Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

Zoilo González García

El teorema de categoría de Baire en F-espacios

The Baire category theorem in F-spaces

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, junio de 2018

Dirigido por

María Isabel Marrero Rodríguez

María Isabel Marrero Rodríguez
Dpto. de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A María Isabel Marrero Rodríguez,
por su ayuda, tiempo dedicado, conocimientos y enorme implicación.
A mis padres y hermanas,
por el apoyo y motivación que me brindan a diario.
Al resto de familiares y amigos,
por todo lo compartido durante estos años.

Resumen · Abstract

Resumen

Los trabajos sobre la fundamentación de la teoría de funciones de variable real desarrollados por Baire, Borel y Lebesgue a principios del siglo XX dieron lugar a la construcción de objetos matemáticos designados por propiedades topológicas entonces novedosas, las cuales resultaron tener aplicaciones a otros campos de las matemáticas. Uno de estos nuevos objetos fueron los espacios de Baire*, que surgen de modo natural en la formalización del análisis, la topología, la teoría de conjuntos y la lógica matemática. El objetivo principal de este trabajo es estudiar uno de los resultados más significativos introducidos por Baire, el llamado* teorema de categoría*, y la relevancia de sus numerosas aplicaciones a distintos ámbitos, especialmente en el contexto de F-espacios y espacios de Banach.*

Palabras clave: *Conjunto denso – Conjunto diseminado – Conjunto de primera categoría – Conjunto de segunda categoría – Conjunto residual – Conjunto F_σ – Conjunto G_δ – Espacio de Baire – Espacio hereditariamente de Baire – Principio de acotación uniforme – Teorema de Banach-Steinhaus – Teorema de la aplicación abierta – Teorema del grafo cerrado.*

Abstract

The works on the foundation of the theory of functions of one real variable developed by Baire, Borel and Lebesgue at the beginning of the XX century gave rise to the construction of mathematical objects designated by topological properties, new at that time, which turned out to have applications to other fields of the mathematics. One of these objects were Baire spaces*, which arise naturally in the formalization of analysis, topology, set theory and mathematical logic. The main objective of this report is to study one of the most significant results introduced by Baire, the so-called* category theorem*, and the relevance of its numerous applications to different fields, especially in the context of F-spaces and Banach spaces.*

Keywords: *Dense set – Nowhere dense set – First category set – Second category set – Residual set – F_σ set – G_δ set – Baire space – Hereditarily Baire space – Uniform boundedness principle – Banach-Steinhaus theorem –Open mapping theorem – Closed graph theorem.*

Contenido

Introducción

El origen del teorema de categoría de Baire se remonta a 1897, cuando Osgood [8] prueba que la intersección de una sucesión de subconjuntos abiertos densos de $\mathbb{R}$ es densa en $\mathbb{R}$; si bien es Baire quien, dos años después, observa en su tesis doctoral [1] que el mismo resultado sigue siendo válido en $\mathbb{R}^n$, y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (actualmente llamadas *funciones de la primera clase de Baire*). El teorema de Baire es, básicamente, un resultado acerca del «tamaño» de los subconjuntos de un espacio métrico completo o de un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, donde esta noción de «tamaño» es entendida desde un punto de vista topológico.

Pese a su enunciado sencillo y su breve demostración, el teorema de categoría proporciona una herramienta muy potente para establecer teoremas de existencia en campos muy variados (entre ellos la topología, el cálculo, la teoría de números, el análisis funcional, el análisis armónico, las ecuaciones diferenciales o la teoría de probabilidades), relativos a objetos matemáticos que, por lo general, resultan difíciles de construir explícitamente. Para calibrar el alcance del teorema remitimos a la monografía [4], cuyas casi 600 páginas recopilan un buen número de aplicaciones del teorema.

El método de la categoría consiste, esencialmente, en lo siguiente. Supongamos que queremos probar que existe algún elemento satisfaciendo cierta propiedad P. Se trata entonces de encontrar un espacio topológico adecuado X y aplicar el teorema de categoría para mostrar que el conjunto $\{x \in X : P(x)\}$ no es vacío. De hecho, el teorema de categoría permite verificar que este conjunto no sólo no es vacío, sino que es «topológicamente grande» en X; de manera que, en realidad, se establece la existencia de numerosos objetos que verifican la propiedad en cuestión.

La presente memoria está dividida en tres capítulos.

En el primero, introducimos las nociones que sustentan la teoría de espacios de Baire, entre ellas: conjuntos diseminados, de primera y segunda categoría, residuales, F_σ y G_δ; y probamos el teorema de categoría en el contexto de F-espacios, así como distintas caracterizaciones y propiedades básicas de los espacios de Baire y hereditariamente de Baire, ilustrando el desarrollo teórico con ejemplos y contraejemplos. Para ello hemos consultado, fundamentalmente, las referencias [2], [3], [5], [6] y [11].

En el segundo capítulo se aplica el teorema de categoría de Baire al establecimiento de tres de los cuatro pilares básicos del análisis funcional: el teorema de Banach-Steinhaus, el teorema de la aplicación abierta y el teorema del grafo cerrado; el cuarto pilar, a saber, el teorema de Hahn-Banach, es independiente del teorema de Baire y no será tratado aquí. Todos estos teoremas son probados en el marco de los F-espacios, si bien se dan versiones particulares para espacios de Banach que son aplicadas luego a distintos problemas del análisis matemático, entre otros: continuidad de aplicaciones bilineales, convergencia y representación de series de Fourier de funciones continuas (núcleos de Dirichlet y Fejér), coeficientes de Fourier de funciones integrables (lema de Riemann-Lebesgue) y operadores en espacios de sucesiones, así como proyecciones, sumas directas, espacios cociente y subespacios complementados. Para este desarrollo hemos seguido, sobre todo, los textos [3], [10] y [11].

Finalmente, en el tercer capítulo hemos seleccionado y adaptado de [4], [5] y [9] una muestra muy reducida de algunos otros resultados recogidos en la literatura que descansan en el teorema de Baire. Tal selección responde, fundamentalmente, al gusto personal, pero también se ha visto condicionada por la limitación que la normativa académica impone sobre la extensión de este documento.

La memoria concluye con una recopilación de la bibliografía básica utilizada en la realización del trabajo y el preceptivo póster resumiendo sus contenidos.

1

El teorema de categoría de Baire

Los orígenes del llamado teorema de categoría se remontan a 1897, cuando Osgood [8] prueba que la intersección de una sucesión de subconjuntos abiertos densos de $\mathbb{R}$ es densa en $\mathbb{R}$. Dos años después, Baire [1] observa que el mismo resultado sigue siendo válido en $\mathbb{R}^n$ y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas *funciones de la primera clase de Baire*). En 1914, Hausdorff extendió el resultado a los espacios completamente metrizables. Un poco más tarde, Banach advirtió que el mencionado resultado de Osgood y Baire no sólo es cierto en $\mathbb{R}^n$ sino también, con la misma demostración de Baire, en cualquier espacio métrico completo y en cualquier espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, dando así forma definitiva a lo que hoy día conocemos como el *teorema de categoría de Baire* para ambas clases de espacios.

En análisis, la validez de muchos teoremas importantes depende de la completitud de los sistemas que intervienen. Esto explica la insuficiencia del sistema de los números racionales y de la integral de Riemann (por mencionar sólo dos de los ejemplos más conocidos) y el éxito logrado por sus sustitutos, el sistema de los números reales y la integral de Lebesgue. El teorema de categoría de Baire en espacios métricos completos es la herramienta básica en este área.

1.1. Categorías de Baire

Definición 1.1. *Sea S un espacio topológico. Un conjunto $E \subset S$ se llama* diseminado *si su clausura $\overline{E}$ tiene interior vacío; esto es, si $(\overline{E})^\circ = \emptyset$.*

Veamos algunos ejemplos que serán útiles en lo que sigue.

(a) Un subconjunto arbitrario A de un espacio topológico es diseminado si, y sólo si, $\overline{A}$ es diseminado.

(b) Todo subconjunto de un conjunto diseminado es diseminado.
(c) La frontera de un conjunto abierto o cerrado A en un espacio topológico X es siempre diseminada. En efecto:
   - Si A es abierto, la frontera de A, $\partial A = \overline{A} \setminus A$, es cerrada. Supongamos que existe un abierto no vacío $V \subset \partial A$. Entonces $V \subset X \setminus A$, pero por definición de frontera deberíamos tener $V \cap A \neq \emptyset$. Esta contradicción prueba que $V = \emptyset$.
   - Si A es cerrado entonces $\partial A = A \setminus A^\circ$ es cerrada. Supongamos que existe un abierto no vacío $V \subset \partial A$. Entonces, por una parte, $V \cap A^\circ = \emptyset$ pero, por la definición de interior de un conjunto, $V \subset A$ implica $V \subset A^\circ$. De nuevo, esta contradicción implica que ∂A carece de interior.

   Cuando A no es abierto ni cerrado, la afirmación anterior puede ser falsa: por ejemplo, si tanto A como $X \setminus A$ son densos entonces ∂A es todo X.
(d) Si E es un espacio vectorial topológico y M es un subespacio vectorial de E, entonces M es denso o diseminado. Pues si M no es denso en E, entonces $\overline{M}$ es un subespacio vectorial propio de E, y por lo tanto $(\overline{M})^\circ = \emptyset$.

Proposición 1.2. *Un conjunto A es diseminado en un espacio topológico X si, y sólo si, para cualquier abierto no vacío $U \subset X$ existe un abierto no vacío $V \subset U$ tal que $V \cap A = \emptyset$.*

Demostración. Sean A un conjunto diseminado y U un abierto no vacío en X. Como $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, $U \not\subset \overline{A}$, así que $U \setminus \overline{A} \neq \emptyset$. El conjunto $V = U \setminus \overline{A}$ es un abierto contenido en U, disjunto de A.

Inversamente, sea U un abierto no vacío en X. Por hipótesis, existe un abierto no vacío $V \subset U$ tal que $A \subset X \setminus V$. Por tanto, $\overline{A} \subset X \setminus V$, o bien $V \subset X \setminus \overline{A}$. Entonces $U \cap (X \setminus \overline{A}) \supset U \cap V = V \neq \emptyset$, es decir, $U \not\subset \overline{A}$. Hemos probado que $\overline{A}$ no contiene abiertos no vacíos, y por lo tanto ha de ser diseminado. □

Proposición 1.3. *La unión de un número finito de conjuntos diseminados es diseminada.*

Demostración. Basta probar que la unión de dos conjuntos diseminados A y B es diseminada. Como la clausura de la unión de dos conjuntos es la unión de las clausuras de éstos, no se pierde generalidad suponiendo que A y B son cerrados; el enunciado anterior es entonces equivalente a afirmar que la intersección de los abiertos densos $X \setminus A$ y $X \setminus B$ es densa. Ahora, si U es un abierto no vacío, entonces $U \cap (X \setminus A)$ es abierto y no vacío, así que

$$(U \cap (X \setminus A)) \cap (X \setminus B) = U \cap ((X \setminus A) \cap (X \setminus B))$$

es abierto y no vacío. □

Proposición 1.4. *Sea Y un subespacio de un espacio topológico X, y sea A un subconjunto de Y. Si A es diseminado en Y, entonces A es diseminado en X. Recíprocamente, si Y es abierto (o denso) en X y A es diseminado en X, entonces A es diseminado en Y.*

Demostración. Supongamos que A es diseminado en Y. Si la clausura $\overline{A}$ de A en X contiene un abierto no vacío U, entonces $U \cap A$ no es vacío (por definición de clausura); luego, $U \cap Y$ es un abierto no vacío en Y, contenido en la clausura $\overline{A} \cap Y$ de A relativa a Y, contradiciendo la hipótesis.

Supongamos ahora que Y es abierto en X y que $A \subset Y$ es diseminado en X. Si U es un abierto no vacío en Y, entonces U es abierto en X, y por lo tanto contiene un conjunto no vacío V que es abierto en X (y *a fortiori* en Y) pero no corta a A; por la Proposición 1.2, A es diseminado en Y.

Finalmente, supongamos que Y es denso en X y $A \subset Y$ es diseminado en X. Si U es un abierto no vacío en Y, existe un abierto no vacío V en X tal que $U = V \cap Y$. Como A es diseminado en X, $V \setminus \overline{A}$ es abierto y no vacío en X. Entonces $U \setminus \overline{A} = (V \setminus \overline{A}) \cap Y$ es un abierto no vacío en Y contenido en U que no corta a A; de nuevo por la Proposición 1.2, A es diseminado en Y. □

La segunda parte de la Proposición 1.4 es falsa si Y no es abierto ni denso en X; considérese, por ejemplo, la situación en la que $Y \neq \emptyset$ es diseminado en X y $A = Y$.

Definición 1.5. *Los conjuntos de* primera categoría *en S son aquellos expresables como unión numerable de conjuntos diseminados. Cualquier subconjunto de S que no sea de primera categoría se dice que es de* segunda categoría *en S. El complementario en S de un conjunto de primera categoría se llama* residual.

Podemos convenir con Rudin [11] en que las denominaciones *primera categoría* y *segunda categoría* (debidas a Baire) son un tanto rebuscadas y poco sugerentes. En lugar de los anteriores, algunos autores han usado los términos *magro* y *no magro*. Pero los «argumentos de categoría» están ya tan arraigados en la literatura matemática y son tan conocidos que parece inútil insistir en un cambio.

A continuación enunciamos algunas propiedades obvias de la categoría que serán usadas libremente en lo sucesivo:

(a) Si $A \subset B$ y B es de primera categoría en S, entonces A también es de primera categoría en S.
(b) Toda unión numerable de conjuntos de primera categoría es de primera categoría.
(c) Todo conjunto cerrado $E \subset S$ con interior vacío es de primera categoría en S.
(d) Si h es un homeomorfismo de S en S y si $E \subset S$, entonces E y $h(E)$ son de la misma categoría en S.

Teorema 1.6 (Teorema de categoría de Baire). *Sea S:*

(a) un espacio métrico completo, o bien
(b) un espacio de Hausdorff localmente compacto.

Entonces, la intersección de toda colección numerable de subconjuntos abiertos y densos de S es densa en S.

Demostración. Supongamos que $V_1, V_2, V_3, \ldots$ son subconjuntos abiertos y densos de S. Sea B_0 un subconjunto abierto no vacío, arbitrario, de S. Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, y se ha elegido un abierto $B_{n-1} \neq \emptyset$, entonces (por ser V_n denso) existe un abierto $B_n \neq \emptyset$ tal que

$$\overline{B}_n \subset V_n \cap B_{n-1}.$$

En el caso (a), B_n se puede tomar como una bola de radio $< 1/n$; en el caso (b), es posible elegir B_n de forma que $\overline{B}_n$ sea compacta. Pongamos

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n.$$

En el caso (a), los centros de las bolas anidadas B_n forman una sucesión de Cauchy que converge hacia algún punto de K y, por tanto, $K \neq \emptyset$. En el caso (b), $K \neq \emptyset$ por compacidad. Nuestra construcción muestra que $K \subset B_0$ y $K \subset V_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego, B_0 corta a $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. $\square$

El Teorema 1.6 es denominado *teorema de la categoría* por la siguiente razón. Sea $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección numerable de subconjuntos diseminados de S. Si, para cada $i \in \mathbb{N}$, V_i denota el complementario de $\overline{E}_i$, entonces V_i es abierto y denso, y la conclusión del teorema de Baire es que $\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i \neq \emptyset$. Por lo tanto, $S \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. De esta manera, los espacios métricos completos, así como los espacios de Hausdorff localmente compactos, son de segunda categoría en sí mismos.

Obsérvese que, mientras que la tesis del teorema de categoría de Baire es de naturaleza topológica, la hipótesis no lo es. Los espacios $\mathbb{R}$ y $(-\pi/2, \pi/2)$ son homeomorfos (vía la aplicación $x \mapsto \operatorname{arc\,tg} x$); sin embargo, $\mathbb{R}$ es completo y $(-\pi/2, \pi/2)$, no. En consecuencia, el Teorema 1.6 es aplicable directamente a $\mathbb{R}$ pero no a $(-\pi/2, \pi/2)$. Sin embargo, la tesis de dicho teorema se verifica para todo espacio métrico que sea homeomorfo a un espacio métrico completo, o a todo espacio topológico que sea homeomorfo a un espacio de Hausdorff localmente compacto.

A continuación daremos algunas definiciones y deduciremos algunas consecuencias del Teorema 1.6.

Definición 1.7. *Se dice que un subconjunto de un espacio topológico es un G_δ si puede ser expresado como intersección numerable de abiertos. Complementariamente, se llama F_σ a aquel conjunto que es expresable como unión numerable de cerrados.*

Todo abierto es un G_δ, pero no todo G_δ es abierto. Similarmente, todo cerrado es un F_σ, pero no todo F_σ es cerrado.

Corolario 1.8. *En las hipótesis del Teorema 1.6, si* $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ *es una sucesión de subconjuntos* G_δ *densos de* S *entonces su intersección* $\bigcap_{n=1}^\infty G_n$ *es también un conjunto* G_δ *denso en* S.

