

Alejandro Afonso Castro

Medida, dimensión y fractales

Measure, dimension and fractals

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2018

DIRIGIDO POR
Antonio Bonilla

[Antonio Bonilla](#)

Departamento de Análisis

Matemático

Universidad de La Laguna

38271 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

Introducimos las nociones de medida y dimensión de Hausdorff para cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n . Además, mostramos diferentes técnicas para calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto y las aplicamos a diferentes ejemplos, especialmente al conjunto de Cantor.

También consideramos la definición de fractal y damos algunos ejemplos como el Triángulo y la Alfombra de Sierpinski, la esponja de Menger y la curva de Koch.

Palabras clave: *medida de Hausdorff – dimensión de Hausdorff – conjunto de Cantor – fractal*

Abstract

We introduce the concepts of Hausdorff measure and dimension for every subset of \mathbb{R}^n . Moreover, we show different techniques to compute the Hausdorff dimension of a set and we apply them to different examples, specially to the Cantor set.

We also consider the definition of a fractal and we provide some examples like the Sierpinski Triangle and Carpet, the Menger sponge and the Koch curve.

Keywords: *Hausdorff measure – Hausdorff dimension – Cantor set – fractal*

Contenido

Resumen/Abstract	III
Introducción	VII
1. Medida y dimensión de Hausdorff	1
1.1. Medidas exteriores	1
1.2. Medida de Hausdorff	5
1.3. Dimensión de Hausdorff	9
1.4. Dimensión del conjunto de Cantor	12
2. Técnicas para calcular la dimensión de Hausdorff	19
2.1. Dimensión caja	19
2.2. Distribución de masas	21
2.3. Dimensión de conjuntos producto	23
2.4. Sistemas iterados de funciones	25
3. Fractales	35
3.1. Dimensión Topológica	35
3.2. Curvas de Peano	37
3.3. Fractales	41
4. Dimensión caja de grafos	43
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

Con el objetivo de precisar la definición de dimensión, Falconer sugirió que tal concepto debería satisfacer las siguientes propiedades:

1. **Variedades diferenciables.** Si F es una n -variedad diferenciable, $\dim(F) = n$.
2. **Conjuntos abiertos.** Para cualquier conjunto abierto $F \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(F) = n$.
3. **Conjuntos contables.** Si F es finito o contable, $\dim(F) = 0$.
4. **Monotonía.** Si $E \subset F \Rightarrow \dim(E) \leq \dim(F)$.
5. **Estabilidad.** $\dim(E \cup F) = \max\{\dim(E), \dim(F)\}$.
6. **Estabilidad contable.** $\dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_i \dim(F_i)$.
7. **Funciones Lipschitz.** Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz, entonces $\dim[f(E)] \leq \dim(E)$.
8. **Funciones bi-Lipschitz.** Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es bi-Lipschitz, entonces $\dim[f(E)] = \dim(E)$.
9. **Invarianza geométrica.** Si f es una semejanza o transformación afín, entonces $\dim[f(F)] = \dim(F)$.

Recuérdese que $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ es Lipschitz si y sólo si $\exists c$ tal que

$$\forall x, y \in E, |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

y que f es bi-Lipschitz si y sólo si $\exists c_1, c_2$ tal que

$$\forall x, y \in E, c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|,$$

y que f es una semejanza si y sólo si

$$\forall x, y \in E, |f(x) - f(y)| = c|x - y|.$$

Por tanto (9) es un caso especial de (8), que a su vez es un caso especial de (7).

Dado $F \subset \mathbb{R}^n$, la medida s -dimensional de Hausdorff de F es el número

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F),$$

donde

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \right\},$$

siendo $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^n con diámetro menor o igual que δ que recubren F . Entonces \mathcal{H}^s es una medida exterior que, restringida a los conjuntos de Borel, es una medida.

Existe un valor crítico s en el cual la función $\mathcal{H}^s(F)$ salta de ∞ a 0. Este valor crítico recibe el nombre de dimensión Hausdorff de F y satisface las propiedades sugeridas por Falconer.

Una primera pregunta que surge de forma natural es si existen conjuntos con dimensión no entera. Se puede comprobar que la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor es $\ln 2 / \ln 3$.

Calcular o estimar la dimensión de Hausdorff no es una tarea sencilla. Se han desarrollado diferentes técnicas entre las que se encuentran la dimensión caja, que a pesar de llamarse dimensión no satisface todas las propiedades sugeridas por Falconer, en particular no satisface la estabilidad contable; o la dimensión de conjuntos producto, que como veremos no cumple en general que $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$, aunque sí cuando la dimensión Hausdorff y caja de alguno de ellos coincide; o el uso de similaridades. Haciendo uso de esta última técnica uno puede obtener de forma sencilla la dimensión Hausdorff del conjunto de Cantor, el triángulo y la alfombra de Sierpinski, la esponja de Menger o la curva de Koch, entre otros.

Se define la dimensión topológica de manera inductiva asumiendo que un conjunto tiene dimensión topológica cero si todo punto posee entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras no intersectan al conjunto. Entonces, un conjunto tiene dimensión topológica k si cada punto de éste tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras intersectan al conjunto en un conjunto de dimensión $k-1$.

Por otro lado, se dice que un conjunto es autosimilar si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo. Haciendo uso de los conceptos anteriormente introducidos, se define fractal como un conjunto autosimilar con dimensión Hausdorff mayor que su dimensión topológica, por ejemplo, los conjuntos anteriormente mencionados.

Parecería razonable pensar que la imagen continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tuviese dimensión topológica 1. Sin embargo, no es verdad, existen curvas continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R}^n cuya imagen es una región sólida en \mathbb{R}^n , las llamadas curvas de Peano. Hilbert fue el primero en proponer un principio de generación geométrica para la construcción de las mismas.

Si f es una función definida en $[a, b]$ y tiene derivada continua, no es difícil ver que su grafo tiene dimensión Hausdorff 1, porque su longitud es finita. Sin embargo, es probable que una función continua sea lo suficientemente irregular para que su grafo tenga dimensión Hausdorff estrictamente mayor que 1. Dado que demostrar ésto es un problema bastante complejo, nosotros nos limitamos a demostrarlo para la dimensión caja.

Medida y dimensión de Hausdorff

En este capítulo introduciremos las definiciones de medida y dimensión de Hausdorff para cualquier subconjunto de \mathbb{R}^n y, como ejemplo, consideraremos el conjunto de Cantor, uno de los conjuntos más estudiados desde la perspectiva de esta teoría.

1.1. Medidas exteriores

Definición 1.1. Una familia \mathfrak{M} de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una σ -álgebra si y sólo si:

1. $\phi, X \in \mathfrak{M}$,
2. dado $A \in \mathfrak{M}$, entonces $A^c \in \mathfrak{M}$,
3. dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos en \mathfrak{M} , $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

Un par ordenado (X, \mathfrak{M}) formado por un conjunto y una σ -álgebra sobre él se denomina espacio medible.

Definición 1.2. Sea (X, \mathfrak{M}) un espacio medible. Una medida en (X, \mathfrak{M}) es una función $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

1. $\mu(\phi) = 0$,
2. dada $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos disjuntos, $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Una 3-tupla ordenada (X, \mathfrak{M}, μ) formado por un conjunto, una σ -álgebra sobre él y una medida se denomina espacio de medida.

Si (X, \mathfrak{M}, μ) es un espacio de medida, un conjunto $E \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(E) = 0$ se denomina conjunto nulo.

Si $\mu(E) = 0$ y $F \subset E$, entonces, si $F \in \mathfrak{M}$, $\mu(F) = 0$. En general, no es cierto que $F \in \mathfrak{M}$. Una medida cuyo dominio incluya todos los subconjuntos de todos los conjuntos nulos se dice completa.

Definición 1.3. Una medida exterior sobre un conjunto X no vacío es una función $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ tal que:

1. $\mu^*(\phi) = 0$,
2. $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ si $A \subset B$,
3. $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ (subaditividad contable).

Proposición 1.4. Sea $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $\phi \in \mathcal{E}$, existe $\{A_j\} \subset \mathcal{E}$ un recubrimiento de X , y $\rho(\phi) = 0$. Para todo $A \subset X$ definimos:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ y } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}.$$

Entonces μ^* es una medida exterior.

Demostración

Para todo $A \subset X$, existe $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ (basta tomar el recubrimiento de X por conjuntos de \mathcal{E} que se tiene por hipótesis), así que μ^* está bien definido. Claramente $\mu^*(\phi) = 0$ (tómese $E_j = \phi \forall j$), y si $A \subset B$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, por cómo está definido μ^* , ya que, si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es un recubrimiento de B , también lo es de A , y por tanto $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

Para probar la subaditividad contable, suponemos que $\{A_j\}_1^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ y $\epsilon > 0$. Para cada j , existen $\{E_j^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ tal que $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j^k$ y $\sum_{j=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \mu^*(A_j) + \epsilon 2^{-j}$. Pero entonces si $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, se tiene que $A \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_j^k$ y $\sum_{j,k=1}^{\infty} \rho(E_j^k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$ y por tanto, $\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \epsilon$. La arbitrariedad de ϵ concluye la prueba. \square

Definición 1.5. Si μ^* es una medida exterior en X , un conjunto $A \subset X$ se dice μ^* -medible si: $\forall E \subset X, \mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$.

Claramente, la desigualdad $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, $\forall E \subset X$ se cumple para cualquier A y E . Por lo que, para comprobar si A es μ^* -medible, basta probar la desigualdad inversa (que es trivial para $\mu^*(E) = \infty$). Por tanto, A es μ^* -medible si y sólo si:

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \forall E \subset X \text{ tal que } \mu^*(E) < \infty.$$

Teorema 1.6. *Si μ^* es una medida exterior en X , la colección \mathfrak{M} de conjuntos μ^* -medibles es una σ -álgebra, y la restricción de μ^* a \mathfrak{M} es una medida completa.*

Demostración

Primero observamos que ϕ y X son μ^* -medibles, y por tanto están en \mathfrak{M} . Segundo, para todo conjunto A de \mathfrak{M} , A^c está también en \mathfrak{M} , ya que la definición de μ^* -medibilidad es simétrica respecto a A y A^c . Sean ahora $A, B \in \mathfrak{M}$ y $E \subset X$,

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \\ &= \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c). \end{aligned}$$

(aplicando de nuevo la definición de μ^* -medibilidad en cada sumando)

Pero $(A \cup B) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$, así que, por subaditividad,

$$\mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) + \mu^*(E \cap A^c \cap B) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)).$$

Y por tanto,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

Concluimos que $A \cup B \in \mathfrak{M}$. Asimismo, si $A, B \in \mathfrak{M}$ y $A \cap B = \phi$,

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Por tanto μ^* es aditiva finitamente en \mathfrak{M} . Basta probar que \mathfrak{M} es cerrada bajo unión contable de conjuntos disjuntos. Si $\{A_j\}_1^\infty$ es una sucesión de conjuntos disjuntos en \mathfrak{M} , sea $B_n = \bigcup_1^n A_j$ y $B = \bigcup_1^\infty A_j$. Entonces, para cualquier $E \subset X$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}).$$

Por inducción es fácil probar que $\mu^*(E \cap B_n) = \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j)$. Por tanto,

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c) \geq \sum_1^n \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c).$$

Y cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\geq \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(\bigcup_1^\infty (E \cap A_j)) + \mu^*(E \cap B^c) = \\ &\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) \geq \mu^*(E). \end{aligned}$$

Entonces todas las desigualdades anteriores son igualdades. Concluimos que $B \in \mathfrak{M}$ y, tomando $E = B$, que $\mu^*(B) = \sum_1^\infty \mu^*(A_j)$. Para terminar, si $\mu^*(A) = 0$, $\forall E \subset X$, se tiene que

$$\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

Entonces $A \in \mathfrak{M}$. Por tanto, $\mu_{|\mathfrak{M}}^*$ es una medida completa. \square

Definición 1.7. Sea (X, d) un espacio métrico, una medida μ^* sobre X se denomina medida exterior métrica si $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ siempre que $d(A, B) > 0$.

Proposición 1.8. Si μ^* es una medida exterior métrica sobre X , todo conjunto de Borel de X es μ^* -medible.

