Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

Carlos Ledesma Díaz

Caracterización de Dominios Simplemente Conexos

Characterization of simple connected domains

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2018

Dirigido por
Fernando Pérez González

Fernando Pérez González
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Al profesor Fernando Pérez González,
por su colaboración, generosidad y ayuda en la elaboración de este trabajo.

A mi tutor académico, profesor Miguel Ángel González Sierra,
por sus consejos durante estos cuatro años de carrera.

A todo el profesorado que me ha impartido clases,
por la adquisición de ciertos conocimientos durante el grado.

Y especialmente a toda mi familia y amigos,
por estar apoyándome incondicionalmente.

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se estudian las versiones globales del teorema de Cauchy, las familias normales de funciones analíticas, el teorema de la aplicación conforme de Riemann y el teorema de aproximación de Runge para subconjuntos compactos. Estos temas, que se encuadran en un curso ampliado de variable compleja, son necesarios para dar una múltiple caracterización de los dominios simplemente conexos.

Palabras clave: *Teoremas de Cauchy globales, familias normales de funciones analíticas, teorema de la aplicación conforme de Riemann, caracterización de dominios simplemente conexos.*

Abstract

In this project we study global versions of Cauchy theorem, normal families of analytic functions, Riemann mapping theorem and the approximation Runge theorem for compact subsets. These matters let us to give a multiple characterization of simply connected domains.

Keywords: *Global Cauchy theorems, normal families of analytic functions, Riemann mapping theorem, simply connected domains.*

Contenido

Introducción

En la mayoría de planes de estudios del Grado en Matemáticas vigentes en las distintas universidades del país, el Análisis Complejo se distribuye en dos asignaturas, una troncal en el tercer año y otra, generalmente optativa, en el siguiente. Este no es el caso de La Laguna, que sólo dedica seis créditos, en Análisis Matemático VI, a las propiedades básicas de la variable compleja.

En este Trabajo de Fin de Grado nos ocupamos de algunos temas que son de estudio obligado por poco que queramos ampliar los contenidos fundamentales de un buen curso de variable compleja. Teniendo presente las limitaciones que la normativa establece para la extensión de los TFG, hemos optado por ocuparnos del teorema de Cauchy en sus versiones globales, vemos los resultados fundamentales de familias normales de funciones analíticas, detallamos el teorema fundamental de la representación conforme de Riemann, incluimos una versión del teorema de Runge para compactos, todo ello necesario para concluir exponiendo las múltiples caracterizaciones de los dominios simplemente conexos del plano, lo que representa el objetivo principal de esta memoria de grado.

El capítulo primero se ocupa del teorema de Cauchy en sus versiones homológicas y homotópicas. Partiendo del caso local (para abiertos y convexos) nos preguntamos cómo debe ser un camino cerrado para que la integral de línea sobre el mismo de cualquier función holomorfa sea nula; o bien qué característica debe guardar un dominio para que la integral de línea de cualquier función analítica sobre cualquier curva cerrada sea cero. La respuesta a la primera cuestión viene dada por la versión homológica del teorema de Cauchy. Después de demostrar que un camino cerrado homotópico a cero es automáticamente homólogo a cero respecto del dominio, alcanzamos de inmediato una respuesta a la segunda cuestión a través de la versión homotópica del teorema de Cauchy. Tras ello, quedamos en condiciones de establecer las primeras propiedades equivalentes de dominios simplemente conexos.

En el estudio del espacio de las funciones holomorfas en un dominio es estándar dotar a dicho espacio con la topología de convergencia uniforme en subconjuntos compactos. De esto nos ocupamos en el capítulo II. Lo hacemos de una forma más general introduciéndola en el espacio de las funciones continuas y viendo luego que el espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas es un subespacio cerrado del de las continuas. La caracterización de familias normales de funciones continuas viene dada por el teorema de Arzelà-Ascolí que analizamos en detalle. Por su parte, el teorema de Montel proporciona la caracterización de las familias normales de funciones holomorfas en términos de la equiacotación local.

Uno de los resultados más importantes de la teoría de funciones holomorfas es el que se conoce como teorema de la aplicación de Riemann o teorema fundamental de la representación conforme que establece que todo dominio simplemente conexo propio es conformemente equivalente con el disco unidad abierto. De esto nos ocupamos en el capítulo III el cual se completa viendo el teorema de Osgood-Taylor-Carathéodory que viene a decirnos que para dominios simplemente conexos acotados los isomorfismos conformes con el disco unidad se pueden extender hasta las clausuras siempre que todos los puntos frontera sean accesibles.

La primera parte del capítulo IV se ocupa del teorema de aproximación de Runge para compactos. Para su prueba, precisamos ver previamente un teorema básico de representación integral de carácter general prosiguiendo luego con la técnica del desplazamiento de polos. Una consecuencia de esto es que si K es un compacto y $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo entonces cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por polinomios. Tal resultado comparece en la última sección del capítulo donde se recogen las múltiples caracterizaciones de los dominios simplemente conexos.

1

El teorema de Cauchy global

Ya se ha probado el teorema de Cauchy para un cierto tipo de dominios, los abiertos y convexos. Por otra parte, sabemos que el teorema no es válido para cualquier tipo de regiones. (Si $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$ y $\gamma(t) = re^{it}$, $r > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$, entonces $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \neq 0$). Esto es debido a que la función deja de ser holomorfa en un punto frontera aislado del dominio Ω.

En este capítulo nos preocupamos de ver cómo suprimir la hipótesis de convexidad. En concreto, podríamos formular la siguiente cuestión: Dado un dominio Ω y una función f holomorfa en Ω, ¿qué condiciones habría que imponer a un camino cerrado γ en Ω para que $\int_\gamma f(z)dz = 0$? Veremos que la respuesta se puede dar a través del concepto de homología, que se basa en la noción de índice de un camino cerrado.

1.1. El teorema de Cauchy homológico

Empezaremos generalizando la integración de funciones complejas de un modo natural.

1.1.1. Cadenas y ciclos

Supongamos que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son caminos en el plano y pongamos

$$K = \{\gamma_1\} \cup \{\gamma_2\} \cup \cdots \cup \{\gamma_n\}.$$

Nótese que K es un compacto en $\mathbb{C}$. Cada γ_i induce un funcional sobre $C(K)$, el espacio de las funciones continuas complejas en K, definiendo:

$$\widetilde{\gamma_i}(f) = \int_{\gamma_i} f(z)dz\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad f \in C(K).$$

Ahora hacemos

$$\widetilde{\gamma} := \widetilde{\gamma_1} \dotplus \widetilde{\gamma_2} \dotplus \cdots \dotplus \widetilde{\gamma_n} \tag{1.1}$$

lo que significa que

$$\widetilde{\Gamma}(f) := \int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz\,, \qquad f \in C(K). \tag{1.2}$$

Los objetos definidos en (1.1) se llaman *cadenas*. Si cada γ_i es un camino cerrado en Ω se dirá que Γ es un *ciclo*. Cuando esté claro el contexto, en lugar de utilizar la expresión en (1.1), se escribirá, sencillamente,

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n.$$

Una cadena puede representarse como “suma de caminos” de muchas formas:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_m\,.$$

Esto solo significa que

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \int_{\delta_j} f(z)dz$$

para cualquier función f que sea continua sobre la unión de todas las trazas.

Si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \{\Gamma\} = K$, definimos el *índice de Γ respecto de α* como la integral:

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \alpha}\,.$$

Esto no quiere decir más que

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} Ind_{\gamma_i}(\alpha)\,.$$

Con lo dicho hasta ahora, los propiedades aritméticas que siguen se entenderán en su forma natural:

- Si Γ es un ciclo y $\alpha \notin \{\Gamma\}$, entonces $Ind_{-\Gamma}(\alpha) = -Ind_{\Gamma}(\alpha)$.
- Si Γ es un ciclo y $n \in \mathbb{Z}$, entonces

$$n\Gamma := \begin{cases} \Gamma + \Gamma + \overset{(n)}{\cdots} + \Gamma, & n > 0\,, \\ (-\Gamma) + (-\Gamma) + \overset{(n)}{\cdots} + (-\Gamma), & n < 0\,. \end{cases}$$

- Si Γ_1 y Γ_2 son ciclos y $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, entonces
$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz\,,$$
para cualquier f continua en Γ.

1.1.2. Homología

Se dice que dos ciclos Γ_1 y Γ_2 contenidos en un abierto Ω son *homólogos respecto de* Ω (y escribiremos $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ en Ω) si $Ind_{\Gamma_1}(z) = Ind_{\Gamma_2}(z)$ para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Cuando esté claro en el contexto el abierto al cual nos referimos, eliminaremos la expresión "respecto de" y hablaremos simplemente de ciclos homólogos.

En particular, si un ciclo es homólogo a un ciclo que se reduce a un punto, diremos que el *ciclo es homólogo a cero respecto de* Ω. Ello equivale a decir que $Ind_\Gamma(z) = 0$ para todo $z \notin \Omega$.

Observación 1.1. Si todos los caminos que componen un ciclo son homólogos a cero, entonces el ciclo también lo es. Sin embargo, el recíproco no es cierto. Si Ω es una corona circular y γ es una circunferencia en la corona con su mismo centro y recorrida en sentido positivo, entonces γ no es homólogo a cero respecto Ω pues el índice con respecto al centro es 1. Ahora bien, el ciclo $\Gamma = \gamma + (-\gamma)$ es homólogo a cero respecto de Ω.

Si γ es un camino cerrado en un abierto y convexo Ω, entonces $\gamma \sim 0$ respecto de Ω. (Cualquier $z \notin \Omega$ está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$, con lo que $Ind_\gamma(z) = 0$). En base a esto, el teorema de Cauchy para un abierto y convexo podría enunciarse así: "Si Ω es un abierto y convexo, para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para cualquier camino γ cerrado que esté contenido en Ω se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = 0$".

Este resultado se puede generalizar para cualquier abierto y para ciertos ciclos contenidos en él.

Teorema 1.2 (Teorema de Cauchy homológico). *Sea γ un ciclo en un abierto Ω. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
(ii) γ es homólogo a cero respecto de Ω.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$: Supongamos que γ es un ciclo en Ω. Queremos ver que es homólogo a cero respecto de Ω, esto es, $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ para cualquier punto α que no esté en Ω. Para ello, consideramos la función $f(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$, $\alpha \notin \Omega$, que es holomorfa en Ω. Usando la hipótesis llegamos a que $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-\alpha} = 2\pi i Ind_\gamma(\alpha) = 0.$

Para probar la otra implicación necesitamos tres lemas.

Lema 1.3. *Si γ es una curva en un abierto Ω con intervalo del párametro $[a,b]$, existen una partición de $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_n = b$ y n discos $D_1, D_2 \dots D_n$ contenidos en Ω tales que*

$$\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Demostración. Pongamos $\varepsilon = dist(\{\gamma\}, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Como γ es uniformemente continua en $[a,b]$, para tal $\varepsilon > 0$ existirá un $\delta > 0$ de modo que si $t', t'' \in [a,b]$ y $|t' - t''| < \delta$ entonces

$$|\gamma(t') - \gamma(t'')| < \varepsilon\,.$$

Tomemos una partición de $[a,b]$ de norma menor que δ, es decir, sean $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ con $|t_i - t_{i-1}| < \delta$, $i = 1, 2, \dots, n$. Consideremos los discos $D_i := D(\gamma(t_i), \varepsilon)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Nótese que si t es un punto en $[a,b]$ y $|t - t_i| < \delta$, entonces $|\gamma(t_i) - \gamma(t)| < \varepsilon$ con lo que $\gamma(t) \in D_i$. En particular, $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset D_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Por último queda por ver que $D_i \subset \Omega$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Para ello, si $z \in D_i$, entonces $|z - \gamma(t_i)| < \varepsilon = dist(\{\gamma\}, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Por tanto, $z \notin \mathbb{C} \setminus \Omega$. Luego $z \in \Omega$. □

La construcción hecha en el Lema 1.3 asegura que $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$ están en el disco D_i. Sigue que la poligonal de lados paralelos a los ejes con origen en $\gamma(t_{i-1})$ y extremo en $\gamma(t_i)$ está en el disco D_i. La poligonal construida de esta manera, con origen en $\gamma(a)$ y extremo en $\gamma(b)$, la denotamos por η.

Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, dicha función tiene una primitiva g_i en D_i (abierto y convexo). Así:

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(t_1)} f(z)dz = g_1(\gamma(t_1)) - g_1(\gamma(a))\,.$$

Análogamente,

$$\int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} f(z)dz = g_2(\gamma(t_2)) - g_2(\gamma(t_1))\,,$$

donde se ha escogido g_2 de tal forma que $g_2(\gamma(t_1)) = g_1(\gamma(t_1))$. Las demás primitivas se van ajustando de forma similar. Resulta de este modo que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} (g_i(\gamma(t_i)) - g_i(\gamma(t_{i-1}))) = g_n(\gamma(b)) - g_1(\gamma(a)).$$

Fijémonos que si γ es cerrado, entonces la poligonal η también lo será. Y si uno es homólogo a cero respecto de Ω, el otro también lo será. Con esta argumentación queda probado el resultado que se recoge en el siguiente:

Lema 1.4. *Sea γ un ciclo en un abierto Ω. Existe un ciclo η en Ω formado por poligonales de lados paralelos a los ejes tal que:*

(i) Para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz$, y
(ii) γ y η son homólogos respecto de Ω.

Lema 1.5. *Sea η un ciclo en un abierto Ω que está constituido por poligonales de lados paralelos a los ejes. Supongamos que η es homólogo a cero respecto de Ω. Entonces existen $N \in \mathbb{N}$, $m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{Z}$ y $R_1, R_2, \ldots, R_N$ rectángulos contenidos en Ω tales que*

$$\int_\eta f(z)dz = \int_{\sum_{i=1}^N m_i \partial R_i} f(z)dz, \qquad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega),$$

donde ∂R_i representa la frontera del rectángulo R_i recorrida en sentido positivo.

Demostración. Efectuaremos la prueba siguiendo la que se hace en Ash [1, Lemma 2.3.2, pág. 60]. A partir del ciclo η, constituido por poligonales cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados, formamos la malla que consiste de todas las rectas paralelas a los ejes que pasan por los vértices de η (véase Figura 1.1). Esto determina una colección de regiones rectangulares abiertas R_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, regiones no acotadas $R_j^{'}$ que tienen tres lados, así como regiones no acotadas $R_k^{''}$ que tienen sólo dos lados. Para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, seleccionemos un punto z_i en cada R_i, hagamos $m_i = Ind_\eta(z_i)$ y consideremos el ciclo $\eta_0 = \sum_{i=1}^N m_i \partial R_i$, donde ∂R_i representa la frontera de R_i recorrida una sola vez en sentido positivo.

