl/Escuela de Filosofía Universidad ARCIS.

[29]Cf. PRIOR, A. *Past, Present and Future*, Oxford, 1967, p. 13.

[30]La lógica modal fue desarrollada por C.I. Lewis en 1910. La semántica de la lógica modal conocida como la semántica de mundos posibles fue introducida por Kripke en 1959. Prior y Kripke mantuvieron cierta correspondencia sobre cuestiones de la naturaleza del tiempo. Cf. OHRSTRØM AND HASLE. (1996), pp. 167 - 196

2.2. Autómatas, un panorama general

En muchos campos, surgen temas y problemas de la confluencia de distintas disciplinas. Así pasa con la teoría de autómatas que es producto de la convergencia de muchas ideas que provienen sólo de distintos campos como la biología, lingüística, matemática, filosofía, etc.[31] La teoría de autómatas es una disciplina teórica que pertenece a un campo mucho más amplio llamado ciencias de la computación y su papel es facilitar el lenguaje formal en la especificación de procesos algorítmicos[32]. A continuación, presentaremos una perspectiva general de esta disciplina, describiremos brevemente tres aportaciones fundamentales a la teoría de autómatas que propone Jurado Málaga (2008, 5-15)[33]. El primero nace a raíz del programa formalista de Hilbert y su relación con los trabajos de Turing y Church, estos autores son los responsables de delimitar los límites de la computación. El segundo es la idea de representar formalmente una máquina abstracta. Y el tercero es la relación de los autómatas con los lenguajes formales.

El problema que plantea D. Hilbert (1982 - 1943) en 1928 hoy se conoce como *entscheidungsproblem* y básicamente se pregunta por la posibilidad de poder derivar todas las verdades matemáticas a partir de un sistema axiomático[34]. Luego la tarea consistiría en elaborar dicho sistema para permitir decidir la verdad o falsedad de cada afirmación matemática de una manera puramente sintáctica. En cierto modo recuerda a la empresa de Leibniz, la diferencia es que en esta época ya se contaba con la herramienta de la lógica simbólica. Entscheidungsproblem literalmente significa «problema de decisión», y en términos vagos vendría a plantearse la pregunta: ¿es posible, aunque sea en teoría, diseñar una serie de pasos que reemplace a un matemático?[35] Frente a este reto, hubo tres personajes que le hicieron frente: Kurt Gödel (1906 - 1978), Alan Turing (1912 - 1954) y Alonzo Church (1903 - 1995).

[31] PERRIN, D. *Les Débuts de la Théorie des Automates*, Technique et Science Informatiques, Editions Hermes, 1995, 14 (4), pp.409-433. <hal-00793909>

[32] El término «procesos algorítmicos» sería algo así como los pasos a seguir en una receta de cocina, donde tienes distintos elementos; ingredientes/formulas y una serie de pasos aplicando ciertas reglas; receta/reglas para lograr el plato deseado/solventar el problema.

[33] JURADO MÁLAGA, E. *Teoría de autómatas y lenguajes formales*, Colección manuales Universidad de Extremadura - 55 (E.E.E.S), 2008, pp. 5 - 15.

[34] VAN HEIJENOORT, J. *A source book in Mathematical Logic 1879 - 1931*, Harvard Univresity Press, Cambridge, Massachusetts, 1967, pp. 464 - 480.

[35] PIÑERO, G. Y MARTÍNEZ, G. *Gödel ∀ (para todos)*, Ediciones Destino | Colección imago mundi Vol. 170, Barcelona, 2010, pp. 52 - 70.

Para entender la propuesta de Gödel hace falta definir tres conceptos cruciales: consistencia, completitud y decidibilidad.

La consistencia nos dice que si una fórmula A tiene una demostración en un sistema formal, entonces es universalmente válida, simbólicamente: $\vdash A$ entonces $\Vdash A$. La completitud afirma que si una fórmula A es una tautología, entonces A tiene una prueba en el sistema, simbólicamente: $\Vdash A$ entonces $\vdash A$. Y la decidibilidad nos dice que un sistema formal es decidible si podemos decidir en un número finito de pasos si una fórmula es válida o no en el sistema[36]. Por ejemplo, la lógica clásica es decidible porque tenemos las funciones de verdad, que en un número finito de pasos y de manera automática nos permiten decir si una fórmula es válida o no.

Una vez que hemos aclarado estos conceptos, podemos enunciar los aportes de los autores antes mencionados. En 1931, Gödel introduce los llamados *teoremas de incompletitud* demostrando que cualquier teoría aritmética recursiva si es consistente es incompleta. y que ninguna teoría axiomática consistente puede probar su propia consistencia[37]. En función a los conceptos antes definidos podemos explicar este enunciado: en primer lugar en un sistema aritmético recursivo en el que todas sus fórmulas demostrables sean válidas, tendrá alguna fórmula válida que no se pueda derivar en el sistema (ni ella ni su negación) Por otro lado tenemos que la segunda parte del teorema de la incompletitud es básicamente una respuesta negativa al *entscheidungsproblem*. Es decir, no podemos decidir si una fórmula de la teoría consistente pertenece a esta teoría. Sin embargo, aún quedaba una cuestión abierta que será abordada por Turing y Church de manera independiente en 1936. Turing introdujo lo que hoy conocemos como las *máquinas de Turing* y Church introdujo el *cálculo* λ. Ambos consiguen los mismos resultados; crear un concepto sólido de algoritmo y en el caso de Turing, definir formalmente el concepto de una máquina[38]. Una máquina de Turing (MT), en términos generales, sólo puede reconocer una fórmula, mas no decidir si es verdadera o falsa. Con este trabajo, Turing definió los límites de la computación, es decir, señaló qué tipo de problemas pueden resolverse con una máquina abstracta y cuáles no.

[36] Estos tres conceptos son la base de lo que se llama *metalógica*, cuyo objetivo principal es estudiar las propiedades de los sistemas formales.

[37] VAN HEIJENOORT, J. *A source book in Mathematical Logic 1879 - 1931*, Harvard Univresity Press, Cambridge, Massachusetts, 1967, pp. 582 - 592.

[38] TURING, A. M. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Journal of Mathematics, Vol. 58, 1936, pp. 345 - 363.

Church en un artículo titulado *Logic, arithmetic, and automata* introduce una especie de background histórico de la relación entre lógica y autómatas. Este artículo concretamente tiene como objetivo poner de manifiesto la aplicación de la lógica formal más allá del cálculo proposicional, aplicada a la descripción formal de un autómata, entendiendo autómata como una máquina abstracta. Este es el segundo aporte a la teoría de autómatas. En primer lugar, señala Church, esta relación viene representada por la aplicación del álgebra de Boole al análisis de circuitos combinacionales[39]. Conocemos a C. Shannon (1916 - 2001) como el máximo representante de esta idea, sin embargo, para ser justos, esta idea tuvo orígenes distintos con distintos destinos cada uno. El primero en desarrollar este modelo fue el soviético V. Shestakov (1907 - 1987), quien trabajó la tesis en 1934/35, pero no publicó sus investigaciones hasta 1941. En 1938, en dos partes distintas del globo se gestaba la relación entre álgebra de Boole y circuitos lógicos, por un lado tenemos a C. Shannon y por otro a los japoneses A. Nakasima y M. Hanzawa[40]. Ambas teorías no tuvieron relación ni influencia una en otra y sin embargo, hoy en día, la más conocida es la teoría de Shannon. En el año 1943, hubo un intento de análisis lógico aplicado al comportamiento de redes neuronales. Esta idea fue introducida por McCulloch y Pitts en el año señalado, siendo el objetivo de su estudio responder a la posibilidad de describir formalmente el comportamiento específico de alguna red neuronal. J. von Neumann en 1945 hizo la conexión entre las ideas de McCulloch y Pitts aplicada a los circuitos digitales, de modo que en 1956, el lógico S. Kleene introduce la primera definición de *autómata finito*, el más básico de todos los autómatas, en su artículo *Representation of events in nerve nets and finite automata*[41]. La definición estricta de autómata la veremos más adelante en el apartado 3.2. Sin embargo, entendido de una manera amplia los autómatas son sistemas de transiciones que aceptan señales del exterior, procesan información y producen una respuesta. En este sentido, un lavavajillas, un móvil, una lámpara, o incluso algunas actividades de la vida diaria pueden considerarse como autómatas.