Demostración. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto G_n puede ser escrito como intersección numerable de abiertos, digamos $G_n = \bigcap_{m=1}^\infty U_{nm}$. Puesto que G_n se supone denso, también debe serlo U_{nm} para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$. Como la familia de abiertos $\{U_{nm}\}_{n,m=1}^\infty$ es numerable, el conjunto

$$\bigcap_{n=1}^\infty G_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty U_{nm}$$

es un G_δ. El Teorema 1.6 asegura que este G_δ es denso. □

Teorema 1.9 (Teorema de categoría de Baire, versión complementaria). *En un espacio métrico completo, o en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, todo* G_δ *denso es de segunda categoría.*

Demostración. Sea G un conjunto G_δ denso, y supongamos que G es de primera categoría. Existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ de conjuntos diseminados tal que $G \subset \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que E_n es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, el complementario V_n de E_n es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.6, la intersección $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$ es un G_δ denso.

Como G es un subconjunto de $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$, es disjunto de $\bigcap_{n=1}^\infty V_n$. Por tanto, hemos obtenido dos conjuntos G_δ densos disjuntos. Este hecho contradice el Corolario 1.8, impidiendo que G sea de primera categoría. □

La intuición que subyace al Teorema 1.9 es que una unión numerable de conjuntos pequeños sigue siendo pequeña, donde por «pequeño» entendemos «de primera categoría». Esta noción de tamaño es válida en cualquier espacio topológico.

Ejemplo 1.10. Considérese la recta real $\mathbb{R}$. En ella tenemos definidas dos nociones naturales de «pequeñez»: primera categoría y medida nula. Es natural cuestionarse si existe alguna relación entre ambas. Si $|A|$ denota la medida de Lebesgue del conjunto $A \subset \mathbb{R}$ entonces $|\mathbb{Q}| = 0$ porque, al ser numerable, $\mathbb{Q}$ puede ser expresado como unión numerable de conjuntos (unipuntuales) de medida nula. Por consiguiente, existe una sucesión $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ de abiertos tales que $\mathbb{Q} \subset U_n$ y $|U_n| < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Pongamos $G = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$. Se tiene que $|G| = 0$, pero G no puede ser de primera categoría, ya que contiene a $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Por otra parte, el complementario de G es de primera categoría y medida infinita.

Para ahondar en las analogías entre los espacios topológicos y los espacios de medida remitimos a la monografía de Oxtoby [9].

En el capítulo 2 investigaremos algunas implicaciones de la categoría en F-espacios.

1.2. Espacios de Baire

Definición 1.11. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es un* espacio de Baire *si cualquier intersección numerable de abiertos densos en X es densa en X.*

Teorema 1.12. *Sea X un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) X es un espacio de Baire.
(b) Todo subconjunto de X de primera categoría tiene interior vacío.
(c) Todo abierto no vacío en X es de segunda categoría en X.
(d) Todo subconjunto residual de X es denso en X.

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a) Sea $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos, abiertos y densos de X. Entonces cada $X \setminus G_n$, $n \in \mathbb{N}$, es un subconjunto diseminado de X. Por (b), $\bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus G_n) = X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ tiene interior vacío, y así

$$X \setminus \left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$$

es denso en X.

(a) $\Rightarrow$ (c) Sea G un subconjunto abierto no vacío de X y supongamos que G es de primera categoría en X. Entonces existe una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos diseminados de X tal que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n$. De aquí,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{E}_n) \subset X \setminus G.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es diseminado en X, así que $X \setminus \overline{E}_n$ es abierto y denso en X. Sigue de (a) que $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X \setminus \overline{E}_n)$ es denso en X. En particular, $X \setminus G$ es denso en X. Como $X \setminus G$ es cerrado, necesariamente $X \setminus G = X$, obligando a que $G = \emptyset$. Esta contradicción prueba que G es de segunda categoría en X.

(c) $\Rightarrow$ (d) Sea E un subconjunto de X de primera categoría. Entonces su interior E° también es de primera categoría en X. Por (c), $E^{\circ} = \emptyset$, de modo que $X \setminus E$ es denso en X.

(d) $\Rightarrow$ (b) Sea E un subconjunto de X de primera categoría. La hipótesis (d) entraña que $X \setminus E$ es denso en X, y de aquí $E^{\circ} = \emptyset$. □

El Teorema 1.6 muestra que los espacios métricos completos y los espacios topológicos de Hausdorff localmente compactos son espacios de Baire; y la observación posterior a aquél, que todo espacio de Baire es de segunda categoría. El recíproco de este último enunciado es falso, en general, pero existen ciertas clases de espacios topológicos en donde ambas nociones coinciden.

Ejemplo 1.13. Sea Y cualquier espacio de Baire, y sea X la unión disjunta $Y \sqcup \mathbb{Q}$, donde $\mathbb{Q}$ está provisto de su topología usual heredada de $\mathbb{R}$. Nótese que Y y $\mathbb{Q}$ son subconjuntos abierto-cerrados de X. Además, X no es unión numerable de conjuntos diseminados, porque Y no puede serlo, así que X es de segunda categoría. Pero $\{X \setminus \{q\} : q \in \mathbb{Q}\}$ es una familia numerable de abiertos densos cuya intersección, Y, no es densa en X, de manera que X no es un espacio de Baire.

Corolario 1.14. *Un espacio vectorial topológico es de Baire si, y sólo si, es de segunda categoría.*

Demostración. Basta probar que todo espacio vectorial topológico de segunda categoría es de Baire. Sea A un abierto no vacío del espacio vectorial topológico X, que suponemos de segunda categoría. Dado $x \in A$, existe un entorno equilibrado U de cero en X tal que $x + U \subset A$. Como $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ y X es de segunda categoría, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que mU es de segunda categoría. Entonces U y $x + U$ son de segunda categoría, obligando a que A también lo sea. La conclusión deseada resulta ahora del Teorema 1.12. $\square$

Esencialmente la misma demostración del Corolario 1.8, reemplazando el Teorema 1.6 por la Definición 1.11, permite establecer el resultado siguiente.

Corolario 1.15. *Si X es un espacio de Baire, entonces la intersección de toda colección numerable de conjuntos G_δ densos en X es un G_δ denso en X.*

1.2.1. Espacios hereditariamente de Baire

Teorema 1.16. *Si X es un espacio de Baire entonces todo abierto no vacío en X, con su topología relativa, es también un espacio de Baire.*

Demostración. Sean $A \subset X$ un abierto no vacío y $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos en la topología relativa de A, densos en A. Para cada $n \in \mathbb{N}$, D_n es abierto en X, y también lo son los conjuntos

$$G_n = D_n \cup (X \setminus \overline{A}).$$

Afirmamos que cada uno de éstos es denso en X. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$ se verifica que D_n es denso en A, esto es, que $A \subset \overline{D}_n$. Así,

$$\overline{G}_n = \overline{D}_n \cup \overline{(X \setminus \overline{A})} \supset \overline{A} \cup (X \setminus \overline{A}) = X.$$

Puesto que X es un espacio de Baire, necesariamente $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. Por último, como

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(D_n \cup (X \setminus \overline{A})\big) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right) \cup (X \setminus \overline{A}),$$

se sigue que

$$X = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n\right)} \cup \overline{(X \setminus \overline{A})}.$$

Por ser A abierto, $A \subset (\overline{A})^{\circ}$, lo que implica que $A \cap (X \setminus (\overline{A})^{\circ}) = A \cap \overline{(X \setminus \overline{A})} = \emptyset$. Se concluye que $A \subset \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n}$, probando que $\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ es denso en A. □

El Teorema 1.16 admite la siguiente generalización.

Teorema 1.17. *Sea X un espacio de Baire. Si G es un conjunto G_δ denso en X entonces, con la topología inducida, G es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea $\{O_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos abiertos y densos de G. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un subconjunto abierto no vacío U_n de X tal que $O_n = G \cap U_n$. Por hipótesis, existe una sucesión $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos densos en X tal que $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Dado $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que U_n es denso en X. En efecto, sea V un subconjunto abierto no vacío de X. Puesto que G es denso en X, $V \cap G$ es abierto no vacío en G; y como U_n es denso en G, resulta que $(V \cap U_n) \cap G = (V \cap G) \cap U_n \neq \emptyset$. En particular $V \cap U_n \neq \emptyset$ y, por lo tanto, U_n es denso en X. Como X es un espacio de Baire, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es denso en X, así que $(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap G = \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \cap G) = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es intersección de dos conjuntos G_δ densos en X. Se infiere del Corolario 1.15 que $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ es denso en X y, consecuentemente, también lo es en G. □

El resultado siguiente es una suerte de recíproco de los anteriores.

Proposición 1.18. *Sean X un espacio topológico e Y un subespacio denso en X. Si Y es un espacio de Baire con la topología inducida, entonces X es un espacio de Baire.*

Demostración. Supongamos que X no es un espacio de Baire. Por el Teorema 1.12, X contiene un abierto no vacío U de primera categoría en X. Pero entonces $U \cap Y$ es un abierto no vacío de primera categoría en Y. En efecto, $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde F_n es diseminado en X para cada $n \in \mathbb{N}$; por la Proposición 1.4, $U \cap Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap Y)$, con $F_n \cap Y$ diseminado en Y para cada $n \in \mathbb{N}$. Esto impide que Y sea un espacio de Baire. □

Si X es un espacio métrico completo o un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto, entonces todo subconjunto cerrado de X hereda esa propiedad, y por consiguiente es un espacio de Baire con su topología relativa. Sin embargo, como veremos a continuación, el Teorema 1.16 es, en general, falso si en su enunciado se reemplaza «abierto» por «cerrado».

Ejemplo 1.19. Considérese la topología euclídea τ sobre los racionales junto con un punto $\{x\}$ no perteneciente a $\mathbb{Q}$. El conjunto $Q = \mathbb{Q} \cup \{x\}$ con la topología $\sigma = \{O \cup \{x\} : O \in \tau\} \cup \{\emptyset\}$ es un espacio de Baire, ya que $\{x\}$ es denso y está contenido en cualquier subconjunto denso de Q, así que toda intersección numerable de conjuntos densos en Q es densa en Q. Sin embargo, $\mathbb{Q}$ es un subespacio cerrado de Q que no es espacio de Baire, porque es de primera categoría en sí mismo.

El Ejemplo 1.19 motiva la siguiente definición.

Definición 1.20. *Un espacio topológico X se dice que es* hereditariamente de Baire *si todo subconjunto cerrado de X es un espacio de Baire con la topología relativa.*

Es claro que todo espacio hereditariamente de Baire es de Baire, y ya quedó dicho que los espacios completamente metrizables y los espacios de Hausdorff localmente compactos son hereditariamente de Baire. Damos ahora una caracterización de esta clase de espacios.

Teorema 1.21. *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(a) X es un espacio hereditariamente de Baire.
(b) Todo subconjunto cerrado de X es de segunda categoría en sí mismo.

Demostración. Que (a) implica (b) se sigue de los hechos de que todo espacio hereditariamente de Baire es de Baire y de que todo espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo.

Recíprocamente, supongamos que no se cumple (a). Entonces existe un subespacio cerrado $F \subset X$ que no es de Baire y, por el Teorema 1.12, un abierto relativo O en F que es de primera categoría en F. Así, $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, donde cada F_n es un subconjunto de F que es diseminado en F y, por la Proposición 1.4, en O. Como cada F_n sigue siendo diseminado en $\overline{O}$ y $\overline{O} = (\overline{O} \setminus O) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)$, encontramos que $\overline{O}$ es unión de conjuntos diseminados en $\overline{O}$ y, por tanto, es de primera categoría en sí mismo, negando (b). □

En un espacio hereditariamente de Baire, el Teorema 1.17 continúa siendo válido si se omite la hipótesis de densidad.

Proposición 1.22. *Sea G un subconjunto G_δ de un espacio hereditariamente de Baire. Entonces G, con su topología relativa, es un espacio de Baire.*

Demostración. Por hipótesis, $\overline{G}$ es un espacio de Baire. Como G es G_δ denso en $\overline{G}$, la conclusión deseada sigue del Teorema 1.17. □

1.2.2. Conjuntos residuales en espacios de Baire

Teorema 1.23. *Sean X un espacio de Baire y M un subconjunto no vacío de X. Son equivalentes:*

(a) M es un conjunto residual en X.
(b) M contiene un conjunto G_δ denso en X.

Demostración. Supongamos que M es residual en X. Entonces $X \setminus M$ es de primera categoría en X, y por lo tanto existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ de subconjuntos diseminados de X tal que $X \setminus M = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Cada abierto $G_n = X \setminus \overline{A}_n$ es denso en X, y

$$M = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} (X \setminus \overline{A}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Para probar la implicación recíproca, consideremos una sucesión $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ de abiertos en X tal que $G = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ es denso en X y $M \supset G$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $G \subset G_n$, de modo que G_n es denso en X. Además, $X \setminus M \subset \bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus G_n)$, donde $X \setminus G_n$ es diseminado en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, $\bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus G_n)$ es un conjunto de primera categoría, y lo mismo sucede con $X \setminus M$. □

Se desprende del Corolario 1.15 y el Teorema 1.23 que en todo espacio de Baire la intersección numerable de conjuntos residuales es residual, y por lo tanto densa. Como consecuencia, se puede afirmar que en la clase de los espacios de Baire los conjuntos residuales son «más grandes» o «más abundantes» que los conjuntos que únicamente son densos. Para verlo, basta notar que la intersección finita de conjuntos densos puede ser vacía (piénsese en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), pero no así la de conjuntos residuales, ya que una intersección numerable de conjuntos residuales no sólo no es vacía, sino que además es densa. Por esta razón, a los conjuntos residuales también se les suele denominar conjuntos *abundantes, típicos o genéricos*, otorgándose el mismo calificativo a las propiedades que se verifican para todos los elementos de un conjunto residual.

El siguiente resultado reviste cierto interés.

Proposición 1.24. *Sean X un espacio de Baire y $\{O_n\}_{n=0}^\infty \subset X$ una sucesión de conjuntos abiertos cuya unión $O = \bigcup_{n=0}^\infty O_n$ es densa en X. Si $G \subset X$ es tal que $G \cap O_n$ es residual en O_n para cada $n \in \mathbb{N}_0$, entonces G es residual en X.*

Demostración. Se construye recursivamente la sucesión de abiertos $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ poniendo

$$W_0 = O_0, \qquad W_{n+1} = O_{n+1} \setminus \bigcup_{j=0}^{n} \overline{O}_j, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Nótese que $W_n \cap W_m = \emptyset$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \neq m$. Afirmamos que el conjunto $W = \bigcup_{n=0}^{\infty} W_n$ es denso en X. En efecto, sea U un subconjunto abierto no vacío de X. Por hipótesis, $\bigcup_{n=0}^{\infty} O_n$ es denso en X, de modo que $\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{O}_n$ también lo es; así, $U \cap (\bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{O}_n) \neq \emptyset$. Si $k = \min\left\{j \in \mathbb{N}_0 : U \cap \overline{O}_j \neq \emptyset\right\}$, entonces $U \cap \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{O}_j\right) = \emptyset$, de lo cual se infiere que $U \cap W_k \neq \emptyset$. Luego, $U \cap W \neq \emptyset$, y W es denso en X, como habíamos afirmado. Sea ahora G un subconjunto no vacío de X tal que $G \cap O_n$ es residual en O_n cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}_0$. Fijado $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $O_n \setminus G$ es de primera categoría en O_n. Como $W_n \setminus G \subset O_n \setminus G$, resulta que $W_n \setminus G$ también es de primera categoría en O_n. Y como W_n es abierto en O_n, la Proposición 1.4 asegura que $W_n \setminus G$ es de primera categoría en W_n.

En definitiva, no se pierde generalidad suponiendo que $O_n \cap O_m = \emptyset$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}_0$, $n \neq m$.