Demostración

Ya que los conjuntos cerrados generan la σ -álgebra de Borel, basta probar que todo conjunto cerrado $F \subset X$ es μ^* -medible. Así, dado $A \subset X$ con $\mu^*(A) < \infty$, queremos probar que:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c).$$

Sea $B_n = \{x \in A \cap F^c : d(x, F) \geq n^{-1}\}$. B_n es una sucesión creciente de conjuntos cuya unión es $A \cap F^c$ y $d(B_n, F) \geq n^{-1}$. Por tanto,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap F) \cup B_n) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(B_n).$$

Será suficiente probar que $\mu^*(A \cap F^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(B_n)$. Sea $C_n = B_{n+1} \setminus B_n$. Si $x \in C_{n+1}$ y $d(x, y) < [n(n+1)]^{-1}$, entonces,

$$d(y, F) \leq d(x, y) + d(x, F) < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n},$$

de modo que $d(C_{n+1}, B_n) \geq [n(n+1)]^{-1}$. Por inducción obtenemos que

$$\mu^*(B_{2k+1}) \geq \mu^*(C_{2k} \cup B_{2k-1}) = \mu^*(C_{2k}) + \mu^*(B_{2k-1}) \geq \dots \geq \sum_1^k \mu^*(C_{2j}).$$

Y de manera similar $\mu^*(B_{2k}) \geq \sum_1^k \mu^*(C_{2j-1})$. Ya que $\mu^*(B_n) \leq \mu^*(A) < \infty$, se sigue que las series $\sum_1^\infty \mu^*(C_{2j})$ y $\sum_1^\infty \mu^*(C_{2j-1})$ son convergentes. Por subaditividad obtenemos,

$$\mu^*(A \cap F^c) \leq \mu^*(B_n) + \sum_{n+1}^\infty \mu^*(C_j).$$

Cuando $n \rightarrow \infty$ el último sumando se va a a cero y obtenemos

$$\mu^*(A \cap F^c) \leq \liminf \mu^*(B_n) \leq \limsup \mu^*(B_n) \leq \mu^*(A \cap F^c).$$

Y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(B_n) = \mu^*(A \cap F^c)$, como queríamos probar. \square

1.2. Medida de Hausdorff

Definición 1.9. Sea U un subconjunto de \mathbb{R}^n no vacío. El diámetro de U , es el número

$$|U| := \sup\{|x - y| : x, y \in U\}.$$

Por ejemplo, si $U = [a, b] \times [c, d]$ entonces $|U|$ corresponde a la longitud de la diagonal del rectángulo U .

Definición 1.10. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Una colección numerable de subconjuntos de \mathbb{R}^n , $\{U_i\}_{i \geq 1}$, es un δ -recubrimiento de F , si para todo $i \geq 1$ se tiene que $0 \leq |U_i| \leq \delta$ y además

$$F \subseteq \bigcup_{i \geq 1} U_i.$$

Definición 1.11. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío y $s \geq 0$. Para cualquier $\delta > 0$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\}.$$

Observemos que a medida que δ se hace más pequeño, la clase de cubrimientos permitidos de F decrece, por lo tanto, la expresión \mathcal{H}_δ^s crece y tiende a un límite cuando $\delta \rightarrow 0$.

Nótese que los conjuntos U_j de la definición de \mathcal{H}_δ^s son subconjuntos arbitrarios de \mathbb{R}^n . Sin embargo, se obtendrían los mismos resultados si impusiéramos que los subconjuntos U_j fuesen cerrados (porque $|U_j| = |\overline{U_j}|$) o abiertos (porque podemos remplazar el subconjunto U_j por el abierto $A_j = \{x : d(x, U_j) < \epsilon 2^{-j-1}\}$, cuyo diámetro es como mucho $|U_j| + \epsilon 2^{-j}$).

Además, la restricción a conjuntos de diámetro pequeño es necesaria para proporcionar una medida precisa de conjuntos de forma irregular; de otra manera se podría recubrir un conjunto por sí mismo y la medida sería como mucho la potencia p -ésima de su diámetro. Considérese, por ejemplo, la curva $A_m = \{(x, \text{sen} mx) : |x| \leq 1\}$ en \mathbb{R}^2 . Claramente $|A_m| \leq 2^{3/2}$ para todo m , pero la longitud de A_m tiende a ∞ cuando m tiende a ∞ . Se necesita tomar $\delta \ll m^{-1}$ para que $\mathcal{H}_\delta^1(A_m)$ sea una estimación fiel de la medida de A_m .

Definición 1.12. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$, la medida s -dimensional de Hausdorff de F es el número

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

El límite anterior existe para cualquier $F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Proposición 1.13. *La medida de Hausdorff es invariante por traslaciones,*

$$\mathcal{H}^s(E + h) = \mathcal{H}^s(E), \forall h \in \mathbb{R}^n,$$

y por rotaciones,

$$\mathcal{H}^s(rE) = \mathcal{H}^s(E), \text{ donde } r \text{ es una rotación en } \mathbb{R}.$$

Demostración Se deduce del hecho de que el diámetro es invariante por traslaciones y rotaciones.

Teorema 1.14. \mathcal{H}^s es una medida exterior métrica.

Demostración

Por la proposición 1.4, sabemos que toda función μ^* tal que $\mu^* = \inf\{\sum_1^\infty \rho(E_j) : E_j \in \mathcal{E} \text{ y } A \subset \bigcup_1^\infty E_j\}$ define una medida exterior. \mathcal{H}^s , por tanto, es una medida exterior, donde $\mathcal{E} = \{U \in \mathbb{R}^n : |U| < \delta\}$ y $\rho : \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$, $\rho(A) = |A|^s$.

Para ver que \mathcal{H}^s es una medida exterior métrica tomamos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $d(A, B) > 0$ y $\{C_j\}_1^\infty$ un recubrimiento de $A \cup B$ tal que $\forall j, |C_j| \leq \delta < d(A, B)$. Nótese que entonces ningún C_j interseca a ambos conjuntos A y B . Separando el sumatorio $\sum_1^\infty |C_j|^s$ en dos partes conforme a si $C_j \cap A = \phi$ ó $C_j \cap B = \phi$ obtenemos que $\sum_1^\infty |C_j|^s \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$ y por tanto $\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$. Como esta desigualdad es válida siempre que $\delta < d(A, B)$, la igualdad se obtiene haciendo $\delta \rightarrow 0$. Concluimos que \mathcal{H}^s es una medida exterior métrica. \square

Ahora, como consecuencia de la proposición 1.8, tenemos que:

Corolario 1.15. *La restricción de \mathcal{H}^s a los conjuntos de Borel es una medida.*

Proposición 1.16. *Se satisfacen las siguientes relaciones entre medidas de Hausdorff y otras medidas:*

- Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel, \mathcal{H}^0 cuenta el número de puntos en E .*
- Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de Borel, $\mathcal{H}^1 = m(E)$ (m la medida de Lebesgue).*
- Si $E \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel, entonces $\exists c_n$ tal que*

$$c_n \mathcal{H}^n(E) \leq m_n(E) \leq 2^n c_n \mathcal{H}^n(E),$$

donde m_n denota la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n .

Demostración

- Sea $x \in \mathbb{R}^n$, obsérvese que para todo $\delta > 0$, $\mathcal{H}_\delta^0(\{x\}) = 1$, por lo que $\mathcal{H}_0^0(\{x\}) = 1$. Como \mathcal{H}_0^0 es una medida (con aditividad numerable) se deduce que cuenta el número de puntos.

b) Sea ahora $E \subset \mathbb{R}$. Si consideramos la construcción de la medida de Lebesgue a partir de intervalos cerrados, el enunciado es consecuencia del hecho de que cualquier δ -recubrimiento por intervalos cerrados es en particular un δ -recubrimiento y que cualquier subconjunto de diámetro δ está contenido en un intervalo de longitud δ .

c) Se puede poner la medida de Lebesgue de E como:

$$m_n(E) = \inf \left\{ \sum_j m_n(B_j) : B_j \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento por bolas} \right\},$$

así que para cada $\epsilon, \delta > 0$, existe un δ -recubrimiento $\{B_j\}$ tal que $\sum_j m_n(B_j) \leq m_n(E) + \epsilon$. Entonces,

$$\mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \sum_j (\text{diam} B_j)^n = \frac{1}{c_n} \sum_j m_n(B_j) \leq \frac{1}{c_n} (m_n(E) + \epsilon).$$

Haciendo tender δ y ϵ a cero, obtenemos $\mathcal{H}^n(E) \leq \frac{1}{c_n} m_n(E)$.

Para la otra desigualdad, consideremos para cada ϵ un δ -recubrimiento $\{F_j\}$ tal que $\sum_j (\text{diam} F_j)^n \leq \mathcal{H}_n(E) + \epsilon$. Podemos encontrar una colección de bolas $\{B_j\}$ tales que $B_j \supset F_j$ y con $\text{diam} B_j = 2 \text{diam} F_j$. Entonces,

$$m_n(E) \leq \sum_j m_n(B_j) = \sum_j c_n (\text{diam} B_j)^n = 2^n c_n \sum_j (\text{diam} F_j)^n \leq 2^n c_n (\mathcal{H}^n(E) + \epsilon).$$

Haciendo $\epsilon \rightarrow 0$ se obtiene el resultado.

□

En la proposición 1.16 hemos comparado la medida de Hausdorff y la medida de Lebesgue sobre conjuntos de Borel. En realidad, esta medida generaliza las nociones de longitud, área y volumen.

Por ejemplo, si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto de Borel, entonces

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} m_n(F).$$

Donde c_n es el volumen de una bola unitaria n -dimensional.

Proposición 1.17. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\lambda > 0$. Entonces, para cada $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración

Si $\{U_i\}_{i \geq 1}$ es un δ -recubrimiento de F , entonces $\{\lambda U_i\}_{i \geq 1}$ es un $\lambda\delta$ -recubrimiento de λF .

Luego

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \sum_{i \geq 1} |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_{i \geq 1} |U_i|^s.$$

Por tanto,

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} |U_i|^s : U_i \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } F \right\} \leq \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Así, cuando $\delta \rightarrow 0$, tenemos que

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Reemplazando λ por $1/\lambda$ y F por λF obtenemos la desigualdad inversa. \square

Un argumento similar da una estimación básica para una clase más general de transformaciones.

Definición 1.18. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Una aplicación $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice *lipschitziana* de orden $\alpha > 0$ en F si existe $c \geq 0$ tal que para todo $x, y \in F$,

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

La siguiente proposición permite relacionar las medidas de Hausdorff de los conjuntos F y $f(F)$, cuando la función es Lipschitziana de orden $\alpha > 0$ en F .

Proposición 1.19. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación Lipschitziana de orden α . Entonces, para cada $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) = c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración Si $\{U_i\}_{i \geq 1}$ es un δ -recubrimiento de F , entonces

$$|f(F \cap U_i)| \leq c|F \cap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha.$$

De donde se deduce que $\{f(F \cap U_i)\}_{i \geq 1}$ es un ε -recubrimiento de $f(F)$, considerando $\varepsilon = c\delta^\alpha$. De este modo, sumando sobre los elementos del recubrimiento, tendremos

$$\sum_{i \geq 1} |f(F \cap U_i)|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i \geq 1} |U_i|^s.$$

Por lo tanto, tomando el ínfimo sobre todos los δ -recubrimientos de F , se tiene

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Así, haciendo $\delta \rightarrow 0$, obtenemos

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F).$$

□

Observemos que si $t > s$ y $\{U_i\}_{i \geq 1}$ es un δ -recubrimiento de F , entonces

$$\sum_{i \geq 1} |U_i|^t \leq \sum_{i \geq 1} |U_i|^{t-s} |U_i|^s \leq \delta^{t-s} \sum_{i \geq 1} |U_i|^s.$$

La última desigualdad se obtiene ya que $|U_i| \leq \delta$ para todo $i \geq 1$. Tomando ínfimos obtenemos

$$\mathcal{H}_\delta^t(F) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

Si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, haciendo tender $\delta \rightarrow 0$, obtenemos que $\mathcal{H}^t(F) = 0$ para $t > s$. Análogamente, si $\mathcal{H}^t(F) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.

1.3. Dimensión de Hausdorff

La última observación nos muestra que existe un valor crítico s en el cual la función $\mathcal{H}^s(F)$ salta de ∞ a 0. Este valor crítico recibe el nombre de Dimensión de Hausdorff de F .

Definición 1.20. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. La dimensión de Hausdorff de F , es el número

$$\dim_H(F) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

De la definición anterior, y adoptando la convención, $\sup \emptyset = 0$, tenemos:

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{si } 0 \leq s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F) \end{cases}$$

Si $s = \dim_H(F)$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser igual a 0, ∞ , o $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

A continuación veremos que la dimensión de Hausdorff cumple las propiedades requeridas por Falconer para poder ser una dimensión.

Proposición 1.21. La dimensión de Hausdorff satisface las siguientes propiedades:

1. Si $E \subseteq F$ entonces $\dim_H(E) \leq \dim_H(F)$ (Monotonía).
2. Si $\{F_i\}_{i \geq 1}$ es una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Entonces

$$\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\} \text{ (Estabilidad numerable).}$$

3. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es numerable, entonces $\dim_H(F) = 0$ (Dimensión de conjuntos numerables).
4. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces $\dim_H(F) = n$ (Dimensión de conjuntos abierto).