Con tal construcción observamos que

$$Ind_{\eta_0}(z_k) = \sum_{i=1}^N m_i Ind_{\partial R_i}(z_k) = Ind_\eta(z_k)\,, \tag{1.3}$$

para $k = 1, 2, \ldots, N$. Si $z_j' \in R_j'$ se tiene que

$$Ind_{\eta_0}(z_j') = \sum_{i=1}^N m_i Ind_{\partial R_i}(z_i') = 0 = Ind_\eta(z_j')\,, \tag{1.4}$$

puesto que z_j' está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \{\eta\}$.

Ahora supongamos que σ_{ij} es un lado entre R_i y R_j. Asumamos que en el ciclo $\eta - \eta_0$, σ_{ij} es recorrido c veces (siendo c un número entero posiblemente negativo). Sea el ciclo $\sigma = \eta - \eta_0 - c\partial R_i$. Entonces

$$Ind_\sigma(z_i) = Ind_\eta(z_i) - Ind_{\eta_0}(z_i) - cInd_{\partial R_i}(z_i) = -c \tag{1.5}$$

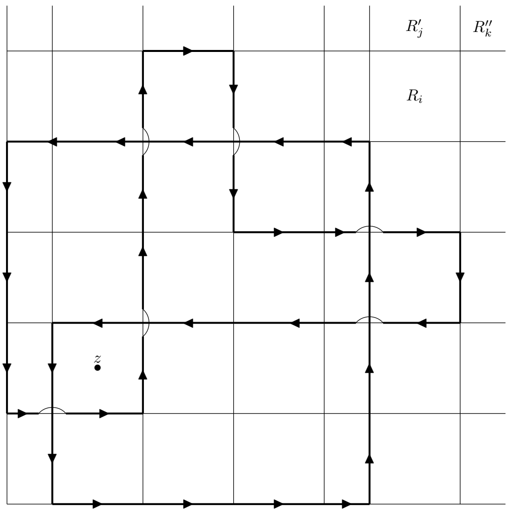

Figura 1.1. Poligonal de lados paralelos a los ejes

debido a (1.3). También por esta misma identidad

$$Ind_\sigma(z_j) = Ind_\eta(z_j) - Ind_{\eta_0}(z_j) - cInd_{\partial R_i}(z_j) = 0. \tag{1.6}$$

Ahora bien, notamos que σ_{ij} esencialmente no aparece en σ, esto es, σ es homólogo a un ciclo τ en el cual σ_{ij} no aparece. Por tanto, $Ind_\sigma(z_k) = Ind_\tau(z_k)$ para todo k.

Dado que z_i y z_j pertenecen a la misma componente de $\mathbb{C}\setminus\{\tau\}$, $Ind_\tau(z_i) = Ind_\tau(z_j)$. Por (1.5) y (1.6), $c = 0$, lo que entraña que σ_{ij} no contribuye en nada en el ciclo $\eta - \eta_0$. El mismo razonamiento, con z'_j en lugar de z_i, muestra que si σ'_{ij} es un segmento común entre R_i y la región no acotada R'_j, entonces σ'_{ij} no aporta nada al ciclo $\eta - \eta_0$. Como todos los lados de $\eta - \eta_0$ son de la forma σ_{ij} o σ'_{ij} se concluye que $\eta - \eta_0$ es homólogo a cero respecto de Ω. Todo lo que queda es aplicar el Lema 1.4 para concluir la prueba.

□

Demostración de que (ii) ⇒ (i) en el Teorema 1.2: Sea γ un ciclo homólogo a cero respecto de Ω. Por el Lema 1.3 y el Lema 1.4 sabemos que existe un ciclo η formado por poligonales de lados paralelos a los ejes que es homólogo a cero respecto de Ω. Además, si f es una función holomorfa en Ω se tiene que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\eta f(z)dz\,, \qquad\qquad f \in \mathcal{H}(\Omega)\,.$$

Teniendo en cuenta ahora la identidad en el Lema 1.5, y que los rectángulos R_i los podemos suponer que se encuentran dentro de subconjuntos abiertos y convexos en los que vale el teorema de Cauchy, concluimos que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

$\square$

Corolario 1.6. *Si γ_1 y γ_2 son dos ciclos en un abierto Ω, entonces γ_1 y γ_2 son homólogos respecto de Ω si, y sólo si, se verifica que*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Si γ_1 y γ_2 son homólogos respecto de Ω, entonces el ciclo $\gamma := \gamma_1 - \gamma_2$ es homólogo a cero respecto de Ω. Por el Teorema 1.2, si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$.

Recíprocamente, si $\alpha \notin \Omega$, la función $f(z) = \dfrac{1}{z-\alpha}$ es holomorfa en Ω, con lo que

$$Ind_{\gamma_1}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(z)dz = Ind_{\gamma_2}(\alpha).$$

Esto prueba que γ_1 y γ_2 son homólogos respecto de Ω. $\square$

Corolario 1.7 (Fórmula integral de Cauchy: versión homológica). *Sea γ un ciclo homólogo a cero respecto de un abierto Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Para todo $z \in \Omega \setminus \{\gamma\}$ se tiene que*

(a)

$$Ind_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\,.$$

(b) Para cualquier $n = 1, 2, \ldots,$ se verifica que

$$Ind_\gamma(z)f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}dw\,.$$

Demostración. Sea D un disco centrado en z tal que $\overline{D} \subset \Omega \setminus \{\gamma\}$, pongamos $\gamma_0 = \partial D$, supongamos que esta circunferencia está recorrida una sola vez en sentido positivo y consideremos la curva $\Gamma = Ind_\gamma(z)\gamma_0$.

Veamos ahora que Γ y γ son homólogos respecto de $\Omega_0 = \Omega \setminus \{z\}$. En efecto, $Ind_\Gamma(z) = Ind_\gamma(z)Ind_{\gamma_0}(z) = Ind_\gamma(z)$. Por otra parte, si $\alpha \notin \Omega$ ($\alpha \neq z$), se tendrá que $Ind_\Gamma(\alpha) = Ind_\gamma(z)Ind_{\gamma_0}(\alpha) = 0$ porque γ_0 es homólogo a cero respecto de Ω. Pero también $Ind_\gamma(\alpha) = 0$ porque γ es homólogo a cero respecto de Ω. Ahora, la función $F(w) = \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}$ es holomorfa en Ω_0, y como los ciclos Γ y γ son homólogos respecto de Ω_0, podemos aplicar el Corolario 1.6 teniéndose que

$$\int_\Gamma F(w)dw = \int_\gamma F(w)dw\,.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F(w)dw &= \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} \\
&= Ind_\gamma(z)\int_{\gamma_0} \frac{f(w)}{w-z}dw - f(z)Ind_\gamma(z)\int_{\gamma_0}\frac{dw}{w-z} \\
&= Ind_\gamma(z)2\pi i f(z) - f(z)Ind_\gamma(z)2\pi i \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, $\int_\gamma F(w)dw = 0$. De aquí se deduce que

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)\int_\gamma \frac{dw}{w-z}\,.$$

En particular

$$Ind_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\,.$$

Esto prueba la parte (a). La parte (b) sigue por inducción como en el caso local, aplicando los resultados en [7, Proposición 4.39 y Teorema 4.40]. □

1.2. El teorema de Cauchy homotópico

Queremos dar otra generalización del teorema integral de Cauchy respondiendo a otro problema: ¿qué tipo de abiertos Ω son aquellos que satisfacen $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para cualquier camino cerrado en Ω? Se verá que tales abiertos son, precisamente, los dominios simplemente conexos. Introduciendo este concepto a través de la noción de homotopía, podemos obtener algunas primeras caracterizaciones de este tipo de conjuntos.

1.2.1. Homotopía

Definición 1.8. Sean γ_0 y γ_1 dos arcos cerrados en un abierto Ω que tienen el mismo intervalo del parámetro $I = [0,1]$. Se dirá que γ_0 y γ_1 son *homotópicos en Ω* si existe una aplicación continua $H : I \times I \to \Omega$, llamada *homotopía*, que cumple:

(i) $H(s,0) = \gamma_0(s)$ *para cualquier* $s \in I$*,*
(ii) $H(s,1) = \gamma_1(s)$ *para cualquier* $s \in I$*, y*
(iii) $H(0,t) = H(1,t)$ *para cualquier* $t \in I$*.*

Poniendo $\gamma_t(s) = H(s,t)$, se obtiene una familia uniparamétrica de curvas cerradas γ_t en Ω, que "deforman con continuidad" γ_0 en γ_1. Si γ_0 es homotópico a una curva que se reduce a un punto, se dirá que γ_0 *es homotópico a cero respecto de Ω*.

Definición 1.9. Un dominio Ω se dice que es *simplemente conexo* si cualquier curva cerrada en Ω es homotópica a cero en Ω.

Ejemplo 1.10. Todo abierto y convexo Ω es un dominio simplemente conexo. En efecto, tomemos una curva γ cerrada en Ω y fijemos un punto $z_1 \in \Omega$. La aplicación $H(s,t) = (1-t)\gamma(s) + tz_1$, $0 \leq s,t \leq 1$ es una homotopía que deforma continuamente γ sobre z_1.

1.2.2. El teorema de Cauchy homotópico

Queremos ver ahora que homotopía implica homología. Para ello necesitamos un lema técnico que se usará en la demostración del Teorema 1.12.

Lema 1.11. *Sean γ_0 y γ_1 dos caminos cerrados con intervalo del parámetro $I = [0,1]$ y supongamos que α es un complejo que verifica que*

$$|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|, \qquad 0 \leq s \leq 1. \tag{1.7}$$

Entonces $Ind_{\gamma_0}(\alpha) = Ind_{\gamma_1}(\alpha)$.

Demostración. Obsérvese ante todo que la hipótesis implica que $\alpha \notin \{\gamma_0\} \cup \{\gamma_1\}$. Definamos el camino cerrado

$$\gamma \ : \ [0,1] \to \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) - \alpha}{\gamma_0(t) - \alpha}$$

y notemos que, por la hipótesis (1.7), se tiene que $|1-\gamma(t)|<1$ para todo $t\in[0,1]$. De ahí que $\{\gamma\}\subset D(1,1)$, de lo que se desprende que $Ind_\gamma(0)=0$. Como además,

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}=\frac{\gamma_1'(t)}{\gamma_1(t)-\alpha}-\frac{\gamma_0'(t)}{\gamma_0(t)-\alpha}\,,\qquad t\in[0,1],$$

una simple integración da que $Ind_{\gamma_1}(\alpha)=Ind_{\gamma_2}(\alpha)$. □

Teorema 1.12. *Sean Γ_0 y Γ_1 dos caminos cerrados en un dominio Ω. Si Γ_0 y Γ_1 son homotópicos respecto de Ω, entonces Γ_0 y Γ_1 son homólogos respecto de Ω.*

Demostración. Sean $I=[0,1]$ y $H:I\times I\to\Omega$ una homotopía que transforma continuamente Γ_0 en Γ_1, es decir, H es una aplicación continua en $I\times I$ tal que, para $s,t,\in I$, se tiene que:

$$\begin{aligned}H(s,0)&=\Gamma_0(s)\\ H(s,1)&=\Gamma_1(s)\\ H(0,t)&=H(1,t)\,.\end{aligned}$$

Como $I\times I$ es compacto, así lo es también su conjunto imagen $H(I\times I)$. Por tanto, si $\alpha\notin\Omega$, se tendrá que $\alpha\notin H(I\times I)$ y que existe un $\varepsilon>0$ tal que $D(\alpha,4\varepsilon)\cap H(I\times I)=\emptyset$, esto es,

$$|\alpha-H(s,t)|>4\varepsilon\,,\qquad \forall s,t\in I\,. \tag{1.8}$$

Por otra parte, como en particular H es uniformemente continua en $I\times I$, podemos escribir que para tal $\varepsilon>0$, existe un $n\in\mathbb{N}$ de modo que

$$|H(s,t)-H(s',t')|<\varepsilon\,,\qquad s,s',t,t'\in I\,,\qquad |s-s'|+|t-t'|\le\frac{1}{n}\,. \tag{1.9}$$

Definamos ahora las poligonales cerradas $\gamma_0\,,\gamma_1\,,\dots\gamma_n$ de la siguiente forma:

$$\gamma_k(s)=H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)(ns+1-i)+H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)(i-ns)\,, \tag{1.10}$$

donde $k=0,1,2,\dots,n$, $\frac{i-1}{n}\le s\le\frac{i}{n}$ e $i=1,2,\dots,n$. Nótese que la poligonal γ_k tiene por vértices los puntos

$$H\left(0,\frac{k}{n}\right),H\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n}\right),H\left(\frac{2}{n},\frac{k}{n}\right),\dots,H\left(1,\frac{k}{n}\right),$$

y resulta de escribir el segmento que une los puntos $H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)$ y $H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)$ con intervalo de parámetro $\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$. Ahora, para $s\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]$, de (1.10) sigue que

$$\gamma_k(s)-H\left(s,\frac{k}{n}\right)=H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)(ns-i)+H\left(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n}\right)(i-ns)$$
$$+\left(H\left(\frac{i}{n},\frac{k}{n}\right)-H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right).$$

Tomando módulos y usando la estimación en (1.9) llegamos a que

$$\left|\gamma_k(s)-H\left(s,\frac{k}{n}\right)\right|\le\varepsilon\left((i-ns)+1\right)\le(1+1)\varepsilon=2\varepsilon\,, \tag{1.11}$$

siendo esta desigualdad válida para todo $k=0,1,2,\ldots,n$ y para todo s, $0\le s\le 1$. En particular, para $k=0$ es

$$|\gamma_0(s)-\mathit{\Gamma}_0(s)|<2\varepsilon\,, \qquad 0\le s\le 1\,.$$

Análogamente, para $k=n$ se tiene que

$$|\gamma_n(s)-\mathit{\Gamma}_1(s)|<2\varepsilon\,, \qquad 0\le s\le 1\,.$$

Por otra parte, de (1.8) y (1.11) resulta que

$$|\alpha-\gamma_k(s)|>2\varepsilon\,, \qquad k=0,1,\ldots,n\,, \qquad 0\le s\le 1\,.$$

Además, sigue de la definición de las poligonales γ_k que

$$|\gamma_k(s)-\gamma_{k-1}(s)|<2\varepsilon\,, \qquad k=0,1,\ldots,n\,, \qquad 0\le s\le 1\,.$$

La conclusión se obtiene sin más que aplicar el Lema 1.11 un número finito de veces para ir pasando de una curva a la siguiente, concluyéndose que

$$Ind_{\mathit{\Gamma}_0}(\alpha)=Ind_{\gamma_0}(\alpha)=Ind_{\gamma_1}(\alpha)=\cdots=Ind_{\gamma_n}(\alpha)=Ind_{\mathit{\Gamma}_1}(\alpha)\,.$$

□

Corolario 1.13 (Teorema de Cauchy homotópico). *Sea Ω un dominio simplemente conexo. Para todo ciclo γ en Ω y para cualquier $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ se tiene que*

$$\int_\gamma f(z)dz=0.$$

Demostración. Si γ es un ciclo en el dominio simplemente conexo Ω, γ es homotópico a cero y, por el Teorema 1.12, será homólogo a cero en Ω. Todo lo que hay que hacer es aplicar la versión homológica del teorema de Cauchy (Teorema 1.2). □

Utilizando el mismo argumento, pero usando ahora el Corolario 1.7, se llega a la fórmula integral de las derivadas de orden superior que se recoge en el resultado que sigue:

Corolario 1.14 (Fórmula integral de Cauchy para la función y sus derivadas). *Sea Ω un dominio simplemente conexo. Para todo ciclo γ en Ω, para cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, para todo $z \in \Omega \setminus \{\gamma\}$ y para cualquier $n = 0, 1, 2, \ldots$ se tiene que*

$$Ind_\gamma(z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \,.$$

1.3. Primeras propiedades de los dominios simplemente conexos.

De lo visto en la sección anterior, podemos colegir simplificadamente que homotopía implica homología. Por tanto, teniendo en cuenta la Definición 1.9, en un dominio simplemente conexo cualquier ciclo es homólogo a cero respecto del dominio. Veremos en esta sección (Teorema 1.17) que esta última propiedad equivale a otras de diferente naturaleza. Empezaremos deteniéndonos en algunas proposiciones de carácter independiente que utilizaremos en la demostración.