Fijemos $n \in \mathbb{N}_0$. Ya que $O_n \setminus G$ es de primera categoría en O_n, podemos escribir $O_n \setminus G = \bigcup_{j=0}^{\infty} N_{n,j}$, donde cada $N_{n,j}$, $j \in \mathbb{N}_0$, es diseminado en O_n. Pongamos

$$N_j = \bigcup_{n=0}^{\infty} N_{n,j}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Puesto que $X \setminus G = (X \setminus O) \cup (O \setminus G)$, con $X \setminus O$ es diseminado (porque O es abierto y denso) y

$$O \setminus G = \bigcup_{n=0}^{\infty} (O_n \setminus G) = \bigcup_{j=0}^{\infty} N_j,$$

para completar la prueba basta ver que cada N_j, $j \in \mathbb{N}_0$, es diseminado. A tal fin, fijado $j \in \mathbb{N}_0$, aplicamos la Proposición 1.2: dado un abierto no vacío U, debemos encontrar un abierto no vacío $V \subset U$ tal que $V \cap N_j = \emptyset$. Si $U \cap N_j = \emptyset$, tomamos $V = U$. En caso contrario, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $U \cap N_{m,j} \neq \emptyset$. Ya que $N_{m,j} \subset O_m$, sigue que $(U \cap O_m) \cap N_{m,j} \neq \emptyset$. Como $N_{m,j}$ es diseminado (Proposición 1.4) y el abierto $U \cap O_m$ no es vacío, existe un abierto no vacío $V \subset U \cap O_m \subset U$ tal que $V \cap N_{m,j} = \emptyset$. Por otra parte, $V \cap N_{n,j} \subset O_m \cap O_n = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq m$. Consecuentemente

$$V \cap N_j = V \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} N_{n,j}\right) = \emptyset,$$

como se pretendía. □

1.2.3. Otras caracterizaciones de los espacios de Baire

El Teorema 1.12 establece que los conjuntos de primera categoría en los espacios de Baire poseen interior vacío; pero la unión numerable de conjuntos diseminados no es necesariamente diseminada (piénsese en $\mathbb{Q}$ como subconjunto de

$\mathbb{R}$). Cabe entonces cuestionarse bajo qué condiciones un subconjunto de primera categoría de un espacio de Baire es diseminado. Kuratowski proporcionó una primera respuesta a esta pregunta en espacios métricos completos, generalizada posteriormente a espacios de Baire cualesquiera en los siguientes términos:

Teorema 1.25 (Kuratowski). *Sea X un espacio topológico. Son equivalentes:*

(a) X es un espacio de Baire.
(b) Todo conjunto G_δ de primera categoría en X es diseminado.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $A \subset X$ un conjunto G_δ y de primera categoría en X. Como A es un G_δ, su complementario $X \setminus A$ es un F_σ, y por lo tanto $\overline{A} \cap (X \setminus A) = \overline{A} \setminus A$ también es un conjunto F_σ. Sea $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tal que $\overline{A} \setminus A = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Afirmamos que la frontera de A, ∂A, es de primera categoría. En efecto, como $\overline{A} \setminus A \subset \partial A$, necesariamente $(\overline{A} \setminus A)^\circ = \emptyset$ y, dado que $\bigcup_{n=1}^\infty F_n^\circ \subset (\bigcup_{n=1}^\infty F_n)^\circ$, se concluye que $F_n^\circ = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\overline{A} \setminus A$ es de primera categoría, luego $\overline{A} = A \cup (\overline{A} \setminus A)$ también lo es. Finalmente, como X es de Baire se tiene (Teorema 1.12) que $(\overline{A})^\circ = \emptyset$, probando que A es diseminado.

(b) $\Rightarrow$ (a) Supongamos que X no es espacio de Baire. Por el Teorema 1.12, X contiene un abierto no vacío U de primera categoría. Al ser U abierto, es un conjunto G_δ, y (b) implica que $(\overline{U})^\circ = \emptyset$. Pero esta conclusión es falsa, puesto que $\emptyset \neq U \subset (\overline{U})^\circ$. Consecuentemente, X es de Baire. □

Como consecuencia inmediata del Teorema 1.25 resulta, de nuevo, el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.26. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales no es un G_δ.

Teorema 1.27. *Sean X un espacio de Baire y $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de subconjuntos cerrados de X tales que $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Entonces $H = \bigcup_{n=1}^\infty F_n^\circ$ es abierto y denso en X.*

Demostración. Observamos que H es abierto por ser unión de conjuntos abiertos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $H_n = F_n^\circ$ y definamos $G_n = H_n \cup (X \setminus F_n)$. Afirmamos que G_n es abierto y denso en X. En efecto, G_n es abierto por ser unión de dos conjuntos abiertos. Para ver que G_n es denso en X, consideremos un subconjunto abierto no vacío U de X. Ocurre entonces que, o bien $U \subset F_n$, en cuyo caso $U \subset H_n \subset G_n$, es decir, $U \cap G_n \neq \emptyset$, o bien $U \not\subset F_n$, de donde se obtiene que $U \cap (X \setminus F_n) \neq \emptyset$ y, de nuevo, $U \cap G_n \neq \emptyset$. Esto prueba nuestra afirmación. Puesto que X es un espacio de Baire, $E = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ es denso en X. Nuestro objetivo es probar que $E \subset H$. En efecto, supongamos que $x \in E \subset X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Entonces existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_{n_0}$. Por otro lado, $x \in G_{n_0}$, pues $x \in E = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$. Así pues, $x \in H_{n_0} \subset H$, es decir, $x \in H$; por lo tanto, $E \subset H$. Se concluye que H es denso en X. □

Teorema 1.28. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y σ-compacto. Son equivalentes:*

(a) X es un espacio de Baire.
(b) X contiene un conjunto localmente compacto y denso.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos compactos de X tales que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Como (por ser compacto en un espacio de Hausdorff) cada K_n es un conjunto cerrado, se tiene que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n^{\circ}$ es denso en X (Teorema 1.27). Afirmamos que G es localmente compacto en X. En efecto, dado $x \in G$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_n^{\circ}$. Además, $\overline{K_n^{\circ}} \subset K_n$; y como K_n es compacto, $\overline{K_n^{\circ}}$ también lo es. Por tanto, G es localmente compacto.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea G un conjunto localmente compacto y denso en X. El Teorema 1.6 asegura que G es de Baire, y la Proposición 1.18 permite concluir que X también lo es. □

1.2.4. Espacios de Baire sin puntos aislados

Recordemos que dado un espacio topológico arbitrario X, se dice que $x \in X$ es un *punto aislado* de X si $\{x\}$ es un subconjunto abierto de X. Tal definición brinda las herramientas suficientes para la prueba del siguiente resultado.

Teorema 1.29. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff que es de Baire y carece de puntos aislados. Si G es un subconjunto G_δ numerable de X, entonces G es diseminado.*

Demostración. Supóngase que $G = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $G = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$, donde cada $\{x_n\}$ es un subconjunto cerrado y diseminado de X, que es de Hausdorff y no posee puntos aislados. Así, G es de primera categoría. El Teorema 1.25 implica entonces que G es un conjunto diseminado. □

A continuación se listan algunas consecuencias inmediatas del Teorema 1.29.

- Si X es un espacio métrico completo sin puntos aislados, entonces ningún subconjunto denso numerable de X es un G_δ. Este hecho proporciona otra forma de comprobar que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales nunca es un G_δ en $\mathbb{R}$.
- Si X es un espacio de Hausdorff que es de Baire e infinito numerable, entonces X contiene una infinidad de puntos aislados. En efecto, nótese en primer lugar que el conjunto de puntos aislados no es vacío, lo cual se sigue del Teorema 1.29. Verifiquemos que tal conjunto es infinito. Suponiendo lo contrario, sea $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de puntos aislados de X para algún $n \in \mathbb{N}$, y sea $G = X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces G es abierto no vacío. Como X es de

Baire, G es de Baire con la topología relativa (Teorema 1.16) y, por supuesto, infinito numerable. Ahora, por el Teorema 1.29, G contiene al menos un punto aislado, que también lo es de X y no está en A, lo cual contradice la hipótesis. En particular, se infiere que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, como subconjunto de $\mathbb{R}$, no puede ser nunca un espacio de Baire, pues dicho conjunto es infinito numerable y carece de puntos aislados.

- Dado que $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio métrico completo sin puntos aislados, el Teorema 1.29 implica que $\mathbb{R}$ es no numerable.
- Si E es un subconjunto no vacío de un espacio topológico de Hausdorff X, se dice que E es *perfecto* si E es cerrado y no contiene puntos aislados. Si X es un espacio métrico completo, entonces todo subconjunto perfecto E de X es no numerable. En efecto, se tiene que E es un espacio de Baire sin puntos aislados, y el resultado se sigue del Teorema 1.29. Tal resultado exhibe una prueba de que el conjunto ternario de Cantor es no numerable, pues es un subconjunto perfecto de $[0, 1]$, el cual es un espacio métrico completo.

2

Los pilares del análisis funcional

Del teorema de categoría de Baire se derivan tres de los cuatro pilares básicos del análisis funcional: el teorema de Banach-Steinhaus, el teorema de la aplicación abierta y el teorema del grafo cerrado, los cuales desarrollaremos en este capítulo; el cuarto pilar, a saber, el teorema de Hahn-Banach, es independiente del teorema de Baire y no será incluido aquí. Para enfatizar el papel que desempeña el concepto de categoría, algunos de estos resultados (por ejemplo, los Teoremas 2.6 y 2.19) han sido enunciados con mayor generalidad que la requerida habitualmente. Una vez hecho esto, se dan versiones más sencillas que se recuerdan con mayor facilidad y son suficientes para la mayoría de las aplicaciones.

El desarrollo será efectuado en el contexto de F-espacios. Recordemos que un F-espacio es un espacio vectorial topológico completamente metrizable. Los espacios de Hilbert y Banach son ejemplos de F-espacios.

2.1. El teorema de Banach-Steinhaus

Definición 2.1. *Sean X e Y espacios vectoriales topológicos y Γ una familia de aplicaciones lineales de X en Y. Decimos que Γ es* equicontinua *si dado cualquier entorno W de 0 en Y, existe un entorno V de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ para todo $\Lambda \in \Gamma$.*

Si Γ contiene sólo una Λ, la noción de equicontinuidad es equivalente a la de continuidad. Sabemos que las aplicaciones lineales continuas están acotadas. Las familias equicontinuas tienen esta propiedad de acotación de modo uniforme (Teorema 2.2). Es por esta razón que al teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 2.3) se le suele llamar *principio de acotación uniforme.*

Teorema 2.2. *Sean X e Y espacios vectoriales topológicos, Γ una colección equicontinua de aplicaciones lineales de X en Y, y E un subconjunto acotado* *de X. Entonces Y tiene un subconjunto acotado F tal que $\Lambda(E) \subset F$ para todo $\Lambda \in \Gamma$.*

Demostración. Sea F la unión de los conjuntos $\Lambda(E)$, con $\Lambda \in \Gamma$. Sea W un entorno de 0 en Y. La equicontinuidad de Γ proporciona un entorno V de 0 en X tal que $\Lambda(V) \subset W$ para todo $\Lambda \in \Gamma$. Como E está acotado, $E \subset tV$ para todo t suficientemente grande. Para estos t,

$$\Lambda(E) \subset \Lambda(tV) = t\Lambda(V) \subset tW,$$

así que $F \subset tW$. Por tanto, F es acotado. □

Teorema 2.3 (Banach-Steinhaus). *Supongamos que X e Y son espacios vectoriales topológicos, Γ es una colección de aplicaciones lineales continuas de X en Y, y B es el conjunto de todos los $x \in X$ cuyas órbitas*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

están acotadas en Y.

Si B es de segunda categoría en X, entonces $B = X$ y Γ es equicontinua.

Demostración. Tomemos entornos equilibrados W y U de 0 en Y tales que $\overline{U} + \overline{U} \subset W$, y pongamos

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Si $x \in B$ entonces $\Gamma(x) \subset nU$ para algún $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in nE$. Consecuentemente,

$$B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nE.$$

Al menos un nE es de segunda categoría en X, ya que B también lo es. Como $x \mapsto nx$ es un homeomorfismo de X en X, E es de segunda categoría en X. Pero E es cerrado, porque cada Λ es continua. Por tanto, E tiene un punto interior x. Sigue que $x - E$ contiene un entorno V de 0 en X, y

$$\Lambda(V) \subset \Lambda x - \Lambda(E) \subset \overline{U} - \overline{U} \subset W$$

para todo $\Lambda \in \Gamma$.

Esto prueba que Γ es equicontinua. Por el Teorema 2.2, Γ está uniformemente acotada; en particular, cada $\Gamma(x)$ $(x \in X)$ está acotado en Y. Concluimos que $B = X$. □

En muchas aplicaciones, la hipótesis de que B es de segunda categoría es una consecuencia del teorema de Baire. Por ejemplo, los F-espacios son de segunda categoría. Esto da lugar al siguiente corolario del teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 2.4. *Sea $\varGamma$ una colección de aplicaciones lineales continuas de un F-espacio X en un espacio vectorial topológico Y. Si para todo $x \in X$ los conjuntos*

$$\varGamma(x) = \{\varLambda x : \varLambda \in \varGamma\}$$

están acotados en Y, entonces $\varGamma$ es equicontinua.

Brevemente, y en combinación con el Teorema 2.2, el Teorema 2.4 afirma que la acotación puntual implica acotación uniforme.

Como caso particular del Teorema 2.4, sean X e Y espacios de Banach, y supongamos que

$$\sup_{\varLambda \in \varGamma} \|\varLambda x\| < \infty \quad (x \in X).$$

La conclusión es que existe $M < \infty$ tal que

$$\|\varLambda x\| \leq M \quad (\|x\| \leq 1,\ \varLambda \in \varGamma).$$

Por tanto,

$$\|\varLambda x\| \leq M\,\|x\| \quad (x \in X,\ \varLambda \in \varGamma).$$

El siguiente teorema establece la continuidad de los límites de sucesiones de aplicaciones lineales continuas. Comenzamos con un resultado de cierto interés en sí mismo.

Proposición 2.5. *Sean E un espacio vectorial topológico y M un subespacio vectorial de E.*

(a) Si M es propio, entonces M carece de interior.
(b) O bien M es denso, o bien es diseminado.

Demostración. Supongamos que M tiene interior: existen un punto $x \in M$ y un entorno U de cero en E tales que $x + U \subset M$. Sigue que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU \subset M$, lo que establece (a). Por otra parte, si M no es denso en E, entonces $\overline{M}$ es un subespacio propio de E; por (a), $(\overline{M})^\circ = \emptyset$, probando (b). □

Teorema 2.6. *Supongamos que X e Y son dos espacios vectoriales topológicos, y que $\{\varLambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas de X en Y.*

(a) Si C es el conjunto de todos los $x \in X$ para los que $\{\varLambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en Y, entonces C es un subespacio vectorial cerrado.
(b) Sea C como en (a). Si C es de segunda categoría en X, entonces $C = X$.
(c) Si L es el conjunto de todos los $x \in X$ donde existe

$$\varLambda x = \lim_{n\to\infty} \varLambda_n x,$$

si L es de segunda categoría en X, y si Y es un F-espacio, entonces $L = X$ y $\varLambda : X \to Y$ es continua.

Demostración. (a) Puesto que las sucesiones de Cauchy están acotadas, el teorema de Banach-Steinhaus asegura que $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua.

Fijemos $x \in \overline{C}$, y sea W un entorno de 0 en Y. Como $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua, existe un entorno V de 0 en X tal que $\Lambda_n(V) \subset W$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por definición de clausura, existe $x' \in C \cap (x + V)$. Si n y m son suficientemente grandes como para que se tenga

$$\Lambda_n x' - \Lambda_m x' \in W,$$

la identidad

$$(\Lambda_n - \Lambda_m)x = \Lambda_n(x - x') + (\Lambda_n - \Lambda_m)x' + \Lambda_m(x' - x)$$

implica que $\Lambda_n x - \Lambda_m x \in W + W + W$. Así obtenemos que $\{\Lambda_n x\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en Y, y $x \in C$.

(b) Se comprueba fácilmente que C es un subespacio vectorial de X. Si C no fuese denso, $\overline{C}$ sería un subespacio propio de X; por la Proposición 2.5, los subespacios propios tienen interior vacío; luego $\overline{C}$, y por tanto C, serían de primera categoría.

(c) Como Y es completo, $L = C$. Por (b), $L = X$. Si V y W son como anteriormente, la inclusión $\Lambda_n(V) \subset W$, válida para todo $n \in \mathbb{N}$, implica ahora que $\Lambda(V) \subset \overline{W}$. En consecuencia, Λ es continua. □

La hipótesis (c) del Teorema 2.6 puede ser modificada de varias formas. He aquí una versión fácilmente recordable:

Teorema 2.7 (Teorema de clausura de Banach-Steinhaus). *Si $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de aplicaciones lineales continuas de un F-espacio X en un espacio vectorial topológico Y, y si existe*

$$\Lambda x = \lim_{n\to\infty} \Lambda_n x$$

para todo $x \in X$, entonces Λ es lineal y continua.

Demostración. El Teorema 2.4 implica que $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua. Por lo tanto, si W es un entorno de 0 en Y, tenemos que $\Lambda_n(V) \subset W$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cierto entorno V de 0 en X. Se sigue que $\Lambda(V) \subset \overline{W}$, con lo que queda probado que Λ, siendo obviamente lineal, es continua. □

En el contexto de espacios de Banach, el Teorema 2.7 admite la siguiente formulación:

Si X es un espacio de Banach, Y un espacio normado, y $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de aplicaciones lineales y continuas de X en Y que converge puntualmente en X, entonces la aplicación $T : X \to Y$ definida por

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad x \in X,$$

es lineal y continua.

Respecto a este resultado conviene destacar que, en general, bajo las mismas hipótesis no podemos asegurar que la sucesión $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ converja a T en la norma de operadores. Por ejemplo, tomando $X = c_0 = c_0(\mathbb{N})$ (sucesiones de escalares convergentes a cero, con la norma del supremo) y como Y el cuerpo escalar, la sucesión de funcionales lineales continuos $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida sobre c_0 por $f_n(x) = x(n)$ para cualesquiera $x \in c_0$ y $n \in \mathbb{N}$ converge puntualmente a cero en c_0, pero $\|f_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente es, en cierto sentido, un recíproco del Teorema 2.7.