Hay diferentes tipos de autómatas, el modelo más sencillo son los autómatas finitos, mientras que el más complejo es la máquina de Turing. Hay otros dos más, los autómatas de

[39]Un ejemplo sencillo de circuito combinacional es el interruptor de una lámpara por ejemplo, que cuando está encendida 1 deja pasar la corriente y 0 cuando obstaculiza el paso.

[40]STANKOVIĆ, S. AND ASTOLA, J. (Eds.) *Reprints from the Early Days of Information Sciences - Paul Ehrenfest - Remarks on Algebra of Logic and Switching Theory*, Tampere International Center for Signal Processing TICSP Report No. 54, Tampere, 2010, pp. 17 - ss.

[41]CHURCH, A. *Logic, arithmetic, and automata*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 15–22 August 1962, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden, 1963, pp. 23–35.

pila y los autómatas linealmente acotados, la diferencia principal entre ellos es la utilización de distintos recursos formales[42]. Hay cierta correspondencia entre los tipos de autómatas y la *jerarquía de Chomsky*. La jerarquía de Chomsky fue introducida en los años 1956/59, en dos artículos que establecen la correspondencia entre las gramáticas formales y el tipo de autómata[43]; así como los tipos de autómatas son cuatro, la jerarquía tiene cuatro niveles que van de acuerdo a su complejidad, del mismo modo en el que los autómatas se organizan.

Resumiendo, un autómata es una máquina abstracta que se encarga de procesar cierta información. Dichos procesos tienen sus límites, tal y como lo mostró Turing y Church a raíz del programa formalista de Hilbert. Ahora bien, definidos los límites formales, es necesario tener una definición precisa y formal de lo que es un autómata. Dicha tarea fue concretada por Kleene. Así pues, una vez obtenida la definición formal y los límites de procesamiento, Chomsky nos brinda una jerarquía que define el tipo de lenguaje formal que nuestro autómata puede reconocer. Podríamos interpretar muchos de los problemas antes propuestos como problemas conceptuales, de modo que, un buen análisis filosófico puede arrojar luz a este tipo de problemas. En cualquier caso, más que ahondar en estas cuestiones, lo que hemos tratado de hacer es proporcionar una visión general de las disciplinas que están implicadas en esta área del conocimiento.

---

[42]JURADO MÁLAGA, E. *Teoría de autómatas y lenguajes formales*, Colección manuales Universidad de Extremadura - 55 (E.E.E.S), 2008, p. 7

[43]Los artículos de N. CHOMSKY son: *Three models for the description of language* (1956) y *On certain formal properties of grammars* (1959)

3. Estado Actual

En esta sección analizamos la relación entre la lógica temporal y la teoría de autómatas. Para ello, por una parte se da una definición general y una aproximación formal básica a la lógica temporal. Por otra, se introducen de una manera muy general los conceptos básicos de la teoría de autómatas, así como su definición formal. Finalmente, se establece la relación entre la lógica temporal y la teoría de autómatas mediante la construcción de los autómatas respectivos para los operadores temporales **F** y **G**, explicando su funcionamiento y sus propiedades.

3.1. El sistema mínimo de Lógica Temporal K$_t$

En el apartado 2.1 hemos dado una definición amplia de lo que es la lógica temporal, así como sus principales antecedentes históricos. Pasamos ahora a cuestiones más concretas. En primer lugar un sistema formal es un tipo de sistema lógico deductivo que consta al menos de un lenguaje formal $\mathcal{L}$, una sintaxis, una semántica, un sistema axiomático y reglas de inferencia[44]. En el lenguaje natural tenemos un alfabeto con el cual formamos palabras, así como una gramática que indica qué oraciones están bien formadas o no. Por ejemplo, dado el alfabeto español $(a, b, c, \ldots, z)$, podemos unir ciertos caracteres del alfabeto y formar la palabra «lámpara». Ahora bien, si queremos formar una oración gramaticalmente correcta como por ejemplo, «la lámpara está encendida», primero nos fijaríamos si cada palabra pertenece al vocabulario español, luego atenderíamos a cuestiones de concordancia de género y número, etc. De manera similar, en el lenguaje formal se especifica los símbolos primitivos a usar, y su sintaxis. A los símbolos primitivos se les conoce como *vocabulario* o *alfabeto*. El vocabulario está compuesto por símbolos lógicos, símbolos no lógicos y signos de puntuación. Los símbolos no lógicos son las denominadas variables proposicionales (p, q, r) y los símbolos lógicos son los llamados conectores lógicos ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$), y los signos de puntuación usualmente son los paréntesis ( ), llaves { }, corchetes [ ], comas ,, etc. Luego, se debe tomar en cuenta las reglas para unir los elementos del vocabulario, a este conjunto de reglas se le llama *gramática formal* o *sintaxis*. Estas reglas establecen que las variables proposicionales son fórmulas bien formadas (*fbf*) y que determinadas fórmulas compuestas a partir de variables proposicionales y conectores lógicos son *fbfs* también. Por ejemplo, las siguientes fórmulas son *fbfs*: $p, (p \leftrightarrow r), a \wedge \neg a$. No serían *fbfs*: $\wedge \vee r, (\neg a \rightarrow) p)$. Un sistema lógico puede representarse como un *sistema axiomático*. Un sistema axiomático está compuesto por un conjunto de fórmulas (axiomas) que se toman como dadas y que recogen características importantes del sistema, a partir de las cuales se demuestran todas las demás fórmulas (teoremas). Por tanto, un teorema, sería aquella *fbf* que tiene una demostración a partir de los axiomas del sistema.

Dotar de una semántica a un sistema formal consiste en asignar un significado tanto a los términos lógicos como no lógicos mediante la construcción de una interpretación. La

[44]Cf. PALAU, G. *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*, Barcelona, Editorial Gedisa, 2002, pp. 24 - 28.

interpretación estándar de la lógica clásica está basada en el concepto semántico de verdad definido por Tarski[45].

Al sistema $\mathbf{K}_t$ se le denomina «mínimo» porque no involucra ninguna asunción específica sobre la estructura del tiempo[46], es decir que no se asume ningún tipo de tiempo; lineal, ramificado, denso, etc. En las líneas siguientes veremos cómo se define la sintaxis, semántica y sistema axiomático para el sistema mínimo de lógica temporal.

3.1.1. Sintaxis y Semántica de $\mathbf{K}_t$

La lógica temporal es una extensión de la lógica clásica de proposiciones y de cierta manera, una reinterpretación de la lógica modal en términos temporales. Esto es algo que hay que tener muy en cuenta en la exposición siguiente. A continuación se explica en qué consiste la sintaxis del sistema mínimo de la lógica temporal, así como sus principales componentes.