Proposición 1.15. *Supongamos que Ω es un abierto de $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa y sin ceros en Ω. Entonces, f tiene logaritmo analítico en Ω si, y sólo si, $\dfrac{f'}{f}$ tiene primitiva en Ω.*

Demostración. Supongamos que g es un logaritmo analítico de f en Ω. Es decir, $e^g = f$, donde $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Derivando esta identidad se tiene que

$$g' e^g = f' \,,$$

lo que prueba que g es una primitiva de $\dfrac{f'}{f}$.

Recíprocamente, partamos ahora de que existe una función g holomorfa en Ω tal que $g' = \dfrac{f'}{f}$. Consideremos la función $F := f e^{-g}$ holomorfa en Ω y cuya derivada se anula idénticamente en Ω. Esto se traduce en que si A es una componente conexa de Ω, entonces existe un complejo k_A tal que $F \equiv k_A$ en A. Nótese que, como f carece de ceros y la exponencial no se anula, $k_A \neq 0$, y se puede poner $k_A = e^{c_A}$, c_A constante. Sigue que $e^{c_A+g} = k_A e^g = Fe^g = f$. Poniendo ahora $G(z) = g(z) + c_A$, $z \in A$, y razonando de igual modo con cada componente conexa de Ω se concluye que G es un logaritmo analítico de f en Ω.

□

Proposición 1.16. *Sean A y B dos conjuntos disjuntos de $\mathbb{C}_\infty$ con A compacto no vacío de $\mathbb{C}$, B cerrado y la distancia cordal $\chi(A, B) = \delta > 0$. Entonces existe un ciclo γ tal que:*

(a) $\{\gamma\} \cap (A \cup B) = \emptyset$,
(b) $Ind_\gamma(z) = 1$ *para todo* $z \in A$, *y*
(c) $Ind_\gamma(z) = 0$ *para todo* $z \in B$.

Demostración. Remitimos al lector a la obra de R. Ash [1, Lemma 2.3.6, pág. 64].

□

Estamos en condiciones de dar algunas propiedades equivalentes de los dominios simplemente conexos. Este resultado será ampliado en el capítulo IV.

Teorema 1.17. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ *es conexo.*
(b) Todo ciclo en Ω es homólogo a cero respecto de Ω.
(c) Para cualquier ciclo γ en Ω y para cualquier función f holomorfa en Ω se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
(d) Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva en Ω.
(e) Toda función holomorfa en Ω que carezca de ceros en Ω tiene un logaritmo analítico en Ω.
(f) Si f es una función holomorfa en Ω y $f(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \Omega$, entonces $\dfrac{f'}{f}$ tiene primitiva en Ω.
(g) Si f es una función holomorfa en Ω y $f(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \Omega$, entonces f tiene una raíz cuadrada analítica, esto es, existe una $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$: Supongamos que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo y sea γ un ciclo en Ω. Como $\{\gamma\} \subset \Omega$ resulta que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma\}$. Ya que $\infty \notin \Omega$, será $\infty \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, y como $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo, se tendrá que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ está contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus \{\gamma\}$. En particular, $Ind_\gamma(z) = 0$ para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, lo que se traduce en que γ es homólogo a cero respecto de Ω.

$(b) \Rightarrow (a)$: Supongamos que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ no sea conexo. Entonces $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega = A \cup B$, donde A y B son dos subconjuntos cerrados en $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, no vacíos y disjuntos. Ahora bien, como Ω es abierto en $\mathbb{C}$, también lo será en $\mathbb{C}_\infty$, con lo que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es cerrado en $\mathbb{C}_\infty$, y por consiguiente, A y B son cerrados en $\mathbb{C}_\infty$.

Por otra parte, como $\infty \notin \Omega$, $\infty \in A \cup B$. Supongamos que $\infty \in B$. Por tanto, $B \setminus \{\infty\} = B \cap \mathbb{C}$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

Veamos ahora que A es compacto en $\mathbb{C}$. Como A es cerrado en $\mathbb{C}_\infty$ y $\infty \notin A$ se tiene que A es cerrado en $\mathbb{C}$. Además, como $\infty \notin A$, existirá un compacto K de $\mathbb{C}$ tal que $A \cap (\mathbb{C}_\infty \setminus K) = \emptyset$. Luego $A \subset K$, y A es compacto.

Estamos en condiciones de aplicar la Proposición 1.16 a los conjuntos A y $B \setminus \{\infty\}$. En consecuencia, existirá un ciclo γ tal que
$\{\gamma\} \cap (A \cup (B \setminus \{\infty\})) = \{\gamma\} \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = \emptyset$. Luego $\{\gamma\} \subset \Omega$ y $\{\gamma\}$ es un ciclo en Ω. Además, como $Ind_\gamma(z) = 1$ para todo $z \in A$, se llega a que γ no es homólogo a cero respecto de Ω.

$(b) \Leftrightarrow (c)$: Esto sigue del teorema de Cauchy homológico (Teorema 1.2).

$(c) \Leftrightarrow (d)$: Esto no es otra cosa que el teorema de la primitiva (ver [7, Teorema 4.20]).

$(d) \Rightarrow (e)$: Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y sin ceros. Entonces $\frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, por el teorema de la primitiva, $\dfrac{f'}{f}$ tiene primitiva en Ω, y por la Proposición 1.15, f tiene logaritmo analítico en Ω.

$(e) \Leftrightarrow (f)$: Esto es precisamente el contenido de la Proposición 1.15.

$(e) \Rightarrow (g)$: Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ sin ceros y que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $e^h = f$. Es claro que la función $g := e^{\frac{h}{2}}$ es una raíz cuadrada analítica de f.

$(g) \Rightarrow (f)$: Sean f holomorfa en Ω con $f(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \Omega$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$. Derivando sigue que $2gg' = f'$. De aquí se desprende que f'/f tiene primitiva en Ω.

Finalmente, cerraremos la cadena de equivalencias probando que
$(e) \Rightarrow (b)$: Fijemos un punto $z_0 \notin \Omega$ y consideremos la función $f(z) := z - z_0$. Es claro que tal función es holomorfa y sin ceros en Ω. Por hipótesis, f tendrá un logaritmo analítico en Ω, lo cual es equivalente (por la Proposición 1.15) a que la función $\dfrac{f'}{f}$ tenga primitiva. Esto entraña que si γ es un ciclo en Ω, entonces $\displaystyle\int_\gamma \frac{f'}{f} = 0$. De este modo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = Ind_\gamma(z_0) = 0\,,$$

lo que prueba que γ es homólogo a cero respecto de Ω. □

2

Convergencia y compacidad en el espacio de las funciones holomorfas

Queremos dotar al espacio de las funciones holomorfas en un abierto de una topología que es estándar en teoría de funciones analíticas. Para mayor generalidad, vamos a introducirla en la clase más amplia de las funciones continuas.

2.1. El espacio de las funciones continuas $C(\Omega)$

Definición 2.1.1 Para un abierto Ω de $\mathbb{C}$ denotaremos por $C(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones continuas de Ω que toman valores complejos.

En la siguiente proposición veremos que un abierto de $\mathbb{C}$ es σ-compacto, es decir, lo podemos escribir como unión numerable de subconjuntos compactos que, además, podemos tomarlos encajados en orden creciente.

Proposición 2.1.1 *Todo conjunto abierto Ω de $\mathbb{C}$ se puede escribir como unión numerable de conjuntos compactos $\{K_n\}$ tales que*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \,,$$

donde los conjuntos K_n satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $K_n \subset Int(K_{n+1})$, $n = 1, 2, \ldots$.
(b) Para cualquier compacto $K \subset \Omega$ existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$.
(c) Cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ contiene una componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

Demostración. Consideremos la función distancia $d : \Omega \to \mathbb{R}^+$, donde $d(z) = dist(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Para cada entero positivo n, definimos:

$$K_n = \{z : |z| \leq n\} \cap \left\{z \in \Omega \, : d(z) \geq \frac{1}{n}\right\}.$$

Como la función distancia es continua es claro que K_n es cerrado y obviamente también acotado, luego es compacto.

Además, ya que

$$K_n \subset \{z : |z| < n+1\} \cap \left\{z : d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{n+1}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

y el conjunto del segundo miembro es abierto, es claro que $K_n \subset Int(K_{n+1})$, lo que prueba la parte (a). Obsérvese que si $z \in \Omega$ y $|z| \leq k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ y $d(z) \geq \frac{1}{j}$ para un cierto $j \in \mathbb{N}$, si $n = \text{máx}\{k, j\}$, es claro que $|z| \leq n$ y $d(z) \geq \frac{1}{n}$. Esto implica que $z \in K_n$. Por tanto, podemos poner que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} Int(K_n).$$

Para probar (b), dado un compacto cualquiera $K \subset \Omega$, es claro que $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Int(K_n)$. Por consiguiente, K se puede recubrir por un número finito de ellos, y como son encajados en orden creciente, podemos decir que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup_{n=1}^{N} Int(K_n) \subset K_N$.

Para ver (c), reparemos ante todo que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ y que ambos contienen al punto del infinito. Si U es la componente no acotada $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$, $\infty \in U$, U es conjunto conexo de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ que deberá estar contenido en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$. Nótese que esta componente no acotada contiene al conjunto $\{z \, : |z| > n\}$. Por esto, si D es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, debe contener un punto $z \in D$ tal que $d(z) < \frac{1}{n}$. Por definición, esto supone que existe un $w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ tal que $|w - z| < \frac{1}{n}$. Pero entonces $z \in D(w, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$; ya que los discos son conexos y z está en la componente D de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, resulta que $D(w, \frac{1}{n}) \subset D$. Finalmente, si D_1 es la componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que contiene a w sigue que $D_1 \subset D$. □

Nuestro siguiente objetivo es dotar al espacio $C(\Omega)$ de una métrica. Si $K \subset \Omega$ es compacto, definimos la función

$$\rho_K \, : C(\Omega) \times C(\Omega) \to \mathbb{R}^+$$

de la siguiente manera:

$$(f,g) \to \rho_K(f,g) = \sup_{z\in K}\{|f(z)-g(z)|\} = \|f-g\|_K \,.$$

ρ_K es una cuasi-métrica sobre $C(\Omega)$ porque $\rho_K(f,g) \geq 0$, $\rho_K(f,g) = \rho_K(g,f)$ y $\rho_K(f,g) \leq \rho_K(f,h) + \rho_K(h,g)$, cualesquiera que sean $f, g, h \in C(\Omega)$. Para los compactos introducidos en la Proposición 2.1.1, escribiremos

$$\rho_n(f,g) = \sup_{z\in K_n}\{|f(z)-g(z)|\} = \|f-g\|_{K_n} \,, \qquad n = 1, 2, \ldots \,,$$

y definimos

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \,, \qquad f\,, g \in C(\Omega) \,. \tag{2.1}$$

Como la serie (2.1) siempre está mayorada por una geométrica de razón menor que uno, la aplicación ρ está bien definida y establece una métrica en $C(\Omega)$. Nos limitaremos a probar solamente la desigualdad triangular. A tal fin, utilizaremos que la aplicación $t \mapsto \frac{t}{1+t}$, $t > 0$, es creciente. Por ello, ya que

$$\rho_n(f,g) \leq \rho_n(f,h) + \rho_n(h,g) \,, \qquad n \in \mathbb{N} \,,$$

sigue que

$$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(f,h)+\rho_n(h,g)}$$

$$\leq \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)} \,.$$

Sumando en n se llega a que

$$\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

para f, g, $h \in C(\Omega)$.

La siguiente proposición es fundamental para entender mejor cómo es la convergencia en $C(\Omega)$.

Proposición 2.1.2 *Sea ρ la métrica definida en (2.1) para el espacio $C(\Omega)$. Entonces:*

(a) Dado $\varepsilon > 0$, existen un $\delta > 0$ y un compacto $K \subset \Omega$ tal que si f, $g \in C(\Omega)$ y $\|f-g\|_K < \delta$, entonces $\rho(f,g) < \varepsilon$.
(b) Dados un número $\delta > 0$ y un compacto $K \subset \Omega$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que si f, $g \in C(\Omega)$ y $\rho(f,g) < \varepsilon$, entonces $\|f-g\|_K < \delta$.

Demostración. Para ver (a), dado un $\varepsilon > 0$ existe un $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Tomemos $K = K_p$ compacto. Usando que la función $\frac{t}{1+t}$ es continua en 0, tomemos un $\delta > 0$ tal que si $0 \leq t < \delta$, entonces $\frac{t}{1+t} < \frac{\varepsilon}{2}$. Si f y g son continuas en Ω tales que $\|f-g\|_K < \delta$, entonces

$$\rho_n(f,g) < \delta, \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots p\,.$$

Ahora,

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Para probar (b), dado un compacto $K \subset \Omega$, sea $p \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_p$. Observemos que

$$\|f-g\|_K \leq \rho_p(f,g)\,.$$

Por otra parte, dado $\delta > 0$, como la función $\frac{s}{1-s}$ es continua en $s = 0$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo s, $0 \leq s \leq 2^p\varepsilon$, se tiene que $\frac{s}{1-s} < \delta$. De aquí, si f, g son continuas en Ω y $\rho(f,g) < \varepsilon$, se sigue que

$$\frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p\varepsilon\,,$$

pudiéndose concluir que $\|f-g\|_K \leq \rho_p(f,g)\,.$ □

Proposición 2.1.3 *Provisto de la métrica ρ, $C(\Omega)$ es un espacio métrico completo.*

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio métrico $(C(\Omega), \rho)$. Por la Proposición 2.1.2, para cualquier compacto $K \subset \Omega$, las restricciones de las funciones f_n a K constituyen una sucesión de Cauchy en $C(K)$, el espacio de las funciones continuas en K. Esto significa que para cada $\delta > 0$ existe un $N = N(K) \in \mathbb{N}$ tal que si n, $m \in \mathbb{N}$ con n, $m > N$ se tiene que $|f_n(z) - f_m(z)| < \delta$, para cualquier $z \in K$.