Teorema 2.8. *Sean X un espacio vectorial topológico, Y un F-espacio, y $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión equicontinua de operadores lineales de X en Y. El conjunto $L = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n\to\infty} \Lambda_n\}$ es un subespacio cerrado de X.*

Demostración. En la notación del Teorema 2.6, se cumple que $L = C$, ya que Y es un F-espacio. La tesis de dicho teorema garantiza que L es cerrado. □

En la variante del teorema de Banach-Steinhaus que enunciamos a continuación, el argumento de categoría se aplica a un conjunto compacto en lugar de a un espacio métrico completo. La convexidad también desempeña un papel esencial.

Teorema 2.9. *Supongamos que X e Y son espacios vectoriales topológicos, K un subconjunto compacto y convexo de X, y Γ una colección de aplicaciones lineales continuas de X en Y tal que las órbitas*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\}$$

son subconjuntos acotados de Y, para todo $x \in K$.

Entonces existe un conjunto acotado $B \subset Y$ con $\Lambda(K) \subset B$ para todo $\Lambda \in \Gamma$.

Demostración. Sea B la unión de todos los conjuntos $\Gamma(x)$, para $x \in K$. Tomemos entornos equilibrados W y U de 0 en Y tales que $\overline{U} + \overline{U} \subset W$, y pongamos

$$E = \bigcap_{\Lambda \in \Gamma} \Lambda^{-1}(\overline{U}).$$

Si $x \in K$, entonces $\Gamma(x) \subset nU$ para algún $n \in \mathbb{N}$, así que $x \in nE$. Consecuentemente,

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cap nE).$$

Como E es cerrado, el teorema de Baire muestra que $K \cap nE$ tiene interior no vacío (relativo a K) para, al menos, un $n \in \mathbb{N}$.

Fijemos un tal n, un punto x_0 interior a $K \cap nE$, un entorno equilibrado V de 0 en X tal que

$$K \cap (x_0 + V) \subset nE, \tag{2.1}$$

y (en virtud de la compacidad de K) un $p > 1$ satisfaciendo

$$K \subset x_0 + pV. \tag{2.2}$$

Ahora, para cualquier punto $x \in K$ se tiene

$$z = (1 - p^{-1})x_0 + p^{-1}x \in K,$$

puesto que K es convexo. Además, por (2.2),

$$z - x_0 = p^{-1}(x - x_0) \in V,$$

y sigue de (2.1) que $z \in nE$. Como $\Lambda(nE) \subset n\overline{U}$ para todo $\Lambda \in \Gamma$, y como $x = pz - (p-1)x_0$, tenemos que

$$\Lambda x \in pn\overline{U} - (p-1)n\overline{U} \subset pn(\overline{U} + \overline{U}) \subset pnW.$$

Así pues, $B \subset pnW$, probando que B está acotado. □

2.1.1. Aplicaciones bilineales

Definición 2.10. *Supongamos que X, Y, Z son espacios vectoriales y que B aplica $X \times Y$ en Z. Asociamos a cada $x \in X$ y a cada $y \in Y$ la* x-sección *y la* y-sección *de B, que son las aplicaciones*

$$B_x : Y \to Z \quad y \quad B^y : X \to Z$$

definidas, respectivamente, por

$$B_x(y) = B(x, y) = B^y(x).$$

Se dice que B es bilineal *si cada una de las secciones B_x y B^y son lineales.*

Cuando X, Y, Z son espacios vectoriales topológicos y cada una de las secciones B_x y B^y son continuas, se dice que B es continua en cada variable.

Si B es continua (respecto de la topología producto de $X \times Y$), entonces, obviamente, B es continua en cada variable. En ciertas ocasiones es posible probar el recíproco con ayuda del teorema de Banach-Steinhaus.

Teorema 2.11. *Supongamos que $B : X \times Y \to Z$ es bilineal y continua en cada variable, X es un F-espacio e Y y Z son espacios vectoriales topológicos. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} B(x_n, y_n) = B(x_0, y_0) \tag{2.3}$$

en Z, siempre que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ en X y $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ en Y. Si además Y es metrizable, entonces B es continua.

Demostración. Sean U y W dos entornos de 0 en Z tales que $U+U\subset W$. Definamos

$$b_n(x)=B(x,y_n)\quad (x\in X,\ n=1,2,3,\ldots).$$

Ya que B es continua como función de y,

$$\lim_{n\to\infty} b_n(x)=B(x,y_0)\quad (x\in X).$$

Así, $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ es un subconjunto acotado de Z, para cada $x\in X$. Como cada b_n es una aplicación lineal continua sobre el F-espacio X, el teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 2.3) implica que $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ es equicontinua. Por tanto, existe un entorno V de 0 en X tal que

$$b_n(V)\subset U\quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Notemos que

$$B(x_n,y_n)-B(x_0,y_0)=b_n(x_n-x_0)+B(x_0,y_n-y_0).$$

Si n es suficientemente grande entonces $x_n\in x_0+V$, luego $b_n(x_n-x_0)\in U$ y $B(x_0,y_n-y_0)\in U$, ya que B es continua en y y $B(x_0,0)=0$. Por tanto,

$$B(x_n,y_n)-B(x_0,y_0)\in U+U\subset W$$

para todo n suficientemente grande. Así llegamos a (2.3).

Si Y fuese metrizable también lo sería $X\times Y$, y la continuidad de B vendría dada por (2.3). □

2.1.2. Series de Fourier de funciones continuas

Convergencia y representación

Sea $\mathbb{T}=\left\{e^{i\theta}:0\le\theta<2\pi\right\}$ el toro unidimensional. Consideramos la clase $C(\mathbb{T})$ de todas las funciones complejas continuas sobre el espacio de Hausdorff compacto $\mathbb{T}$. Dada $f\in C(\mathbb{T})$, identificaremos $\mathbb{T}$ con $[0,2\pi)$ y, abusando de la notación, escribiremos $f(\theta)=f(e^{i\theta})$ para toda $\theta\in[0,2\pi)$.

Definición 2.12. *Para cada $n\in\mathbb{Z}$, se define el n-*ésimo coeficiente de Fourier *de $f\in C(\mathbb{T})$ como*

$$\widehat{f}(n)=\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}. \tag{2.4}$$

La serie de Fourier *de f es*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{in\theta}.$$

El problema que se nos plantea es decidir si es posible recuperar f a partir de su serie de Fourier.

Cuando f es un polinomio trigonométrico, existe una sucesión de escalares $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, con tan sólo un número finito de términos no nulos, tal que $f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$ para toda $\theta \in \mathbb{T}$. En este caso, es fácil ver que $\widehat{f}(n) = a_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.

Como un polinomio trigonométrico es igual a su serie de Fourier, es natural preguntarse si la serie de Fourier de cualquier función continua f converge a f. Para precisar esta cuestión, definamos para cada $N \in \mathbb{N}_0$ el operador de N-ésima suma parcial $S_N : C(\mathbb{T}) \to C(\mathbb{T})$ como sigue:

$$S_N f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{in\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi)\,. \tag{2.5}$$

La pregunta ahora es: ¿se verifica que $\|S_N f - f\|_\infty \to 0$ cuando $N \to \infty$ para toda $f \in C(\mathbb{T})$? En otras palabras, ¿es siempre cierto que $\{S_N f\}_{N=0}^{\infty}$ converge uniformemente a f? Si la respuesta es afirmativa entonces, por el principio de acotación uniforme, los operadores de suma parcial $\{S_N f\}_{N=0}^{\infty}$ deben estar uniformemente acotados. Consecuentemente, podremos ver que la respuesta es negativa evaluando las normas $\|S_N\|$ de tales operadores para cada $N \in \mathbb{N}$ y comprobando que estas normas no están uniformemente acotadas.

Fijemos $N \in \mathbb{N}_0$ y $f \in C(\mathbb{T})$. Sustituyendo (2.4) en (2.5) tenemos, para cada $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} S_N f(\theta) &= \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_0^{2\pi} f(\phi) e^{-in\phi} \frac{d\phi}{2\pi} \right) e^{in\theta} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(f(\phi) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\phi)} \right) \frac{d\phi}{2\pi}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

La suma que aparece dentro de la integral es la de una progresión geométrica de razón $e^{i(\theta-\phi)}$. Calcularemos dicha suma a continuación:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\phi)} &= e^{-iN(\theta-\phi)} \sum_{n=0}^{2N} e^{in(\theta-\phi)} = e^{-iN(\theta-\phi)} \frac{1 - e^{i(2N+1)(\theta-\phi)}}{1 - e^{i(\theta-\phi)}} \\ &= \frac{e^{-iN(\theta-\phi)} - e^{i(N+1)(\theta-\phi)}}{1 - e^{i(\theta-\phi)}} = \frac{e^{i(N+1)(\theta-\phi)} - e^{-iN(\theta-\phi)}}{e^{i(\theta-\phi)} - 1}. \end{aligned}$$

Si reducimos la fracción final dividiendo el numerador y el denominador por $e^{i(\theta-\phi)/2}$ encontramos que

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{in(\theta-\phi)} = \frac{e^{i(N+1/2)(\theta-\phi)} - e^{-i(N+1/2)(\theta-\phi)}}{e^{i(\theta-\phi)/2} - e^{-i(\theta-\phi)/2}} = \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})(\theta-\phi)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\phi}{2}}.$$

Sustituyendo en (2.6) la expresión resultante, concluimos:

$$S_N f(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})(\theta-\phi)\right)}{\operatorname{sen}\frac{\theta-\phi}{2}} \frac{d\phi}{2\pi}. \tag{2.7}$$

Supongamos que existe una constante $A > 0$ tal que $\|S_N\| \leq A$ para todo $N \in \mathbb{N}_0$. En tal caso, cada operador adjunto $S_N^* : M(\mathbb{T}) \to M(\mathbb{T})$ (donde $M(\mathbb{T})$ denota el espacio de las medidas de Borel sobre $\mathbb{T}$ de variación total finita, dual de $C(\mathbb{T})$) también debe estar acotado por A, es decir, $\|S_N^*\| \leq A$ para todo $N \in \mathbb{N}_0$. Denotemos por δ_0 la medida de Dirac concentrada en cero. Es fácil ver que $\|\delta_0\|_{M(\mathbb{T})} = 1$ y, como consecuencia,

$$\|S_N^*\delta_0\|_{M(\mathbb{T})} \leq \|S_N^*\| \leq A. \tag{2.8}$$

Sea $f \in C(\mathbb{T})$. Aplicando las definiciones pertinentes y usando (2.7), vemos que

$$\langle f, S_N^*\delta_0\rangle = S_N f(0) = \int_0^{2\pi} f(\phi) \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})\phi\right)}{\operatorname{sen}(\phi/2)} \frac{d\phi}{2\pi}.$$

Esta igualdad es válida para toda $f \in C(\mathbb{T})$. Como $S_N^*\delta_0$ está en $M(\mathbb{T})$,

$$\|S_N^*\delta_0\|_{M(\mathbb{T})} = \int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})\phi\right)}{\operatorname{sen}(\phi/2)} \right| \frac{d\phi}{2\pi}.$$

Efectuamos el cambio de variable $\psi = (N+1/2)\phi$, $d\psi = (N+1/2)d\phi$, para obtener:

$$\|S_N^*\delta_0\|_{M(\mathbb{T})} = \int_0^{(2N+1)\pi} \left| \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2N+1}} \right| \frac{d\psi}{(2N+1)\pi}.$$

Combinando esta expresión con (2.8) concluimos que

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \chi_{(0,(2N+1)\pi)} \frac{1}{2N+1} \left| \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2N+1}} \right| d\psi \leq A$$

para todo $N \in \mathbb{N}_0$. Aplicando ahora la regla de l'Hôpital resulta

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\frac{\psi}{2N+1}} = \frac{\operatorname{sen}\psi}{\psi}.$$

Consecuentemente, por el lema de Fatou,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}\psi}{\psi} \right| d\psi \leq A.$$

Hemos alcanzado así una contradicción pues, tal como veremos a continuación, $\int_0^{\infty} \left| \frac{\operatorname{sen}\psi}{\psi} \right| d\psi = \infty$. En efecto, observemos que

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{\operatorname{sen}\psi}{\psi}\right| d\psi &= \sum_{k=0}^\infty \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\operatorname{sen}\psi}{\psi}\right| d\psi \\ &\geq \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(k+1)\pi} \int_0^\pi \operatorname{sen}\psi \, d\psi = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k+1} = \infty.\end{aligned}$$

Luego, no puede ser cierto que $\sup_{N\in\mathbb{N}_0} \|S_N\| \leq A$ para cierta $A > 0$ y, por tanto, no es posible que la serie de Fourier de f converja uniformemente a f para toda $f \in C(\mathbb{T})$.

Antes del advenimiento del análisis funcional y, en particular, del principio de acotación uniforme, la única manera de demostrar que $\{S_N f\}_{N=0}^\infty$ no converge uniformemente a f para toda $f \in C(\mathbb{T})$ era construir explícitamente una función para la que la convergencia considerada no tenía lugar. Sin embargo, la técnica no constructiva utilizada permite probar que en realidad existe un G_δ denso de funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales que $\{S_N f(0)\}_{N=0}^\infty$ no converge a $f(0)$. Es decir, existen muchas funciones $f \in C(\mathbb{T})$ tales que la serie de Fourier de f no converge ni siquiera puntualmente a f.

Núcleos de sumabilidad

Definición 2.13. *Sea $N \in \mathbb{N}_0$, arbitrario. Se llama* núcleo de Dirichlet de grado *N a la función*

$$D_N(\alpha) = \sum_{n=-N}^N e^{in\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\left((N+\frac{1}{2})\alpha\right)}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cabe observar que

$$S_N f(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\phi)\, D_N(\theta-\phi)\frac{d\phi}{2\pi} = (D_N * f)(\theta), \tag{2.9}$$

donde S_N es el operador de N-ésima suma parcial de la serie de Fourier de $f \in C(\mathbb{T})$.

El análisis efectuado en la sección precedente mostró que $D_N * f$ no converge uniformemente a f para toda $f \in C(\mathbb{T})$. No obstante, podemos encontrar un núcleo relacionado para el que se tiene la convergencia uniforme cualquiera que sea $f \in C(\mathbb{T})$.

Definición 2.14. *Sea N cualquier número natural. El* núcleo de Fejér de grado *N es la función*

$$K_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La N-ésima media de Cesàro *de $f \in C(\mathbb{T})$ es la función dada por*

$$T_N f = \frac{1}{N}(S_0 f + \ldots + S_{N-1} f).$$

Usando (2.9), es posible deducir una relación entre K_N y T_N: para cualesquiera $N \in \mathbb{N}$ y $\theta \in [0, 2\pi)$,

$$T_N f(\theta) = \int_0^{2\pi} f(t) K_N(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} = (K_N * f)(\theta).$$

A continuación encontraremos una expresión cerrada para el núcleo de Fejér de grado N.

Lema 2.15. *Sea $N \in \mathbb{N}$. Si K_N es el núcleo de Fejér de grado N, entonces*

$$K_N(t) = \frac{1}{2N} \frac{1 - \cos(Nt)}{\operatorname{sen}^2(t/2)} = \frac{\operatorname{sen}^2(Nt/2)}{N \operatorname{sen}^2(t/2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Recordemos la identidad $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = (\cos(A - B) - \cos(A + B))/2$, donde A y B son números reales. Para $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} K_N(t) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}((k + 1/2)t)}{\operatorname{sen}(t/2)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\operatorname{sen}((k + 1/2)t) \operatorname{sen}(t/2)}{\operatorname{sen}^2(t/2)} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\cos(kt) - \cos((k+1)t)}{\operatorname{sen}^2(t/2)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

La primera igualdad en la tesis del lema sigue directamente de la suma (2.10), que es telescópica. La segunda igualdad de la tesis se deduce aplicando la fórmula del seno del ángulo mitad al numerador de la primera. □

Lema 2.16. *Sea $N \in \mathbb{N}$. Si T_N es la N-ésima media de Cesàro, entonces $\|T_N\| = 1$.*

Demostración. Sea $f \in C(\mathbb{T})$. Mediante un cambio de variables, y usando la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue junto con la periodicidad de las funciones sobre $\mathbb{T}$, tenemos que:

$$T_N f(\theta) = \int_0^{2\pi} f(\theta - t) K_N(t) \frac{dt}{2\pi}, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Se sigue que $\|T_N f\|_{C(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{C(\mathbb{T})} \|K_N\|_{L^1(\mathbb{T})}$.