Anteriormente hemos visto que un sistema formal está compuesto por un lenguaje, en este caso el lenguaje del sistema mínimo de la lógica temporal al cual denominaremos $\mathcal{L}_{Kt}$. Según la definición de lenguaje formal que hemos dado, $\mathcal{L}_{Kt}$ está conformado por conectores lógicos y variables proposicionales. Denominaremos como ϕ al conjunto de variables proposicionales de $\mathcal{L}_{Kt}$, siendo $\phi = \{p, q, r, \ldots\}$, y φ cualquier *fbf*. Los conectores lógicos son los habituales de la lógica clásica de proposiciones; la conjunción $\wedge$, disyunción $\vee$, negación $\neg$, implicación $\rightarrow$ y coimplicación $\leftrightarrow$, además se introducen cuatro operadores temporales monarios[47]: «será alguna vez en el futuro que φ» ($\mathbf{F}\varphi$), «fue alguna vez en el pasado que φ» ($\mathbf{P}\varphi$), «será siempre en el futuro que φ» ($\mathbf{G}\varphi$) y «ha sido siempre en el pasado que φ» ($\mathbf{H}\varphi$). Los operadores temporales son interdefinibles entre sí: $\mathbf{F}\varphi =_{def} \neg\mathbf{G}\neg\varphi$ y $\mathbf{P}\varphi =_{def} \neg\mathbf{H}\neg\varphi$. La interdefinibilidad es muy sencilla de explicar. Por un lado tenemos la fórmula $\mathbf{F}\varphi$, sustituyamos φ por «aprobar lógica» la frase entonces sería; «será alguna vez en el futuro que aprobaré lógica», que indica que sea alguna vez en el futuro aprobaré lógica. Por otro, tenemos la fórmula $\neg\mathbf{G}\neg\varphi$, que sustituyendo significa «es decir que no se dará en todo momento del futuro que suspenda lógica». Es decir, que sea alguna vez en el futuro que aprobaré lógica es lo mismo que decir que no se dará en todo momento del futuro que suspenda lógica, interpretando no aprobar lógica como suspender lógica. La siguiente fórmula sigue el mismo esquema. Las fórmulas serían; «alguna vez en el pasado he aprobado lógica», y «no ha sido

[45] Los trabajos más representativos son: *Introduction to Semantics* (1942) y *Meaning and Necessity* (1947)

[46] RESCHER, N AND URQUHART, A. *Temporal Logic*, Springer-Verlag/Wien, 1971, pp. 70 - 83

[47] PRIOR, A. N. *The syntax of time-distinctions*, Franciscan Studies Vol. 18, No. 2, June 1958, pp. 105-120

siempre en el pasado que no he aprobado lógica». En otras palabras, que hay un punto en algún tiempo pasado en el cual aprobé lógica, lo cual es lo mismo que decir que no se ha dado todo el tiempo en el pasado que haya suspendido lógica.

Teniendo en cuenta que los operadores temporales son interdefinibles entre sí, podemos definir formalmente y recursivamente el conjunto de *fbfs* de la lógica temporal (Φ) como[48]:

$$\Phi = \phi \mid \neg\varphi \mid (\psi \vee \varphi) \mid (\psi \wedge \varphi) \mid (\psi \rightarrow \varphi) \mid \mathbf{F}\varphi \mid \mathbf{P}\varphi \mid \mathbf{G}\varphi \mid \mathbf{H}\varphi$$

El conjunto de *fbfs* llamado Φ, está compuesto por el conjunto de variables proposicionales ϕ, recordemos que $\phi = \{p, q, r, \ldots\}$ y φ/ψ, cualquier *fbf*. La negación de una *fbf* también es una *fbf* $(\neg\varphi)$. Si φ y ψ son *fbfs*, también lo son $(\varphi \vee \psi)$, $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \rightarrow \varphi)$. Son también *fbfs* $\mathbf{F}\varphi$, $\mathbf{P}\varphi$, $\mathbf{G}\varphi$ y $\mathbf{H}\varphi$.

La sintaxis del sistema mínimo de la lógica temporal introduce operadores temporales que tienen la propiedad de definirse en términos de otros[49].

Hasta ahora hemos trabajado en el lenguaje de $\mathbf{K}_t$, así como sus reglas de formación, viendo que la novedad que introduce Prior son los operadores temporales. Sin embargo, hemos de dotar de significado a todos estos símbolos. Nuestra tarea a continuación radicará en explicar la semántica de $\mathbf{K}_t$. Antes de centrarnos en dicha labor, primero debemos hacer un breve repaso de la semántica de la lógica clásica. Dado que la lógica temporal es una extensión de la lógica clásica, los operadores de la lógica clásica son también operadores en la lógica temporal. La semántica de la lógica clásica se hace a través de una interpretación que consiste en asignara el valor verdadero o falso a cada *fbf*[50]. Por tanto, una proposición de la lógica clásica sólo podrá tener el valor 0 cuando es falsa y 1 cuando es verdadera. Como hemos dicho, una función de evaluación ν relaciona las variables proposiciones con

[48]GALTON, A. AND GORANKO V., *Temporal Logic*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2015 Edition), ZALTA, E. N. (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/logic-temporal/>.

[49]Nótese el nexo entre la lógica temporal y la lógica modal en cuanto a sus operadores. La lógica modal estudia el razonamiento que implica el uso de expresiones «necesariamente» y «posiblemente». Sin embargo, entendiendo término lógica modal de una manera más amplia, sería una familia de lógicas con reglas similares y variedad de símbolos En tal caso, la lógica temporal sería una familia de lógica modal. **F** y **P** podrían interpretarse como operadores de posibilidad «$\Diamond$» para el futuro y pasado, así como también los operadores **G** y **H** pueden interpretarse como operadores de necesidad «$\Box$» tanto como para el futuro como el pasado, respectivamente. Cf. THAYSE, A. & CO-AUTEURS. (1989, 180)

[50]Cf. PALAU, G. *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*, Barcelona, Editorial Gedisa, 2002, p. 26.

sus respectivos valores de verdad, de tal modo que[51]:

$$\nu(\neg\varphi) = 1 \; syss \; \nu(\varphi) = 0,$$
$$\nu(\neg\varphi) = 0 \; syss \; 1(\varphi) = 1,$$

$$\nu(\varphi \wedge \psi) = 1 \; syss \; \nu(\varphi) = 1 \; y \; \nu(\psi) = 1,$$

$$\nu(\varphi \vee \psi) = 1 \; syss \; \nu(\varphi) = 1 \; o \; \nu(\psi) = 1,$$

$$\nu(\varphi \rightarrow \psi) = 0 \; syss \; \nu(\varphi) = 1 \; y \; \nu(\psi) = 0,$$

Como vemos, las fórmulas proposicionales se interpretan como valores de verdad; por ejemplo la expresión: «llueve y me mojo» que queda formalizada por la fórmula proposicional $\varphi \wedge \psi$, donde φ corresponde a «llueve» y ψ a «me mojo», puede ser verdadera $\{1\}$ o falsa $\{0\}$. El valor de verdad está inductivamente determinado por una función de evaluación en todos los operadores de la lógica clásica. Una propiedad de esta definición semántica es que el valor de verdad de una fórmula es fijo, en el caso de $\varphi \wedge \psi$ sólo será verdadera cuando ambas variables proposicionales sean verdaderas. En el resto de situaciones; φ verdadera y ψ falsa, φ falsa y ψ verdadera, φ falsa y ψ falsa, la evaluación de dicha fórmula es falsa. El resto de interpretaciones siguen el mismo esquema.

Pero si el valor es fijo, ¿cómo podríamos formalizar expresiones cuyo valor de verdad depende del momento en el que han sido enunciadas? La idea es asociar las funciones de evaluación con un *flujo de tiempo*[52]. Formalmente un flujo de tiempo es una *estructura relacional*: $\mathcal{T} = (T, <)$. Un flujo de tiempo $\mathcal{T}$ es una representación matemática del tiempo, donde T es un conjunto no vacío de instantes de tiempo y $<$ es una relación binaria sobre T, denominada *relación de precedencia*. Los elementos de T son llamados puntos en el tiempo; si un par (s, t) pertenece a $<$, podemos decir que s es anterior a t[53]. La relación de precedencia tiene al menos dos propiedades básicas; la propiedad irreflexiva[54] y transitiva[55]. Por

[51]Donde «syss» significa si y sólo si, y «φ, ψ» son cualquier fórmula proposicional.

[52]Cf. VENEMA, Y. *Temporal Logic*, Cap. X, en The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Lou Goble (Editor), Willey, 2001.