En particular, podemos decir que $\{f_n(z)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{C}$ para todo $z \in \Omega$. De esta forma queda definida una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ por $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$. Queremos ver ahora que f es continua en Ω y que $\rho(f_n, f) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Para K compacto, como las restricciones a K de las funciones de la sucesión $\{f_n\}$ constituyen una sucesión de Cauchy en $C(K)$, que es un espacio métrico completo, la sucesión $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en K. Pero el límite uniforme de funciones continuas nos da una función continua. Esto prueba que $f \in C(\Omega)$.

Finalmente, apliquemos la Proposición 2.1.2. Dado $\varepsilon > 0$, existe un compacto $K \subset \Omega$ y un $\delta > 0$ tales que si f y g son funciones continuas en Ω con $\|f-g\|_K < \delta$, entonces $\rho(f,g) < \varepsilon$. Para tal compacto K y para tal $\delta > 0$, como $f_n \to f$ uniformemente en K, existirá un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ se tiene que $\|f_n - f\|_K < \delta$. Pero esto entraña que $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ para $n \geq N$. □

Proposición 2.1.4 *(a) Un conjunto $U \subset C(\Omega)$ es abierto si, y sólo si, para cada $f \in U$, existen un compacto $K \subset \Omega$ y un $\delta > 0$ tales que*

$$\{g \in C(\Omega) \,:\, \rho_K(f,g) < \delta\} \subset U. \tag{2.2}$$

(b) Una sucesión $\{f_n\}$ en $C(\Omega)$ converge a f si, y sólo si, $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.

Demostración.
(a): Supongamos que U es abierto y que $f \in U$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ de modo que

$$B_\rho(f,\varepsilon) \subset U. \tag{2.3}$$

Por la parte (a) de la Proposición 2.1.2, existe un $K \subset \Omega$ compacto y un $\delta > 0$ tales que si $\rho_K(h,g) < \delta$ para $h, g \in C(\Omega)$, entonces $\rho(h,g) < \varepsilon$. En particular, para $g \in C(\Omega)$ con $\rho_K(f,g) < \delta$ sigue que $\rho(f,g) < \varepsilon$ y la inclusión en (2.3) se deduce.

Recíprocamente, sea $f \in U$ y asumamos que existe un compacto K y un $\delta > 0$ tales que se verifica la inclusión en (2.2). Queremos ver que f es un punto interior de U. Por la parte (b) de la Proposición 2.1.2, existe un $\varepsilon > 0$ tal que cualesquiera que sean $h, g \in C(\Omega)$ tales que $\rho(h,g) < \varepsilon$, se tiene que $\rho_K(h,g) < \delta$. En particular, si $g \in C(\Omega)$ tal que $g \in B_\rho(f,\varepsilon)$, sigue que $\rho_K(f,g) < \delta$, y por (2.2), resulta que $B_\rho(f,\varepsilon) \subset U$. Esto prueba que f es un punto interior de U.

(b): Supongamos que $\rho(f_n, f) \to 0$ cuando $n \to \infty$, y sean K un subconjunto compacto de Ω y $\delta > 0$. De acuerdo con la parte (b) de la Proposición 2.1.2, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera que sean $f, g \in C(\Omega)$ con $\rho(f,g) < \varepsilon$ se tiene que $\rho_K(f,g) < \delta$. En particular, para tal $\varepsilon > 0$, existe un $N_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ para $n \geq N_0$. Por consiguiente, $\rho_K(f_n, f) < \delta$ para $n \geq N_0$, lo que prueba que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en K.

En la otra dirección, supongamos que $\{f_n\}$ converge a f uniformemente en cualquier subconjunto compacto de Ω y tomemos un $\varepsilon > 0$. Por la parte (a) de la Proposición 2.1.2, existe un $K \subset \Omega$ compacto y un $\delta > 0$ tal que si $\rho_K(f,g) < \delta$, entonces $\rho(f,g) < \varepsilon$. Para tal compacto K existirá un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$, entonces $\rho_K(f_n, f) < \delta$. Combinando, resulta que $\rho(f_n, f) < \varepsilon$ para cualquier $n \geq N_1$ lo que prueba que $\{f_n\}$ converge a f en el espacio métrico $(C(\Omega), \rho)$. □

Definición 2.1.2 Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es *normal* si cada sucesión en $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión que converge a una función f de $C(\Omega)$.

Esto podría recordar la definición de conjunto secuencialmente compacto, pero debe advertirse que no se requiere que el límite de la subsucesión esté en el conjunto $\mathcal{F}$. Con argumentos netamente topológicos la normalidad también viene caracterizada por la Proposición 2.1.5.

Proposición 2.1.5 *Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es normal si, y sólo si, su clausura es compacta.*

Proposición 2.1.6 *Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es normal si, y sólo si, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ y $\delta > 0$, existen funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ en $\mathcal{F}$ tales que para f en $\mathcal{F}$, existe al menos un $k, 1 \leq k \leq n$, con*

$$sup\{|f(z) - f_k(z)| : z \in K\} < \delta.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal, y sean $K \subset \Omega$ compacto y $\delta > 0$. Podemos aplicar la parte (b) de la Proposición 2.1.2. Como $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto, $\mathcal{F}$ es totalmente acotado [4, Thm. 4.9]. Por tanto, existen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ tales que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f \,: \rho(f, f_k) < \varepsilon\}\,.$$

Pero por la elección de ε, esto da que

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{f \,: \|f - f_k\|_K < \delta\}\,,$$

esto es, $\mathcal{F}$ satisface la condición de la proposición.

Para ver el recíproco, supongamos que $\mathcal{F}$ satisface la condición establecida. Es inmediato que lo mismo le ocurre a su clausura $\overline{\mathcal{F}}$. Por tanto, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\mathcal{F}$ es cerrado. Mas, como $C(\Omega)$ es completo, $\mathcal{F}$ debe ser completo, y usando una vez más la Proposición 2.1.2, se llega a que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado. Sólo queda por aplicar el resultado en [4, Theorem II, 4.9] para concluir que $\mathcal{F}$ es compacto y, por tanto, normal. □

2.1.1. El teorema de Arzelà-Ascolí

En este apartado veremos el teorema de Arzelà-Ascolí, un resultado potente que se ha mostrado muy útil en diferentes áreas del análisis. Para su estudio, necesitamos ver previamente algunos resultados de carácter general.

Sean (X_n, d_n), $n \geq 1$, espacios métricos y $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ su producto cartesiano. Esto significa que $X = \{\xi = \{x_n\} : x_n \in X_n, \quad n = 1, 2, \ldots\}$. Para cada $\xi = \{x_n\}$ y $\eta = \{y_n\}$ en X, se define

$$d(\xi, \eta) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}. \tag{2.4}$$

Proposición 2.1.7 $\left(\prod_{n=1}^{\infty} X_n, d\right)$*, siendo d como en (2.4), es un espacio métrico. Si $\xi^k = \{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ está en $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, entonces $\xi^k \to \xi = \{x_n\}$ si, y sólo si, $x_n^k \to x_n$ para cada n. Además, si cada (X_n, d_n) es compacto, X es compacto.*

Demostración. Ver [4, Proposición II.1.18]. □

En el teorema de Arzelà-Ascolí comparece el concepto de equicontinuidad que introduciremos ahora.

Definición 2.1.3 Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es *equicontinuo en un punto* z_0 de Ω si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para $|z - z_0| < \delta$,

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon, \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

$\mathcal{F}$ es *equicontinuo sobre un conjunto* $E \subset \Omega$ si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para z y z' de E, y $|z - z'| < \delta$,

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon$$

para toda función f en $\mathcal{F}$.

Proposición 2.1.8 *Si $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es equicontinuo en cada punto de Ω, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada subconjunto compacto de Ω.*

Demostración. Sea K un compacto de Ω y fijemos un $\varepsilon > 0$. Entonces, para cada $w \in K$, existe un $\delta_w > 0$ tal que

$$|f(w') - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $f \in \mathcal{F}$ siempre que $|w - w'| < \delta_w$. Ahora, los discos abiertos $\{D(w, \delta_w)\}_{w \in K}$ constituyen un recubrimiento abierto de K. Por el lema del recubrimiento de Lebesgue (ver [4, Lemma II.4.8]), existe un $\delta > 0$ tal que para cada $z \in K$, el disco $D(z, \delta)$ está contenido en alguno de los del recubrimiento. De esta forma, si z y z' están en K y $|z - z'| < \delta$, existe un $w \in K$ tal que $z' \in D(z, \delta) \subset D(w, \delta_w)$. Es decir, $|z - w| < \delta_w$ y $|z - z'| < \delta_w$. Esto da que $|f(z) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|f(z') - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por tanto, $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$, lo que prueba que $\mathcal{F}$ es equicontinuo en K. □

Estamos en condiciones de abordar el teorema de Arzelà-Ascolí:

Teorema 2.1.1 (Teorema de Arzelà-Ascolí) *Un conjunto $\mathcal{F} \subset C(\Omega)$ es normal si, y sólo si, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Para cada z en Ω, $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ tiene clausura compacta en $\mathbb{C}$.
(b) $\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada punto de Ω.

Demostración. $\Longrightarrow$: Sea $\mathcal{F}$ normal. Sabemos que para cada z en Ω, la aplicación evaluación en z definida en $C(\Omega)$ a $\mathbb{C}$, $f \rightsquigarrow f(z)$, es continua. Como también se tiene que $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto (ya que la clausura de un conjunto normal es compacta), su imagen en $\mathbb{C}$ es un compacto. De aquí se deduce ya el apartado (a).

Veamos (b). Fijamos un punto z_0 en Ω, y sea $\varepsilon > 0$. Elijamos un $R > 0$ tal que $K = \overline{B(z_0, R)} \subset \Omega$. Entonces, tenemos que K es compacto. Utilizando la Proposición 2.1.6, tenemos que existen funciones $f_1, \ldots, f_n$ en $\mathcal{F}$ tales que para cada f en $\mathcal{F}$, existe al menos un f_k que verifica

$$\sup\{|f(z) - f_k(z))| \, : z \in K\} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5}$$

Pero ya que cada f_k es continua, existe un δ, $0 < \delta < R$, tal que $|z - z_0| < \delta$. Esto implica que

$$|f_k(z) - f_k(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para $1 \leq k \leq n$ (por definición de continuidad). Por tanto, si $|z - z_0| < \delta$, $f \in \mathcal{F}$, y tomando un k para que se satisfaga (2.5), entonces, utilizando la desigualdad triangular, se llega a que:

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - f_k(z_0)| + |f_k(z_0) - f(z_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Esto prueba que la familia $\mathcal{F}$ es equicontinua en z_0.

$\Longleftarrow$: Supongamos que se satisfacen las condiciones (a) y (b). Tenemos que demostrar que $\mathcal{F}$ es normal. Tomamos la sucesión $\{z_n\}$ de todos los puntos de Ω

cuyas partes reales e imaginarias son racionales. Por densidad, si $z \in \Omega$ y $\delta > 0$, existe un z_n tal que $|z - z_n| < \delta$. Para cada $n \geq 1$, sea

$$X_n = \overline{\{f(z_n) : f \in \mathcal{F}\}} \subset \mathbb{C}\,.$$

Por la hipótesis en (a), para cada $n \geq 1$, si d_n es la restricción de la métrica usual en $\mathbb{C}$ a X_n, (X_n, d_n) es un espacio métrico compacto y por la Proposición 2.1.7, $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es un espacio métrico compacto. Ahora, para f en $\mathcal{F}$, definimos $\widetilde{f}$ en X como:

$$\widetilde{f} = \{f(z_1), f(z_2), \dots\}.$$

Sea $\{f_k\}$ una sucesión en $\mathcal{F}$; por tanto, $\{\widetilde{f_k}\}$ es también una sucesión en el espacio métrico compacto X. Por consiguiente, existen un ξ en X y una subsucesión de $\{\widetilde{f_k}\}$ que converge a ξ. Para facilitar la notación, asumimos que $\xi = \text{lím}\, \widetilde{f_k}$. De nuevo, por la Proposición 2.1.7 se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} f_k(z_n) = \omega_n, \tag{2.6}$$

donde $\xi = \{\omega_n\}$.

Vamos a probar que $\{f_k\}$ converge a una función f en $C(\Omega)$. Por (2.6), esta función tendrá que satisfacer que $f(z_n) = \omega_n$. La importancia de (2.6) es que impone un control del comportamiento de $\{f_k\}$ sobre un subconjunto denso de Ω. Usaremos el hecho de que $\{f_k\}$ es equicontinua para extender este control al resto de Ω.

Para demostrar que $\{f_k\}$ converge a la función f es suficiente ver que $\{f_k\}$ es una sucesión de Cauchy. Para ello, sean K conjunto compacto en Ω, y $\varepsilon > 0$; por la parte (b) de la Proposición 2.1.4 es suficiente encontrar un entero J tal que para k, $j \geq J$,

$$\sup\{|f_k(z) - f_j(z)| \,:\, z \in K\} < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Como K es compacto en Ω, $R = d(K, \partial\Omega) > 0$, donde $\partial\Omega$ denota la frontera del conjunto Ω. Sea $K_1 = \{z : d(z, K) \leq \frac{1}{2}R\}$. Es claro que K_1 es cerrado y acotado, por tanto compacto, y satisface que $K \subset Int(K_1) \subset K_1 \subset \Omega$. Ya que $\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada punto de Ω, por la Proposición 2.1.8 se tiene que $\mathcal{F}$ es equicontinuo en K_1. Por tanto, elegimos un δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}R$, tal que

$$|f(z) - f(z')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

para toda función f en $\mathcal{F}$, cualesquiera que sean z y z' que estén en K_1, con $|z - z'| < \delta$. Ahora sea B la colección de puntos en $\{z_n\}$ que también están en K_1; esto es,

$$B = \{z_n : z_n \in K_1\}.$$

Si $z \in K$, entonces existe un z_n con $|z - z_n| < \delta$; pero como $\delta < \frac{1}{2}R$, tenemos que $d(z_n, K) < \frac{1}{2}R$, o que $z_n \in K_1$. Por consiguiente, $\{D(w;\delta) : w \in B\}$ es un recubrimiento abierto de K con lo cual existe un número finito de puntos $w_1, \ldots, w_n \in B$ de modo que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} D(w_i;\delta).$$

Ya que para $1 \leq i \leq n$ existe $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(w_i)$, también existirá un entero J tal que para j, $k \geq J$

$$|f_k(w_i) - f_j(w_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.8}$$

para $i = 1, ..., n$ por (2.6).