Por el Lema 2.15 sabemos que $K_N \geq 0$, así que

$$\|K_N\|_{L^1(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_N(t)\, dt.$$

Calculamos directamente el valor de esta norma:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(t)\,dt = \frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n=-k}^{k} e^{int}\,dt\right).$$

Ahora bien,

$$\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 2\pi, & n = 0. \end{cases}$$

Consecuentemente,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)\,dt = \frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=-k}^{k}\left(\int_0^{2\pi} e^{int}\,dt\right) = \frac{1}{2\pi N}\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi = 1.$$

Sigue que $\|T_N\| \leq \|K_N\|_{L^1(\mathbb{T})} = 1$. Puesto que

$$T_N 1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_N(t)\,dt = 1,$$

concluimos que $\|T_N\| = 1$. □

Proposición 2.17. *Si $f \in C(\mathbb{T})$, entonces $K_N * f \to f$ uniformemente cuando $N \to \infty$.*

Demostración. Si f es un polinomio trigonométrico, es fácil ver que $T_N f \to f$ uniformemente cuando $N \to \infty$. El Teorema 2.8 garantiza que el conjunto de funciones para las cuales existe este límite es cerrado. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, los polinomios trigonométricos son densos en $C(\mathbb{T})$. Así pues, $T_N f \to f$ en $C(\mathbb{T})$ cuando $N \to \infty$ siempre que $f \in C(\mathbb{T})$. Para completar la prueba basta tener en cuenta que $T_N f = K_N * f$ cualesquiera sean $N \in \mathbb{N}$ y $f \in C(\mathbb{T})$. □

2.2. El teorema de la aplicación abierta

Definición 2.18. *Supongamos que f es una aplicación de S en T, donde S y T son espacios topológicos. Decimos que f es* abierta en un punto $p \in S$ *si $f(V)$ contiene un entorno de $f(p)$ para todo entorno V de p. Se dice que f es* abierta *si $f(U)$ es abierto en T para todo abierto U de S.*

Es claro que f es abierta si, y sólo si, f es abierta en todo punto de S. Debido a la invariancia de las topologías vectoriales, se sigue que una aplicación lineal de un espacio vectorial topológico en otro es abierta si, y sólo si, es abierta en el origen.

Nótese que una aplicación continua y biyectiva f de S en T es un homeomorfismo precisamente cuando f es abierta.

Teorema 2.19 (Teorema de la aplicación abierta). *Sean:*

(a) X *un* F*-espacio,*
(b) Y *un espacio vectorial topológico,*
(c) $\Lambda : X \to Y$ *una aplicación lineal continua,*

y supongamos que

(d) $\Lambda(X)$ *es de segunda categoría en* Y*.*

Entonces:

(i) $\Lambda(X) = Y$*,*
(ii) Λ *es una aplicación abierta,*

y además

(iii) Y *es un* F*-espacio.*

Demostración. Observemos que (ii) implica (i), ya que Y es el único subespacio abierto de Y. Para demostrar (ii), sea V un entorno de 0 en X. Tenemos que probar que $\Lambda(V)$ contiene un entorno de 0 en Y.

Sea d una métrica invariante en X compatible con la topología de X, y definamos

$$V_n = \left\{x \in X : d(x,0) < 2^{-n}r\right\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

donde $r > 0$ es lo suficientemente pequeño como para que $V_0 \subset V$. Probaremos que algún entorno W de 0 en Y satisface

$$W \subset \overline{\Lambda(V_1)} \subset \Lambda(V). \tag{2.11}$$

Como $V_1 \supset V_2 - V_2$, se tiene

$$\overline{\Lambda(V_1)} \supset \overline{\Lambda(V_2) - \Lambda(V_2)} \supset \overline{\Lambda(V_2)} - \overline{\Lambda(V_2)}.$$

La primera inclusión de (2.11) quedará probada si podemos mostrar que $\overline{\Lambda(V_2)}$ tiene interior no vacío. Pero

$$\Lambda(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\Lambda(V_2),$$

porque V_2 es un entorno de 0. Así, al menos un $k\Lambda(V_2)$ es de segunda categoría en Y. Como $y \mapsto ky$ es un homeomorfismo de Y en Y, $\Lambda(V_2)$ es de segunda categoría en Y. Por tanto, su clausura tiene interior no vacío.

Para demostrar la segunda inclusión en (2.11), fijemos $y_1 \in \overline{\Lambda(V_1)}$. Supongamos que para $n \geq 1$ se ha elegido $y_n \in \overline{\Lambda(V_n)}$. Lo probado para V_1 se mantiene para V_{n+1}, luego $\overline{\Lambda(V_{n+1})}$ contiene un entorno de 0. Así pues,

$$\left(y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}\right) \cap \Lambda(V_n) \neq \emptyset.$$

Esto nos dice que existe $x_n \in V_n$ tal que

$$\Lambda x_n \in y_n - \overline{\Lambda(V_{n+1})}.$$

Pongamos $y_{n+1} = y_n - \Lambda x_n$. Entonces $y_{n+1} \in \overline{\Lambda(V_{n+1})}$, y la construcción prosigue.

Como $d(x_n, 0) < 2^{-n}r$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, las sumas $x_1 + \ldots + x_n$ forman una sucesión de Cauchy que (por la completitud de X) converge hacia cierto $x \in X$, con $d(x, 0) < r$. Por tanto, $x \in V$. Puesto que

$$\sum_{n=1}^{m} \Lambda x_n = \sum_{n=1}^{m} (y_n - y_{n+1}) = y_1 - y_{m+1},$$

y como (por la continuidad de Λ) $y_{m+1} \to 0$ cuando $m \to \infty$, concluimos que $y_1 = \Lambda x \in \Lambda(V)$. Esto prueba la segunda parte de (2.11), y (ii) queda demostrado.

Si $N = \mathcal{N}(\Lambda)$ es el núcleo de Λ, X/N es un F-espacio. Por tanto, (iii) seguirá de hallar un isomorfismo f de X/N sobre Y que sea también un homeomorfismo. Esto se puede lograr definiendo

$$f(x + N) = \Lambda x \quad (x \in X).$$

Es trivial que f es un isomorfismo y que $\Lambda x = f(\pi x)$, donde π es la aplicación canónica cociente. Si V es un abierto de Y, entonces

$$f^{-1}(V) = \pi(\Lambda^{-1}(V))$$

es abierto, debido a que Λ es continua y π es abierta. Así tenemos que f es continua. Si E es abierto en X/N, entonces

$$f(E) = \Lambda(\pi^{-1}(E))$$

es abierto, ya que π es continua y Λ es abierta. Consecuentemente, f es un homeomorfismo. □

Recordemos que una aplicación $\Lambda : X \to Y$ es un isomorfismo de los espacios de Banach X e Y si Λ es una biyección lineal continua con inversa continua. En tal caso, decimos que X e Y son isomorfos. Nótese que si Λ es un isomorfismo entre los espacios de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, entonces existen constantes positivas a, b tales que

$$a\|x\|_X \leq \|\Lambda x\|_Y \leq b\|x\|_X, \quad x \in X.$$

Corolario 2.20. *Se verifican los siguientes enunciados.*

(a) Si Λ es una aplicación lineal, continua y suprayectiva de un F-espacio X en un F-espacio Y, entonces Λ es abierta.

(b) Si Λ safisface (a) y es inyectiva, entonces $\Lambda^{-1} : Y \to X$ es continua.
(c) Si X e Y son espacios de Banach, y si $\Lambda : X \to Y$ es lineal, biyectiva y continua, entonces Λ es un isomorfismo: existen números reales positivos a y b tales que

$$a\|x\|_X \leq \|\Lambda x\|_Y \leq b\|x\|_X$$

para todo $x \in X$.
(d) Si $\tau_1 \subset \tau_2$ son topologías vectoriales en un espacio vectorial X y si (X, τ_1) y (X, τ_2) son ambos F-espacios, entonces $\tau_1 = \tau_2$.

Demostración. El enunciado (a) sigue del Teorema 2.19 y del teorema de Baire (Teorema 1.6), ya que ahora Y es de segunda categoría en sí mismo. El apartado (b) es consecuencia inmediata de (a), y (c) sigue de (b); las dos desigualdades de (c) expresan simplemente la continuidad de Λ^{-1} y de Λ. El enunciado (d) proviene de aplicar (b) a la aplicación identidad de (X, τ_2) en (X, τ_1). □

2.2.1. Algunos ejemplos en espacios de Banach

Ejemplo 2.21. El Corolario 2.20 permite establecer que toda aplicación cociente definida en un espacio de Banach es abierta. Salvo isomorfismos, el recíproco también es cierto. Supongamos que X e Y son espacios de Banach, y que $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado que es también abierto. Consideremos el diagrama conmutativo de la figura 2.1.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\
X/\mathcal{N}(T) \arrow[ur, "T_0"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1.

En este diagrama $T = T_0 \circ \pi$, donde π es la aplicación canónica cociente sobre $X/\mathcal{N}(T)$. Por hipótesis, el operador lineal acotado T es abierto, luego es suprayectivo (pues Y es el único subespacio abierto de Y). Consecuentemente, la aplicación T_0 es una biyección lineal continua, que es un isomorfismo en virtud del Corolario 2.20.

Esto demuestra que la aplicación abierta T puede ser escrita como $T_0 \circ \pi$, donde π es una aplicación cociente y T_0 es un isomorfismo. Por tanto, cualquier aplicación abierta entre espacios de Banach es una aplicación cociente, salvo isomorfismos.

Es importante observar que las normas de T y π pueden diferir, puesto que T_0 no tiene por qué ser una isometría.

Ejemplo 2.22 (Caracterización de espacios separables, Banach-Mazur). Un resultado notable, probado por Banach y Mazur en 1933, es que todo espacio de Banach *separable* puede ser contemplado como un cociente del espacio de sucesiones $l_1 = l_1(\mathbb{N})$. Para verlo, sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach separable. La bola unidad cerrada $\mathbb{B}_X$ contiene un subconjunto denso numerable $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Definamos un operador lineal acotado $T : l_1 \to X$ mediante

$$T\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n, \quad \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_1.$$

La linealidad de T sigue de la sumabilidad de los términos de la sucesión $\xi \in l_1$. Para demostrar que T está acotado, observemos que

$$\|T\xi\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \right\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \|x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \|\xi\|_1.$$

Hemos utilizado que $\|x_n\| \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, $\|T\| \le 1$, y $T(\mathbb{B}_{l_1}) \subset \mathbb{B}_X$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por e_n la sucesión cuyos términos son todos nulos salvo el n-ésimo, que vale 1. Es claro que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{B}_{l_1}$. Como $Te_n = x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, se infiere que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset T(\mathbb{B}_{l_1})$. Por hipótesis, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es densa en $\mathbb{B}_X$, de modo que $\mathbb{B}_X = \overline{T(\mathbb{B}_{l_1})}$. La Proposición 2.23 permite concluir que T es sobre.

En nuestro contexto actual, el diagrama de la figura 2.1 se convierte en el diagrama de la figura 2.2.

$$\begin{tikzcd}
l_1 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & X \\
l_1/\mathcal{N}(T) \arrow[ur, "T_0"] &
\end{tikzcd}$$

Figura 2.2.

Como vimos en el Ejemplo 2.21, la aplicación T_0 es un isomorfismo. Además, T_0 es una isometría porque $\mathbb{B}_X = \overline{T(\mathbb{B}_{l_1})}$ (Proposición 2.23). Así, el espacio de Banach separable X es isométricamente isomorfo a $l_1/\mathcal{N}(T)$.

Probamos ahora los resultados utilizados en el ejemplo anterior.

Proposición 2.23. *Sea $T : X \to Y$ una aplicación lineal entre espacios normados.*

(a) Si X es un espacio de Banach, si T está acotada, y si existe $\delta > 0$ tal que $\delta \mathbb{U}_Y \subset \overline{T(\mathbb{B}_X)}$, entonces $\mathbb{U}_Y \subset T(\mathbb{B}_X)$.

(b) Si $\mathbb{B}_Y = \overline{T(\mathbb{B}_X)}$*, entonces* T *está acotada, con* $\|T\| = 1$*. Si, además,* X *es un espacio de Banach entonces* T *es suprayectiva y abierta, e* Y *es un espacio de Banach.*

(c) Si X *es un espacio de Banach y* $\mathbb{B}_Y = \overline{T(\mathbb{B}_X)}$*, entonces la aplicación inducida* $T_0 : X/\mathcal{N}(T) \to Y$ *(figura 2.1) es una isometría.*

Demostración. (a) Supongamos que $\overline{T(\mathbb{B}_X)}$ contiene una bola $\delta\mathbb{U}_Y$, abierta en Y:

$$\delta\mathbb{U}_Y \subset \overline{T(\mathbb{B}_X)}. \tag{2.12}$$

Estableceremos primeramente que $(\delta/2)\mathbb{U}_Y \subset T(\mathbb{B}_X)$. En efecto, sea $y \in (\delta/2)\mathbb{U}_Y$. Reescalando (2.12) vemos que $y \in \overline{T((1/2)\mathbb{B}_X)}$; luego, existe $x_1 \in X$ con $\|x_1\|_X \leq 1/2$ tal que $\|y - Tx_1\|_Y < \delta/4$. Sigue que $y - Tx_1 \in (\delta/4)\mathbb{U}_Y \subset \overline{T((1/4)\mathbb{B}_X)}$, por lo que algún $x_2 \in X$ con $\|x_2\|_X \leq 1/4$ es tal que $\|(y - Tx_1) - Tx_2\|_Y < \delta/8$. Al proseguir de esta forma, obtenemos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, con $\|x_n\|_X \leq 2^{-n}$ y $z_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$, satisfaciendo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_X \leq 1 \quad \text{y} \quad \|y - Tz_n\|_Y < \frac{\delta}{2^{n+1}}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $Tz_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Como en espacios de Banach toda serie absolutamente convergente es convergente, existe algún $z \in X$ tal que $z_n \to z$ cuando $n \to \infty$. Puesto que T es continua, necesariamente $y = Tz$. Y como $\|z\|_X \leq 1$, resulta que $y \in T(\mathbb{B}_X)$.

Veamos ahora que $\mathbb{U}_Y \subset T(\mathbb{B}_X)$. Por lo que acabamos de probar, para toda $\mu \geq 1$ se verifica

$$(\delta/2)\mathbb{U}_Y \subset T(\mu\mathbb{B}_X).$$

Si $\delta/2 \geq 1$ entonces $\mathbb{U}_Y \subset (\delta/2)\mathbb{U}_Y \subset T(\mathbb{B}_X)$, y hemos terminado. Suponiendo $\delta/2 < 1$, sea $y \in \mathbb{U}_Y$, y sea $\lambda > \delta/2$ tal que $\|\lambda y\|_Y < \delta/2$. Fijado $\mu \geq 1$, existe $x_\mu \in X$ tal que $\|x_\mu\|_X \leq \mu$ y $Tx_\mu = \lambda y$. Entonces $T(x_\mu/\lambda) = y$ y $\|x_\mu/\lambda\|_X \leq \mu/\lambda$. Poniendo $x = x_\mu/\lambda$, para $\delta/2 < 1 \leq \mu \leq \lambda$ se cumple que $x \in \mathbb{B}_X$ y $Tx = y$. Así pues, $\mathbb{U}_Y \subset T(\mathbb{B}_X)$.

(b) En primer lugar, la igualdad $\mathbb{B}_Y = \overline{T(\mathbb{B}_X)}$ entraña

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|_Y : x \in \mathbb{B}_X\} \leq \sup\{\|y\|_Y : y \in \mathbb{B}_Y\} = 1.$$

Además, dado $y \in Y$ con $\|y\|_Y = 1$ existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_X$ tal que $Tx_n \to y$ cuando $n \to \infty$. Consecuentemente, $\|T\| = 1$.

Para ver que T es sobre cuando X es un espacio de Banach basta advertir que, por (a), $\mathbb{U}_Y \subset \overline{T(\mathbb{B}_X)}$ implica $\mathbb{U}_Y \subset T(\mathbb{B}_X) \subset T(X)$ y aplicar la Proposición 2.5, o bien el hecho de que los espacios de Banach son de Baire junto con los Teoremas 1.12 y 2.19. Esta última combinación también prueba que T es abierta y que Y es un espacio de Banach.

(c) Supongamos que $\mathbb{B}_Y = \overline{T(\mathbb{B}_X)}$. Por (b), $\|T\| = 1$, de modo que $\|Tx\|_Y \le \|x\|_X$ para cada $x \in X$. Luego, dados $x \in X$ e $y \in \mathcal{N}(T)$ se verifica

$$\|Tx\|_Y = \|T(x+y)\|_Y \le \|x+y\|_X.$$

Tomando ínfimos en $y \in \mathcal{N}(T)$ ya obtenemos

$$\|Tx\|_Y \le \|x + \mathcal{N}(T)\|, \quad x \in X.$$

Inversamente, supongamos que X es un espacio de Banach y apliquemos (a) para asegurar que $\mathbb{U}_Y \subset T(\mathbb{B}_X)$. Dado $x \in X$, sea $y = Tx$. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x \notin \mathcal{N}(T)$. Entonces, para todo $0 < \varepsilon < 1$ existe $x_0 \in \mathbb{B}_X$ tal que $Tx_0 = \varepsilon y/\|y\|_Y$. Como $x - \varepsilon^{-1}\|y\|_Y x_0 \in \mathcal{N}(T)$, sigue que

$$\|x + \mathcal{N}(T)\| \le \varepsilon^{-1}\|y\|_Y \|x_0\|_X \le \varepsilon^{-1}\|y\|_Y = \varepsilon^{-1}\|Tx\|_Y.$$

Haciendo $\varepsilon \to 1$ resulta

$$\|x + \mathcal{N}(T)\| \le \|Tx\|_Y.$$

La arbitrariedad de $x \in X$ completa la prueba. □

Terminamos la sección con una factorización de gran utilidad práctica.