[53]En la literatura normalmente se representa cualquier relación como R. Por motivos prácticos ahora adoptamos el símbolo $<$ para la lógica temporal.

[54]La propiedad irreflexiva nos dice que ningún elemento del conjunto está relacionado consigo mismo. Formalmente: $\forall a(a \in A : (a, a) \notin <)$

[55]Si un elemento se relaciona con otro distinto y este elemento distinto se relaciona con un tercero distinto a los dos otros, entonces el primero se relaciona con el tercero. Formalmente: $\forall a, b, c(a, b, c \in A : a < b \wedge b < c \rightarrow a < c)$

tanto, una función de evaluación ν sobre un flujo de tiempo $\mathcal{T}$ asigna el valor verdadero o falso al conjunto de variables proposicionales ϕ en el conjunto no vacío de instantes de tiempo T. Formalmente queda definido de la siguiente manera: $\nu : (T \to (\phi \to \{0,\ 1\}))$. De este modo, un modelo de lógica temporal es un par $\mathcal{M}_{Kt} = (\mathcal{T},\ \nu)$ que consiste en un flujo de tiempo $\mathcal{T}$ y una función de evaluación ν.

Ahora, con esta definición ya podemos interpretar fórmulas bien formadas en cada punto del modelo. Por ejemplo, podemos decir que la fórmula $p \wedge \neg q$ es verdad en el momento t, precisamente si $\nu(p, t) = 1$ y $\nu(q, t) = 0$.

Así pues, procedemos a dar la definición inductiva de la noción de verdad de una fórmula φ (semántica) en un momento t en un modelo $\mathcal{M}_{Kt} = (T, <, \nu)$:

$\nu(q, t) = 1$ o $\nu(q, t) = 0$,

$\nu(\neg\varphi, t) = 1 \; syss \; \nu(\neg\varphi, t) = 0,$

$\nu(\varphi \to \psi, t) = 1 \; syss \; \nu(\varphi, t) = 1 \; y \; \nu(\psi, t) = 1,$

$\nu(\mathbf{F}\varphi, t) = 1 \; syss \; \exists s \in T(t < s \wedge \nu(\varphi, s) = 1)$

$\nu(\mathbf{P}\varphi, t) = 1 \; syss \; \exists s \in T(s < t \wedge \nu(\varphi, s) = 1)$

Para los operadores **G** y **H**, la semántica quedaría definida del siguiente modo:

$\nu(\mathbf{G}\varphi, t) = 1 \; syss \; \forall s \in T(t < s \to \nu(\varphi, s) = 1),$

$\nu(\mathbf{H}\varphi, t) = 1 \; syss \; \forall s \in T(s < t \to \nu(\varphi, s) = 1)$

Una fórmula φ de lógica temporal es válida en el sistema $\mathbf{K}_t$, si y sólo si $\nu(\varphi, t) = 1$ es verdad en todos los instantes de tiempo en todos los modelos temporales. Una fórmula φ es verdadera o queda satisfecha si es verdad en algún instante de tiempo en algún modelo temporal. Por ejemplo[56], considere el conjunto ordenado de los números naturales $\mathbb{N}$, en el cual τ es una función de evaluación que hace que q sea verdad en todos los números mayores a 1000 y r sea verdad en todos los números impares. Con esa función de evaluación se puede ver que la fórmula $\mathbf{FG}q$ es válida desde el punto 0. La fórmula nos dice: «será alguna vez en el futuro que será siempre en el futuro que $q > 1000$». Sin embargo, si decimos «será

[56]Cf. VENEMA, Y. *Temporal Logic*, Cap. X, en The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Lou Goble (Editor), Willey, 2001, p. 205.

siempre en el futuro que $q > 1000$», no es válida, ya que si se parte del punto 0, no es verdad que el punto 1 es mayor a 1000, y así sucesivamente. También podemos ver que la fórmula **FG**r no es válida a partir del punto 0, ya que no se cumple que «será alguna vez en el futuro que será siempre en el futuro que r»; en otras palabras, imaginemos el punto 11, seguido del punto 12. De alguna vez en el futuro (el punto 11) no se sigue que «será siempre en el futuro que r sea impar». Sin embargo la proposición **GF**r; «Será siempre en el futuro que será alguna vez en el futuro que r sea un número impar» es válida, ya que si partimos de cualquier punto, es verdad que siempre en el futuro encontraremos alguna vez un número impar.

Hasta este punto hemos descrito la sintaxis y semántica de $\mathbf{K}_t$. Con respecto a la semántica podemos decir que guarda estrecha relación con la semántica de mundos posibles[57][58]. Para completar la explicación del sistema $\mathbf{K}_t$, procedemos a describir el sistema axiomático.

3.1.2. Sistema Axiomático

El sistema axiomático de $\mathbf{K}_t$ comparte los axiomas de la lógica clásica de proposiciones. Los primeros sistemas axiomáticos fueron construidos bajo el modelo Frege-Russell-Hilbert[59]. Representamos el conjunto de axiomas de la lógica clásica como Ax_0 que está compuesto por[60]:

$Ax_{0,1}$: $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

$Ax_{0,2}$: $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

$Ax_{0,3}$: $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$

A continuación se presentan los axiomas que constituyen el sistema mínimo de lógica temporal. Dicho sistema fue creado por Lemmon en 1965 y se denomina $\mathbf{K}_t$[61].

[57] VAN BENTHEM, J. *Modal logic for open minds*, CSLI Lecture Notes, Stanford University, 2010, pp. 207 - 218.

[58] Para ampliar el tema puede consultarse: EMERSON, E. A. *Temporal and Modal logic* in Handbook of Theoretical Computer Science, VAN LEEUWEN, J. (Ed.) North Holland Pub. Co. 1995.

[59] Cf. PALAU, G. *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*, Barcelona, Editorial Gedisa, 2002, pp. 28 - 30.

[60] El sistema axiomático propuesto es el sistema de CHURCH para la lógica clásica de proposiciones.

[61] Cf. VENEMA, Y. *Temporal Logic*, Cap. X, en The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Lou Goble (Editor), Willey, 2001, p. 209.

Ax_0: Todas las tautologías de la lógica clásica de proposiciones.

Ax_1: $\mathbf{G}(p \to q) \to (\mathbf{G}p \to \mathbf{G}q)$

Ax_2: $\mathbf{H}(p \to q) \to (\mathbf{H}p \to \mathbf{H}q)$

Ax_3: $p \to \mathbf{HF}p$

Ax_4: $p \to \mathbf{GP}p$

Ax_5: $\mathbf{G}q \to \mathbf{GG}q$

El Ax_1 y Ax_2 nos muestran la propiedad distributiva de los operadores temporales. Ax_1 nos dice que «será siempre en el futuro que $p \to q$ implica que será siempre en el futuro que p implica que será siempre en el futuro que q». Ax_2 nos dice que «será siempre en el pasado que $p \to q$ implica que será siempre en el pasado que p implica que será siempre en el pasado que q». Ax_3 y Ax_4 nos muestran el flujo temporal. Ax_3 nos dice que «p implica que ha sido siempre en el pasado que será alguna vez en el futuro que p». Mientras que Ax_4 nos dice que «p implica que será siempre en el futuro que fue alguna vez en el pasado que p. El Ax_5 muestra la propiedad transitiva del tiempo, nos dice que «será siempre en el futuro que q implica que será siempre en el futuro que será siempre en el futuro que q».

Las reglas que operan en el sistema $\mathbf{K}_t$ son las siguientes: Por un lado tenemos la regla de sustitución uniforme nos dice que si φ es un teorema, entonces también lo es $\varphi[\psi/q]$. Por otro, el modus ponens (MP) nos dice que si φ y $\varphi \to \psi$ son teoremas, entonces también lo es ψ. Y por último la generalización temporal nos dice que si φ es un teorema, entonces también lo son $\mathbf{G}\varphi$ y $\mathbf{H}\varphi$.