Sea z un punto arbitrario de K y tomemos w_i tal que $|w_i - z| < \delta$. Entonces, si k y j son mayores que J, de (2.6) y (2.8) se sigue que

$$\begin{aligned} |f_k(z) - f_j(z)| &\leq |f_k(z) - f_k(w_i)| + |f_k(w_i) - f_j(w_i)| + |f_j(w_i) - f_j(z)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Finalmente, la arbitrariedad de z establece (2.7).

□

2.2. El espacio de las funciones analiticas $\mathcal{H}(\Omega)$

Denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ a la clase de todas las funciones analíticas en Ω. Veamos que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un subespacio cerrado de $C(\Omega)$.

Teorema 2.2.1 *Si $\{f_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{H}(\Omega)$ y $f \in C(\Omega)$ tal que $f_n \to f$, entonces f es analítica y $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ para cada entero $k \geq 1$.*

Demostración. Sea Δ un triángulo contenido en Ω y consideremos su frontera $\partial\Delta$ que es claramente compacta. Como $f_n \to f$ uniformemente en $\partial\Delta$ sigue que $\int_{\partial\Delta} f = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\partial\Delta} f_n = 0$. Como f es continua en Ω, el teorema de Morera asegura que f es analítica en Ω.

Ahora debemos probar que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$. Sea $D = \overline{D}(a;r) \subset \Omega$; entonces, existe un número $R > r$ tal que $\overline{D}(a;R) \subset \Omega$. Si γ es la circunferencia $|z - a| = R$, entonces, por la fórmula integral de Cauchy:

$$f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^{k+1}} dw,$$

para $z \in D$. Utilizando la estimación de Cauchy:

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{\cancel{2\pi}} \frac{M_n}{(R-r)^{k+1}} \cancel{2\pi} R = \frac{k! M_n R}{(R-r)^{k+1}},$$

para $|z-a| \leq r$, donde $M_n = \sup\{|f_n(w) - f(w)| : |w-a| = R\}$. Como sabemos que $f_n \to f$, tenemos que $\lim M_n = 0$. Así, se sigue que $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente en $\overline{D}(a;r)$. Ahora, si tomamos un K conjunto compacto arbitrario de Ω, y $0 < r < d(K, \partial\Omega)$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n$ en K tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} D(a_j;r)$. Finalmente, como $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniformemente en cada $D(a_j;r)$, la convergencia también es uniforme en K.

□

Con la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos compactos heredada de $C(\Omega)$, podemos anotar los corolarios siguientes:

Corolario 2.2.1 $\mathcal{H}(\Omega)$ *es un espacio métrico completo.*

Corolario 2.2.2 *Si* $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *es analítica y* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniformemente en conjuntos compactos a* $f(z)$*, entonces:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z).$$

Teorema 2.2.2 (Teorema de Hurwitz) *Sea* Ω *una región, y supongamos una sucesión* $\{f_n\}$ *de* $\mathcal{H}(\Omega)$ *que converge a* f*. Si* $f \not\equiv 0$, $\overline{D}(a;R) \subset \Omega$*, y* $f(z) \neq 0$ *para* $|z-a| = R$*, entonces existe un entero positivo* N *tal que para* $n \geq N$*,* f *y* f_n *tienen el mismo número de ceros en* $D(a;R)$*.*

Demostración. Ya que $f(z) \neq 0$ para $|z-a| = R$ por hipótesis, tomamos:

$$\delta = \inf\{|f(z)| : |z-a| = R\} > 0.$$

Como $f_n \to f$ uniformemente en $\{z : |z-a| = R\}$, luego, por definición, existirá un entero N tal que si $n \geq N$ y $|z-a| = R$, entonces $f_n(z) \neq 0$ para $|z-a| = R$ y

$$|f(z) - f_n(z)| < \frac{1}{2}\delta < |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|.$$

Ya que sabemos que f y f_n son analíticas, y acabamos de ver que $|f(z) - f_n(z)| < |f(z)|$, utilizando el teorema de Rouché, concluimos que f y f_n tienen el mismo número de ceros en $D(a; R)$.

$\square$

Corolario 2.2.3 *Si Ω es una región y $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ converge a f en $\mathcal{H}(\Omega)$ y ningún f_n se anula en Ω, entonces $f \equiv 0$ ó f nunca se anula.*

Definición 2.2.1 Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es localmente acotada si para cada punto a en Ω, existen constantes M y $r > 0$ tales que para toda f en $\mathcal{F}$:

$$|f(z)| \leq M,$$

para $|z - a| < r$.
Alternativamente, $\mathcal{F}$ es localmente acotado si existe un $r > 0$ tal que

$$\sup\{|f(z)| : |z - a| < r, f \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Esto es, $\mathcal{F}$ es localmente acotado si alrededor de cada punto a en Ω, existe un disco en el cual $\mathcal{F}$ es uniformemente acotado.

Este concepto se extiende enseguida para requerir que $\mathcal{F}$ sea uniformemente acotado en subconjuntos compactos.

Lema 2.2.1 *Una familia $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ es localmente acotada si, y sólo si, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, existe una constante M tal que*

$$|f(z)| \leq M,$$

para toda f en $\mathcal{F}$ y para cualquier z en K.

Para finalizar esta sección, estableceremos el teorema de Montel.

Teorema 2.2.3 (Teorema de Montel) *Una familia $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}(\Omega)$ es normal si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es localmente acotado.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es normal pero no localmente acotado; entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $\sup\{|f(z)| : z \in K, f \in \mathcal{F}\} = \infty$. Esto es, existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\sup\{|f_n(z)| : z \in K\} \geq n$. Como sabemos que $\mathcal{F}$ es normal, existirá una función f en $\mathcal{H}(\Omega)$ y una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $f_{n_k} \to f$. Pero esto nos da que $\sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} \to 0$ cuando $k \to \infty$. Si $|f(z)| \leq M$, para $z \in K$:

$$n_k \leq \sup\{|f_{n_k}(z) - f(z)| : z \in K\} + M.$$

Tomando límites cuando $k \to \infty$, vemos que la parte de la derecha converge a M mientras que el primer miembro se puede hacer tan grande como se quiera. Esto da una contradicción.

Ahora supongamos que $\mathcal{F}$ es localmente acotado. Aplicaremos el teorema de Arzelà-Ascolí (Teorema 2.1.1) para probar que $\mathcal{F}$ es normal. Como se satisface la condición (a) del teorema, nos bastará con demostrar que $\mathcal{F}$ es equicontinuo en cada punto de Ω. Tomemos un punto a de Ω arbitrario y un $\varepsilon > 0$; por hipótesis, existe un $r > 0$ y un $M > 0$ tal que $\overline{D}(a; r) \subset \Omega$ y $|f(z)| \leq M$ para todo z en $\overline{D}(a; r)$ y para todo f en $\mathcal{F}$. Sea $|z - a| < \frac{1}{2}r$ y $f \in \mathcal{F}$; entonces, usando la fórmula de Cauchy con $\gamma(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$,

$$|f(a) - f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(w)(a - z)}{(w - a)(w - z)} dw \right| \leq \frac{2M}{r} |a - z|.$$

Tomando $\delta < \text{mín}\{\frac{1}{2}r, \frac{r}{4M}\varepsilon\}$ se sigue que $|a - z| < \delta$, lo que implica que $|f(a) - f(z)| < \varepsilon$ para toda f en $\mathcal{F}$. Queda probado que $\mathcal{F}$ es equicontinuo en a y el resultado queda probado.

$\square$

Corolario 2.2.4 *Una familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es compacta si, y sólo si, es cerrada y localmente acotada.*

3

El teorema de la aplicación conforme de Riemann

3.1. Introducción

Nos proponemos en este capítulo establecer una relación de equivalencia entre dominios del plano. Hecho esto se verá que todos los dominios simplemente conexos propios de $\mathbb{C}$ son equivalentes al disco unidad abierto $\mathbb{D}$.

Definición 3.1.1 Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios en $\mathbb{C}$. Se dice que $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ es un *isomorfismo conforme* de Ω_1 sobre Ω_2 si f es holomorfa y biyectiva. Los dominios Ω_1 y Ω_2 se dirá que son *isomorfos o conformemente equivalentes* si existe un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2.

Si Ω_1 y Ω_2 son dos dominios isomorfos y f es un isomorfismo conforme de Ω_1 sobre Ω_2, la aplicación $g \mapsto g \circ f$ es una biyección de $\mathcal{H}(\Omega_2)$ sobre $\mathcal{H}(\Omega_1)$. Es más, esta aplicación es un isomorfismo en sentido algebraico del álgebra de funciones $\mathcal{H}(\Omega_2)$ sobre el álgebra de funciones $\mathcal{H}(\Omega_1)$. Esto significa que, desde el punto de vista de la teoría de funciones analíticas, dos dominios isomorfos son indistinguibles. Esto hará que la solución de un determinado problema en un dominio se pueda trasladar a otro isomorfo a él.

Es claro que $\mathbb{C}$ no puede ser conformemente equivalente a ningún dominio acotado en virtud del teorema de Liouville. Es también fácil de deducir de la definición que si Ω_1 es un dominio simplemente conexo que es isomorfo a Ω_2, entonces Ω_2 también es dominio simplemente conexo.

3.2. El teorema de la aplicación conforme de Riemann

En esta sección se demostrará el Teorema 3.1 que es uno de los resultados más importantes de la teoría de funciones de variable compleja.

Teorema 3.1 (Teorema de la aplicación conforme de Riemann). *Todo dominio simplemente conexo propio del plano es conformemente equivalente al disco unidad abierto.*

La prueba del Teorema 3.1 se deduce de inmediato a partir del Teorema 3.2, el cual no es otra cosa que la versión de Koebe del teorema fundamental de la representación conforme. Convendrá recordar que la aplicaciones analíticas y biyectivas del disco unidad sobre sí mismo son, salvo rotaciones, de la forma $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, $a \in \mathbb{D}$.

Teorema 3.2 (Koebe). *Sean Ω un dominio simplemente conexo propio del plano y $a \in \Omega$. Existe una única función analítica $f : \Omega \to \mathbb{D}$ que tiene las siguientes propiedades:*

(a) $f(a) = 0$ *y* $f'(a) > 0$,
(b) f *es inyectiva en* Ω, *y*
(c) $f(\Omega) = \mathbb{D}$.

Demostración. Tenemos que probar la unicidad y la existencia.

Unicidad:

Supongamos que exista otra función g que verifique las condiciones del teorema. Entonces $h = f \circ g^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es analítica y biyectiva, con lo cual será de la forma $h = c\varphi_a$, para algún $a \in \mathbb{D}$, donde c es una constante con $|c| = 1$. Como $h(0) = 0$ se deduce que $a = 0$, así que $f(g^{-1}(z)) = cz$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Como consecuencia, $f(z) = cg(z)$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Derivando resulta que $f'(a) = cg'(a)$, y teniendo en cuenta que $f'(a)$ y $g'(a)$ son ambos positivos, $c = 1$. Por tanto, $f = g$.

Existencia:

Encontraremos la función como solución a un problema extremal. No obstante, para un ulterior desarrollo conviene apuntar que la única propiedad que se precisa de los dominios simplemente conexos es la que se dice que una función holomorfa y sin ceros en el dominio tiene una raíz cuadrada analítica. De hecho, se ha visto ya que esta propiedad caracteriza a los dominios simplemente conexos.

Lema 3.2.1 *Sea Ω un dominio propio del plano que tiene la propiedad de que cualquier función holomorfa y sin ceros en Ω tiene una raíz cuadrada analítica. Si $a \in \Omega$, existe una función analítica en Ω tal que*

1. $f(a) = 0$ *y* $f'(a) > 0$;
2. f *es inyectiva en* Ω;
3. $f(\Omega) = \mathbb{D}$.

Demostración del Lema 3.2.1. Consideremos la familia

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(a) = 0,\ f'(a) > 0,\ f \text{ es inyectiva y } f(\Omega) \subset \mathbb{D}\},$$

y procedamos de acuerdo con las siguientes etapas:

(i) Veremos en primer lugar que $\mathcal{F}$ es una familia no vacía.
(ii) Luego, que existe una función en $\mathcal{F}$ con derivada en a maximal.
(iii) Finalmente, verificaremos que tal función f cumple las propiedades exigidas en el teorema.

(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$:

Sea $b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. La función $z - b$ no tiene ceros en Ω y, por hipótesis, tendrá una raíz cuadrada analítica, esto es, existirá una función g holomorfa en Ω tal que

$$(g(z))^2 = z - b, \qquad z \in \Omega.$$

Si z_1 y z_2 son dos puntos de Ω y $g(z_1) = \pm g(z_2)$, entonces $z_1 = z_2$. En particular, g es inyectiva. Por el teorema de la aplicación abierta, existe un $r > 0$ tal que

$$D(g(a), r) \subset g(\Omega).$$

Por otra parte, afirmamos que

$$g(\Omega) \cap D(-g(a), r) = \emptyset. \tag{3.1}$$

En efecto, para verificar (3.1), procedamos por reducción al absurdo. Sea $z \in \Omega$ tal que $g(z) \in D(-g(a), r)$. Esto significa que

$$|g(z) + g(a)| = |-g(z) - g(a)| < r.$$

Por tanto, existe un $w \in \Omega$ tal que $g(w) = -g(z)$. Esto entraña que $w = z$ con lo que $g(z) = 0$ y en consecuencia, $z = b$, lo que es una contradicción.