Proposición 2.24. *Sean X e Y espacios de Banach y supongamos que $T : X \to Y$ es un operador lineal acotado suprayectivo. Si $x^* \in \mathcal{N}(T)^\perp$, entonces existe algún $f \in Y^*$ tal que $x^* = f \circ T$.*

Demostración. Sea $\pi : X \to X/\mathcal{N}(T)$ la aplicación canónica cociente. Como π es sobre, existe una biyección lineal continua $T_0 : X/\mathcal{N}(T) \to Y$ tal que $T = T_0 \circ \pi$. Del Corolario 2.20 concluimos que T_0 es un isomorfismo de espacios de Banach.

Como $x^* \in \mathcal{N}(T)^\perp$, el funcional lineal x^* determina un elemento $\widetilde{f} \in (X/\mathcal{N}(T))^*$ vía la identificación

$$\widetilde{f}(x + \mathcal{N}(T)) = x^*(x), \quad x \in X.$$

Puesto que $X/\mathcal{N}(T)$ es isomorfo a Y, existe un funcional lineal acotado $f : Y \to \mathbb{K}$, donde $\mathbb{K}$ es el cuerpo escalar, tal que $\widetilde{f} = f \circ T_0$ (figura 2.3).

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d, "f"] \\
X/\mathcal{N}(T) \arrow[ur, "T_0"] \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \mathbb{K}
\end{tikzcd}$$

Figura 2.3.

Por tanto

$$x^*(x) = \widetilde{f}(x + \mathcal{N}(T)) = \widetilde{f}(\pi x) = (f \circ T_0 \circ \pi)(x) = (f \circ T)(x)$$

para cada $x \in X$, como se requería. □

2.2.2. Coeficientes de Fourier de funciones integrables

Definición 2.25. *Considérese el toro* $\mathbb{T}$. *Para cada* $f \in L_1(\mathbb{T}) = L_1(\mathbb{T}, d\theta/2\pi)$, *definimos el* n*-ésimo coeficiente de Fourier de* f *por*

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.26 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Si* $f \in L_1(\mathbb{T})$, *entonces* $\lim_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{Z}$, definimos un funcional lineal en $L_1(\mathbb{T})$ poniendo $\phi_n(f) = \widehat{f}(n)$ para cada $f \in L_1(\mathbb{T})$. Un cálculo sencillo muestra que $\|\phi_n\| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, de manera que la sucesión de funcionales lineales $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ está uniformemente acotada. Si f es un polinomio trigonométrico, existe algún $N \in \mathbb{N}$ tal que $\phi_n(f) = 0$ para cada $|n| \geq N$. En particular, existe $\lim_{|n|\to\infty} \phi_n$ en un subconjunto denso de $L_1(\mathbb{T})$. El Teorema 2.8 asegura que el conjunto $\left\{f \in L_1(\mathbb{T}) : \text{existe } \lim_{|n|\to\infty} \phi_n(f)\right\}$ es un subespacio vectorial cerrado de $L_1(\mathbb{T})$, y por tanto el límite existe para toda $f \in L_1(\mathbb{T})$.

En virtud del Teorema 2.7, la aplicación definida por $\phi(f) = \lim_{|n|\to\infty} \phi_n(f)$ para $f \in L_1(\mathbb{T})$ es un funcional lineal acotado sobre $L_1(\mathbb{T})$. Ya hemos probado que $\phi(f) = 0$ cuando f es un polinomio trigonométrico. Como ϕ es continua, y como los polinomios trigonométricos son densos en el espacio de las funciones integrables, concluimos que $\phi(f) = 0$ para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$. Esto completa la prueba. □

La relevancia del Teorema 2.26 estriba en que para cada $f \in L^1(\mathbb{T})$, la sucesión doblemente infinita $\{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es siempre un elemento de $c_0(\mathbb{Z})$. Esto nos induce a cuestionarnos si el recíproco es válido. El resultado siguiente, que se apoya en el teorema de la aplicación abierta, responde negativamente a esta cuestión.

Proposición 2.27. *Existe una sucesión* $\xi \in c_0(\mathbb{Z})$ *que no es la transformada de Fourier de ninguna función de* $L^1(\mathbb{T})$.

Demostración. Definimos una aplicación $\mathcal{F} : L_1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ poniendo

$$\mathcal{F}(f) = \{\widehat{f}(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}, \quad f \in L_1(\mathbb{T}).$$

Basta ver que $\mathcal{F}$ no es suprayectiva. La aplicación $\mathcal{F}$ es un operador lineal acotado con $\|\mathcal{F}\| = 1$, y $\mathcal{F}$ es inyectiva porque los coeficientes de Fourier son únicos. Supongamos que $\mathcal{F}$ aplica $L_1(\mathbb{T})$ sobre $c_0(\mathbb{Z})$. Entonces $\mathcal{F}$ es una biyección lineal acotada, luego (por el Corolario 2.20) un isomorfismo. En particular, $\mathcal{F}^{-1}$ también es una biyección lineal acotada.

Nuestra hipótesis de que $\mathcal{F}$ es sobre nos ha llevado a concluir que la inversa $\mathcal{F}^{-1} : c_0(\mathbb{Z}) \to L_1(\mathbb{T})$ es una biyección, lo que implica que su adjunta $(\mathcal{F}^{-1})^* : L_\infty(\mathbb{T}) \to l_1(\mathbb{Z})$ también lo es. Sin embargo, esto es imposible, porque $l_1(\mathbb{Z})$ es separable, mientras que $L_\infty(\mathbb{T})$ no lo es. Esta contradicción impide que $\mathcal{F}$ sea suprayectiva. $\square$

2.3. El teorema del grafo cerrado

Definición 2.28. *Dada una aplicación f entre dos conjuntos cualesquiera X e Y, se llama* grafo *de f al conjunto $G(f)$ formado por todos los puntos $(x, f(x))$ del producto cartesiano $X \times Y$.*

Si X e Y son espacios topológicos, si se dota a $X \times Y$ de la topología producto usual (la topología menos fina que contiene a todos los conjuntos $U \times V$ con U y V abiertos en X e Y, respectivamente), y si $f : X \to Y$ es continua, cabría esperar que el grafo de f fuera cerrado en $X \times Y$, como efectivamente ocurre (Proposición 2.29). Esta condición trivialmente necesaria es también suficiente para garantizar la continuidad de aplicaciones lineales definidas entre F-espacios, hecho importante que será probado en el Teorema 2.30.

Proposición 2.29. *Si X es un espacio topológico, Y un espacio de Hausdorff, y $f : X \to Y$ una aplicación continua, entonces el grafo G de f es cerrado.*

Demostración. Sea Ω el complementario de G en $X \times Y$, y fijemos $(x_0, y_0) \in \Omega$. Entonces $y_0 \neq f(x_0)$, de manera que y_0 y $f(x_0)$ tienen entornos disjuntos V y W en Y. Puesto que f es continua, x_0 tiene un entorno U tal que $f(U) \subset W$. El entorno $U \times V$ de (x_0, y_0) está entonces en Ω, probando que Ω es abierto. $\square$

No es posible omitir la hipótesis de que Y sea un espacio de Hausdorff. Para verlo, consideremos la identidad $f : X \to X$ en un espacio topológico arbitrario X. El grafo de f es la diagonal

$$D = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X.$$

La afirmación «D es cerrado en $X \times X$» no es más que una forma alternativa de expresar el axioma de separación de Hausdorff.

Teorema 2.30 (Teorema del grafo cerrado). *Supongamos que*

(a) X e Y son F-espacios,
(b) $\Lambda : X \to Y$ es lineal,
(c) $G = \{(x, \Lambda x) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.

Entonces Λ es continua.

Demostración. Con la suma y el producto por escalares definidos componente a componente, $X \times Y$ es un espacio vectorial:

$$\alpha(x_1, y_1)+\beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1+\beta x_2, \alpha y_1+\beta y_2) \ (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \ x_i \in X, y_i \in Y, \ i = 1, 2).$$

Existen métricas invariantes completas d_X y d_Y en X e Y que inducen las respectivas topologías. Poniendo

$$d\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2) \quad (x_i \in X, y_i \in Y, \ i = 1, 2)$$

encontramos que d es una métrica invariante en $X \times Y$, compatible con la topología producto, que hace de $X \times Y$ un F-espacio.

Como Λ es lineal, G es un subespacio de $X \times Y$. Los subconjuntos cerrados de espacios métricos completos son completos. Así pues, G es un F-espacio.

Definimos $\pi_1 : G \to X$ y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ mediante

$$\pi_1(x, \Lambda x) = x, \quad \pi_2(x, y) = y.$$

Entonces π_1 es una aplicación lineal, inyectiva y continua del F-espacio G en el F-espacio X. Por el teorema de la aplicación abierta, $\pi_1^{-1} : X \to G$ es continua. Pero $\Lambda = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$, y π_2 es continua. Luego, Λ es continua. □

En la práctica, la hipótesis crucial (c) de que G es cerrado se suele comprobar demostrando que Λ satisface la siguiente propiedad (c'):

(c') *Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X para la que existen los límites*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad y \quad y = \lim_{n\to\infty} \Lambda x_n,$$

entonces $y = \Lambda x$.

Para demostrar que (c') implica (c), elegimos un punto (x, y) adherente a G. Como $X \times Y$ es metrizable,

$$(x, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, \Lambda x_n)$$

para alguna sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. De la definición de topología producto sigue que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \Lambda x_n = y.$$

Por (c'), $y = \Lambda x$, de manera que $(x, y) \in G$ y G es cerrado.

Se prueba con igual facilidad que (c) implica (c').

Ejemplo 2.31. En general, la hipótesis de linealidad es necesaria para probar la continuidad en el Teorema 2.30. Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

El grafo de f es cerrado, pero evidentemente f no es continua.

Si restringimos nuestra atención a funciones $f : [0,1] \to [0,1]$, entonces el tener grafo cerrado sí que entraña continuidad. Supongamos que, por el contrario, la función $f : [0,1] \to [0,1]$ posee grafo cerrado pero no es continua. Entonces existen $x \in [0,1]$ y una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ convergente a x tales que, para algún $\varepsilon > 0$,

$$|f(x_n) - f(x)| > \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

El intervalo $[0,1]$ es compacto, así que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ convergente, digamos a y. Por definición, el punto $(x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ está en el grafo de f, $G(f)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Puesto que $G(f)$ es cerrado, sigue que $(x, y) \in G(f)$; pero esto obliga a que $y = f(x)$, contradiciendo (2.13).

El argumento precedente continúa siendo válido si en vez de funciones $f : [0,1] \to [0,1]$ se toman funciones $f : K \to K$, donde K es un compacto arbitrario.

2.3.1. Operadores en espacios l_p

Se considera el espacio de sucesiones $l_p = l_p(\mathbb{N})$, donde $1 \leq p \leq \infty$.

Proposición 2.32. *Supongamos que $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ es una matriz infinita de números reales tales que la serie*

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \xi_k, \quad j \in \mathbb{N},$$

converge para cada $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$. Supongamos además que la sucesión $\eta_\xi = \{\eta_j\}_{j=1}^{\infty}$ está en l_p. Entonces la aplicación $\Lambda : l_p \to l_p$ definida por $\Lambda\xi = \eta_\xi$, $\xi \in l_p$, es un operador lineal acotado en l_p.

Demostración. Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea

$$\psi_j(\xi) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k = \eta_j, \quad \xi \in l_p.$$

Por el Teorema 2.7, ψ_j es un funcional lineal acotado sobre l_p para cada $j \in \mathbb{N}$. Usamos los funcionales lineales acotados $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ para definir la aplicación $\Lambda : l_p \to l_p$ mediante

$$\Lambda\xi = \{\psi_j(\xi)\}_{j=1}^{\infty}, \quad \xi \in l_p.$$

Por hipótesis, Λ está bien definida. Además, Λ es lineal porque ψ_j es lineal para cada $j \in \mathbb{N}$. Resta probar que Λ está acotada. Para ello, demostraremos que el grafo de Λ es cerrado y aplicaremos el teorema del grafo cerrado.

Supongamos que $\{\xi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en l_p convergente a ξ en l_p, y que $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_p$ es tal que $\{\Lambda\xi^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a ζ en l_p. Dado $j \in \mathbb{N}$, la aplicación ψ_j es un funcional lineal continuo sobre l_p, así que $\psi_j(\xi^{(n)}) \to \psi_j(\xi)$ cuando $n \to \infty$. Consecuentemente, debemos tener $\zeta_j = \psi_j(\xi)$ para cada $j \in \mathbb{N}$, de modo que $\zeta = \Lambda\xi$. Se desprende que el grafo de Λ es cerrado y de aquí, por el teorema del grafo cerrado (Teorema 2.30), que Λ es continua. □

La Proposición 2.32 ilustra un principio general, y es que si una aplicación lineal está bien definida entonces tenderá a ser continua.

2.3.2. Proyecciones: sumas directas, espacios cociente, subespacios complementados

Definición 2.33. *Sean X un espacio de Banach y V un subespacio cerrado de X. Una aplicación $P : X \to V$ se llama una* proyección *si $Px = x$ para todo $x \in V$.*

Nótese que la condición anterior es equivalente a que P sea idempotente, esto es, que $P^2 = P$.

Teorema 2.34. *Sean X un espacio de Banach y V un subespacio cerrado de X. Si $P : X \to V$ es una proyección continua y $W = \mathcal{N}(P)$, entonces X y $V \oplus W$ son isomorfos como espacios de Banach, y V y X/W so isomorfos como espacios de Banach. Recíprocamente, si $X = V \oplus W$, entonces existe una proyección continua $P : X \to V$ tal que $W = \mathcal{N}(P)$.*

Demostración. Supongamos que $P : X \to V$ es una proyección continua, con $W = \mathcal{N}(P)$. Existe una aplicación lineal $P_0 : X/W \to V$ tal que el diagrama de la figura 2.4 es conmutativo, donde $\pi : X \to X/W$ (nótese que W es cerrado) es la aplicación canónica cociente.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P"] \arrow[d, "\pi"] & V \\ X/W \arrow[ur, "P_0"] & \end{tikzcd}$$

Figura 2.4.

La continuidad de P_0 sigue de la continuidad de P y del hecho de que π es abierta. Cualquier biyección lineal continua tiene una inversa continua (Corolario 2.20), de modo que P_0 es un isomorfismo.

El siguiente paso es probar que X es la suma directa vectorial de sus subespacios V y W. Supongamos que $x \in V \cap W$. Puesto que $x \in W$, se tiene que $Px = 0$. Sin embargo, P es una proyección sobre V, así que $x \in V$ implica $Px = x$, y $x = 0$. Luego, $V \cap W = \{0\}$. Además, todo $x \in X$ puede ser escrito como suma de elementos de V y W: $x = Px + (x - Px)$. Se concluye que $X = V \oplus W$ como espacios vectoriales.

Demostramos ahora que X es isomorfo a $V \oplus W$. Específicamente, queremos probar que $(X, \|\cdot\|)$ es isomorfo a $V \oplus W$ equipado con la norma

$$\|(v,w)\| = \|v\| + \|w\|, \quad (v,w) \in V \times W.$$

Definimos $\phi : X \to V \oplus W$ por

$$\phi x = (Px, x - Px), \quad x \in X.$$

Nuestras observaciones anteriores muestran que ϕ está bien definida. Además, ϕ es lineal porque P lo es y por la forma en que se definen las operaciones vectoriales sobre $V \oplus W$. Veamos ahora que ϕ es una biyección.

Supongamos que $\phi x = (0,0)$. Entonces $(Px, x - Px) = (0,0)$, de manera que $Px = 0$ y $x - Px = 0$. De aquí inferimos que $x = Px = 0$, probando que ϕ es inyectiva. Para ver que es sobre, sea $(v,w) \in V \times W$. Se tiene que $Pv = v$ y $Pw = 0$. Luego,

$$\phi(v+w) = (P(v+w), (v+w) - P(v+w)) = (v, v+w-v) = (v,w).$$

Se concluye que ϕ es suprayectiva.

Demostramos a continuación que ϕ es continua, y para ello que está acotada:

$$\|\phi x\|_{V\oplus W} = \|(Px, x-Px)\|_{V\oplus W} = \|Px\| + \|x - Px\| \leq (2\|P\| + 1)\|x\|.$$

Puesto que ϕ es una biyección lineal continua, es un isomorfismo por el teorema de la aplicación abierta (Corolario 2.20).

Supongamos ahora que $X = V \oplus W$. Entonces cada $x \in X$ admite una representación única de la forma $v + w$, donde $v \in V$ y $w \in W$. Definimos $Px = v$. Esta P es una proyección, con $W = \mathcal{N}(P)$. Sólo falta demostrar que P es continua, y para ello aplicaremos el teorema del grafo cerrado. Supongamos que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión convergente en X tal que $\{Px_n\}_{n=1}^\infty$ converge en V, digamos a $x \in X$ y $v \in V$, respectivamente. Necesitamos establecer que $Px = v$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $x_n - Px_n \in \mathcal{N}(P) = W$. Como W es cerrado,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - Px_n) = x - v \in W.$$

Por consiguiente, $P(x - v) = 0$, así que $Px = Pv$. Por hipótesis, $Pv = v$, y se concluye que $Px = v$, como se requería. □

Hemos visto que cuando un subespacio cerrado V es la imagen de una proyección continua en X, existe un subespacio cerrado W tal que $X = V \oplus W$. Por esta razón, cuando V es la imagen de una proyección se dice que V es un *subespacio complementado* de X.