Demostración

1. Por propiedades de medida, si $E \subseteq F$, entonces

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F), \text{ para todo } s \text{ en } \mathbb{R}^+.$$

Por lo tanto, si $\mathcal{H}^s(F) = 0$ tendremos que $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Concluyendo que

$$\dim_H(E) \leq \dim_H(F).$$

2. De la propiedad de monotonía, para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\dim_H(F_j) \leq \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

Por otra parte, si $s > \dim_H(F_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$. Así, por propiedades de medida,

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) = 0.$$

Llegando a que $\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = 0$, de donde se concluye

$$s \geq \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right),$$

y en consecuencia,

$$\sup_{1 \leq i < \infty} \{\dim_H(F_i)\} = \dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right).$$

3. Sea $F = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, donde cada F_i contiene un único punto. Entonces $\mathcal{H}^0(F_i) =$

1. Por lo tanto, $\dim_H(F_i) = 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Luego, de la estabilidad numerable se termina concluyendo que

$$\dim_H(F) = 0.$$

4. Primero observemos que una bola en \mathbb{R}^n de radio $r > 0$ tiene dimensión igual a n . Luego, por estabilidad numerable es suficiente considerar conjuntos $F \subseteq \mathbb{R}^n$, abiertos y acotados. Sin embargo, todo conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado es la unión numerable de bolas B_i , con $i \geq 1$, en \mathbb{R}^n , es decir,

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Nuevamente, por la propiedad de estabilidad numerable

$$\dim_H(F) = \sup_{1 \leq i \leq \infty} \dim_H(B_i) = n.$$

□

Proposición 1.22. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $f : F \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función Lipschitziana de orden α . Entonces*

$$\dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H F.$$

Demostración Si $s > \dim_H(F)$ entonces de la proposición 1.19 y de la definición de dimensión de Hausdorff, tenemos que

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F) = 0.$$

Esto implica que para todo $s > \dim_H(F)$

$$\dim_H(f(F)) \leq \frac{s}{\alpha}.$$

De donde se concluye que

$$\dim_H(f(F)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(F).$$

□

En general la dimensión dice poco acerca de propiedades topológicas, pero cuando la dimensión de Hausdorff es menor que 1, dos puntos no pueden estar en la misma componente conexa.

Proposición 1.23. *Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ con $\dim_H F < 1$ es totalmente desconexo.*

Demostración Sean x e y dos puntos diferentes de F . Definamos $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ por $f(z) = |z - x|$. Como $|f(z) - f(w)| \leq |z - w|$, tenemos que $\dim_H f(F) \leq \dim_H F < 1$. Por tanto $f(F)$ es un subconjunto de \mathbb{R} de medida cero y por tanto complementario denso. Elijiendo r con $r \notin f(F)$ y $0 < r < f(y)$ se sigue que

$$F = \{z \in F : |z - x| < r\} \cup \{z \in F : |z - x| > r\}.$$

Por tanto F esta contenido en dos conjuntos abiertos disjuntos con x en uno e y en el otro. Así que x e y yacen en componentes conexas distintas.

□

1.4. Dimensión del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor se genera a partir de un proceso iterativo. Comenzamos con el intervalo $C_0 = [0, 1]$.

En el primer paso, eliminamos el intervalo abierto $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y obtenemos el conjunto $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$.

En el segundo paso, de cada intervalo que compone C_1 retiramos los intervalos abiertos centrales de longitud $\frac{1}{9}$, obteniendo el conjunto $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$.

En general, en el paso n -ésimo, retiramos intervalos centrales abiertos de longitud $\frac{1}{3^n}$. Haciendo este proceso indefinidamente, obtenemos el conjunto de Cantor C , definido por:

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$



Figura 1.1. La construcción iterativa del conjunto de Cantor.

Este conjunto es compacto, perfecto y nunca denso. Además es no numerable y tiene medida de Lebesgue cero.

A continuación, calcularemos la dimensión Hausdorff del conjunto de Cantor.

Teorema 1.24. $dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ y $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^{\ln 2 / \ln 3}(C) \leq 1$.

Demostración

Consideremos los intervalos de la k -ésima etapa de la construcción del conjunto de Cantor como un 3^{-k} -recubrimiento de este. Entonces,

$$\mathcal{H}_{3^{-k}}^s(C) \leq 2^k 3^{-ks} = 1,$$

con $s = \ln 2 / \ln 3$. Haciendo $k \rightarrow \infty$ se tiene que $3^{-k} \rightarrow 0$ y en consecuencia $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$.

Por otro lado, usando la compacidad de C , es suficiente verificar que

$$\sum_{i \geq 1} |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2},$$

para cualquier colección finita $\{U_i\}_{i \geq 1}$ de intervalos cerrados de $[0, 1]$ que cubren a C . Para cada U_i , sea k el entero tal que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Entonces U_i interseca a lo sumo un intervalo del k -nivel, ya que la separación de los intervalos de este nivel es al menos de 3^{-k} . Si $j \geq k$, entonces U_i interseca a lo sumo

$$2^{j-k} = 2^j 3^{-sk} \leq 2^j 3^s |U_i|^s,$$

intervalos del j -nivel C_j . Ya que

$$2^j 3^{-(k+1)s} = 2^j 3^{-sk} 3^{-s} \leq 2^j |U_i|^s.$$

Si elegimos j lo suficientemente grande tal que $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ para todo U_i (esto es posible ya que la colección es finita) y sumamos todos los intervalos de la k -ésima etapa, tenemos que

$$2^j \leq \sum_{i \geq 1} 2^j 3^s |U_i|^s,$$

ya que $\{U_i\}_{i \geq 1}$, interseca a todos los 2^j intervalos básicos de largo 3^{-j} . Con lo que tenemos que,

$$\sum_{i \geq 1} |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}.$$

Tomando ínfimos y haciendo tender el diámetro de los cubrimientos a cero, obtenemos $\mathcal{H}^s(C) \geq \frac{1}{2}$.

Dado que $\mathcal{H}^{\ln 2 / \ln 3}(C)$ es finita, obtenemos que $\dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. □

Otra manera diferente de probar que $\dim(C) \geq \ln 2 / \ln 3$ es haciendo uso de la función de Cantor. A continuación vamos a definir una función continua $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ cuya construcción está basada en el conjunto de Cantor.

Recordemos que el conjunto de Cantor $C \subset [0, 1]$ y $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$, donde cada $C_k =$

$\bigcup_{j=0}^{2^k-1} \left[\frac{a_j}{3^k}, \frac{a_j+1}{3^k} \right]$ con $a_0 = 0$ y por tanto una unión disjunta de 2^k intervalos de longitud $\frac{1}{3^k}$.

Sean $f_n = (\frac{3}{2})^n \chi_{C_n}$ y $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$. Por tanto $f_0 = 1$, $F_0(x) = x$, la función $F_1(x)$ una función continua creciente en $[0, 1]$ que viene dada por

$$F_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(3x - 2) & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq 1 \end{cases}$$

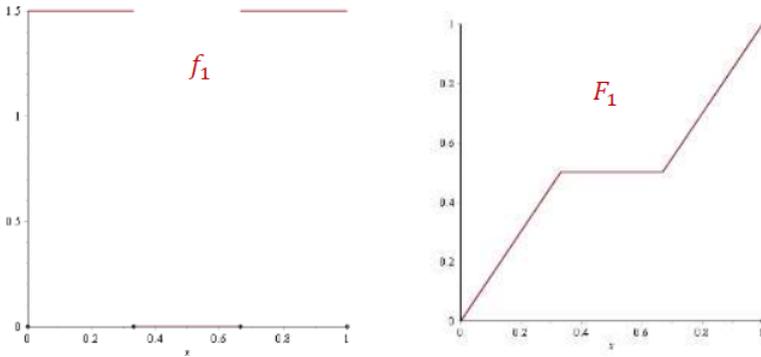


Figura 1.2. Primera etapa.

De la misma manera, $F_2(x)$ es continua y creciente y viene dada por

$$F_2(x) = \begin{cases} \frac{9}{4}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{9} \\ \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{2}{9} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(3x - 2) & \text{si } \frac{2}{9} \leq x \leq \frac{4}{9} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{4}{9} \leq x \leq \frac{5}{9} \\ \frac{1}{2} + \frac{9}{4}x & \text{si } \frac{5}{9} \leq x \leq \frac{8}{9} \\ \frac{3}{4} & \text{si } \frac{8}{9} \leq x \leq \frac{7}{9} \\ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}(3x - 2) & \text{si } \frac{7}{9} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

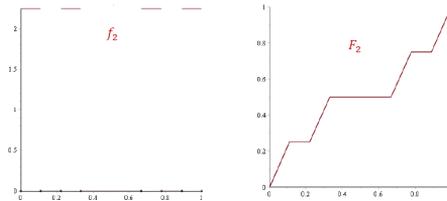


Figura 1.3. Segunda etapa.

Observemos que

$$\int_{\frac{a_j}{3^k}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} f_{n+1}(t) dt = \int_{\frac{a_j}{3^k}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t) dt = \frac{1}{2^n} = \int_{\frac{a_j}{3^k}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t) dt.$$

Por tanto obtenemos que $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones continuas y crecientes donde su término general verifica

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ F_{n-1}(x) & \text{si } x \in [0, 1] \setminus C_{n-1} \\ \frac{j}{2^n} & \text{si } \frac{a_j+1}{3^n} \leq x \leq \frac{a_{j+1}}{3^n} \text{ para } j = 0, \dots, 2^{n-1} \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

y los escalones de la función los unimos de forma lineal.

Proposición 1.25. Sean $F_n(x)$ las funciones que acabamos de definir. Entonces:

1. $|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, x \in [0, 1].$
2. $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy uniforme en $[0, 1].$

Demostración.

1. Si $x \in [0, 1] \setminus C_n$, entonces $F_{n+1}(x) = F_n(x).$

Por otro lado, si $x \in C_n$, tenemos que $x \in [\frac{a_j}{3^k}, \frac{a_j+1}{3^k}]$ y

$$|F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq \int_{\frac{a_j}{3^k}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \chi_{C_{n+1}}(t) dt + \int_{\frac{a_j}{3^k}}^{\frac{a_j+1}{3^n}} \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}(t) dt = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que ver si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n > n_0$, se tiene que $|F_m(x) - F_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0, 1].$ Fijemos $\varepsilon > 0$, y tomemos n_0

de forma que $\sum_{k=n_0}^\infty \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon.$ Sean $m, n > n_0$, y supongamos que $m > n$,

entonces, aplicando el apartado anterior,

$$\begin{aligned} |F_m(x) - F_n(x)| &= |F_m(x) - F_{m-1}(x) + F_{m-1}(x) - F_{m-2}(x) + \dots + F_{n+1}(x) - F_n(x)| \\ &\leq |F_m(x) - F_{m-1}(x)| + |F_{m-1}(x) - F_{m-2}(x)| + \dots + |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \\ &\leq \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^m} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq \sum_{k=n_0}^\infty \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Hemos demostrado por tanto que $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy uniforme.

□

El espacio de las funciones continuas en $[0, 1]$ con la norma uniforme es completo, luego, toda sucesión de Cauchy es convergente, es decir, $F_n(x) \rightarrow F(x)$ cuando $n \rightarrow \infty.$ A esta función la llamaremos **Función de Cantor.**

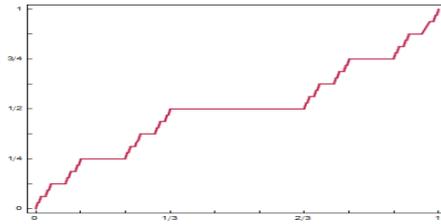


Figura 1.4. Función de Cantor.

Teorema 1.26. *La función de Cantor es continua y creciente.*

Demostración. Como $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de funciones crecientes, tenemos que, para cualquier n y todo $x, y \in [0, 1]$, con $x < y$, $F_n(x) \leq F_n(y)$. Tomando límites cuando $n \rightarrow \infty$ a ambos lados, llegamos a que $F(x) \leq F(y)$. Por tanto, F es creciente. Además, como $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión uniformemente de Cauchy y $\{F_n(x)\}_{n=1}^\infty$ son funciones continuas, tenemos que $F(x)$ es una función continua. \square

Además, por construcción de la función de Cantor, es fácil observar que:

- $F(0)=0$.
- $F(1)=1$.
- F es constante en cada intervalo del complementario del conjunto de Cantor.

Por tanto, $F' = 0$ en c.t.p.