Resumiendo, el sistema mínimo de lógica temporal consta de un lenguaje formal $\mathcal{L}_{Kt}$, cuya novedad a nivel sintáctico es la introducción de nuevos operadores temporales **F**, **P**, **G** y **H**, y a nivel semántico la introducción de un flujo de tiempo $\mathcal{T} = (T, <)$. Con esto hemos finalizados la exposición del sistema $\mathbf{K}_t$.

3.2. Autómatas finitos (AF)

Σωκράτης:

λέγει που Ἡράκλειτος ὅτι «πάντα χωρεῖ καὶ οὐδὲν μένει»

PLATÓN, *El Crátilo*, 402a.[62]

Hace algunos milenios, un filósofo griego llamado Heráclito de Éfeso (535 - 484 a. C.) concibió la unidad de la realidad como λόγος cuya permanencia se resalta mediante el uso de la palabras *es o existe*, y sin embargo, los componentes de esta realidad están sujetos al cambio perenne[63]. Y efectivamente, basta echar una ojeada a la *realidad*, para notar que las cosas van cambiando, que nuestra propia finitud nos arroja a, como diría Heidegger; «ser seres para la muerte». Pero mientras vivimos, generalmente no vivimos pensando en la muerte. Normalmente vivimos pensando en preocupaciones mundanas como qué vamos a hacer si no encontramos trabajo, cuáles son las actividades que copan nuestra agenda del día, incluso podría decirse que algunas veces actúamos como *autómatas* haciendo trabajos mećanicos, siguiendo las reglas de distintos procesos que gobiernan nuestra vida diaria.

Si se nos propone la tarea de realizar una abstracción de algún proceso cualquiera, coincidiríamos en que al menos tiene estados y transiciones entre dichos estados. Intuitivamente podríamos decir que un estado es una descripción instantánea de un sistema y que da toda la información relevante y necesaria para determinar cómo el sistema puede evolucionar desde un punto determinado. Las transiciones, entonces, serían variaciones de los estados a través del tiempo y son susceptibles a entradas externas o sencillamente cambian espontáneamente. En la mera abstracción, asumimos que los estados de transición son instantáneos, no obstante, generalmente el cambio de un estado a otro suele tomar su tiempo. Hay muchos ejemplos de sistemas de transición en el mundo que nos rodea; el arranque de un motor, los circuitos de nuestros ordenadores, planear ir de un sitio a otro, los ascensores, los cubos de Rubik, etc. Pues bien, un sistema que consiste en estados finitos y transiciones entre ellos es llamado sistema de transición de estados finitos. Esta abstracción queda definida por un modelo formal denominado *autómata finito*[64].

[62] PLATO, Platonis Opera, ed. John Burnet. Oxford University Press. 1903.

[63] GUTHRIE, W. K. C. *Historia de la Filosofía Griega, Tomo I: Los primeros presocráticos y los pitagóricos*, (1962), Versión Española de Alberto Medina González, Madrid, Ed. Gredos, 1984, p. 434.

[64] KOZEN, C. *Automata and Computability*, Springer-Ithaca, 1997, p. 14

3.2.1. Nociones básicas de autómatas finitos (AF)

Los autómatas finitos son dispositivos teóricos cuya tarea es reconocer ciertas secuencias de símbolos. Un símbolo podría ser cualquier letra o número, como por ejemplo $\{0, 1, 2\}$, $\{a, b, c\}$ o $\{\mathbf{F}\varphi\}$. Al conjunto finito de símbolos se le llama *alfabeto* y es representado por Σ. Un ejemplo muy claro es el alfabeto binario donde $\Sigma = \{0, 1\}$. Luego, a partir del alfabeto podemos crear cadenas de símbolos. Si tenemos el alfabeto binario podríamos crear la cadena de símbolos 01101. Otro ejemplo sería dado el alfabeto latino podríamos crear la cadena *cadena*, etc. Como vemos, una cadena sobre un alfabeto Σ es una lista en la cual cada elemento pertenece a Σ. Un lenguaje es un conjunto de cadenas y pueden ser finitos o infinitos. Curiosamente, nótese, por ejemplo, que el lenguaje de la lógica temporal está compuesto por un conjunto finito de símbolos, sin embargo, la combinación de dichos símbolos puede llegar a ser infinita. De momento, la idea básica es que un alfabeto Σ, tiene como elementos símbolos que a su vez forman cadenas, y un lenguaje es un conjunto finito o infinito de cadenas. Formalmente, un autómata finito A estaría compuesto por: un conjunto finito no vacío de estados denominado Q. Un alfabeto finito que representamos con Σ. Una función de transición δ que indica en qué situaciones el autómata pasa de un estado a otro. Un estado inicial representado por q_0 y un conjunto de estados de aceptación denotado por F, donde $F \subset Q$ (F está incluido en Q)[65].

Resumiendo, un autómata A está definido formalmente por:

Σ: Alfabeto

Q: Conjunto de estados

$q_0 \in Q$: Estado inicial

$\delta : Q \times \Sigma \to Q$: Función de transición

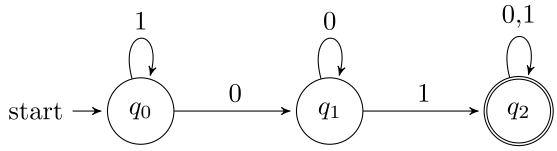
$F \subset Q$: Estado final

Existen dos tipos de autómatas finitos, los deterministas (AFD) y no deterministas (AFND). Con el propósito de entender la definición formal de un autómata propondremos dos ejemplos que expliquen los dos tipos de autómata, primero veremos los AFD y luego los AFND.

[65] THOMAS, W. *Languages, Automata and Logic* in Handbook of formal languages, ROZENBERG, G. AND SALOMAA, A. (Eds) 1997, pp. 389-455.

3.2.2. Autómatas finitos deterministas (AFD)

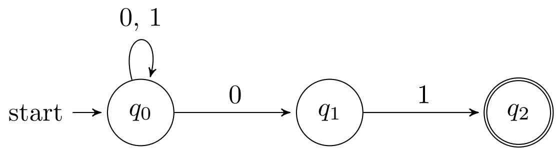
Anteriormente hemos mencionado que los autómatas son máquinas abstractas que sirven para reconocer ciertas secuencias de símbolos. Dichos autómatas pueden representarse por medio de grafos o por una tabla de secuencias que describa las funciones de transición. Un autómata finito determinista, recibe este nombre porque para cualquier entrada que reciba el autómata existe un único estado al que puede ir. A continuación veremos una representación gráfica de un autómata finito determinista, a través de la cual explicaremos su funcionamiento.



A primera vista vemos una serie de círculos y flechas. Diremos que los círculos son los estados del autómata, y las flechas indican las transiciones del autómata que nos permiten ir de un estado a otro y se producen cuando el autómata recibe como entrada determinados símbolos, en este caso $\{0, 1\}$, estos símbolos constituyen el alfabeto Σ del autómata. Podemos identificar el conjunto de estados como $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, donde q_0 representa el estado inicial y donde q_2 al estado final F o también llamado estado de aceptación, representado gráficamente por un doble círculo. Las transiciones quedan representadas por las flechas y la dirección de las flechas indican la ubicación del siguiente estado. Una función de transición toma como parámetros de entrada un estado y un símbolo del alfabeto y da como respuesta el estado siguiente $\delta : Q \times \Sigma \to Q$. A continuación detallamos todas las funciones de transición del autómata. El estado q_0 tiene dos posibles funciones: $\delta(q_0, 1) = q_0$ y $\delta(q_0, 0) = q_1$, la primera indica que estando en el estado q_0, se recibe como entrada el símbolo 1 entonces se permanece en el estado q_0, pero si se recibe como entrada un 0 entonces se pasa al estado q_1. El estado q_1 tiene otras dos posibles funciones: $\delta(q_1, 0) = q_1$ y $\delta(q_1, 1) = q_2$, la primera indica que estando en el estado q_1, se recibe como entrada el símbolo 0 entonces se permanece en el estado q_1, pero si se recibe como entrada un 1 entonces se pasa al estado de aceptación q_2. En el estado q_2, finalmente tenemos como funciones $\delta(q_2, 0) = q_2$ y $\delta(q_2, 1) = q_2$, que indican que tanto si se recibe un 0 o un 1 se permanecerá en el estado de aceptación. Si el autómata, respondiendo a los símbolos de entrada consigue llegar al estado de aceptación, entonces el conjunto de símbolos o cadena recibida es una fórmula válida para el autómata. En este ejemplo son cadenas válidas 100101, 10010, 10011, 1001, 101 y 01.