3

Otras consecuencias del teorema de Baire

Para este capítulo hemos seleccionado cuatro resultados recogidos en la literatura (tres en la recta real y el cuarto en un espacio infinito-dimensional) que descansan en el teorema de Baire. Tal selección responde, fundamentalmente, al gusto personal, pero también se ha visto condicionada por la limitación que la normativa académica impone sobre la extensión de esta memoria.

3.1. Funciones reales de variable real

3.1.1. Funciones de la primera clase de Baire

Definición 3.1. *Sea f una función real de variable real. Dado cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se llama* oscilación de f en I *a la cantidad*

$$w(I) = \sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x).$$

Fijado $x \in \mathbb{R}$, la función $\omega(x-\delta, x+\delta)$ decrece con δ y proporciona el límite (finito o infinito)

$$\omega(x) = \lim_{\delta \to 0} \omega(x-\delta, x+\delta),$$

llamado oscilación de f en x.

Es claro que $\omega(x_0) = 0$ si, y sólo si, f es continua en x_0. Cuando no es cero, $\omega(x_0)$ da una medida del tamaño de la discontinuidad de f en x_0.

Si $\omega(x_0) < \varepsilon$, entonces $\omega(x) < \varepsilon$ para todo x en un entorno de x_0. Por lo tanto, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : \omega(x) < \varepsilon\}$ es abierto. El conjunto D de todos los puntos donde f es discontinua puede ser representado en la forma

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : \omega(x) \geq 1/n\},$$

y consecuentemente es siempre un conjunto F_σ. Hemos probado:

Teorema 3.2. *El conjunto de los puntos de discontinuidad de una función real de variable real es un F_σ.*

El siguiente teorema es un recíproco del anterior:

Teorema 3.3. *Sea $E \subset \mathbb{R}$ cualquier conjunto F_σ. Existe una función acotada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuyo conjunto de puntos de discontinuidad es E.*

Demostración. Escribamos $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ como unión numerable de conjuntos cerrados. Podemos asumir que $F_n \subset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por A_n el conjunto de puntos racionales interiores a F_n. La función $f_n = \chi_{F_n} - \chi_{A_n} = \chi_{F_n \setminus A_n}$ tiene una oscilación igual a 1 en cada punto de F_n e igual a 0 en cualquier otro punto. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números positivos tales que $a_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$; por ejemplo, podemos tomar $a_n = 1/n!$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función acotada f. Esta f es continua en cualquier punto donde todos los términos de la serie sean continuos, luego lo es en cada punto de $\mathbb{R} \setminus E$. Por otro lado, en cada punto de $F_n \setminus F_{n-1}$ la oscilación de f es al menos igual a $a_n - \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Se concluye que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es exactamente E. $\square$

Definición 3.4. *Una función f es de la* primera clase *(de Baire) si puede ser representada como límite de una sucesión de funciones continuas convergente en todo punto.*

Una tal función no tiene por qué ser continua. Por ejemplo, las funciones $f_n(x) = \max\{0, 1 - n|x| : n \in \mathbb{N}\}$ son continuas, y la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función discontinua $f(x) = 1$ ó $f(x) = 0$ dependiendo de si $x = 0$ ó $x \neq 0$. Sin embargo, el siguiente teorema muestra que una función de la primera clase no puede ser discontinua en todo punto. Este resultado es conocido como *teorema de Baire sobre funciones de primera clase*, y forma parte del teorema de Baire. De hecho, fue en relación con él que Baire introdujo la noción de categoría. Resulta interesante compararlo con el hecho bien conocido de que el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es continuo en todo punto.

Teorema 3.5. *Si f es de la primera clase de Baire, entonces f es continua excepto en un conjunto de primera categoría.*

Demostración. Es suficiente ver que, para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $F = \{x \in \mathbb{R} : \omega(x) \geq 5\varepsilon\}$ es diseminado. Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, con f_n continua, y definamos

$$E_n = \bigcap_{i,j=n}^{\infty} \{x : |f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado, $E_n \subset E_{n+1}$, y $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R}$. Consideremos cualquier intervalo cerrado I. Como $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap I)$, los conjuntos $E_n \cap I$, $n \in \mathbb{N}$, no pueden ser todos diseminados. Por lo tanto, algún $E_n \cap I$ contiene un intervalo abierto J. Tenemos que $|f_i(x) - f_j(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in J$, $i, j \geq n$. Tomando $j = n$ y haciendo $i \to \infty$, se sigue que $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in J$. Dado cualquier $x_0 \in J$, existe un entorno $I(x_0) \subset J$ tal que $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \varepsilon$ para todo x en $I(x_0)$. Por tanto, $|f(x) - f_n(x_0)| \leq 2\varepsilon$ para todo $x \in I(x_0)$. Consecuentemente $\omega(x_0) \leq 4\varepsilon$, de modo que ningún punto de J pertenece a F. Así, dado cualquier intervalo cerrado I, existe un intervalo abierto $J \subset I \setminus F$. Por la Proposición 1.2, esto prueba que F es diseminado. □

El razonamiento que acabamos de dar puede ser empleado para probar algo más fuerte. Con unos pequeños cambios en la formulación, es posible aplicarlo cuando f y todas las funciones f_n, $n \in \mathbb{N}$, están restringidas a un conjunto perfecto arbitrario P. En este caso, la noción de categoría debe ser interpretada relativamente a P. El teorema de categoría de Baire permanece válido: si un intervalo abierto I corta a P, ninguna unión numerable de conjuntos diseminados en P puede ser igual a $I \cap P$. Así pues, si f es cualquier función de primera clase y P es cualquier conjunto perfecto, entonces f restringida a P es continua en todos los puntos de P excepto en un conjunto de primera categoría relativo a P. Recíprocamente, Baire demostró que toda función de este tipo es de primera clase. Aunque no incluiremos la demostración aquí, merece la pena señalar un sencillo ejemplo que prueba que el recíproco del Teorema 3.5 es falso. Sea $f(x) = 0$ en todo punto que no pertenezca al conjunto de Cantor C, $f(x) = 1/2$ en los extremos de cada uno de los intervalos abiertos eliminados en la construcción de C, y $f(x) = 1$ en el resto de puntos de C. Entonces f es continua excepto en un conjunto de puntos de primera categoría, a saber, en todo punto de C'. Pero f restringida a C es discontinua en todo punto de C, luego f no es de primera clase.

3.1.2. Funciones discontinuas en un conjunto de primera categoría

Es relativamente fácil formular una condición necesaria y suficiente para lograr la conclusión del Teorema 3.5:

Teorema 3.6. *Sea f una función real de variable real. El conjunto de puntos de discontinuidad de f es de primera categoría si, y sólo si, f es continua en un conjunto denso.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.2 y del hecho de que un conjunto F_σ es de primera categoría si, y sólo si, su complementario es denso (Teorema 1.12). □

El Teorema 3.5 es un resultado extremadamente útil. Para ilustrar cómo permite responder a diversas cuestiones naturales, mencionaremos dos ejemplos.

Ejemplo 3.7. Sabemos que una serie trigonométrica puede converger puntualmente a una función discontinua (cf. sección 2.1.2). ¿Cuán discontinua llega a ser la función suma? ¿Puede la suma de una serie trigonométrica convergente en todo punto ser discontinua en todos ellos? El Teorema 3.5 muestra que la respuesta es negativa.

Ejemplo 3.8. Es bien conocido que la derivada de una función f derivable en todo punto no es necesariamente continua. Un ejemplo familiar viene dado por la función
$$f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x), \quad f(0) = 0.$$
¿Puede la derivada de una función derivable en todo punto ser discontinua en todos ellos? De nuevo, el Teorema 3.5 responde negativamente esta cuestión: la función
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+1/n) - f(x)}{1/n}$$
es de primera clase cuando está definida y es finita en todo punto.

3.1.3. Funciones no derivables en ningún punto

Se conocen muchos ejemplos de funciones continuas no derivables en ningún punto, siendo el primero el construido por Weierstrass en 1872. Una de las pruebas de existencia más simples se debe a Banach y está basada en el método de la categoría. En 1931 Banach demostró que, *en el sentido de categoría, casi toda función continua es no derivable en ningún punto*. De hecho, *resulta excepcional para una función continua el tener una derivada lateral finita o, incluso, tener cocientes incrementales acotados a cualquier lado, en cualquier parte de un intervalo.*

Sea $(C[0,1], \rho)$ el espacio de las funciones continuas sobre $[0,1]$, con la métrica uniforme. Fijado $n \in \mathbb{N}$, denotemos por E_n al conjunto de las funciones f tales que para algún $x \in [0, 1-1/n]$ se verifica la desigualdad $|f(x+h) - f(x)| \le nh$ cualquiera que sea $0 < h < 1-x$.

Para ver que E_n es cerrado, consideremos cualquier f en la clausura de E_n, y sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en E_n que converge a f. Existe una sucesión correspondiente de números x_k tales que, para cada k,
$$0 \le x_k \le 1 - 1/n$$
y
$$|f_k(x_k + h) - f_k(x_k)| \le nh \text{ para todo } 0 < h < 1 - x_k.$$
También podemos asumir que
$$x_k \to x \text{ cuando } k \to \infty \text{ para cierto } 0 \le x \le 1 - 1/n,$$

ya que esta condición se satisfará si reemplazamos $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ por una subsucesión adecuada. Si $0 < h < 1 - x$, para todo k suficientemente grande se cumple la desigualdad $0 < h < 1 - x_k$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x)| \\
&\leq |f(x+h) - f(x_k+h)| + |f(x_k+h) - f_k(x_k+h)| \\
&\quad + |f_k(x_k+h) - f_k(x_k)| + |f_k(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\
&\leq |f(x+h) - f(x_k+h)| + \rho(f, f_k) + nh + \rho(f_k, f) + |f(x_k) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Haciendo $k \to \infty$ y usando el hecho de que f es continua en x y $x+h$, se sigue que $|f(x+h) - f(x)| \leq nh$ para todo $0 < h < 1 - x$. Por lo tanto, $f \in E_n$, así que E_n es cerrado en $C[0,1]$.

Cualquier función continua en $[0,1]$ puede ser aproximada uniforme y arbitrariamente por una función continua lineal a trozos g. Para ver que E_n es diseminado en $C[0,1]$, es suficiente probar que dados una tal función g y $\varepsilon > 0$, existe una función $h \in C[0,1] \setminus E_n$ tal que $\rho(g,h) \leq \varepsilon$. Sea M el máximo valor absoluto de las pendientes de los segmentos lineales que forman la gráfica de g, y elijamos un entero m tal que $m\varepsilon > n + M$. Denotemos por ϕ a la función «dientes de sierra» $\phi(x) = \text{mín}(x - [x], [x] + 1 - x)$ (distancia de x al entero más próximo), y definamos $h(x) = g(x) + \varepsilon\phi(mx)$. En cada punto de $[0,1)$, la función h tiene una derivada por la derecha numéricamente mayor que n, ya que $\varepsilon\phi(mx)$ tiene en todo punto de $[0,1)$ una derivada por la derecha igual a $\pm\varepsilon m$, y g tiene una derivada por la derecha con valor absoluto igual a M, a lo sumo. Por tanto, $h \in C[0,1] \setminus E_n$. Como $\rho(g,h) = \varepsilon/2$, se sigue que E_n es diseminado en $C[0,1]$.

Luego, el conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es de primera categoría en $C[0,1]$. Este es el conjunto de todas las funciones continuas que tienen cocientes incrementales por la derecha acotados en algún punto de $[0,1)$. Similarmente, el conjunto de las funciones que tienen cocientes incrementales por la izquierda acotados en algún punto de $(0,1]$ es de primera categoría. En efecto, esto se puede deducir de lo que ya hemos probado considerando la isometría de $C[0,1]$ inducida por la sustitución de $1 - x$ por x. La unión de estos dos conjuntos incluye todas las funciones de $C[0,1]$ que tienen una derivada lateral finita en algún punto de $[0,1]$.

Razonando análogamente, se puede demostrar que un conjunto residual de funciones en $C[0,1]$ no tiene puntos con derivada infinita. Cabe preguntarse si es posible ir aún más lejos y encontrar una función continua que carezca de derivada lateral finita o infinita en ningún punto. Una tal función fuertemente no derivable en ningún punto fue construida por primera vez por Besicovitch en 1922. Sin embargo, es destacable el hecho de que la existencia de dichas funciones no puede ser demostrada por el método de la categoría. Saks probó en 1932 que el conjunto de tales funciones es sólo de primera categoría en $C[0,1]$. Siendo más precisos, Saks demostró que un conjunto residual de funciones continuas tiene una derivada por la derecha igual a $+\infty$ en un número incontable de puntos.

El uso del teorema de categoría de Baire para probar que un conjunto es no vacío equivale a una demostración del hecho de que un elemento del conjunto puede ser definido como el límite de una sucesión construida adecuadamente. Por ejemplo, la demostración anterior implica que una función no derivable en ningún punto puede ser expresada como la suma de una serie uniformemente convergente de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \phi(m_n x)$. La ventaja del método de categoría es que nos proporciona toda una clase de ejemplos, no sólo uno, y generalmente simplifica el problema al permitir que nos concentremos en la dificultad esencial.

3.2. Teorema de Vitali-Hahn-Saks

El teorema de Vitali-Hahn-Saks afirma que si $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medidas complejas puntualmente convergente a una función de conjunto μ, entonces μ es una medida compleja. Daremos una prueba de este resultado, debida a Saks, que utiliza argumentos de categoría. Comenzamos con una caracterización de la aditividad numerable que será de utilidad en lo que sigue.

Lema 3.9. *Sea Σ una σ-álgebra y $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ una función de conjunto finitamente aditiva. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(a) La función μ es numerablemente aditiva.
(b) Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ es una sucesión decreciente con $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$.
(c) Si la sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ es creciente, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ una sucesión decreciente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$. Los conjuntos $B_n \in \Sigma$ son disjuntos dos a dos, $A_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} B_m$ y, por la aditividad numerable de μ, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ converge. Luego, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \mu(B_m) = 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ una sucesión creciente, y sea $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. La sucesión $\{A \setminus A_n\}_{n=1}^{\infty}$ cumple las hipótesis en (b). Como μ es finitamente aditiva,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = \lim_{n\to\infty} [\mu(A) - \mu(A_n)] = \mu(A) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$$

Consecuentemente $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$, y queda probado (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) Supongamos cierto (c). Sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ una sucesión disjunta dos a dos, y pongamos $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $A_n = \bigcup_{m=1}^{n} B_m$, $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ es una sucesión creciente a la que podemos aplicar (c); luego, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Por la aditividad finita de μ concluimos

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(B_m) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \mu(B_m) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(B),$$

completando la prueba. □

Definición 3.10. *Dados un conjunto no vacío X y dos subconjuntos E y F de X, se define la* diferencia simétrica $E \triangle F$ *como*

$$E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) = (E \cup F) \setminus (E \cap F).$$

Para $E, F, G \subset X$, se verifica:

(i) $E \triangle E = \emptyset$.
(ii) $E \triangle F = F \triangle E$.
(iii) $E \triangle F \subset (E \triangle G) \cup (G \triangle F)$.

Nuestro próximo objetivo será asociar a cada espacio de medida finita un espacio métrico completo. Para ello, dado un espacio de medida finita (Ω, Σ, μ), definimos

$$d_\mu(E, F) = \mu(E \triangle F), \quad E, F \in \Sigma.$$

Usando (i), (ii) y (iii) se demuestra que d_μ es una pseudométrica sobre Σ, comúnmente llamada *pseudométrica de Fréchet-Nikodým*. También se comprueba que la relación «$E \sim F$ si $d_\mu(E, F) = 0$» es de equivalencia en Σ, y que la aplicación $\widetilde{d_\mu} : \Sigma_\mu \times \Sigma_\mu \to [0, +\infty)$ dada por

$$\widetilde{d_\mu}([\widetilde{E}], [\widetilde{F}]) = d_\mu(E, F), \quad [\widetilde{E}], [\widetilde{F}] \in \Sigma_\mu,$$

donde $[\widetilde{E}] = \{F \in \Sigma : E \sim F\}$ es la clase de equivalencia de $E \in \Sigma$, está bien definida y es una métrica sobre el conjunto cociente $\Sigma_\mu = \Sigma/\sim = \{[\widetilde{E}] : E \in \Sigma\}$. También es posible extender las operaciones conjuntistas a Σ_μ con independencia del representante de cada clase. De ahí que al espacio métrico $(\Sigma_\mu, \widetilde{d_\mu})$ se le denomine *álgebra de Boole métrica* asociada a (Ω, Σ, μ).

En lo sucesivo, abusando de la notación, identificaremos las clases $[\widetilde{E}] \in \Sigma_\mu$ con sus representantes $E \in \Sigma$.

Sea ν una medida compleja en una σ-álgebra Σ. Recordemos que ν se dice *absolutamente continua* con respecto a una medida positiva μ definida en Σ si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $E \in \Sigma$ con $\mu(E) < \delta$ se tiene $|\nu(E)| < \varepsilon$ o, equivalentemente, $|\nu|(E) < \varepsilon$, donde $|\nu|$ denota la medida de la variación total de ν (cf. [10, Theorem 6.11]).