Teorema 1.27. *La función de Cantor en $[0, 1]$ es Lipschitziana de orden $\alpha = \ln 2 / \ln 3$.*

Demostración. Primero nótese que

$$|F_n(x) - F_n(y)| = \left| \int_0^x \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n(t)} dt - \int_0^y \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n(t)} dt \right| = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left| \int_x^y \chi_{C_n(t)} dt \right| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y|.$$

Así, se sigue que:

$$|F(x) - F(y)| \leq |F_n(x) - F_n(y)| + |F(x) - F_n(x)| + |F(y) - F_n(y)| \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n |x - y| + \frac{16}{2^n}.$$

Fijados x e y , elegimos n tal que $1 \leq 3^n |x - y| \leq 3$. Entonces se tiene:

$$|F(x) - F(y)| \leq \frac{19}{2^n} = \frac{19}{(3^n)^\alpha} \leq 19|x - y|^\alpha.$$

puesto que $3^\alpha = 2$ y $\frac{1}{3^n} \leq |x - y|$.

\square

Como consecuencia obtenemos que:

Corolario 1.28. $\dim_H(C) \geq \ln 2 / \ln 3$.

Demostración. La función de Cantor cumple que $F(C) = [0, 1]$ y es lipschitziana de orden $\alpha = \ln 2 / \ln 3$. Entonces:

$$1 = \dim([0, 1]) = \dim(F(C)) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \dim_H(C).$$

como consecuencia de la proposición 1.22. Por tanto, $\dim_H(C) \geq \ln 2 / \ln 3$. □

Por otro lado, como consecuencia del Teorema 1.24.

Corolario 1.29. *La función de Cantor no es lipschitziana de orden $\alpha > \ln 2 / \ln 3$.*

A continuación, introduciremos otro conjunto conocido como el conjunto Smith-Volterra-Cantor (SVC). Este conjunto no va a contener intervalos y sin embargo tendrá medida positiva. Análogamente al conjunto de Cantor, comenzamos eliminando un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{4}$ del centro de $[0, 1]$, denotando el conjunto resultante como S_1 . A continuación, eliminamos un intervalo abierto de longitud $\frac{1}{16}$ del centro de los dos intervalos que conforman S_1 . Obtenemos así lo que denominaremos S_2 . En general, en el paso n -ésimo eliminaremos intervalos de longitud $\frac{1}{4^n}$ del centro de los intervalos que conforman S_{n-1} . Continuamos este proceso, obteniendo una sucesión infinita de conjuntos $\{S_n\}_{n=1}^\infty$.

El conjunto SVC, que denotaremos por S , viene definido como:

$$S = \bigcap_{n=0}^\infty S_n.$$

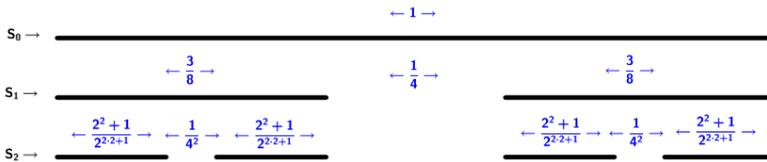


Figura 1.5. Construcción iterativa del conjunto SVC.

Este conjunto es cerrado, nunca denso y totalmente desconexo.

Teorema 1.30. *La dimensión de Hausdorff del conjunto de Smith-Volterra-Cantor es 1.*

Demostración Lo demostraremos a partir de su medida de Hausdorff. Para calcular la medida del conjunto, medimos lo que eliminamos del intervalo $[0, 1]$ a lo largo del proceso. Sabemos que en el primer paso eliminábamos un

intervalo de longitud $\frac{1}{4}$, en el segundo, 2 intervalos de longitud $\frac{1}{16}$ y, en general, en el paso n -ésimo, 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{4^n}$. Así, podemos observar que la medida del conjunto $[0, 1] \setminus S$ es

$$m([0, 1] \setminus S) = \frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{4}{64} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{4^k} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Y por tanto $m(S) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Sabemos que la medida 1-dimensional de Hausdorff coincide con la medida de Lebesgue, luego al ser positiva y no nula el salto de infinito a 0 ha de producirse en 1, y por tanto la dimensión del conjunto SVC es 1.

□

Técnicas para calcular la dimensión de Hausdorff

En este capítulo mostraremos diferentes técnicas que ayudan a estimar o calcular la dimensión de Hausdorff de algunos conjuntos.

2.1. Dimensión caja

Definición 2.1. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ acotado no vacío. Sea $N_\delta(F)$, el menor número de conjuntos de diámetro a lo sumo δ que cubren a F . La dimensión caja de F , inferior y superior se definen respectivamente por

$$\underline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln \delta},$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln \delta}.$$

Si ambos límites son iguales llamaremos dimensión caja de F al valor común

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln \delta}.$$

La dimensión caja, puede definirse equivalentemente reemplazando $N_\delta(F)$ por:

1. El menor número de bolas cerradas de radio δ que cubren F .
2. El menor número de cubos de lado δ que cubren F .
3. El menor número de cubos mallados de lado δ que cubren F .
4. El menor número de conjuntos de diámetro δ que cubren a F .
5. El mayor número de bolas disjuntas de radio δ , centradas en puntos de F .

Proposición 2.2. Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F).$$

Demostración

Supongamos que F puede ser recubierto por $N_\delta(F)$ conjuntos de diámetro δ , entonces por definición

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F)\delta^s.$$

Si $1 \leq \mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$. Entonces $\ln N_\delta(F) + s \ln \delta \geq 0$, si δ es lo suficientemente pequeño. De este modo $s \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(F))}{-\ln \delta}$.

Puesto que esta desigualdad es válida para todo s menor que la dimensión de Hausdorff, obtenemos que

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \overline{\dim}_B(F).$$

□

Teorema 2.3. *La dimensión caja de C es $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.*

Demostración

Si recubrimos con 2^k intervalos de largo 3^{-k} el k -nivel C_k de C , tenemos que $N_\delta(C) \leq 2^k$, si $3^{-k} < \delta \leq 3^{-(k-1)}$. Por lo tanto

$$\overline{\dim}_B(C) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(C))}{-\ln \delta} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^{k-1}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Por otro lado, cualquier intervalo de largo δ , con $3^{-(k+1)} \leq \delta < 3^{-k}$ intersecta a lo sumo a un intervalo de largo 3^{-k} en C_k . Como C_k tiene 2^k de estos intervalos, se concluye que se requieren a lo menos 2^k intervalos de largo δ para cubrir C . Por lo tanto, $N_\delta(F) \geq 2^k$, de este modo,

$$\underline{\dim}_B(C) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N_\delta(C))}{-\ln \delta} \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^k}{\ln 3^{k-1}} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

□

Por lo tanto, al menos para el conjunto de Cantor,

$$\dim_H(C) = \dim_B(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

La dimensión caja de un punto es 0, cabría esperar que la dimensión caja de un conjunto numerable de puntos fuese también 0. Sin embargo,

Proposición 2.4. *Existen conjuntos numerables con dimensión caja positiva.*

Demostración

Sea $F = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, F es compacto con $\dim_B F = \frac{1}{2}$. Veámoslo:

Si $|U| = \delta < \frac{1}{2}$ y k es un entero tal que $\frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$, entonces U puede cubrir a lo sumo uno de los puntos $\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}\}$. Entonces se necesitarían al menos k conjuntos de diámetro δ para recubrir F , así:

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \geq \frac{\log k}{\log(k(k+1))}.$$

Haciendo $\delta \rightarrow 0$ obtenemos $\dim_B F \geq \frac{1}{2}$. Por otro lado, si $\frac{1}{2} > \delta > 0$, tomamos k tal que $\frac{1}{k(k-1)} > \delta \geq \frac{1}{k(k+1)}$. Entonces $(k+1)$ intervalos de longitud δ recubren $[0, 1/k]$, dejando $(k-1)$ puntos de F que pueden ser recubiertos por otros $(k-1)$ intervalos. Por tanto:

$$\frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2k}{\log(k(k-1))}.$$

Obteniendo que $\overline{\dim}_B F \leq \frac{1}{2}$. Por tanto, $\dim_B F = \frac{1}{2}$. □

2.2. Distribución de masas

En esta sección describiremos algunos métodos para encontrar cotas, tanto para la dimensión como para la medida de Hausdorff de algún conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$. En primer lugar, recurriremos a recubrimientos de F por conjuntos pequeños para encontrar cotas superiores. Después, introduciremos el principio de distribución de masa para encontrar cotas inferiores, las cuales poseen una dificultad mucho mayor en su estimación.

Proposición 2.5. *Sea F tal que puede ser recubierto por n_k conjuntos de diámetro a lo sumo δ_k , con $\delta_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Entonces*

$$\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}.$$

Además, si $n_k \delta_k^s$ permanece acotado cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $\mathcal{H}^s(F) < \infty$. Si $\delta_k \rightarrow 0$ pero $\delta_{k+1} \geq c \delta_k$ para algún $0 < c < 1$, entonces

$$\overline{\dim}_B(F) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln n_k}{-\ln \delta_k}.$$

Demostración Como $\mathcal{H}_\delta^s(F) \leq N_\delta(F) \delta^s$ se concluye que $\dim_H(F) \leq \underline{\dim}_B(F)$. Además, si $n_k \delta_k^s$ es acotado,

$$\mathcal{H}_{\delta_k}^s(F) \rightarrow \mathcal{H}^s(F) < \infty,$$

cuando $k \rightarrow \infty$. □

Ahora, pasaremos a ver unos resultados sobre la distribución de masa. Para ello primero recordemos:

Definición 2.6. Sea μ una medida, el soporte de μ , denotado como $\text{sop}(\mu)$, es el conjunto cerrado más pequeño X que satisface

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus X) = 0.$$

Además, decimos que μ es una medida en un conjunto A , si A contiene al soporte de μ .

Definición 2.7. Una distribución de masa es una medida μ en un subconjunto A acotado de \mathbb{R}^n tal que

$$0 < \mu(A) < \infty.$$

Diremos que $\mu(A)$ es la masa del conjunto A .

Proposición 2.8. Sea μ una distribución de masa en $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y supongamos que para algún s existe $c > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que,

$$\mu(U) \leq c|U|^s,$$

para todo U con $|U| \leq \varepsilon$. Entonces, $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ y $s \leq \dim_H(F)$.

Demostración

Si $\{U_i\}$ es cualquier recubrimiento de F entonces

$$0 < \mu(F) \leq \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} U_i\right) \leq \sum_{i \geq 1} \mu(U_i) \leq c \sum_{i \geq 1} |U_i|^s.$$

Tomando ínfimo, se tiene que $\mathcal{H}_\delta^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$ si δ es bastante pequeño, por lo tanto $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$. Ya que $\mu(F) > 0$ obtenemos que $\dim_H(F) \geq s$. \square

Teorema 2.9. El principio de distribución de masa, da como cota inferior para la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor, a $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.

Demostración

Sea μ la distribución de masa natural de C , es decir, a cada uno de los 2^k intervalos de largo 3^{-k} en la etapa k -ésima de la construcción de C se le asigna una masa de 2^{-k} (imaginemos que se comienza con una masa de una unidad en la etapa C_0 y repetidamente dividimos la masa en cada intervalo de C_k , entre los dos nuevos subintervalos que se producen a partir de este en la etapa C_{k+1}). Sea U un conjunto tal que exista un entero k verificando que $|U| \leq 3^{-k}$.

Entonces U puede intersectar a lo sumo a uno de los intervalos de C_k , así

$$\mu(U) \leq 2^{-k} = (3^{\frac{\ln 2}{\ln 3}})^{-k} = (3^{-k})^{\frac{\ln 2}{\ln 3}} \leq (3|U|)^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Por lo tanto, $\mathcal{H}^{\frac{\ln 2}{\ln 3}}(F) \geq 3^{-\frac{\ln 2}{\ln 3}} = \frac{1}{2}$, por el principio de distribución de masa. Luego

$$\dim_H(F) \geq \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

\square

2.3. Dimensión de conjuntos producto

Ya que $\dim_H(E \times F) \leq \dim_H E + \overline{\dim}_B F$ (CapVII, Falconer[4]), tenemos que, si $\dim_H F = \overline{\dim}_B F$, entonces

$$\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F.$$

Puesto que la dimensión de Hausdorff y la dimensión caja del conjunto de Cantor coinciden, tenemos que:

Proposición 2.10. *Sea E un subconjunto de \mathbb{R} y C el conjunto de Cantor. Entonces $\dim_H(C \times E) = \dim_H C + \dim_H E$.*

El producto de dos conjuntos de Cantor se denomina Polvo de Cantor.

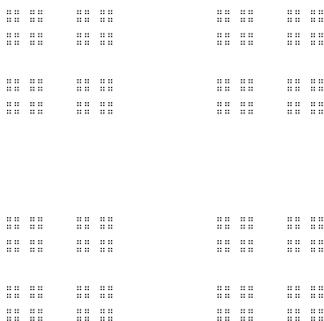


Figura 2.1. Polvo de Cantor.

Como consecuencia de la proposición 2.10, obtenemos:

Corolario 2.11. *El Polvo de Cantor tiene dimensión $2\log 2/\log 3$.*

Corolario 2.12. *Si E es un subconjunto de \mathbb{R} y F es un segmento rectilíneo, $\dim_H(E \times F) = \dim_H E + 1$.*

La Diana de Cantor es el conjunto dado en coordenadas polares $D = \{(r, \theta) : r \in C, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, donde C es el conjunto de Cantor.