3.2.3. Autómatas finitos no deterministas (AFND)

Para explicar los AFND, recurrimos a un ejemplo gráfico para proceder a su explicación.



A simple vista vemos que se trata de un autómata finito, cuyos estados son q_0, q_1, q_2 y cuyo alfabeto Σ se compone por $\{0, 1\}$. Hasta el momento, nada distinto a los AFD. Sin embargo, podemos notar que el estado q_0 tiene dos respuestas distintas a la entrada 0; si se introduce un 0 como primer término de la cadena, puede quedarse en el estado q_0 o avanzar al estado q_1. Ahora la pregunta es; ¿cómo es capaz de reconocer una cadena de símbolos un AFND? La respuesta radica en la propia cadena. El autómata considera la cadena que tiene que analizar y en función a ella decidirá si tiene que ir por un camino u otro, si el camino nos lleva a un estado cuya función de transición no nos lleva a nada, entonces no es una cadena aceptada por el autómata. Para ver clarificar la explicación vamos a considerar la cadena 01. La primera función de transición nos dice que $\delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$. Esto nos quiere decir que tenemos dos opciones a las cuales denominaremos la opción a y la opción b, donde a significa permanecer en el estado q_0 y la b avanzar al estado q_1. Si decidimos considerar la opción a nos quedaremos en el estado q_0 y por tanto hemos de examinar el siguiente símbolo de la cadena, en este caso 1. Estando en q_0, tenemos la función $\delta(q_0, 1) = q_0$ que nos indica que si introducimos un 1 entonces permanecemos en q_0. Lo que nos pone en evidencia que la opción a no conduce al estado de aceptación. Sopesemos, pues, la opción b que nos indica que estamos en el estado q_1 después de haber recibido el símbolo 0 como entrada. Pues bien, la función $\delta(q_1, 1) = q_2$, nos dice que recibiendo el símbolo 1 y estando en el estado q_1, nos conduce al estado de aceptación q_2. Como vemos, la esencia de los AFNDs radica en su función de transición, donde antes teníamos un único estado a donde ir, ahora tenemos un conjunto de estados a los que podríamos ir como respuesta a una entrada.

Resumiendo, un AFND queda definido por un alfabeto Σ, un conjunto finito no vacío de estados Q, un estado inicial q_0, estados de aceptación $F \subset Q$ y la función de transición $\delta = \Sigma \times Q = \mathcal{P}(Q)$, donde $\mathcal{P}(Q)$ es el conjunto potencia[66] del conjunto finito no vacío de estados del autómata.

[66]El conjunto potencia de un conjunto dado es otro conjunto formado por todos los subconjuntos del mismo. Se denota $\mathcal{P}(Q)$ o 2^Q.

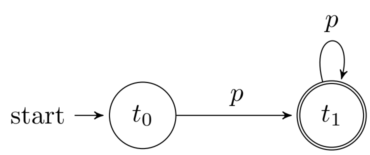
3.3. Lógica temporal y autómatas finitos

Hasta ahora hemos explicado las bases tanto de la lógica temporal como de los autómatas finitos. A continuación nos centraremos únicamente en su relación, que consiste en que un modelo de lógica temporal se puede interpretar como un autómata que hace verdadera o falsa una fórmula Haciendo un repaso: una fórmula φ es verdadera o queda satisfecha si es verdad en algún instante de tiempo en algún modelo temporal $\mathcal{M}_{Kt} = (\mathcal{T}, \nu)$, donde $\mathcal{T}$ es una estructura relacional o flujo de tiempo y ν la función de transición. El flujo de tiempo $\mathcal{T}$, a su vez está compuesto por un conjunto de instantes de tiempo T y una relación entre los instantes de tiempo $<$. Las estructuras relacionales también se pueden interpretar como sistemas finitos de transición[67]. Dado que, los autómatas finitos son sistemas finitos de transición definidos por una quíntupla $A = \{\Sigma, Q, q_0, \delta, F\}$, entonces podemos construir un autómata que hace verdadera o falsa una fórmula de lógica temporal.

Para ilustrar la relación procederemos a construir los autómatas para $\mathbf{G}p$ y $\mathbf{F}p$.

3.3.1. Autómata finito para $\mathbf{G}p$

Representaremos a través de un autómata finito la fórmula de lógica temporal $\mathbf{G}p$. La definición semántica formalmente es como sigue: $\nu(\mathbf{G}p, t) = 1 \; syss \; \forall s \in T(t < s \rightarrow \nu(p, s) = 1)$, y nos dice que una fórmula $\mathbf{G}p$ que se lee como «será siempre en el futuro que p», es verdadera ($\nu(\mathbf{G}\varphi, t) = 1$) si y solo si, para todo momento s, que pertenece al conjunto finito no vacío de instantes de tiempo T, t es anterior a s entonces p en el momento s es verdad.



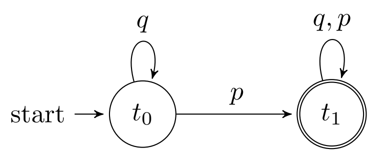
El autómata descrito es una representación abstracta del comportamiento de Los elementos del autómata son los estados t_0 y t_1m donde el primero es el estado inicial y el segundo el estado de aceptación, ambos forman parte del conjunto de estados Q. El alfabeto Σ del autómata está compuesto por el símbolo $\{p\}$ y las funciones de transición son las siguientes: El instante t_0 tiene una sola transición $\delta(t_0, p) = t_1$, el instante t_1 tiene una sola transición

[67] ARECES, C AND BLACKBURN, P. *Bringing them all together*, Journal of logic and computation 11(5), pp. 657 - 669

$\delta(t_1, p) = t_1$. Las cadenas p, pp y ppp serían ejemplos de cadenas que conducen al instante de aceptación t_1. El autómata nos permite ver un patrón de aceptación para **G**p, donde considerando la variable, p, nos permite reconocer las secuencias del tipo: $(m_0), p\ (m_1), p\ (m_2), p$, donde (m_0), (m_1) y (m_2) son instantes de tiempo y, p las variable que consideramos antes. De este modo, resumiendo, **G**p representado por el autómata propuesto nos indica que en un estado inicial puede aparecer o no p, pero después, para que se cumpla la evaluación, debe aparecer siempre p.

3.3.2. Autómata finito para **F**p

Representaremos a través de un autómata finito la fórmula de lógica temporal **F**p «alguna vez en el futuro será que p», cuya definición semántica viene dada por $\nu(\mathbf{F}p, t) = 1\ syss\ \exists s \in T(t < s \wedge \nu(p, s) = 1)$ y nos dice que una **F**p es verdad si y solo si, existe un momento s que pertenece a T, el conjunto finito no vacío de instantes de tiempo, tal que t es anterior a s y p en el momento s es verdad.