Teorema 3.11 (Saks-Banach). *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Entonces:*

(a) El espacio métrico $(\Sigma_\mu, \widetilde{d_\mu})$ es completo.

(b) *La medida* μ *es una aplicación uniformemente continua sobre* $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$. *Además, una medida* $\nu : \Sigma \to \mathbb{C}$ *es uniformemente continua sobre* $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$ *si, y sólo si,* $\nu \ll \mu$.

(c) *Sean* φ, ϕ *las aplicaciones definidas de la siguiente manera:* $\varphi(A,B) = A \cup B$, $\phi(A,B) = A \cap B$, $A, B \in \Sigma_\mu$. *Se tiene que* φ *y* ϕ *son continuas.*

Demostración. (a) Para ver que $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$ es completo probaremos que toda sucesión de Cauchy $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ en $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$ es convergente o, lo que es lo mismo, que existe $E \in \Sigma$ tal que $\widetilde{d}_\mu(E_n, E) = \mu(E_n \triangle E) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ya que $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\widetilde{d}_\mu(E_n, E_m) = \mu(E_n \triangle E_m) < \varepsilon, \quad n, m \geq N. \tag{3.1}$$

Definimos $E = \bigcup_{k=1}^\infty \bigcap_{n=k}^\infty E_n$. Como Σ es una σ-álgebra, $E \in \Sigma$. Veamos que E proporciona el límite buscado. Dado $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N}$ satisfaciendo (3.1), y sea $m \geq N$. Si $x \in E \setminus E_m$ entonces, como $x \in E$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_n$ para todo $n \geq k_0$; así, $x \in E_n \setminus E_m$ para todo $n \geq k_0$. Por otra parte, si $x \in E_m \setminus E$ entonces $x \notin E$, así que $x \notin \bigcap_{n=k}^\infty E_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$; luego, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n \geq k$ tal que $x \notin E_n$, así que $x \in E_m \setminus E_n$. En particular, existe $n \geq \max\{k_0, N\}$ tal que $x \in E_m \setminus E_n$. Para este n tenemos entonces que $E \triangle E_m \subset E_n \triangle E_m$. Puesto que $n \geq N$, sigue de (3.1) que

$$\widetilde{d}_\mu(E, E_m) = \mu(E \triangle E_m) \leq \mu(E_n \triangle E_m) < \varepsilon, \quad m \geq N.$$

Se concluye que el espacio métrico $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$ es completo.

(b) Sea λ cualquier medida compleja sobre Σ, y sean $A, B \in \Sigma$. Combinando las igualdades

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \quad \text{y} \quad B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

donde las uniones comparecientes son disjuntas, con la aditividad de λ, podemos escribir:

$$\begin{aligned} |\lambda(A) - \lambda(B)| &= |\lambda(A \setminus B) - \lambda(B \setminus A)| \leq |\lambda(A \setminus B)| + |\lambda(B \setminus A)| \\ &\leq |\lambda|(A \setminus B) + |\lambda|(B \setminus A) = |\lambda|(A \triangle B), \end{aligned}$$

es decir:

$$|\lambda(A) - \lambda(B)| \leq |\lambda|(A \triangle B). \tag{3.2}$$

En particular, la desigualdad (3.2), que vale para $\lambda = \mu$, prueba que μ es uniformemente continua sobre Σ_μ. Supongamos ahora que ν es uniformemente continua sobre Σ_μ: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\mu(A \triangle B) < \delta$ implica $|\nu(A) - \nu(B)| < \varepsilon$, cualesquiera sean $A, B \in \Sigma$; sin más que particularizar

$B = \emptyset$, ya resulta que $\nu \ll \mu$. Recíprocamente, supongamos que $\nu \ll \mu$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\nu|(E) < \varepsilon$ siempre que $\mu(E) < \delta$. Sean ahora $A, B \in \Sigma$, y supongamos que $\mu(A \triangle B) < \delta$; como la desigualdad (3.2) es válida para cualquier medida compleja, tenemos que $|\nu(A) - \nu(B)| \leq |\nu|(A \triangle B) < \varepsilon$.

(c) Sean $A, A_1, B, B_1 \in \Sigma$. Se cumple:

$$\begin{aligned}&(A \cup B) \triangle (A_1 \cup B_1)\\ &= (A \triangle A_1) \triangle (B \triangle B_1) \triangle A \cap (B \triangle B_1) \triangle B_1 \cap (A \triangle A_1),\end{aligned}$$

$$(A \cap B) \triangle (A_1 \cap B_1) = A \cap (B \triangle B_1) \triangle B_1 \cap (A \triangle A_1).$$

Teniendo en cuenta que

$$\mu(A \triangle B) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) \leq \mu(A) + \mu(B),$$

se concluye que las aplicaciones $\varphi(A, B) = A \cup B$ y $\phi(A, B) = A \cap B$ son continuas de $\Sigma_\mu \times \Sigma_\mu$ en Σ_μ. □

Estamos ya en disposición de enunciar y probar el teorema de Vitali-Hahn-Saks.

Teorema 3.12 (Vitali-Hahn-Saks). *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita. Supongamos que $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de medidas complejas definidas sobre Σ, satisfaciendo:*

(i) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n \ll \mu$.
(ii) Existe una función $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} \nu_n(E) = \nu(E)$, cualquiera que sea $E \in \Sigma$.

Entonces:

(a) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $E \in \Sigma$ y $\mu(E) < \delta$ implican $|\nu_n(E)| < \varepsilon$, uniformemente en $n \in \mathbb{N}$.
(b) La función ν es una medida compleja.

Demostración. Sea $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$ el álgebra de Boole métrica asociada a (Ω, Σ, μ), que, tal como hemos demostrado (Teorema 3.11), es completa. Puesto que $\nu_n \ll \mu$, de dicho teorema también resulta que ν_n es uniformemente continua sobre Σ_μ, para cada $n \in \mathbb{N}$. De este modo, dados $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\Sigma_k = \bigcap_{m,n=k}^{\infty} \left\{ E \in \Sigma_\mu : |\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\}$$

es cerrado en $(\Sigma_\mu, \widetilde{d}_\mu)$. Fijemos $E \in \Sigma_\mu$. Que $\{\nu_n(E)\}_{n=1}^{\infty}$ converja a $\nu(E)$ entraña que $\{\nu_n(E)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy; luego, podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $|\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leq \varepsilon/3$ para $n, m \geq k$. Esto prueba que $E \in \Sigma_k$ y, por consiguiente, $\Sigma_\mu = \bigcup_{k=1}^\infty \Sigma_k$. Por el teorema de categoría de Baire, debe existir $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\Sigma_{k_0}^\circ \neq \emptyset$; es decir, para ciertos $A \in \Sigma_\mu$ y $r > 0$ se verifica

$$U(A,r) = \left\{ E \in \Sigma_\mu : \widetilde{d}_\mu(A,E) < r \right\} \subset \Sigma_{k_0}.$$

Así pues, si $E \in U(A,r)$:

$$|\nu_n(E) - \nu_m(E)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad m,n \geq k_0. \tag{3.3}$$

Como $\nu_n \ll \mu$ para $n = 1,2,\ldots,k_0$, podemos elegir $0 < \delta < r$ tal que $B \in \Sigma_\mu$ y $\mu(B) < \delta$ implican

$$|\nu_n(B)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n = 1,2,\ldots,k_0. \tag{3.4}$$

Nótese que si $B \in \Sigma_\mu$ y $\mu(B) < r$ entonces $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$, con $A \cup B$, $A \setminus B \in U(A,r)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{d}_\mu(A \cup B, A) &= \mu((A \cup B) \triangle A) = \mu(B \setminus A) \leq \mu(B) < r, \\ \widetilde{d}_\mu(A \setminus B, A) &= \mu((A \setminus B) \triangle A) = \mu(A \cap B) \leq \mu(B) < r. \end{aligned}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, y sea $B \in \Sigma_\mu$ tal que $\mu(B) < \delta < r$. Usando (3.3) y (3.4):

$$\begin{aligned} |\nu_n(B)| &= |\nu_{k_0}(B) + (\nu_n(B) - \nu_{k_0}(B))| \\ &\leq |\nu_{k_0}(B)| + |\nu_n(A \cup B) - \nu_n(A \setminus B) - (\nu_{k_0}(A \cup B) - \nu_{k_0}(A \setminus B))| \\ &\leq |\nu_{k_0}(B)| + |\nu_n(A \cup B) - \nu_{k_0}(A \cup B)| + |\nu_n(A \setminus B) - \nu_{k_0}(A \setminus B)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad n > k_0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como consecuencia de (3.4) y (3.5), $\lim_{\mu(B)\to 0} \nu_n(B) = 0$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$, quedando probado (a).

Para establecer (b), necesitamos demostrar que ν es numerablemente aditiva; a tal fin, aplicaremos el Lema 3.9. Dada una sucesión decreciente $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma$ satisfaciendo $\bigcap_{n=1}^\infty E_n = \emptyset$, necesitamos probar que $\lim_{n\to\infty} \nu(E_n) = 0$. Ya que $\nu_k \ll \mu$ uniformemente en $k \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $E \in \Sigma$ y $\mu(E) < \delta$ implican $|\nu_k(E)| < \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como μ es numerablemente aditiva, el Lema 3.9 garantiza que $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0$; luego, dado $\delta > 0$ podemos elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_n) < \delta$ para todo $n \geq n_0$. Pero entonces $|\nu_k(E_n)| < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $n \geq n_0$. Haciendo $k \to \infty$ ya se obtiene que $|\nu(E_n)| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. □

Bibliografía

[1] R. Baire: *Sur les fonctions de variables réelles.* Tesis doctoral, Faculté des Sciences de Paris, 1899.

[2] N. Bourbaki: *General topology.* Springer, 1989.

[3] A. Bowers, N. Kalton: *An introductory course in functional analysis.* Springer, 2014.

[4] W. Brito: *El teorema de categoría de Baire y sus aplicaciones.* Consejo de Publicaciones de la Universidad de Los Andes, 2011.

[5] J.R. Giles: *Introduction to the analysis of normed linear spaces.* Cambridge University Press, 2000.

[6] R.C. Haworth, R.A. McCoy: *Baire spaces.* Dissertationes Mathematicae **141**, PWN, 1977.

[7] S. Hawtrey Jones: Applications of the Baire Category Theorem. *Real Analysis Exchange* **23** (1997/98), no. 2, 363-394.

[8] W.F. Osgood: Non-uniform convergence and the integration of series term by term. *Amer. J. Math.* **19** (1897), 155–190.

[9] J. Oxtoby: *Measure and category*, 2nd ed. Springer, 1980.

[10] W. Rudin: *Real and complex analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1987.

[11] W. Rudin: *Functional analysis*, 2nd ed. McGraw-Hill, 1991.

[12] T. Tao: *The Baire category theorem and its Banach space consequences*, 245B, Notes 9.

The Baire category theorem in F-spaces

Zoilo González García
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100830569@ull.edu.es

Abstract

The main objective of this report is to study one of the most significant results pertaining to complete metric spaces, the so-called category theorem, *and the relevance of its numerous applications to different fields, especially in the context of F-spaces (that is, completely metrizable topological vector spaces) and Banach spaces.*

1. Introduction

Loosely speaking, the Baire category theorem is a result about the «topological size» of the subsets of a complete metric space or a locally compact Hausdorff topological space. It provides a very powerful tool, in a large variety of fields, to establish the existence of mathematical objects with a property P which are hard to construct explicitly. To this end, P is framed in a convenient topological space X and the Baire theorem is applied to show that $\{x \in X : P(x)\}$ is «topologically large» in X, so that there are actually many objects satisfying P.

2. Baire category theorem

Definition 2.1 *Let S be a topological space, and let $E \subset S$. The set E is called* meager *or* nowhere dense *if its closure has empty interior. Also, E is of the* first category *if E can be written as a countable union of meager sets; otherwise, E is of the* second category*. Finally, E is called* residual *if $S \setminus E$ is of the first category.*

Theorem 2.2 (Baire category theorem I) *Let S be either a complete metric space or a locally compact Hausdorff space. The intersection of every countable family of open dense subsets of S is dense in S.*

Definition 2.3 *A subset E of a topological space is a G_δ set if E can be expressed as a countable intersection of open sets. Complementarily, E is an F_σ set if E can be written as a countable union of closed sets.*

Theorem 2.4 (Baire category theorem II) *Every G_δ subset of a complete metric space or a locally compact Hausdorff space is of the second category.*

Definition 2.5 *A topological space X is a* Baire space *if every countable intersection of open dense subsets of X is dense in X.*

This chapter includes several characterizations of Baire spaces. Also, hereditarily Baire spaces, residual sets in Baire spaces and Baire spaces with no isolated points are studied.

3. The pillars of functional analysis

The Baire category theorem is at the base of three of the four so-called pillars of functional analysis: the theorem of Banach-Steinhaus, the open mapping theorem and the closed graph theorem, whose study we develop in this chapter in an F-space setting.

3.1 Theorem of Banach-Steinhaus

Definition 3.1 *Assume X and Y are topological vector spaces and Γ is a family of linear applications from X to Y. We say that Γ is* equicontinuous *if to every neighborhood W of zero in Y, there corresponds a neighborhood V of zero in X such that $\Lambda(V) \subset W$ for all $\Lambda \in \Gamma$.*

Theorem 3.2 *Let Γ be a family of continuous linear maps from an F-space X to a topological vector space Y. If the orbit of every point of X is a bounded subset of Y, then Γ is equicontinuous.*

Applications: Continuity of bilinear mappings, convergence and representation of Fourier series of continuous functions and summability kernels (Dirichlet, Fejér).

3.2 Open mapping theorem

Definition 3.3 *Let $f : S \to T$ be a map between the topological spaces S and T. We say f is* open *at a point $p \in S$ if $f(V)$ contains a neighborhood of $f(p)$ whenever V is a neighborhood of p. Also, f is* open *if $f(U)$ is open in T for all open set U in S.*

Theorem 3.4 *Let X be an F-space, Y a topological vector space and $\Lambda : X \to Y$ a continuous linear map, and suppose that $\Lambda(X)$ is of the second category in Y. Then $\Lambda(X) = Y$, Λ is an open map, and Y is an F-space.*

Applications: A characterization of separable Banach spaces due to Banach and Mazur, a factorization of mappings between Banach spaces, Fourier coefficients of integrable functions (Riemann-Lebesgue lemma).

3.3 Closed graph theorem

Definition 3.5 *Let f be a map between any two sets X and Y. The* graph *of f is the subset of the cartesian product $X \times Y$ consisting of all pairs $(x, f(x))$, $x \in X$.*

Theorem 3.6 *Assume X and Y are F-spaces, $\Lambda : X \to Y$ is a linear map, and the graph $G = \{(x, \Lambda x) : x \in X\}$ is closed in $X \times Y$. Then Λ is continuous.*

Applications: Study of operators on sequence spaces as well as of projections, direct sums, quotient spaces and complemented subspaces in Banach spaces.

4. Other consequences of the Baire category theorem

In this chapter we present four results appearing in the literature (three of them in the real line and the fourth in an infinite-dimensional space) whose proofs rely on the Baire theorem.

Theorem 4.1 *The set of discontinuity points of a real-valued function of one real variable is an F_σ set. Conversely, given any F_σ set E in $\mathbb{R}$, there exists a bounded function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ whose set of discontinuity points is E.*

Theorem 4.2 *Let f be a real-valued function of one real variable. The set of discontinuity points of f is of the first category if, and only if, f is continuous in a dense set.*

Theorem 4.3 (Banach) *The set of continuous functions on $[0,1]$ with no finite derivative at any point is residual with respect to the uniform distance.*

Theorem 4.4 (Vitali-Hahn-Saks) *Let (Ω, Σ, μ) be a finite measure space. Assume $\{\nu_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of complex measures defined on Σ, such that $\nu_n \ll \mu$, $n \in \mathbb{N}$, and the limit $\lim_{n\to\infty} \nu_n(E) = \nu(E)$ exists for all $E \in \Sigma$. Then:*

(i) To every $\varepsilon > 0$ there corresponds $\delta > 0$ such that $E \in \Sigma$ and $\mu(E) < \delta$ imply $|\nu_n(E)| < \varepsilon$, uniformly in $n \in \mathbb{N}$.

(ii) The function ν is a complex measure.

References

[1] A. Bowers, N. Kalton: *An introductory course in functional analysis*. Springer, 2014.

[2] W. Brito: *El teorema de categoría de Baire y sus aplicaciones*. Consejo de Publicaciones de la Universidad de Los Andes, 2011.

[3] J.R. Giles: *Introduction to the analysis of normed linear spaces*. Cambridge University Press, 2000.

[4] R.C. Haworth, R.A. McCoy: *Baire spaces*. Dissertationes Mathematicae **141**, PWN, 1977.

[5] J. Oxtoby: *Measure and category*, 2nd ed. Springer, 1980.

[6] W. Rudin: *Real and complex analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1987.

[7] W. Rudin: *Functional analysis*, 2nd ed. McGraw-Hill, 1991.