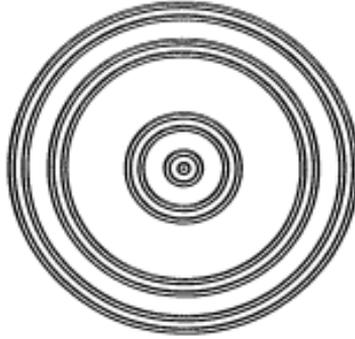


Figura 2.2. Diana de Cantor.

Proposición 2.13. *La dimensión de la Diana de Cantor es $1 + \log 2 / \log 3$.*

Demostración

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$, es fácil ver que f es localmente Lipschitziana y que $D = f(C \times [0, 2\pi])$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \dim_H D &= \dim_H f(C \times [0, 2\pi]) \leq \dim_H(C \times [0, 2\pi]) = \\ &= \dim_H(C) + \dim_H[0, 2\pi] = (\log 2 / \log 3) + 1. \end{aligned}$$

Por otra parte, si restringimos f a $[2/3, 1] \times [0, \pi]$, entonces f es bi-Lipschitz en este dominio, ya que f es inyectiva y el jacobiano es distinto de cero. Como $\dim_H f((C \cap [2/3, 1]) \times [0, \pi]) \subset D$, tenemos que,

$$\begin{aligned} \dim_H D &\geq \dim_H f((C \cap [2/3, 1]) \times [0, \pi]) = \dim_H((C \cap [2/3, 1]) \times [0, \pi]) = \\ &= \dim_H(C \cap [2/3, 1]) + \dim_H[0, \pi] = (\log 2 / \log 3) + 1. \end{aligned}$$

Por tanto, $\dim_H D = (\log 2 / \log 3) + 1$.

□

La siguiente proposición muestra que la dimensión de Hausdorff de $E \times F$ puede ser muy diferente de la suma de las dimensiones de ambos conjuntos.

Proposición 2.14. *Existen conjuntos $E, F \subset \mathbb{R}$ con $\dim_H E = \dim_H F = 0$ y $\dim(E \times F) \geq 1$.*

Demostración

Sea $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots$ una secuencia de enteros rápidamente creciente. Sea E el conjunto de los números en $[0, 1]$ con un 0 en el lugar r -ésimo siempre que $m_k + 1 \leq r \leq m_{k+1}$, con k par; y sea F el conjunto de los números en $[0, 1]$

con un 0 en el lugar r -ésimo siempre que $m_k + 1 \leq r \leq m_{k+1}$, con k impar. Observando los m_{k+1} primeros dígitos para un k par, existe un recubrimiento de E por 10^{j_k} intervalos de longitud $10^{-m_{k+1}}$, donde $j_k = (m_2 - m_1) + (m_4 - m_3) + \dots + (m_k - m_{k-2})$. Entonces $\log 10^{j_k} / -\log 10^{-m_{k+1}} = j_k / m_{k+1}$, que tiende a 0 cuando $k \rightarrow \infty$, dado que los m_k crecen muy rápidamente. Entonces $\dim_H E \leq \underline{\dim}_B E = 0$. Análogamente $\dim_H F = 0$.

Si $w \in [0, 1]$ podemos escribir $w = x + y$ con $x \in E$ e $y \in F$. La aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x + y$ es Lipschitz, por tanto

$$\dim_H(E \times F) \geq \dim_H f(E \times F) \geq \dim_H([0, 1]) = 1.$$

□

2.4. Sistemas iterados de funciones

Los sistemas iterados de funciones a menudo conducen a una manera más simple para encontrar dimensiones.

Definición 2.15. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$. Una familia finita $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ de funciones $\phi_i : D \rightarrow D$ es un sistema iterado de funciones si existen constantes $r_i < 1$, para todo i con $1 \leq i \leq k$ tal que

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq r_i |x - y|.$$

Si ocurre que

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| = r_i |x - y|,$$

donde $r_i < 1$, para todo i con $1 \leq i \leq k$ entonces se llaman similaridades.

Definición 2.16. Un sistema iterado de funciones $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ satisface la condición del conjunto abierto si existe un conjunto no vacío, abierto y acotado V tal que

$$\bigcup_i^k \phi_i(V) \subset V.$$

A continuación enunciamos sin su demostración el siguiente teorema que es muy útil para encontrar la dimensión Hausdorff de algunos conjuntos, [4, Teorema 9.3].

Teorema 2.17. Sea $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ una colección de similaridades tal que $E \subset \mathbb{R}^n$ es invariante respecto a $\{\phi_i\}_{i=1}^k$. Si $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ satisface la condición del conjunto abierto y r_i es el radio de la i -ésima similaridad ϕ_i , entonces la dimensión

Hausdorff de E es igual al único número positivo s tal que $\sum_{i=1}^k r_i^s = 1$.

Teorema 2.18. *La dimensión Hausdorff de C es $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.*

Demostración Dado ϕ_1 y ϕ_2 definidas como:

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{1}{3}x \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\end{aligned}$$

Nótese que, $C = \bigcup_{i=1}^2 \phi_i(C)$. También, $\{\phi_i\}_{i=1}^2$ satisface la condición del conjunto abierto para $V = (0, 1)$. Entonces, aplicando el anterior teorema con $r_1 = \frac{1}{3}$ y $r_2 = \frac{1}{3}$, necesitamos encontrar s tal que $\sum_{i=1}^2 r_i^s = 1$, es decir $2(\frac{1}{3})^s = 1$ si, y sólo si, $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. Por tanto, podemos concluir que

$$\dim_H(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

□

Un conjunto similar al conjunto de Cantor es el que se conoce como conjunto de Cantor α -medio. Para generarlo elegimos un número $\alpha \in (0, 1)$. Sea $I_0 = [0, 1]$ e I_1 la unión de dos intervalos cerrados que resultan de eliminar el intervalo abierto de longitud α del centro de I_0 . Cada uno de los intervalos cerrados que formar I_1 tiene longitud $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$. Observamos que $\beta \in (0, \frac{1}{2})$. Ahora repetimos el proceso con I_1 , al resultado lo llamaremos I_2 . Esto nos deja 4 intervalos, cada uno de longitud β^2 . Procediendo indefinidamente, en cada paso I_n será la unión de los 2^n intervalos cerrados de longitud β^n que quedan después de repetir el proceso con los intervalos de I_{n-1} .

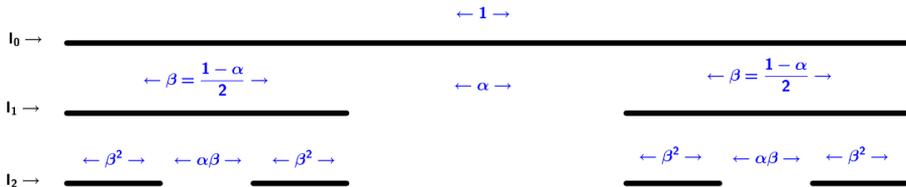


Figura 2.3. Conjunto de Cantor α -medio.

Entonces el conjunto de Cantor α -medio es:

$$C_\alpha = \bigcap_{n=0}^\infty I_n.$$

Los conjunto de Cantor α -medios son conjuntos no numerables de medida de Lebesgue cero pero dimensión Hausdorff diferente.

Teorema 2.19. *La dimensión Hausdorff del conjunto de Cantor α -medio es $\frac{\ln 2}{\ln(2/(1-\alpha))}$.*

Demostración Reproduciendo los mismos pasos que en la anterior demostración, pero ahora con ϕ_1 y ϕ_2 definidas como:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{x(1-\alpha)}{2} \\ \phi_2(x) &= \frac{(1-\alpha)(x-1)}{2} + 1 \end{aligned}$$

Llegamos a que, el conjunto de Cantor α -medio tiene dimensión s , donde s satisface la ecuación $2(\frac{1-\alpha}{2})^s = 1$. Por lo tanto,

$$\dim_H(C_\alpha) = \frac{\ln 2}{\ln(\frac{2}{1-\alpha})}.$$

□

Observemos, que si $\alpha = \frac{1}{3}$ entonces $\dim_H(C_\alpha) = \frac{\ln 2}{\ln \frac{2}{3}}$, ya que $C_{\frac{1}{3}} \equiv C$.

Otra generalización diferente del conjunto de Cantor son los conjuntos de Cantor n -arios que también tienen medida cero pero dimensión Hausdorff distinta.

Partimos de un número impar $n = 2m + 1$. Comenzamos con el intervalo $K_0 = [0, 1]$ y lo dividimos en n subintervalos iguales. Eliminamos ahora los intervalos abiertos $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), (\frac{3}{n}, \frac{4}{n}), \dots, (\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n})$ tal que $K_1 = [0, \frac{1}{n}] \cup [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}] \cup \dots \cup [\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}]$. A continuación subdividimos cada uno de estos $m + 1$ intervalos restantes en n subintervalos iguales, como hicimos con K_0 en el paso anterior. Procediendo indefinidamente de esta manera, obtendremos una sucesión $\{K_s\}$, donde cada K_s está formado por $(m + 1)^s$ intervalos disjuntos de longitud $(\frac{1}{n})^s$.

Luego el conjunto de cantor n -ario se define como:

$$K(n) = \bigcap_{s=0}^{\infty} K_s.$$

Teorema 2.20. *La dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor n -ario, $\{K(n)\}$, donde $n = 2m + 1$ es $\frac{\ln(m + 1)}{\ln(2m + 1)}$.*

Demostración Procederemos de forma análoga a las anteriores demostraciones. Sean $\{\phi_i\}_{i=1}^{m+1}$ definidas como:

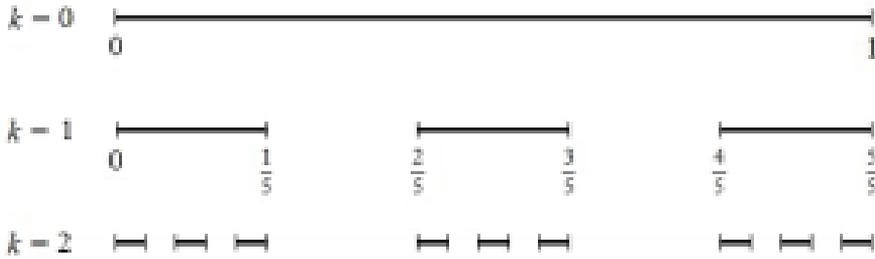


Figura 2.4. Conjunto 5-ario.

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{1}{n}x \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{n}x + \frac{2}{n} \\ &\vdots \\ \phi_{m+1}(x) &= \frac{1}{n}x + \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

Nótese que, $K(n) = \bigcup_{i=1}^{m+1} \phi_i(K(n))$. También, $\{\phi_i\}_{i=1}^{m+1}$ satisface la condición del conjunto abierto para $V = (0, 1)$. Entonces, aplicando el teorema 2.17 con $r_1 = \frac{1}{n}, r_2 = \frac{1}{n}, \dots, r_{m+1} = \frac{1}{n}$ necesitamos encontrar s tal que $\sum_{i=1}^{m+1} r_i^s = 1$. Es decir s , verificando que $(m+1)\left(\frac{1}{2m+1}\right)^s = 1$. Por tanto, $s = \frac{\ln(m+1)}{\ln(2m+1)}$ concluyendo que

$$\dim_H(K(n)) = \frac{\ln(m+1)}{\ln(2m+1)}.$$

□

Corolario 2.21. Sea $\{K(2m+1)\}_{m=1}^\infty$ la sucesión de Conjuntos de Cantor $2m+1$ - arios. Entonces la sucesión de sus dimensiones es creciente y tiende a 1 cuando $m \rightarrow \infty$.

A continuación vamos a construir la Alfombra de Sierpinski. Tomamos S_0 un cuadrado sólido. Para obtener S_1 , dividimos S_0 en nueve cuadrados iguales y retiramos el cuadrado central, quedándonos con ocho cuadrados. Para obtener S_2 hacemos el mismo procedimiento en cada uno de los ocho cuadrados resultantes de S_1 . Repitiendo indefinidamente este proceso iterativo, obtenemos la alfombra de Sierpinski.