Sigue de (3.1) que

$$g(\Omega) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D(-g(a), r)}. \tag{3.2}$$

Sea T una transformación de Möbius tal que $T(\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{D(-g(a), r)}) = \mathbb{D}$, y consideremos la función $g_1 = T \circ g$. g_1 es holomorfa en Ω, inyectiva y $g_1(\Omega) \subset \mathbb{D}$. Si $\alpha = g_1(a) \in \mathbb{D}$, la función $g_2 = \varphi_\alpha \circ g_1$ será holomorfa e inyectiva en Ω, satisfaciendo que $g_2(\Omega) \subset \mathbb{D}$ y $g_2(a) = 0$. Ya que $g_2'(a) \neq 0$, haciendo una rotación si fuese necesario, podemos afirmar que existe una constante c de módulo uno tal que la función $g_3(z) = c g_2(z)$; además de todo lo que verifica g_2, g_3 también satisface que $g_3'(a) > 0$. Esto prueba que $g_3 \in \mathcal{F}$ y, por tanto, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

(ii) *Un problema extremal.*

Puesto que $\sup_{z\in\Omega}\{|f(z)| : f \in \mathcal{F}\} \leq 1$, es claro que $\mathcal{F}$ es una familia normal. Lo mismo le ocurrirá a la familia $\mathcal{F} \cup \{0\}$. Probemos ahora que

$$\overline{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \cup \{0\}\,. \tag{3.3}$$

Para ver tal inclusión, sea $f \in \overline{\mathcal{F}}$ y $\{f_n\}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que $f_n \to f$ en la topología de $\mathcal{H}(\Omega)$. Es claro que $f(a) = 0$. Además, como $f_n'(a) \to f'(a)$, se tendrá que

$$f'(a) \geq 0\,.$$

Sean z_1 y z_2 dos puntos de Ω, con $z_1 \neq z_2$, consideremos el disco $D(z_2, r)$, y supongamos que $z_1 \notin D(z_2, r)$. Pongamos $\zeta = f(z_1)$ y $\zeta_n = f_n(z_1)$, $n \in \mathbb{N}$. Esto supone que $f_n(z) - \zeta_n$ no se anula en $D(z_2, r)$, ya que f_n es inyectiva. Como se tiene también que $f_n(z) - \zeta_n \to f(z) - \zeta$, $n \to \infty$, uniformemente sobre $K = \overline{D(z_2, r)}$, el Corolario 2.2.3 del teorema de Hurwitz asegura que $f(z) \neq \zeta$ para cualquier $z \in K$, o bien, $f(z) = \zeta$ para todo $z \in K$. En este último caso, por el principio de la prolongación analítica, $f(z) = \zeta$ para todo $z \in \Omega$. Pero como $f(a) = 0$, se tendrá que $f \equiv 0$. En caso contrario, $f(z_2) \neq f(z_1)$. Esto prueba que f será inyectiva, así que deberá tenerse que $f'(a) > 0$. Finalmente, probemos que

$$f(\Omega) \subset \mathbb{D}\,.$$

Para tal fin, procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que para algún $z_0 \in \Omega$ se tiene que $f(z_0) = \lambda$ con $|\lambda| \geq 1$. Es claro que $f_n - \lambda \to f - \lambda$, cuando $n \to \infty$, en la topología de $\mathcal{H}(\Omega)$. Como las funciones $f_n - \lambda$ no se anulan en Ω, por el teorema de Hurwitz se tendrá que $f(z) = \lambda$ para todo $z \in \Omega$, ó $f(z) \neq \lambda$ para cualquier $z \in \Omega$. La primera situación no se puede presentar porque $f(a) = 0$ así que tendrá que verificarse la segunda. Pero ello está en contradicción con el hecho de que $f(z_0) = \lambda$. Habrá de ser, en consecuencia, que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$. En este caso queda probado que $f \in \mathcal{F}$ y la inclusión en (3.3) queda establecida. Podemos decir que $\overline{\mathcal{F}}$ es un subconjunto compacto del espacio métrico $\mathcal{H}(\Omega)$. Comoquiera que el funcional $f \to f'(a)$ de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathbb{C}$ es continuo, también será secuencialmente continuo. Podemos afirmar que existe una función $f \in \overline{\mathcal{F}}$ con derivada en a maximal, esto es, $f'(a) \geq g'(a)$ para toda $g \in \overline{\mathcal{F}}$. Mas, como $\mathcal{F}$ es no vacío, tendrá que ser $f'(a) > 0$, con lo que tal función f deberá estar en $\mathcal{F}$.

(iii) *Esta función f llena todo el disco unidad.*

Para ello vamos a proceder por reducción al absurdo. Sea $w \in \mathbb{D}$, y supongamos que $w \notin f(\Omega)$. Entonces, la función $\dfrac{f(z) - w}{1 - \overline{w} f(z)}$ es analítica en Ω y no se anula en este conjunto. Como Ω es simplemente conexo, admitirá una raíz cuadrada analítica h, teniéndose que

$$(h(z))^2 = \frac{f(z) - w}{1 - \overline{w} f(z)}\,, \qquad z \in \Omega\,. \tag{3.4}$$

Procediendo como se hizo en la primera etapa, se puede comprobar que si $h(z_1) = \pm h(z_2)$, entonces, puesto que f es inyectiva, se llega a que $z_1 = z_2$. Por tanto, h es uno a uno, lo que significa, en particular, que $h'(z) \neq 0$ para todo z. Por otra parte, como $(h(z))^2 = (\varphi_w \circ f)(z)$, se tiene que $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

Definamos ahora la función

$$\begin{aligned} g \quad &: \quad \Omega \to \mathbb{C} \\ g(z) &= \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)} h(z)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sigue que $g(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $g(a) = 0$ y g es inyectiva. Además:

$$g'(a) = \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{h'(a)(1 - |h(a)|^2)}{(1 - |h(a)|^2)^2} = \frac{|h'(a)|}{1 - |h(a)|^2} > 0\,.$$

Esto prueba que $g \in \mathcal{F}$. Notando que $|h(a)|^2 = |w| = |-w|$, diferenciando en (3.4), y ya que $f(a) = 0$, resulta que

$$2h(a)h'(a) = f'(a)(1 - |w|^2),$$

por lo que

$$g'(a) = \frac{f'(a)(1 - |w|^2)}{2\sqrt{|w|}} \frac{1}{1 - |w|} = f'(a) \left(\frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} \right) > f'(a),$$

lo que contraviene el carácter maximal de $f'(a)$. Por tanto, $f(\Omega) = \mathbb{D}$.

$\square$

Demostración del Teorema 3.1. A tenor de lo visto en el Teorema 1.17, un dominio simplemente conexo propio goza de las equivalencias que figuran en el mismo. Teniendo en cuenta este hecho, la prueba del Teorema 3.1 sigue sin más que aplicar el Lema 3.2.1. $\square$

Corolario 3.2.1 *Entre los dominios simplemente conexos del plano sólo hay dos clases de equivalencia: una constituida sólo por $\mathbb{C}$, y otra que contiene a todos los dominios simplemente conexos propios.*

3.3. El teorema de Osgood-Taylor-Carathéodory

El teorema fundamental de la representación conforme (Teorema 3.1) asegura que todo dominio simplemente conexo propio es conformemente equivalente al disco $\mathbb{D}$. En 1901, Osgood conjeturó que una transformación conforme de un dominio de Jordan sobre $\mathbb{D}$ se puede extender a un isomorfismo entre sus clausuras. Esta conjetura fue confirmada más o menos simultáneamente por Osgood y Taylor (1913) y Carathéodory (1913). Para que tal extensión sea factible, la frontera del dominio juega un papel decisivo. En este sentido, motivemos nuestro problema con el siguiente ejemplo:

Supongamos que Ω es el interior del rectángulo de altura h que tiene un vértice en el origen y dos de sus lados están sobre los ejes coordenados, del cual se han suprimido segmentos verticales de altura $h/2$, que tienen su punto base en los puntos $\frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Puede verse que la aplicación de Riemann de Ω sobre $\mathbb{D}$ no se puede extender con continuidad al origen, el cual, en cierto sentido es "inaccesible".

Definición 3.3.1 Sean Ω un abierto y $\alpha \in \partial\Omega$. Se dirá que α es un punto frontera *accesible* si dada cualquier sucesión de puntos $\{z_n\} \subset \Omega$ tales que $z_n \to \alpha$ cuando $n \to \infty$ existe una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(b) = \alpha$, $\gamma(t) \in \Omega$ para cualquier $t \in [a, b)$, y existe una sucesión $\{t_n\} \subset [a, b)$ de modo que $\gamma(t_n) = z_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Teorema 3.3.1 *Sean Ω un dominio simplemente conexo acotado y f una transformación conforme de Ω sobre $\mathbb{D}$. Si α es un punto frontera accesible, entonces existe*

$$\lim_{z \to \alpha, z \in \Omega} f(z)\,.$$

La prueba precisa de algunos lemas.

Lema 3.3.1 *En las hipótesis del Teorema 3.3.1, y si γ es una curva como la referida en la Definición 3.3.1 que pasa por todos los puntos de una sucesión $\{z_n\} \subset \Omega$ que converge a α, entonces*

$$\lim_{t \to b} |f(\gamma(t))| = 1\,. \tag{3.6}$$

Demostración. Sea $\varepsilon \in (0, 1)$, y hagamos $\varepsilon' = 1 - \varepsilon$. Pongamos $g = f^{-1} : \mathbb{D} \to \Omega$. Entonces $g(\overline{D(0, \varepsilon')}) = K_{\varepsilon'}$ es compacto en Ω que satisface $d(\alpha, K_{\varepsilon'}) > 0$. Tomemos δ tal que $0 < \delta < d(\alpha, K_{\varepsilon'})$. Como $\lim_{t \to b^-} \gamma(t) = \alpha$, para tal $\delta > 0$ existirá un $t^* > a$ de modo que $|\gamma(t) - \alpha| < \delta$, para cualquier $t \in (t^*, b)$. Esto significa que $\gamma((t^*, b)) \subset D(\alpha, \delta)$. De aquí se deduce que $\gamma(t) \notin K_{\varepsilon'}$, con lo cual $|f(\gamma(t))| > 1 - \varepsilon$. Como $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $|f(\gamma(t))| < 1$. Esto prueba (3.6). □

Lema 3.3.2 (Lema de Koebe) *Supongamos que h es una función holomorfa y acotada en el disco $\mathbb{D}$, que w' y w'' son dos puntos de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ a los que convergen sendas sucesiones $\{w_n'\}$ y $\{w_n''\}$ de $\mathbb{D}$, respectivamente. Sean también dos sucesiones de reales positivos $\{\varepsilon_n\}$ y $\{r_n\}$ que convergen a* *cero. Para cada* $n \in \mathbb{N}$*,* ψ_n *es una curva en* $\mathbb{D}$ *que conecta* w'_n *con* w''_n *que está contenida en la corona* $An(0, 1 - \varepsilon_n, 1)$*. Asumamos también que*

$$|h(w)| < r_n\,, \qquad\qquad w \in \{\psi_n\}\,, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Entonces $h \equiv 0$*.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $h(0) \neq 0$, pues en caso contrario se dividiría h por z^n, donde n es el orden del eventual cero en el origen. Efectuando una rotación si fuera necesario podemos suponer que w' y w'' son simétricos respecto al eje real, es decir, $\overline{w'} = w''$. Sea M el mínimo entero tal que la recta que pasa por el origen con pendiente π/M separa a w' del semieje real positivo en dos semiplanos distintos.

Denotemos por L' al rayo que parte del origen y que forma un ángulo π/M con el eje x y sea L'' su simétrico respecto al eje x. Supongamos que el intervalo del parámetro de ψ_n es $[a_n, b_n]$, y pongamos

$$c_n = \text{máx}\{t \in [a_n, b_n] \,:\, \psi_n(t) \in L'\}\,,$$

$$d_n = \text{mín}\{t \in [a_n, b_n] \,:\, t > c_n\,, \Im(\psi_n(t)) = 0\}\,.$$

De esta forma, el gráfico de la restricción $\psi_{n|[c_n,d_n]}$ cae entre el eje x y el L' y conecta $\psi(c_n)$ con $\psi(d_n)$. Reflejamos esta curva con respecto al eje x y obtenemos una curva, que denotaremos por $\overline{\psi_n}$ y que une $\psi(d_n)$ con $\overline{\psi(c_n)}$. Escribamos $\sigma_n = \psi_n \dot{+} \overline{\psi_n}$, con lo cual los puntos iniciales y finales de σ_n están a la misma distancia del origen.

Denotemos por T una rotación centrada en el origen de ángulo $\frac{2\pi}{M}$, aplicamos M giros sucesivos a σ_n centrados en el origen y obtenemos

$$\sigma_n\,, T\sigma_n\,, T^2\sigma_n\,, \ldots, T^{M-1}\sigma_n,$$

que conforma una curva cerrada σ la cual está toda ella contenida en la corona $An(0, 1 - \varepsilon_n, 1)$. Ahora, la función

$$h^*(w) = h(w)\overline{h(\overline{w})}\,, \qquad\qquad w \in \mathbb{D},$$

es holomorfa en $\mathbb{D}$ y, por tanto, también lo es la función

$$G(w) := h^*(w)h^*(Tw)\cdots h^*(T^{M-1}w)\,, \qquad\qquad w \in \mathbb{D}.$$

Supongamos ahora que B es una cota de h en $\mathbb{D}$. Por tanto, cada factor en la definición de G está mayorado por B^2. Notamos que después de alguna rotación si fuera necesario, para cualquier $w \in \{\sigma\}$ se tiene que $T^k w$ caerá sobre la curva σ_n, y así

$$|h^*(T^k w)| \leq r_n B,$$

lo que implica que

$$|G(w)| \leq r_n B^{2M-1}\,, \qquad\qquad w \in \{\sigma\}\,. \tag{3.7}$$

Ahora, para cada rayo L que salga del origen, denotemos por w_L aquel punto que sea intersección de L con σ y que esté más próximo al origen, y denotemos por $[0, w_L)$ al segmento. Pongamos $W = \bigcup_L [0, w_L)$. De esta forma, hemos formado un abierto W cuya frontera consiste, precisamente, de la curva construida.

Por el principio del máximo:

$$|G(0)| \leq \max_{w \in \{\sigma\}} |G(w)|\,.$$

Haciendo tender $n \to \infty$ y usando la estimación en (3.7), resulta que $G(0) = 0$ y, por tanto, $h(0) = 0$, lo que está en contradicción con lo supuesto. $\square$

Demostración del Teorema 3.3.1: Supongamos que el teorema no sea cierto. Entonces existirá una sucesión $\{z_n\}$ en Ω que tiende a α, pero no existe el límite de sucesión de imágenes $\{f(z_n)\}$. Pero como tal sucesión está en el compacto $\overline{\mathbb{D}}$, existirán dos subsucesiones $\{z_n'\}$ y $\{z_n''\}$ tales que sus imágenes convergen a puntos distintos w' y w'', es decir, $f(z_n') \to w'$ y $f(z_n'') \to w''$. De acuerdo con el Lema 3.3.1 se tendrá que $|w'| = |w''| = 1$.

Sea γ una curva en Ω que pasa por todos los puntos de la sucesión de acuerdo con la definición de punto frontera accesible. Denotemos por γ_n a la restricción de γ que conecta z_n' con z_n'', con lo que γ_n se aproxima a α cuando $n \to \infty$. Poniendo

$$f \circ \gamma_n = \psi_n\,, \qquad\qquad n = 1, 2, 3 \ldots$$

tenemos que ψ_n conecta w_n' con w_n''. Otra vez por el Lema 3.3.1, ψ_n tiende uniformemente a la circunferencia unidad. Tracemos rayos que partan del origen y estén próximos a w' y a w''. Para n suficientemente grande, todas las curvas están dentro del sector (pasando a una subsucesión si fuera necesario).