El autómata descrito es una representación abstracta del comportamiento de la fórmula **F**p. Los elementos del autómata propuesto son dos estados t_0 y t_1, el primero es el estado inicial y el segundo el estado de aceptación, ambos pertenecen al conjunto Q de estados del autómata. El alfabeto del autómata Σ está compuesto por $\{p, q\}$ y las funciones de transición son las siguientes: El estado t_0 tiene dos transiciones $\delta(t_0, q) = t_0$ y $\delta(t_0, p) = t_1$. El estado t_1 tiene dos transiciones $\delta(t_1, p) = t_1$ y $\delta(t_1, q) = t_1$. Las cadenas p, qp, qpq y qpp serían ejemplos de cadenas que conducen al estado de aceptación t_1. El autómata nos permite ver un patrón de aceptación para **F**p, donde considerando dos variables, p y q por ejemplo, nos permite reconocer las secuencias del tipo: $(m_0), q\ (m_1), q\ (m_2), p\ (m_0), q\ (m_1), p\ (m_2), q\ (m_0), q\ (m_1), q\ (m_2), p$ donde (m_0), (m_1), (m_2), (m_3), (m_4) y (m_5) son instantes de tiempo y, p y q, las variables que consideramos antes. De esta manera, resumiendo, **F**p representado por el autómata propuesto nos muestra que la fórmula de lógica temporal **F**p es verdadera si responde al patrón que indica que p al menos aparezca una vez en la secuencia.

4. Discusión y posicionamiento

4.1. Sobre los Ax_3 y Ax_4, y el flujo de tiempo

Se dice que el sistema $\mathbf{K}_t$ es mínimo porque no tiene ninguna asunción sobre la naturaleza del tiempo, sin embargo, tiene elementos que vale la pena discutir. Hemos elegido uno de los muchos problemas que propone van Benthem, J. en *Tense Logic and Time*[68]. Para explicarlo seguimos la línea argumental de Müller, T. (2011) y luego relacionamos la crítica con la tesis de este trabajo. El tema versa sobre los Ax_3 y Ax_4, y el flujo de tiempo.

Un sistema axiomático pretende reflejar las características más importantes de un sistema. Uno de los elementos determinantes de la lógica temporal es el flujo temporal. Los Ax_3 y Ax_4 representan el flujo temporal en el sistema axiomático de $\mathbf{K}_t$. El $Ax_3 : p \to \mathbf{HF}$ nos dice que «p implica que ha sido siempre en el pasado que será alguna vez en el futuro p» y el $Ax_4 : p \to \mathbf{GP}p$ que «p implica que siempre será en el futuro que alguna vez fue en el pasado p». Considerando el Ax_3, vemos que p es verdad ahora; «es que ha sido siempre en el pasado que alguna vez en el futuro p» representa una idea muy indeterminada de lo que es verdad ahora, que en realidad en el pasado ya se planeaba que p iba a ser de todos modos ahora. Considerando el Ax_4, vemos que expresa la idea de que tanto el presente como el pasado son fijos, «p es ahora verdad, si ha sido siempre en el pasado que será alguna vez en el futuro que p. «Si el operador del futuro tiene como misión imitar el uso del tiempo futuro en el lenguaje natural o proveer una base para las discusiones filosóficas sobre el tiempo, la naturaleza simétrica de los Ax_3 y Ax_4 de $\mathbf{K}_t$ puede tomarse como inapropiada»[69].

Si queremos mostrar que la fórmula es filosóficamente apropiada, argumenta Müller, podemos asumir un tiempo lineal y adherir una interpretación de F como «será el caso de alguna

[68] VAN BENTHEM, J. *Tense Logic and Time*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 25, Nro. 1, 1894.

[69] MÜLLER, T., *Tense or temporal logic*, in The Continuum Companion to Philosophical Logic, Horsten, L. and Pettigrew, R., (Eds.), London: Continuum, 2001, pp. 324–350.

vez en el futuro que» y mostrar que la fórmula no es filosóficamente inapropiada. Según esta postura, una vez se restringe la atención a los marcos lineales, el problema se desvanece, no hay indeterminación, sólo una cadena de momentos futuros. En tal caso, ambos axiomas tendrían exactamente el mismo estatus y entonces no habría problema filosófico. Los marcos lineales son importantes en muchas aplicaciones y son especialmente estudiados en ciencias de la computación.

El argumento filosófico para mantener esta postura es que experimentamos el flujo de tiempo de una forma lineal[70] y le asignamos fechas, nombres, etc., de hecho es el modelo de tiempo más estudiado dentro del campo. Sin embargo, esto simplemente es un concepto de tiempo, según el cual experimentamos un momento de tiempo a la vez, recordemos la propiedad irreflexiva que nos dice que ningún momento es anterior ni posterior a sí mismo, en vez de experimentarlos todos simultáneamente. No existe un argumento filosófico que nos aboque a considerar sólo un flujo de tiempo determinista. La lógica temporal debe estar abierta más allá de los flujos de tiempo[71]. El problema de elaborar una semántica adecuada para el operador temporal ha ocupado un lugar central en el pre-desarrollo de la lógica temporal, recordemos, por ejemplo, la crítica de Peirce hacia el intento de describir algebráicamente el tiempo, o el problema de los futuros contingentes de Aristóteles. Los resultados de nuestro trabajo nos sugieren que los operadores del futuro del sistema $\mathbf{K}_t$ siguen un patrón de evaluación, pero hemos de ser cautos, puesto que este patrón sólo se podría aplicar al modelo de los operadores **F** y **G** cuyo flujo de tiempo está basado en instantes y relaciones de precedencia. No dice nada sobre cómo se comportará un operador de futuro sobre un tiempo basado en intervalos, o un tiempo futuro ramificado.

[70] RESCHER, N. AND URQUHART, A. *Temporal Logic*, Springer-Verlag/Wien, 1971. p. 83

[71] ØHRSTRØM AND HASLE. *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp. 243 - 281.

5. Conclusión y vías abiertas

La relación autómatas - lógica temporal nos muestra una riqueza envidiable de ambos campos. Su fertilidad y los sorprendentes giros argumentales de ambas historias hablan por si mismas. Los matices de la historia de la lógica temporal y de la teoría de autómatas nos llevan a pensar que siempre hubo una correspondencia de problemas conceptuales entre ambas disciplinas. En el caso de la lógica temporal, se realza su papel como lenguaje técnico que nos brinda conceptos relativamente precisos y nos ayuda a precisar la comunicación, en este sentido, la lógica temporal ha podido desempolvar muchos problemas que estaban perdidos en la historia. Hemos visto cómo la lógica y tiempo han ido interactuando a lo largo de la historia, desde sus orígenes con los filósofos megárico-estóicos, hasta el desarrollo del sistema mínimo de lógica temporal. Esto nos ha dado una visión mucho más amplia de lo que es la lógica temporal. De modo paralelo, hemos trabajado en los inicios de la teoría de autómatas, desde el *entscheidungsproblem* planteado por Hilbert, hasta el desarrollo de las gramáticas formales para los autómatas. La teoría de autómatas, por su parte, refuerza ese lenguaje lógico y nos permite hacer *una abstracción sobre la abstracción*, fortaleciendo el análisis conceptual y rastreo de problemas.

Respecto al sistema mínimo de lógica temporal $\mathbf{K}_t$, podemos decir que consta de un lenguaje formal $\mathcal{L}_{Kt}$, cuya novedad a nivel sintáctico es la introducción de nuevos operadores temporales **F**, **P**, **G** y **H**, y a nivel semántico la introducción de un flujo de tiempo $\mathcal{T} = (T, <)$. Este sistema guarda problemas en su aparato conceptual que son el corazón de distintas discusiones filosóficas, por ejemplo: ¿qué tipo de conceptos primitivos son los adecuados, intervalos o instantes?, o, en lugar de, ¿podemos reducir los intervalos a instantes, o los instantes a intervalos? La conclusión a la que hemos llegado es que el sistema $\mathbf{K}_t$ tiene determinadas propiedades, que pueden ser expandidas o criticadas. Eso no desestima la pregunta en absoluto, nos invita a seguir reflexionando y creando más problemas, por ejemplo, ¿se podrían combinar dos perspectivas distintas de tiempo (intervalos, instantes) en una misma lógica?