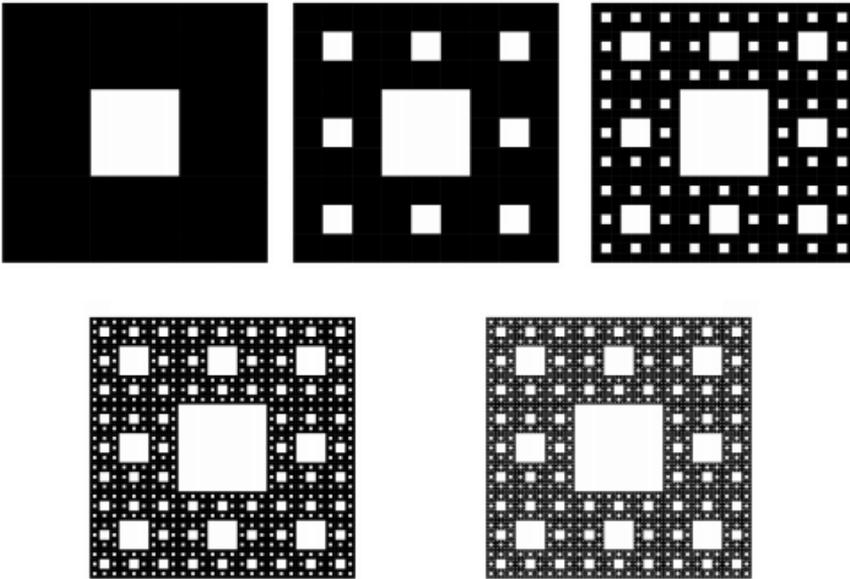


Figura 2.5. Alfombra de Sierpinski

En cada paso se elimina $1/9$ del área, por lo que el área en el paso n -ésimo será $(\frac{8}{9})^n$ del área total, que tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 2.22. *La dimensión de Hausdorff de la Alfombra de Sierpinski es $\ln 8 / \ln 3$.*

Demostración Consideramos las ocho similitudes definidas como:

$$T_{(i,j)}(x, y) = \left(\frac{x+i}{3}, \frac{y+j}{3}\right), \quad 0 \leq i, j \leq 2, \quad (i, j) \neq (1, 1).$$

Podemos decir entonces que $S_n = \bigcup T_{(i,j)}(S_n)$. Tenemos entonces que $r_{i,j} = \frac{1}{3}$ y además

$$1 = \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 8 / \ln 3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 8 / \ln 3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{\ln 8 / \ln 3}}_{\times 8}.$$

Y puesto que las similitudes $T_{(i,j)}$ satisfacen la condición de abierto para el interior del cuadrado,

$$\dim_H S = \frac{\ln 8}{\ln 3}.$$

□

La versión "tridimensional" de la Alfombra de Sierpinski se llama la Esponja de Menger. Comenzamos con un cubo de volumen 1 al que llamaremos E_0 . Para obtener E_1 , subdividimos E_0 en veintisiete cubos y eliminamos el cubo central y los del centro de cada cara, quedándonos con veinte cubos. En el siguiente paso repetimos el proceso para cada cubo resultante, y seguimos así indefinidamente.

En cada paso se elimina $\frac{7}{27}$ del volumen inicial, por lo que el volumen en el paso n -ésimo será $(\frac{20}{27})^n$ del volumen inicial, que tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$.

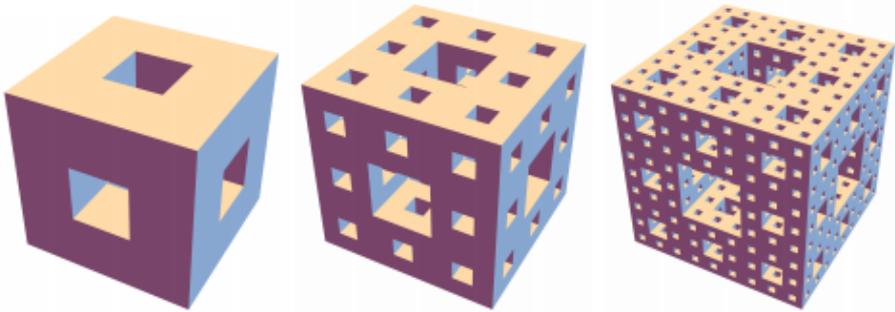


Figura 2.6. Construcción de la Esponja de Menger.

Por tanto, el volumen de la esponja de Menguer es cero.

Teorema 2.23. *La dimensión de la Esponja de Menger es $\ln 20 / \ln 3$.*

La primera fase de la construcción de la esponja reemplaza el cubo inicial por 20 cubos más pequeños a $1/3$ de la escala inicial, podemos modelizarlo con un sistema de funciones $\{T_0, T_1 \dots T_{20}\}$, tal que $T_i(x, y, z) = \frac{1}{3}(x, y, z) + v_i$, donde v_i es la esquina del subcubo correspondiente más cercana al origen.

La condición de abierto se satisface en el interior del cubo y cada similitud contrae el cubo $1/3$, por tanto: $1 = 20(\frac{1}{3})^r$, $3^r = 20$ y la dimensión de la Esponja de Menger es $\ln 20 / \ln 3 \approx 2,727$.

□

Otro conjunto conocido es el Triángulo de Sierpinski. Sea T_0 un triángulo cualquiera. Entonces obtenemos T_1 eliminando el triángulo central de T_0 , obteniendo tres triángulos similares a T_0 . Para los siguientes pasos, repetimos el proceso con cada uno de los triángulos resultantes.

El triángulo de Sierpinski es la intersección $T = \bigcap_{n=0}^{\infty} T_n$.

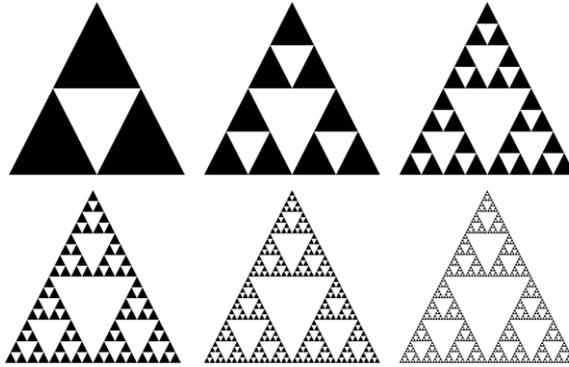


Figura 2.7. Primeras iteraciones de la construcción del Triángulo de Sierpinski.

Nótese que con cada iteración obtenemos $\frac{3}{4}$ del área anterior, por tanto, el área del Triángulo de Sierpinski es cero. Sin embargo, su longitud es infinita. Suponiendo que el perímetro inicial es 1 (la lógica se aplica para cualquier perímetro inicial), en la primera iteración eliminamos el triángulo central, aumentando el perímetro con $\frac{1}{2}$ del perímetro inicial, en la siguiente iteración, retiramos 3 triángulos que aumentan el perímetro con $\frac{1}{4}$ del perímetro inicial, es decir, el perímetro aumenta $\frac{3}{4}$. En general, en la iteración n -ésima, al perímetro inicial se le añade $3^n/2^{n+1}$. Por ende:

$$1 + \frac{3^0}{2} + \frac{3^1}{2^2} + \frac{3^2}{2^3} + \dots = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i}{2^i} \rightarrow \infty.$$

Teorema 2.24. *La dimensión de Hausdorff del Triángulo de Sierpinski es $\ln 3/\ln 2$.*

Demostración También podemos considerar las siguientes similitudes para obtener el conjunto:

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= \frac{1}{2}(x, y) \\ T_2(x, y) &= \frac{1}{2}(x, y) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ T_3(x, y) &= \frac{1}{2}(x, y) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{aligned}$$

En cuyo caso, $r_i = 1/2$, y como las $\{T_i\}_{i=1}^3$ satisfacen la condición de abierto en el interior del triángulo,

$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\ln 3}{\ln 2}}.$$

Concluimos que

$$\dim_H T = \ln 3/\ln 2.$$

□

Otro ejemplo es la Curva de Koch: sea K_0 un segmento de longitud 1. Obtenemos K_1 eliminando el intervalo central de longitud $1/3$ y reemplazándolo con los dos lados del triángulo equilátero cuya base es el segmento eliminado. Obtenemos así 4 segmentos de longitud $1/3$. Aplicando indefinidamente el proceso anterior a los segmentos resultantes, obtenemos la curva de Koch.

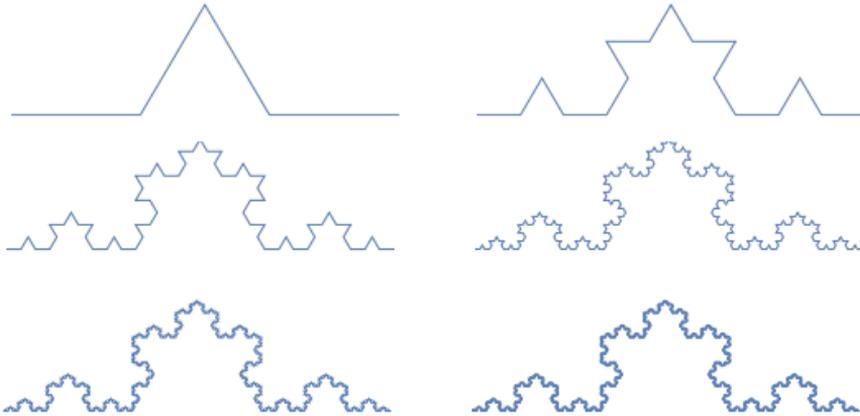


Figura 2.8. Curva de Koch.

Nótese que la longitud total de la curva en el paso n -ésimo es $(4/3)^n$, y que por tanto, cuando $n \rightarrow \infty$, la longitud también tiende a ∞ .

Se puede demostrar que la curva de Koch es continua, es decir, que existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen en \mathbb{R}^2 es la curva de Koch: Comenzamos definiendo $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ como la función continua, derivable a trozos que dibuja los 4^n segmentos de la etapa n -ésima de la curva de Koch. Nótese que entonces $|f_{n+1}(t) - f_n(t)| \leq 3^{-n}$, ya que f_{n+1} y f_n coinciden en todos los puntos que no cambian tras el paso $(n+1)$ -ésimo; por tanto f_{n+1} y f_n sólo difieren en los nuevos segmentos que aparecen en el paso $(n+1)$ -ésimo, y la mayor distancia entre estos dos puntos es 3^{-n} . Definimos ahora $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$. La secuencia converge uniformemente a f por lo visto anteriormente. Como el límite uniforme de una sucesión de funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado es una función continua, concluimos que f es continua.

También es posible ver que la curva de Koch no es C^1 en ningún intervalo, dado que la longitud del arco es infinita en cualquier intervalo arbitrariamente

pequeño.

Teorema 2.25. *La dimensión Hausdorff de la Curva de Koch es $\ln 4 / \ln 3$.*

Demostración

Consideramos ahora las cuatro similaridades definidas como:

$$T_0(x, y) = \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$$

$$T_1(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2(x, y) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

$$T_3(x, y) = \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}, \frac{y}{3}\right)$$

Cada una contrae la curva $1/3$, por tanto $r_i = 1/3$ y

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\ln 4}{\ln 3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\ln 4}{\ln 3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\ln 4}{\ln 3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{\ln 4}{\ln 3}}.$$

Como las similaridades $\{T_i\}_{i=0}^3$ satisfacen la condición de abierto en la curva, $\dim_H K = \frac{\ln 4}{\ln 3}$.

□

Fractales

3.1. Dimensión Topológica

La dimensión topológica de un conjunto de \mathbb{R}^n se define de manera inductiva.

Definición 3.1. *Un subconjunto S de \mathbb{R}^n tiene dimensión topológica cero si todo punto de S posee entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras no intersectan a S .*

Todo conjunto finito de puntos tiene dimensión topológica cero: si la distancia mínima entre dos puntos del conjunto es d , las bolas centradas en cada punto de radio arbitrariamente pequeño no contienen a ningún otro punto.

Más generalmente, todo conjunto numerable (como \mathbb{Q}), tiene dimensión topológica cero. La idea es observar que para cada punto existen incontables bolas centradas en ese punto cuya frontera no contiene a otro punto.

Ejemplo 3.2. El conjunto de Cantor tiene dimensión topológica cero.

Si x es un punto del conjunto de Cantor, $x \in C$, entonces existen $a < x$ y $b > x$ no pertenecientes al conjunto, arbitrariamente cerca de x . Entonces el intervalo $[a, b]$ es un entorno de x cuya frontera no intersecta a C .

Ejemplo 3.3. Un segmento no tiene dimensión topológica cero.

Claramente, todo entorno arbitrariamente pequeño de un punto del segmento intersectará al conjunto al menos en otro punto.

Ejemplo 3.4. Una curva continua, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, no tiene dimensión topológica cero.

El razonamiento es análogo al de un segmento.

En particular, la curva de Koch y el Triángulo de Sierpinski no tienen dimensión topológica cero, dado que son curvas continuas.

Ahora podemos introducir la dimensión topológica de un conjunto inductivamente.

Definición 3.5. *Un subconjunto no vacío S de \mathbb{R}^n tiene dimensión topológica k si cada punto de éste tiene entornos arbitrariamente pequeños cuyas fronteras intersectan S en un conjunto de dimensión $k - 1$, siendo k el menor entero no negativo con esta propiedad.*

Nótese que según esta definición, todo conjunto tiene dimensión entera no negativa.