Hagamos otra vez $g = f^{-1} : \mathbb{D} \to \Omega$ y pongamos $h = g - \alpha$, de modo que $h(w) = g(w) - \alpha$ para todo $w \in \mathbb{D}$. Puesto que $h \circ \psi_n \to 0$ para $n \to \infty$, por el Lema de Koebe (Lema 3.3.2), sigue que $g \equiv \alpha$, lo que contraviene el hecho de que g es inyectiva. $\square$

Teorema 3.3.2 *Sean Ω un dominio simplemente conexo acotado y f una transformación conforme de Ω sobre $\mathbb{D}$. Si α_1 y α_2 son dos puntos frontera distintos accesibles a los que f se puede extender por continuidad, entonces $f(\alpha_1) \neq f(\alpha_2)$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2)\,. \tag{3.8}$$

En virtud del Lema 3.3.1, multiplicando por una constante convenientemente elegida, podemos suponer que

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = -1\,. \tag{3.9}$$

Sea otra vez $g = f^{-1} : \mathbb{D} \to \Omega$, y supongamos que γ_1 y γ_2 son dos curvas en Ω que tienen el mismo intervalo del parámetro $[a,b]$ de modo que $\lim\limits_{t\to b^-} \gamma_i(t) = \alpha_i$, $i = 1,2$. Para $0 < r < \frac{|\alpha_1-\alpha_2|}{4}$, se tendrá que

$$\exists t^* \in (a,b)\ : \forall t \in (t^*,b) \Rightarrow |\gamma_i(t) - \alpha_i| < r. \tag{3.10}$$

De aquí se desprende que

$$|\alpha_1 - \alpha_2| < |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)| + \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2}\,, \qquad t \in (t^*,b),$$

con lo que

$$\frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2} < |\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|, \qquad t \in (t^*,b)\,. \tag{3.11}$$

Por otra parte, podemos escoger un $\delta > 0$ tal que $f(\gamma_i(t^*,b)) \subset \mathbb{D} \cap D(-1,\delta) = A(\delta)$. Los puntos del conjunto $A(\delta)$ en coordenadas polares satisfacen que $0 \le r \le \delta$ y $-\varphi(r) \le \theta \le \varphi(r)$, donde $\varphi(r) = \sup\{\eta > 0 : -1 + re^{i\theta} \in \mathbb{D}\,, |\theta| < \eta < \frac{\pi}{2}\}$. Ahora bien,

$$Area\,(g(A(\delta))) = \int\int_{A(\delta)} |g'(z)|^2 dxdy = \int_0^\delta \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1+re^{i\theta})|^2 r dr d\theta < \infty, \tag{3.12}$$

porque g es inyectiva y Ω es acotado. Para cada $0 < r < \delta$ la circunferencia $C(-1,r)$ corta a $f\circ\gamma_1$ y a $f\circ\gamma_2$ en dos puntos $w_1 = f(\gamma_1(t_1))$ y $w_2 = f(\gamma_2(t_2))$, respectivamente, donde $t_1\,, t_2 \in (t^*,b)$. Denotemos por l al arco de esta circunferencia que los une. Esto permite escribir que

$$g(w_1) - g(w_2) = \int_l g'\,, \tag{3.13}$$

y por (3.11):

$$\frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2} < |g(w_1) - g(w_2)|\,. \tag{3.14}$$

De (3.13) y (3.14) resulta que

$$\frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{2} < \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{i\theta})| r d\theta. \tag{3.15}$$

Elevando al cuadrado y usando la desigualdad de Schwarz queda:

$$\frac{|\alpha_1 - \alpha_2|^2}{4\pi r} < r \int_{-\varphi(r)}^{\varphi(r)} |g'(-1 + re^{i\theta})|^2 d\theta\,,$$

e integrando ambos miembros respecto de r entre 0 y δ se obtiene que el segundo miembro es finito por 3.12, mientras que la integral del primer miembro diverge. Para que no haya contradicción, debe ser $\alpha_1 = \alpha_2$. □

Teorema 3.3.3 (Teorema de Osgood-Taylor-Carathéodory) *Sea Ω un dominio simplemente conexo acotado de $\mathbb{C}$ tal que todo punto frontera es accesible. Entonces, cualquier transformación conforme de Ω sobre $\mathbb{D}$ se puede extender a un isomorfismo de $\overline{\Omega}$ sobre $\overline{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Por el Teorema 3.3.1, para cada $z \in \overline{\Omega}$ cabe escribir

$$f(z) = \lim_{w \to z, w \in \Omega} f(w)\,, \tag{3.16}$$

con lo que f queda extendida por continuidad a $\overline{\Omega}$. Además, dicha extensión es inyectiva por el Teorema 3.3.2. Queda por ver que tal extensión es continua en $\overline{\Omega}$, lo cual haremos viendo que es continua por sucesiones. Así, si $\{z_n\} \subset \overline{\Omega}$, $z_n \to z \in \overline{\Omega}$, hemos de ver que $f(z_n) \to f(z)$ cuando $n \to \infty$.

En (3.16), reemplazando z_n por z, podemos decir que, dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cualquiera que sea $w \in D(z_n, \delta) \cap \Omega$ se tiene que $|f(z_n) - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$. No se pierde generalidad tomando $\delta < \frac{1}{n}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ elijamos un $\alpha_n \in \Omega \cap D(z_n, \frac{1}{n})$ tal que

$$|f(\alpha_n) - f(z_n)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

Es claro que la sucesión $\{\alpha_n\}$ está contenida en Ω y converge a z. Por (3.16), podemos afirmar que $\lim_{n \to \infty} f(\alpha_n) = f(z)$, esto es, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(\alpha_n) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$, para $n \geq n_0$. Aplicando ahora (3.17) con $n \geq n_0$ llegamos a que $|f(z_n) - f(z)| < \varepsilon$, lo que prueba que $f(z_n) \to f(z)$.

Queda por ver que

$$f(\overline{\Omega}) = \overline{\mathbb{D}}\,. \tag{3.18}$$

Para ello, notemos que $\mathbb{D} = f(\Omega) \subset f(\overline{\Omega}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Como f es continua y $\overline{\Omega}$ es compacto se tiene que $f(\overline{\Omega})$ es compacto y, por tanto, cerrado, de donde sigue la identidad en (3.18).

Finalmente, como la inversa de una aplicación continua e inyectiva en un compacto es continua concluimos que la inversa también es continua.

□

4

Caracterización de dominios simplemente conexos

En este capítulo probaremos que los dominios simplemente conexos del plano se pueden caracterizar de múltiples formas, con matices topológicos, algebraicos, geométricos y, por supuesto, netamente analíticos. Además de resultados vistos en capítulos previos, necesitaremos el teorema de Runge para compactos que se estudia en la primera sección.

4.1. Teorema de Runge

Un resultado fundamental sobre el problema de aproximar funciones holomorfas por otras más simples, como las racionales o polinomios, es el teorema de Runge, que establece que es posible aproximar funciones holomorfas en un abierto por funciones racionales con polos localizados en puntos prefijados fuera del abierto. Para nuestros objetivos sólo nos interesan abiertos que sean entornos de un compacto.

Teorema 4.1.1 (Teorema básico de representación integral) *Sean γ un camino en $\mathbb{C}$ y F la función holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$ definida por la integral de Cauchy*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw \,, \qquad z \notin \{\gamma\} \,,$$

donde f es una función continua en $\{\gamma\}$. Sea K un compacto de $\mathbb{C}$ disjunto con $\{\gamma\}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una función racional R con polos simples sobre $\{\gamma\}$ tal que

$$|F(z) - R(z)| < \varepsilon \,, \qquad z \in K.$$

Que F es holomorfa se deduce de la Proposición 4.39 en [7].

Demostración. Sean $[a,b]$ el intervalo del parámetro de γ y $M = \sup_{t\in[a,b]} |\gamma'(t)|$. Como la función $\dfrac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}$ es uniformemente continua en $[a,b]\times K$, existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a,b]$ (independiente de K) tal que

$$\left|\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_i))}{\gamma(t_i)-z}\right| < \frac{2\pi\varepsilon}{M(b-a)}\,, \qquad t_i \le t \le t_{i+1}\,, \quad z \in K\,.$$

Consideremos ahora la función racional

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j)-z}(\gamma(t_{j+1})-\gamma(t_j))\,.$$

Entonces se tiene que

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw - R(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=0}^{n-1}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_i))}{\gamma(t_i)-z}\right)\gamma'(t)dt\right|$$

$$\le \frac{1}{2\pi} M \frac{2\pi\varepsilon}{M(b-a)}(b-a) = \varepsilon\,.$$

□

La siguiente proposición explica el denominado método de desplazamiento de polos que permite cambiar la localización de polos de funciones racionales que se aproximan a una función dada.

Proposición 4.1.1 (Desplazamiento de polos) *Para un compacto K de $\mathbb{C}$ se tiene:*

(i) Si V es una componente de $\mathbb{C}\setminus K$ y $a,b\in V$, la función $\dfrac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios en $\dfrac{1}{z-b}$, esto es, funciones racionales holomorfas en el punto del infinito y con un único polo en el punto b.

(ii) Si V_∞ es la componente no acotada de $\mathbb{C}\setminus K$ y $a\in V_\infty$, la función $\dfrac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios.

(iii) Recíprocamente, si $a\notin K$ y $\dfrac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios en K, entonces $a\in V_\infty$.

Demostración. Para probar (i) consideremos, para $b\in V$, el conjunto

$$A = \left\{ a \in V \; : \frac{1}{z-a} \text{ es límite uniforme en } K \text{ de polinomios en } \frac{1}{z-b} \right\}.$$

Es claro que A es no vacío pues $b \in V$. Veremos que A es cerrado y abierto en V. Para ver que A es cerrado en V tomemos una sucesión $\{a_n\}$ en A que tiende a $a \in V$, entonces $d(a_n, K) \geq m > 0$, para algún m. Entonces

$$\left| \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a_n} \right| = \frac{|a-a_n|}{|z-a||z-a_n|} \leq \frac{|a-a_n|}{m^2}, \qquad \forall z \in K.$$

Esto indica que $\frac{1}{z-a_n}$ converge a $\frac{1}{z-a}$ uniformemente en K. Por transitividad, $\frac{1}{z-a}$ también es límite uniforme en K por polinomios en $\frac{1}{z-b}$. Por consiguiente, $a \in A$, lo que prueba que A es cerrado en V. El conjunto A es abierto en V. En efecto, si $a \in \overline{D(a,r)} \subset V$, demostraremos que todo $w \in D(a,r)$ está en A. Consideremos el desarrollo

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a-(w-a)} = \frac{1}{(z-a)(1-\frac{w-a}{z-a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}, \qquad z \in K,$$

siendo la convergencia uniforme en K, ya que $\left|\frac{w-a}{z-a}\right| < \frac{r}{|z-a|} < 1$, $\overline{D(a,r)} \subset V$ y $z \notin V$. Esto entraña que $\frac{1}{z-w}$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios en $\frac{1}{z-a}$; ahora, $\frac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios en $\frac{1}{z-b}$ y, por tanto, lo mismo le ocurre a sus potencias. Por transitividad, se llega a que $w \in A$. Por tanto, A es no vacío y abierto y cerrado en V. Por consiguiente, $A = V$.

Para probar (ii), sea $M = \max\{|z| : z \in K\}$ y $b \in \mathbb{C}$ con $|b| > M+1$. Es claro que $b \in V_\infty$, y el desarrollo

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{b\left(\frac{z}{b}-1\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n$$

converge uniformente en K porque $\left|\frac{z}{b}\right| \leq \frac{M}{M+1} < 1$ para $z \in K$. Esto implica que $\frac{1}{z-b}$, y por tanto, polinomios en $\frac{1}{z-b}$, se pueden aproximar uniformemente en K por polinomios. Si $a \in V_\infty$, por la parte (i), $\frac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios en $\frac{1}{z-b}$, y, por transitividad, $\frac{1}{z-a}$ es límite uniforme en K de polinomios.

Con el fin de probar (iii) demostramos que si $a \notin K$ y a está en una componente acotada de $\mathbb{C} \setminus K$, entonces $\frac{1}{z-a}$ no se puede aproximar uniformemente en K por polinomios. Es claro que $\partial V \subset K$; luego, si $p_n \to \frac{1}{z-a}$ uniformemente en K, donde los p_n son polinomios, en particular, tendríamos que la sucesión $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en ∂V. Entonces, para $\varepsilon > 0$, se tendría que $\left|p_n(z) - \frac{1}{z-a}\right| < \varepsilon$ para n suficientemente grande y $z \in \partial V$. De aquí resulta que

$$|(z-a)p_n(z) - 1| < \varepsilon|z-a| < \frac{1}{2}\,, \qquad z \in \partial V,$$

si $\varepsilon < \dfrac{1}{2\,diam(\overline{V})}$. Por el principio del máximo,

$$|(z-a)p_n(z) - 1| < \frac{1}{2}\,, \qquad z \in V,$$

y esta desigualdad es imposible si $z = a \in V$. □

En la prueba del Teorema de Runge se requiere de un lema que da una representación integral usando el núcleo de Cauchy.

Lema 4.1.1 *Sean Ω un dominio del plano, $K \subset \Omega$ compacto y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Existe un número finito de segmentos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ contenidos en $\Omega \setminus K$ tales que si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_N$, se tiene que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\,, \qquad z \in K.$$

Demostración. Sea $\varepsilon = dist(K, \mathbb{C}\setminus\Omega)$. Formemos una malla en el plano constituida por cuadrados cuya diagonal es menor que ε y consideremos los cuadrados $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ de esta malla que interceptan a K. Si ∂Q_i es la frontera de Q_i, positivamente orientada, consideremos el ciclo $\gamma = \sum_i \partial Q_i$. Después de hacer todas las cancelaciones posibles, esto da que

$$\gamma = \sum_{j=1}^{N} \gamma_i,$$

donde cada γ_i es un lado de un cierto cuadrado Q_i y $\gamma_i \subset \Omega \setminus K$.

Por tanto, para cada función φ continua en $\bigcup_j \partial Q_j$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m}\int_{\partial Q_i}\varphi(w)dw = \sum_{i=1}^{m}\int_{\gamma_i}\varphi(w)dw = \int_\gamma \varphi(w)dw\,.$$

Supongamos que z es un punto de K que no está en ninguna frontera ∂Q_i. Esto significa que z está en un único cuadrado Q_{i_0} del conjunto $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$.