La introducción de los autómatas finitos nos proporciona la base para poder desarrollar la relación entre lógica temporal y autómatas. Los autómatas, nos permiten ver mediante su propia naturaleza abstracta el esquema de una fórmula de lógica temporal. Hemos ilustrado esta relación construyendo el autómata respectivo para el modelo de los operadores **F** y **G**. La tesis propuesta nos invita a explorar dos vías. La primera sería responder a la pregunta: ¿existe un autómata que haga verdaderos los modelos de los operadores temporales del pasado? Y la segunda, si queremos evitar el problema filosófico de la indeterminación del operador del futuro y asumimos un tiempo lineal, ¿serían suficientes los operadores **F**, **P**, **G**, **H** para una buena descripción de un orden lineal de acontecimientos? o ¿haría falta introducir nuevos operadores que sean más expresivos que los antes propuestos? Las respuestas a esas preguntas en vienen motivadas por la aplicabilidad de la lógica temporal en la informática teórica. En la lógica temporal lineal se introducen nuevos operadores: $\bigcirc$, $\Box$, $\Diamond$ y $\mathcal{U}$. Y se leen: «en el estado siguiente», «siempre», «eventualmente»y «hasta»y se interpretan dentro del mismo marco temporal que los operadores básicos de $\mathbf{K}_t$. Recientemente se trabaja en la introducción de operadores temporales del pasado, pero aún no se consiguen resultados en aumentar la *expresabilidad* de este tipo de lógica.

6. Bibliografía

ARECES, C AND BLACKBURN, P. *Bringing them all together*, Journal of logic and computation 11(5), pp. 657 - 669.

ASHWORTH, E. J. *Language and Logic in the Post-Medieval Period*, Vol. 12 Synthese Historical Library, Dordrecht, D. Reidel Publishing Company, 1974.

Developments in the Fifteenth and Sixteenth Centuries en Handbook of the History of Logic, Volume 2: Mediaeval and Renaissance Logic, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), Elsevier, 2008.

BLACKBURN, P., DE RIJKE, M., VENEMA, Y. *Modal Logic* Volumen 53 de Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, Cambridge University Press, 2002.

BOOLE, G. *Studies in Logic and Probability*, London, 1953.

CASTRILLO CRIADO, P. *El impacto del Humanismo Renacentista en la concepción de la Lógica*, Publicado en Éndoxa: Series Filosóficas Nro. 5. 1995, Madrid, UNED, pp. 91 - 114.

CHURCH, A. *Logic, arithmetic, and automata*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 15–22 August 1962, Institut Mittag-Leffler, Djursholm, Sweden, 1963, pp. 23–35.

DVOŘÁK, P. *Relational Logic of Juan Caramuel* en Handbook of the History of Logic. Volume 2: Mediaeval and Renaissance Logic, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), Elsevier, 2008.

EMERSON, E. A. *Temporal and Modal logic* in Handbook of Theoretical Computer Science, VAN LEEUWEN, J. (Ed.) North Holland Pub. Co. 1995.

GALTON, A. AND GORANKO, V., *Temporal Logic*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2015 Edition), ZALTA, E. N. (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2015/entries/logic-temporal/>.

GARSON, J. *Modal logic*, Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2009 Edition), ZALTA, E. N. (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2009/entries/logic-modal/>

GUTHRIE, W. K. C. *Historia de la Filosofía Griega, Tomo I: Los primeros presocráticos y los pitagóricos*, (1962), Versión Española de Alberto Medina González, Madrid, Ed. Gredos, 1984

GONZÁLEZ RIQUELME, M. *En torno al argumento de Diodoro Cronos*, Publicado en Revista La Laguna, 9 de Julio de 2001, pp. 177 - 185.

JURADO MÁLAGA, E. *Teoría de autómatas y lenguajes formales*, Colección manuales Universidad de Extremadura - 55 (E.E.E.S), 2008.

KOZEN, C. *Automata and Computability*, Springer-Ithaca, 1997.

LENZEN, W. *Leibniz's Logic* en Handbook of the History of Logic. Volume 3: Rise of Modern Logic: From Leibniz to Frege, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), North-Holland Publish Co, 2004.

ŁUKASIEWICZ, J. *Estudios de Lógica y Filosofía*, Caps. 2 - 3, edición y selección de Alfredo Deaño, Ed. Electrónica de www.philosophia.cl/Escuela de Filosofía Universidad ARCIS.

MAREBON, J. *Latin Tradition of Logic to 1100* en Handbook of the History of Logic. Volume 2: Mediaeval and Renaissance Logic, Dov M. Gabbay and John Woods (Editors), Elsevier, 2008.

MATES, B. *Stoic Logic*, University of California Press, 1961.

MCTAGGART, E, J. *The Unreality of Time*, Mind, October - 1908, pp. 457 - 474.

MÜLLER, T., *Tense or temporal logic*, in The Continuum Companion to Philosophical Logic, Horsten, L. and Pettigrew, R., (Eds.), London: Continuum, 2001, pp. 324–350.

PALAU, G. *Introducción filosófica a las lógicas no clásicas*, Barcelona, Editorial Gedisa, 2002.

PEIRCE, S. *New Elements of Mathematics* Vol. II, editor Carolyn Eisele, Humanities Press, 1976.

PERRIN, D. *Les Débuts de la Théorie des Automates*, Technique et Science Informatiques, Editions Hermes, 1995, 14 (4), pp.409-433. <hal-00793909>

PIÑERO, G. Y MARTÍNEZ, G. *Gödel ∀ (para todos)*, Ediciones Destino | Colección imago mundi Vol. 170, Barcelona, 2010.

PLATO, Platonis Opera, ed. John Burnet. Oxford University Press. 1903.

PRIOR, A. *Time and Modality*, Oxford, Oxford University Pres, 1957.

The syntax of time-distinctions, Franciscan Studies Vol. 18, No. 2, June 1958, pp. 105-120.

Past, Present and Future, Oxford, Oxford University Press, 1967.

Papers on Time and Tense, Oxford, Oxford University Press, 1968.

RESCHER, N. AND URQUHART, A. *Temporal Logic*, Springer-Verlag/Wien, 1971.

STANKOVIĆ, S. AND ASTOLA, J. (Eds.) *Reprints from the Early Days of Information Sciences - Paul Ehrenfest - Remarks on Algebra of Logic and Switching Theory*, Tampere International Center for Signal Processing TICSP Report No. 54, Tampere, 2010

THAYSE, A. & CO-AUTEURS. *Approche logique d'intelligence artificielle, 2. De la logique modale à la logique des bases de données*, DUNOD informatique, Bordas, Paris, 1989.

THOMAS, W. *Languages, Automata and Logic* in Handbook of formal languages, ROZENBERG, G. AND SALOMAA, A. (Eds) 1997, pp. 389-455.

TURING, A. M. *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Journal of Mathematics, Vol. 58, 1936, pp. 345 - 363.

UCKELMAN, S. *Lecture Notes: Temporal Logic*, ILLC, Ámsterdam, 2010.

VAN BENTHEM, J. *Tense Logic and Time*, Notre Dame Journal of Formal Logic, vol. 25, Nro. 1, 1894.

VAN BENTHEM, J. *Modal logic for open minds*, CSLI Lecture Notes, Stanford University, 2010.

VAN HEIJENOORT, J. *A source book in Mathematical Logic 1879 - 1931*, Harvard Univresity Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.

VAZQUEZ, M. *Introducción a la Lógica Temporal*, Publicado en Revista La Laguna, 9 de julio de 2001, pp. 187 - 198.

VENEMA, Y. *Temporal Logic*, Cap. X, en The Blackwell Guide to Philosophical Logic, Lou Goble (Editor), Willey, 2001.

ØHRSTRØM AND HASLE. *Temporal Logic: From Ancient Ideas to Artificial Intelligence*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1995.