Para ver que un conjunto tiene dimensión topológica k , basta:

- (i) probar la condición de las fronteras de los entornos intersectando el conjunto en conjuntos de dimensión $k - 1$.
- (ii) probar que esa condición no se satisfaría si el conjunto tuviera dimensión $k - 1$.

Ejemplo 3.6. Un segmento tiene dimensión topológica 1.

Se satisfacen las condiciones para $k \leq 1$, ya que toda bola de radio suficientemente pequeño intersectará el segmento en 1 ó 2 puntos, que es un conjunto de dimensión topológica 0.

Ejemplo 3.7. El Triángulo de Sierpinski tiene dimensión topológica 1.

Como vimos anteriormente, el Triángulo de Sierpinski no tiene dimensión topológica 0. Para cualquier punto x del triángulo, podemos trazar un círculo cuyo interior contenga a x que pasa por los vértices de uno de los triángulos pequeños que aparecen en la construcción iterativa.

Este círculo intersectará al Triángulo de Sierpinski en tres puntos, como el conjunto es autosimilar, podemos encontrar círculos como éste de radio arbitrariamente pequeño.

Ejemplo 3.8. La Curva de Koch tiene dimensión topológica 1.

Usando un argumento similar al del Triángulo de Sierpinski, si trazamos un círculo alrededor de un punto de tal manera que vaya a través del triángulo equilátero formado por tres «puntos esquina» de algún paso del proceso de construcción de la curva, la frontera del círculo intersectará sólo en tres puntos (un conjunto de dimensión topológica 0) a la curva de Koch.

Como la curva de Koch no tiene dimensión topológica 0, deberá tener dimensión topológica 1.

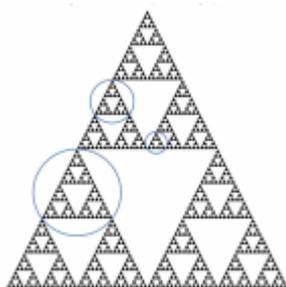


Figura 3.1. Entornos de los puntos del Triángulo de Sierpinski.



Figura 3.2. Entornos en la Curva de Koch.

Ejemplo 3.9. El conjunto de puntos de un cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ tiene dimensión topológica 2.

Cualquier rectángulo trazado alrededor de todo punto del cuadrado intersectará al cuadrado en una unión de segmentos rectilíneos, que tiene dimensión topológica 1. En general, cualquier entorno de cualquier punto intersectará al cuadrado en una curva, que tiene dimensión topológica 1.

Una de las propiedades más útiles de la dimensión topológica es que es invariante bajo homomorfismos, es decir, es un invariante topológico: si $f : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo, la dimensión topológica de U es igual a la de V .

Por tanto, todo conjunto homeomorfo al intervalo $[0, 1]$ tiene dimensión topológica 1. Ésta es otra manera de probar que la dimensión topológica de la curva de Koch es 1, ya que la aplicación definida de $[0, 1]$ en la curva es, en realidad, un homeomorfismo.

3.2. Curvas de Peano

Parecería razonable, por tanto, que la imagen de una aplicación continua $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tuviese dimensión topológica 1. Sin embargo, no es verdad; existen funciones continuas de $[0, 1]$ en \mathbb{R}^n cuya imagen es una región sólida en el

espacio.

Tales curvas se denominan *space-filling curves*. Un ejemplo famoso es la curva de Peano, construida iterativamente «retorciendo» una curva, llenando progresivamente un cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

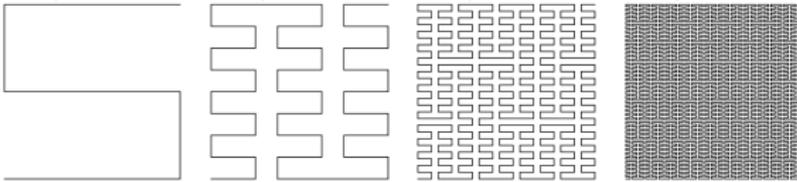


Figura 3.3. Iteraciones para la construcción de la Curva de Peano.

Como la curva de Koch, las funciones de Peano $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, que representan las curvas en la n -ésima iteración, tienden a una función f límite, que es continua de $[0, 1]$ al cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Además, esta función f es sobreyectiva, es decir, pasa por todo punto del cuadrado.

La curva de Peano es un ejemplo de función continua cuya imagen tiene dimensión topológica 2.

Además, f no puede ser Lipschitz de orden $\alpha > 1/2$, puesto que si lo fuera, por la proposición 1.22 se tendría que:

$$2 = \dim_H f([0, 1]) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H([0, 1]) < 2$$

La función de Peano no es inyectiva, de hecho, existe un teorema que dice que cualquier biyección continua de un espacio métrico compacto en otro es necesariamente un homeomorfismo, pero el intervalo $[0, 1]$ y el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ no lo son.

Existen versiones de mayor dimensión de la curva de Peano que cubren una caja n -dimensional en \mathbb{R}^n .

Hilbert fue el primero en proponer un principio de generación geométrica para la construcción de una curva *space-filling* (o SFC), el cual se puede resumir en:

- Asumimos que se puede obtener una aplicación de $I = [0, 1]$ en el cuadrado unidad $[0, 1]^2$ que sea continua. Si dividimos I en cuatro subintervalos iguales, debería ser posible particionar $[0, 1]^2$ en cuatro subcuadrados iguales, tal

que la imagen de cada subintervalo sea continua y esté en uno de los subcuadrados. Podemos repetir este razonamiento dividiendo cada subintervalo en cuatro y haciendo lo mismo con los subcuadrados.

- Repitiendo este proceso *ad infinitum* debemos cerciorarnos de que los subcuadrados están colocados de manera que subcuadrados adyacentes correspondan a subintervalos adyacentes, para preservar la continuidad de la aplicación en su totalidad.
- Si un intervalo corresponde a un determinado cuadrado, sus subintervalos deberán corresponder a subcuadrados de ese cuadrado.

Podemos considerar entonces una sucesión de subintervalos cerrados $\{I_j\}_n \subset I$ a la cual le corresponden una sucesión de cuadrados en $[0, 1]^2$; secuencia que se acerca más y más a un punto determinado de $[0, 1]^2$: $f_H(t)$. Llamando f_H a la aplicación que lleva cada punto de I en su correspondiente en $[0, 1]^2$, $f_H(I)$ se denomina la curva *space-filling* de Hilbert (o Hilbert SFC).

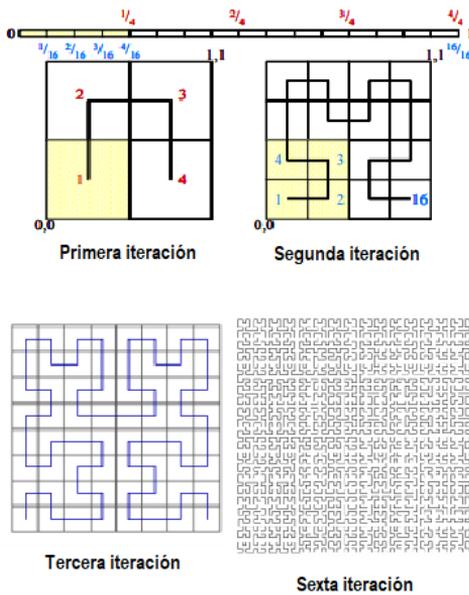


Figura 3.4. Generación geométrica iterativa de la Hilbert SFC.

Cada punto de I^2 pertenece a una secuencia de cuadrados cerrados adyacentes, que se corresponden con intervalos cerrados adyacentes, por tanto la aplicación es sobreyectiva. Si un punto de I^2 está en la esquina de un cuadrado, podría pertenecer a dos cuadrados no adyacentes, no correspondientes a

dos intervalos adyacentes. Por tanto, el punto pertenecería a dos sucesiones de cuadrados, por tanto la aplicación no puede ser inyectiva.

La iteración n -ésima ha dividido el I en 4^n subintervalos, cada cual de longitud $1/4^n$. Los subcuadrados tienen lado $1/4^n$. Si tomamos t_1 y t_2 de I , tal que $|t_1 - t_2| < 1/4^n$, en el peor de los casos t_1 y t_2 estarían en subintervalos distintos adyacentes, por tanto, sus imágenes están, en el peor de los casos, en dos subcuadrados adyacentes. Dado que la diagonal del rectángulo formado por los dos cuadrados es $\sqrt{5}$, deducimos que entonces $\|f_H(t_1) - f_H(t_2)\| \leq \sqrt{5}/2^n$. Haciendo $n \rightarrow \infty$, la distancia tiende a 0, y por tanto $f_H : I \rightarrow I^2$ es continua.

Peano definió una aplicación $f_P : I \rightarrow I^2$ aplicando el principio de generación geométrica de Hilbert, descrito anteriormente, pero en este caso, particionando I en 9^n subintervalos.

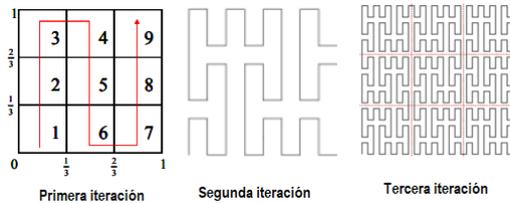


Figura 3.5. Generación geométrica iterativa de la Peano SFC.

Podemos aplicar el proceso de generación geométrica a cualquier región cerrada bidimensional que pueda ser particionada en partes iguales. Podemos considerar entonces T un triángulo isósceles de esquinas en $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(2, 0)$, y una aplicación $f_s : I \rightarrow T$ definida de la siguiente manera: Dividimos I en 2^n subintervalos cerrados y T en tantos subtriángulos tal que la imagen de intervalos adyacentes esté en triángulos adyacentes que compartan un lado. Cuando repetimos esto infinitamente, a cada subintervalo cerrado de I le corresponderá una sucesión de triángulos que convergen a un punto $F_s(t)$ en T ; $f_s(I)$ es lo que se denomina la curva *space-filling* de Sierpinski (o SFC).

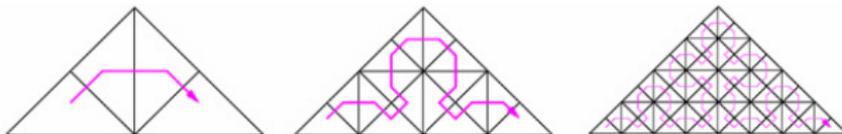


Figura 3.6. Generación geométrica iterativa de la SFC.

Asimismo, Lebesgue definió una aplicación desde el conjunto de Cantor en $[0, 1]^2$, extendida luego de $[0, 1]$ en $[0, 1]^2$ mediante interpolación lineal entre las imágenes de los puntos que se eliminaron en la construcción del conjunto de Cantor, así, conseguimos una aplicación f_l que se denomina curva *space-filling* de Lebesgue (o Lebesgue SFC).

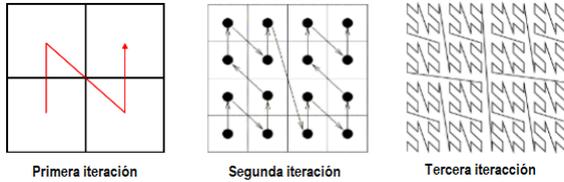


Figura 3.7. Generación geométrica iterativa de la Lebesgue SFC.

3.3. Fractales

Un conjunto se dice autosimilar si sus partes tienen la misma forma o estructura que el todo.

Definición 3.10. *Un fractal es un conjunto autosimilar con dimensión de Hausdorff mayor que su dimensión topológica.*

Ejemplos de fractales:

1. El conjunto de Cantor.
2. El conjunto de Cantor α -medio.
3. El conjunto de Cantor n-ario.
4. El Triángulo de Sierpinski.
5. La Alfombra de Sierpinski.
6. La Esponja de Menger.
7. La curva de Koch.

Para un fractal se puede introducir la siguiente noción:

Definición 3.11. *La dimensión fractal es el cociente*

$$D = \frac{\ln(N)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}$$

donde N es el número de veces que se reproduce el objeto inicial en la primera generación y ε es la escala a la que se encuentran las dimensiones de las reproducciones.