Usando el teorema de Cauchy para un abierto y convexo con la función $w \mapsto \dfrac{f(w)}{w-z}$ resulta que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^m \int_{\partial Q_j}\frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_{j_0}}\frac{f(w)}{w-z}dw + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j\neq i_0}^m \int_{\partial Q_j}\frac{f(w)}{w-z}dw = f(z)\,.\end{aligned}$$

Esto prueba el lema para los z que no estén en ninguna frontera ∂Q_i, y para los puntos que estén en $\bigcup_i \partial Q_i$ vemos que, por continuidad, la identidad en el enunciado también vale. $\square$

Teorema 4.1.2 (Teorema de Runge para compactos) (I) *Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}\setminus K$ es conexo, entonces toda función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por polinomios. Recíprocamente, si esta aproximación es posible para cualquier función holomorfa en un entorno de K, entonces $\mathbb{C}\setminus K$ es conexo.*

(II) *Si $\mathbb{C}\setminus K$ no es conexo y A es un conjunto de $\mathbb{C}$ que tiene puntos en cada componente conexa de $\mathbb{C}\setminus K$, entonces toda función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales que tiene sus polos en puntos de A.*

Demostración. Sea f holomorfa en un entorno Ω de K y fijemos un $\varepsilon > 0$. Por el Lema 4.1.1, existe una cadena γ en $\Omega\setminus K$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\,, \qquad z\in K.$$

Por el Teorema 4.1.1, existe una función racional R con polos sobre $\{\gamma\}\subset\mathbb{C}\setminus K$ tal que

$$|f(z)-R(z)| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad z\in K.$$

La función $R(z)$ es una combinación lineal de las funciones $\frac{1}{z-a_j}$, con $a_j\notin K$. Si $\mathbb{C}\setminus K$ es conexo, por el apartado (ii) de la Proposición 4.1.1, cada una de estas funciones se puede aproximar uniformemente en K por polinomios. Por consiguiente, existe un polinomio P tal que $|P(z)-R(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $z\in K$. De esta forma, $|f(z)-P(z)|<\varepsilon$ para cualquier $z\in K$. En otras palabras, los polos que están en la componente no acotada del complementario de K se pueden trasladar al punto del infinito, con lo que uno obtiene polinomios. Esto prueba la primera parte de (I).

Supongamos ahora que $\mathbb{C} \setminus K$ no es conexo y que A intercepta cada componente acotada de $\mathbb{C} \setminus K$; escribamos $R = R_1 + R_2$, donde R_1 tiene polos en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ y R_2 tiene todos sus polos en las componentes conexas acotadas. Como se demostró en el caso anterior, existe un polinomio P tal que $|R_1(z) - P(z)| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $z \in K$. Para concluir basta ver que todos los polos en las componentes acotadas se pueden trasladar a A para obtener una función racional R_3 con polos en A tal que $|R_2(z) - R_3(z)| < \frac{\varepsilon}{4}$ si $z \in K$. La función R_2 es combinación lineal de funciones $\frac{1}{z-a}$, $a \notin K$, $a \notin V_\infty$, y por tanto, es suficiente demostrar que $\frac{1}{z-a}$, $a \notin K$, $a \notin V_\infty$, se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales cuyos polos estén en A. Si V es la componente acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ que contiene a a, por hipótesis, existe un $b \in A \cap V$, y todo lo que tenemos que hacer es aplicar el punto (i) de la Proposición 4.1.1 para finalizar la prueba de (II).

El recíproco del punto (I) es una consecuencia del apartado (iii) de la Proposición 4.1.1. En efecto, si $\mathbb{C} \setminus K$ no es conexo, tiene una componente conexa acotada V, y si $a \in V$, la función $\frac{1}{z-a}$, que es holomorfa en un entorno de K, no se puede aproximar uniformemente en K por polinomios. $\square$

4.2. Caracterización de dominios simplemente conexos

Teorema 4.2.1 *Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) Ω es dominio simplemente conexo.
(b) Todo ciclo en Ω es homólogo a cero respecto de Ω.
(c) $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
(d) Cualquier $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es límite en $\mathcal{H}(\Omega)$ de una sucesión de polinomios.
(e) Para cualquier ciclo γ en Ω y para cualquier función f holomorfa en Ω se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
(f) Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva en Ω.
(g) Toda función holomorfa en Ω que carezca de ceros en Ω tiene un logaritmo analítico en Ω.
(h) Si f es una función holomorfa en Ω y $f(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \Omega$, entonces $\dfrac{f'}{f}$ tiene primitiva en Ω.
(i) Si f es una función holomorfa en Ω y $f(z) \neq 0$ para cualquier $z \in \Omega$, entonces f tiene una raíz cuadrada analítica, esto es, existe una $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g^2 = f$.
(j) Ω es analíticamente isomorfo al disco unidad abierto $\mathbb{D}$.
(k) Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es armónica en Ω existe una función $v : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica tal que $f = u + iv$.

Demostración. En el Teorema 1.17 fueron probadas las equivalencias que se indican:

$$(b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (e) \Leftrightarrow (f) \Leftrightarrow (g) \Leftrightarrow (h) \Leftrightarrow (i)\,.$$

$(a) \Rightarrow (b)$: Decir que Ω es simplemente conexo significa, por definición, que todo camino cerrado en Ω es homotópico a cero respecto de Ω. Por el Teorema 1.12, todo ciclo en Ω es homólogo a cero respecto de Ω.

$(c) \Rightarrow (d)$: Es consecuencia del Teorema de Runge (Teorema 4.1.2).

$(d) \Rightarrow (e)$: Sean γ un camino cerrado en Ω, f una función holomorfa en Ω y $\{p_n\}$ una sucesión de polinomios que converge a f uniformemente en subconjuntos compactos de Ω. Como γ es homólogo a cero respecto de $\mathbb{C}$, por el teorema de Cauchy homológico (Teorema 1.2), $\int_\gamma p_n = 0$ para cada n. Como $p_n \to f$ uniformemente en γ sigue que $\int_\gamma f = 0$.

$(i) \Rightarrow (j)$: Si $\Omega = \mathbb{C}$, la aplicación $f(z) = \frac{z}{1+|z|}$ establece un homeomorfismo analítico de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{D}$. Si Ω es un dominio simplemente conexo propio, la implicación sigue del Lema 3.2.1.

$(j) \Rightarrow (k)$: $\mathbb{C}$ se puede ver como un disco de radio infinito y es conocido que toda armónica real en un disco admite una armónica conjugada. Si Ω es un dominio simplemente conexo propio, por el teorema de la aplicación de Riemann (Teorema 3.1), sabemos que existe una aplicación analítica $h : \Omega \to \mathbb{D}$ que es biholomorfa. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$, entonces $u_1 = u \circ h^{-1}$ es armónica en $\mathbb{D}$, y por [7, Proposición 3.26], existe una armónica conjugada $v_1 : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ tal que $f_1 = u_1 + iv_1$ es analítica. Hagamos $f = f_1 \circ h$. Entonces f es analítica en Ω, $u = \Re f$ y $v = \Im f = v_1 \circ h$ es la armónica conjugada de u, y $f = u + iv$.

$(j) \Rightarrow (a)$: Sean h un isomorfismo analítico de Ω sobre $\mathbb{D}$ y γ una curva cerrada en Ω, con lo que $\sigma(s) = h(\gamma(s))$ es una curva cerrada en $\mathbb{D}$. Razonando como en el Ejemplo 1.10, podemos afirmar que existe una aplicación continua $\Lambda : I \times I \to \mathbb{D}$ tal que $\Lambda(s,0) = \sigma(s)$, $0 \le s \le 1$, $\Lambda(s,1) = 0$, $0 \le s \le 1$, y $\Lambda(0,t) = \Lambda(1,t)$, $0 \le t \le 1$. En otros términos, Λ define una homotopía en $\mathbb{D}$ que degenera la curva $\sigma(s)$ continuamente en cero. Sigue que $H = h^{-1} \circ \Lambda$ establece una homotopía en Ω que degenera continuamente la curva γ en la curva constante $h^{-1}(0)$. Esto prueba que toda curva cerrada en Ω es homotópica a cero, o lo que es lo mismo, que Ω es un dominio simplemente conexo del plano.

$(k) \Rightarrow (g)$: Sean $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y sin ceros en Ω, $u = \Re f$ y $v = \Im f$. Definamos

$$U(x,y) = \log|f(x+iy)| = \log\left(u^2(x,y) + v^2(x,y)\right)^{\frac{1}{2}}\,, \qquad (x,y) \in \Omega.$$

Por simple computación se comprueba que U es armónica en Ω. Por la hipótesis (k), sea $V : \Omega \to \mathbb{R}$ armónica conjugada de U, con lo que la función $g = U + iV$ es holomorfa en Ω. Hagamos $h(z) = \exp(g(z))$, $z \in \Omega$. h es una función holomorfa y sin ceros en Ω, y además, verifica que $\dfrac{|f(z)|}{|h(z)|} = 1$ para todo $z \in \Omega$. Por el teorema de la aplicación abierta, f/h es constante. Sigue que existe una constante c tal que $f(z) = ch(z) = c\exp(g(z)) = \exp(g(z) + c_1)$, $z \in \Omega$. Esto prueba que $g(z) + c_1$ es una rama de $\log f(z)$.

$\square$

Bibliografía

[1] R. B. Ash, *Complex Variables*, Academic Press, New York, 1971.

[2] J. Bruna and J. Cufí, *Complex Analysis*, European Mathematical Society, Zurich, 2013.

[3] R. B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, vol. I, Birkhäuser, Basel, 1979.

[4] J. B. Conway, *Function Theory of One Complex Variable*, Springer Verlag, New York, 1973.

[5] R. E. Green and S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, Second edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.

[6] B. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] F. Pérez-González, *Variable Compleja*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, 2018 (en prensa).

[8] R. E. Rodríguez, I. Kra and J. P. Gilman, *Complex Analysis, in the spirit of Lipman Bers*, Second edition, Springer Verlag, New York, 2013.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[10] D. C. Ullrich, *Complex Made Simple*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.

Characterization of simply connected domains

Carlos Ledesma Díaz
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100889642@ull.edu.es

Abstract

In this project we study global versions of Cauchy theorem, normal families of analytic functions, Riemann mapping theorem and the approximation Runge theorem for compact subsets. These matters let us to give a multiple characterization of simply connected domains.

1. Introduction

The development of the project is based on some complex variable problems. The first chapter deals with Cauchy theorem (its homological and homotopic versions), starting from the local case (for open and convex sets). In the second chapter, we study the space of holomorphic functions in a domain that we endow with the uniform convergence topology in compact subsets. In the third chapter, we see one of the most important results in the theory of holomorphic functions called Riemann mapping theorem, which states that all non-empty simply connected domain in the complex number plane $\mathbb{C}$, which is not all $\mathbb{C}$, is conformally equivalent to the open unit disk $\mathbb{D}$. Finally, multiple characterizations of simply connected domains are established using the previous chapters and several results which are studied in the first part of the last chapter.

2. Global Cauchy theorem

In this chapter, we ask ourselves how a closed path must be so that the line integral over that path of any holomorphic function is zero; or what characteristic a domain must have so that the line integral of any analytic function over any closed curve is zero. Before answering these questions, we define some concepts. We start saying what a cycle is (sums of closed paths which are written in a formal sense: $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$) and then we define the concept of "index of one cycle Γ in respect of one point $\alpha \notin \{\Gamma\}$" as:

$$Ind_{\Gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z-\alpha}.$$

Now, we are able to answer the previous questions. The answer to the first question is given by the homological version of Cauchy theorem. After proving that a closed path is homotopic to zero (if it is homotopic to another path which is reduced to a point for continuity) is automatically homologous to zero (if it is homologous to another path which is reduced to a point) with respect to the domain, we immediately get an answer to the second question with the homotopic version of Cauchy theorem. After that, we are able to establish the first equivalent properties of simply connected domains.

3. Convergence and compactness in the space of holomorphic functions

We want to endow to the space of holomorphic functions with a topology in an open set which is standard in analytical function theory. For greater generality, we are going to introduce it into the space of continuous functions. We denote by $C(\Omega)$ to the set of all continuous functions with values in $\mathbb{C}$. It is a complete metric space with the metric:

$$\rho(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}, \quad f,g \in C(\Omega),$$

being $\rho_n(f,g) = \sup_{z\in K_n}\{|f(z)-g(z)|\} = \|f-g\|_{K_n}$, K_n compact subset, $n = 1,2,\ldots$ We also state Arzelà-Ascolí theorem, which relate an important type of family of functions (normal families). After that, we denote by $H(\Omega)$ to the set of all analytic functions in $C(\Omega)$. As $H(\Omega)$ is a closed subset in $C(\Omega)$, we prove that it is a complete metric space with the topology inherited from $C(\Omega)$. Finally, Montel theorem is explained to characterize normal families:
A family $\mathscr{F}$ in $H(G)$ is normal iff $\mathscr{F}$ is locally bounded (i.e., $\mathscr{F}$ is locally bounded if around each point $a \in \Omega$, $\exists$ a disk where $\mathscr{F}$ is uniformly bounded).

4. Riemann mapping theorem

Our aim is to define an equivalence relation among domains in $\mathbb{C}$. There will be two equivalence classes: a class which contains $\mathbb{C}$ and another class which contains all non-empty simply connected domains which are not $\mathbb{C}$. For proving this, we use Riemann mapping theorem:
All non-empty simply connected domain Ω in the complex number plane $\mathbb{C}$ which is not all $\mathbb{C}$ is conformally equivalent to the open unit disk $\mathbb{D}$, being $f:\Omega\to\mathbb{D}$ a *conformal isomorphism* from Ω to $\mathbb{D}$ if f is holomorphic and bijective (Ω and $\mathbb{D}$ are conformally equivalent).
After that, some mathematicians thought that this result could be extended to the sets' closures. Therefore, Osgood-Taylor-Carathéodory theorem was stated:
Let Ω be a bounded simply connected domain in $\mathbb{C}$ such that every boundary point is accessible (i.e., if it is possible to access to the boundary through sequences defining a curve γ). Then, any conformal transformation from Ω to $\mathbb{D}$ can be extended to an isomorphism from $\overline{\Omega}$ to $\overline{\mathbb{D}}$.

5. Characterization of simply connected domains

In this chapter, we prove that simply connected domains in $\mathbb{C}$ can be characterized in multiple ways, with topological, algebraic, geometric and, of course, analytical details. In addition to the results which have been studied in the previous chapters, we need Runge theorem for compacts which is stated in the first section. A consequence of this theorem is: if K is a compact and $\mathbb{C}\setminus K$ is connected then any holomorphic function around K can be uniformly approximated by polynomials in K. This result appears in the last section of this chapter where multiple characterizations of simply connected domains are established.

References

[1] R. B. Ash, *Complex Variables*, Academic Press, New York, 1971.

[2] J. Bruna and J. Cufí, *Complex Analysis*, European Mathematical Society, Zurich, 2013.

[3] R. B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, vol. I, Birkhäuser, Basel, 1979.

[4] J. B. Conway, *Function Theory of One Complex Variable*, Springer Verlag, New York, 1973.

[5] R. E. Green and S. G. Krantz, *Function Theory of One Complex Variable*, Second edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002.

[6] B. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[7] F. Pérez-González, *Variable Compleja*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, 2018. (en prensa)

[8] R. E. Rodríguez, I. Kra and J. P. Gilman, *Complex Analysis, in the spirit of Lipman Bers*, Second edition, Springer Verlag, New York, 2013.

[9] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[10] D. C. Ullrich, *Complex Made Simple*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2008.