Teorema 3.12. *La dimensión fractal de C es $\frac{\ln 2}{\ln 3}$.*

Demostración La demostración es inmediata, pues tenemos que en el caso del conjunto de Cantor $N = 2$ y $\varepsilon = \frac{1}{3}$. □

Teorema 3.13. *La dimensión fractal de C_α es $\frac{\ln 2}{\ln \frac{2}{1-\alpha}}$.*

Demostración Observemos que en el caso del conjunto de Cantor α -medio $N = 2$ y $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2}$. □

Teorema 3.14. *La dimensión fractal de $K(n)$ es $\frac{\ln(m+1)}{\ln(2m+1)}$.*

Demostración

Para el conjunto de Cantor n -ario $N = m + 1$ y $\varepsilon = \frac{1}{2m+1}$. □

Teorema 3.15. *La dimensión fractal del Triángulo de Sierpinski es $\frac{\ln 3}{\ln 2}$.*

Demostración

En la primera etapa, se obtienen $N = 3$ copias del triángulo original, cada una con una base $1/2$ de la original, por lo que el escalado es de $\varepsilon = 1/2$. Concluimos que la dimensión fractal del triángulo es $\ln 3 / \ln 2$. □

Teorema 3.16. *La dimensión fractal de la Alfombra de Sierpinski es $\frac{\ln 8}{\ln 3}$.*

Demostración

En este caso, en la etapa inicial, se obtienen $N = 8$ cuadrados con una base a $\varepsilon = 1/3$ de la original. Concluimos que la dimensión fractal de la alfombra es $\ln 8 / \ln 3$. □

Teorema 3.17. *La dimensión fractal de la Esponja de Menger es $\frac{\ln 20}{\ln 3}$.*

Demostración

En la esponja, se obtienen $N = 20$ cubos con una base a $\varepsilon = 1/3$ de la original. Concluimos que la dimensión fractal de la esponja es $\ln 20 / \ln 3$. □

Observamos que sobre los conjuntos anteriores la dimensión fractal coincide con la dimensión Hausdorff.

Dimensión caja de grafos

Consideramos funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Bajo ciertas circunstancias el grafo:

$$G(f) = \{(t, f(t)) : t \in [a, b]\}.$$

puede ser un fractal. Si f tiene derivada continua, no es difícil ver que su grafo tiene dimensión 1, lo mismo ocurre si $\sum_{i=0}^{m-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ está acotado para todas las particiones $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$. Sin embargo, es posible que una función sea lo suficientemente irregular para que su grafo tenga dimensión estrictamente mayor que 1. Quizá el mejor ejemplo conocido sea:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t),$$

donde $1 < s < 2$ y $\lambda > 1$. Esta función es el ejemplo que da Weierstrass de una función continua no derivable en ningún punto. Tiene dimensión caja s y durante mucho tiempo ha sido una conjetura que tiene dimensión de Hausdorff s (esta conjetura ha sido recientemente probada por Shen, Weixiao; Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions. Math.Z 289 (2018), no. 1-2, 223-266).

Primero obtenemos una estimación simple, pero muy útil de la dimensión caja de un grafo. Dada una función f y un intervalo $[t_1, t_2]$, definimos su rango máximo:

$$R_f[t_1, t_2] = \sup\{|f(t) - f(u)| : t_1 < t, u < t_2\}.$$

Proposición 4.1. *Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Suponemos que $0 < \delta < 1$, y $m = \lceil \delta \rceil$ (menor entero mayor o igual que $1/\delta$). Entonces, si N_δ es el número de cuadrados de la δ -malla que intersectan el grafo de f ,*

$$\delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta] \leq N_\delta \leq 2m + \delta^{-1} \sum_{i=0}^{m-1} R_f[i\delta, (i+1)\delta].$$

Demostración El número de cuadrados de la malla de lado δ en la columna sobre el intervalo $[i\delta, (i+1)\delta]$ que intersectan f es al menos $R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$ y como mucho $2 + R_f[i\delta, (i+1)\delta]/\delta$, ya que f es continua. Sumando la correspondiente cantidad de todos los intervalos obtenemos el resultado anterior. □

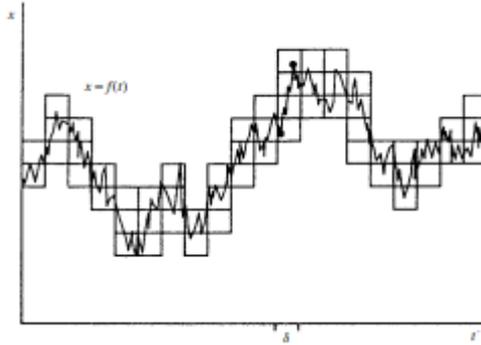


Figura 4.1. Malla de δ -cuadrados sobre la función de Weierstrass.

Corolario 4.2. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

(a) Supongamos que

$$|f(t) - f(u)| \leq c|t - u|^{2-s}, \quad 0 \leq t, u \leq 1,$$

con $c > 0$ y $1 \leq s \leq 2$. Entonces $\mathcal{H}^s(F) < \infty$ y $\dim_H \text{graph} f \leq \overline{\dim}_B \text{graph} f \leq s$. Esto es cierto si por hipótesis $|t - u| < \delta$ para algún $\delta > 0$.

(b) Supongamos que existen $c > 0, \delta_0 > 0$ y $1 \leq s < 2$ con la siguiente propiedad: para cada $t \in [0, 1]$ y $0 < \delta \leq \delta_0$, existe u tal que $|t - u| \leq \delta$ y

$$|f(t) - f(u)| \geq c\delta^{2-s}.$$

Entonces $s \leq \overline{\dim}_B \text{graph}(f)$

Demostración

(a) Se sigue inmediatamente que $R_f[t_1, t_2] \leq c|t_1 - t_2|^{2-s}$ para $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$. Usando la notación de la proposición 4.1, $m < (1 + \delta^{-1})$, entonces

$$N_\delta \leq (1 + \delta^{-1})(2 + c\delta^{-1}\delta^{2-s}) \leq c_1\delta^{-s},$$

donde c_1 es independiente de δ . El resultado se sigue de la proposición 2.5.

(b) De la misma manera, $R_f[t_1, t_2] \geq c|t_1 - t_2|^{2-s}$. Como $\delta^{-1} \leq m$, tenemos que:

$$N_\delta \geq c\delta^{-1}\delta^{-1}\delta^{2-s} = c\delta^{-s}.$$

Y por la definición 2.1 tenemos que $s \leq \underline{\dim}_B \text{graph} f$.

Desafortunadamente, las cotas inferiores para la dimensión de Hausdorff de grafos son generalmente más difíciles de encontrar que las dimensiones caja.

A continuación calcularemos la dimensión caja del grafo de la función de Weierstrass.

Teorema 4.3. *Supongamos que $\lambda > 1$ y $1 < s < 2$. Definimos $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t).$$

Suponiendo que λ sea suficientemente grande, se tiene que $\dim_B \text{graph} f = s$.

Demostración Dado $0 < h < 1$, sea N un número natural que satisfice $\lambda^{-(N+1)} \leq h \leq \lambda^{-N}$. Entonces,

$$\begin{aligned} |f(t+h) - f(t)| &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k(t))| + \\ &\quad + \sum_{k=N+1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} |\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k(t))| \\ &\leq \sum_{k=1}^N \lambda^{(s-2)N} \lambda^k h + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2\lambda^{(s-2)k}. \end{aligned}$$

Usando el teorema del valor medio en los primeros N términos del primer sumatorio y una estimación evidente del resto obtenemos que,

$$|f(t+h) - f(t)| \leq \frac{h\lambda^{(s-1)N}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1-\lambda^{s-2}} \leq ch^{2-s},$$

donde c es independiente de h , usando el corolario 4.2(a), obtenemos que $\underline{\dim}_B \text{graph} f \leq s$.

De igual manera, pero dividiendo la suma en tres partes, los primeros $N-1$ términos, el término N -ésimo y el resto, se sigue que,

$$|f(t+h) - f(t) - \lambda^{(s-2)k} [\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k(t))]| \leq \frac{\lambda^{(s-2)N-s+1}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1-\lambda^{s-2}},$$

si $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$.

Supóngase que $\lambda > 2$ es suficientemente grande para que $\frac{\lambda^{(s-2)N-s+1}}{1-\lambda^{1-s}} + \frac{2\lambda^{(s-2)(N+1)}}{1-\lambda^{s-2}}$ sea menor que $\frac{1}{20}\lambda^{(s-2)N}$ para todo N . Para $\delta < \lambda^{-1}$, tómesese un N tal que $\lambda^{-N} \leq \delta < \lambda^{-(N-1)}$. Para cada t , podemos escoger h con $\lambda^{-(N+1)} \leq h < \lambda^{-N}$ tal que $|\sin(\lambda^k(t+h)) - \sin(\lambda^k(t))| \geq \frac{1}{10}$, entonces

$$|f(t+h) - f(t)| \geq \frac{1}{20} \lambda^{(s-2)N} \geq \frac{1}{20} \lambda^{s-2} \delta^{2-s}.$$

Y por el corolario 4.2(b), obtenemos que $\underline{\dim}_B \text{graph} f \geq s$.

Por tanto, $\dim_B \text{graph} f = s$.

□

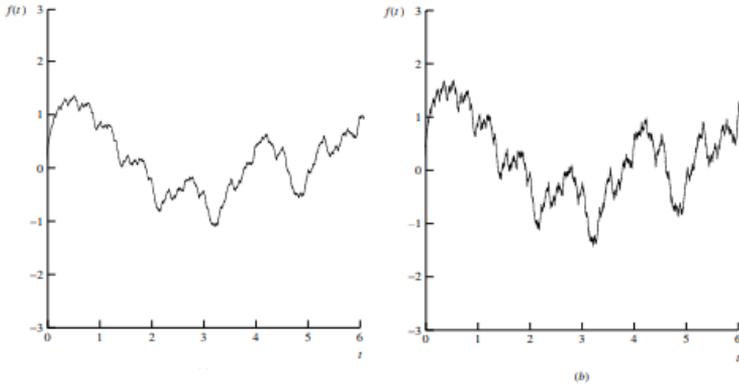


Figura 4.2. La función de Weierstrass con $\lambda = 1,5$ y $s=1.5$ y $s=1.1$.

Bibliografía

- [1] M. Allendes and P. Carrasco, Tópicos sobre medida y dimensión de Hausdorff para conjuntos auto-similares, Pontífica Universidad Católica de Valparaíso.
- [2] F. Chovanec, Cantor sets, Science and Military, 2010, 5-12.
- [3] Evan Dummit, Dynamics, Chaos and Fractals (Part 4): Fractals, Course Notes, 2015.
- [4] K. J. Falconer, Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications, John Wiley & Sons, 1990.
- [5] G.B. Folland, Real Analysis Modern Techniques and their Applications, John Wiley & Sons, Inc, 1999.
- [6] Paul Halmos, Measure Theory, Springer-Verlag, 1950.
- [7] Erin Pearse, An Introduction to dimension theory and fractal geometry: Fractal dimension and measure, California Polytechnic State University.
- [8] Levi Valgaerts, Space-Filling Curves: An Introduction, Technical University Munich, 2005.

La referencia [7] la hemos utilizado sobre todo para la motivación de la definición de dimensión. El capítulo I ha sido desarrollado esencialmente en base a las referencias [4], [5] y [6]. Para el capítulo II hemos utilizado [1], [2], [4]. En el capítulo III, [3] y [8] y para el capítulo IV, el capítulo 11 de [4].

Measure, dimension and fractals

Abstract

We introduce the concepts of Hausdorff measure and dimension for every subset of \mathbb{R}^n . Moreover, we show different techniques to compute the Hausdorff dimension of a set and we apply them in different examples, specially the Cantor set. We also consider the definition of a fractal and we provide some examples like the Sierpinski Triangle and Carpet, the Menger sponge and the Koch curve.

1. Introduction

In order to specify the definition of dimension, Falconer suggested a set of properties that every dimension should satisfy:

- Differentiable manifolds.** If F is a differentiable n -manifold, $\dim(F) = n$.
- Open sets.** For every open set $F \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(F) = n$.
- Countable set.** If F is finite or countable, $\dim(F) = 0$.
- Monotonicity.** If $E \subset F \Rightarrow \dim(E) \leq \dim(F)$.
- Stability.** $\dim(E \cup F) = \max\{\dim(E), \dim(F)\}$.
- Countable stability.** $\dim(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = \sup_i \dim(F_i)$.
- Lipschitz functions.** If $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ is Lipschitz, then $\dim[f(E)] \leq \dim(E)$.
- Bi-Lipschitz functions.** If $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ is bi-Lipschitz, then $\dim[f(E)] = \dim(E)$.
- Geometric invariance.** if f is a similarity or an affine transformation, then $\dim[f(F)] = \dim(F)$.

2. Hausdorff measure and dimension

Given $F \subset \mathbb{R}^n$, the Hausdorff s -dimensional measure of F is

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F).$$

where

$$\mathcal{H}^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ a } \delta\text{-cover} \right\}.$$

There exists a critic value s in which the function $\mathcal{H}^s(F)$ jumps from ∞ to 0. This critic value receives the name of Hausdorff dimension of F and it satisfies the properties suggested by Falconer.

Theorem 2.1 The Hausdorff dimension of the Cantor set is $\log 2 / \log 3$.



Figure 1: Cantor set.

3. Techniques to compute the Hausdorff dimension

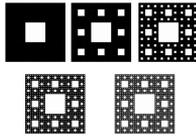


Figure 2: Sierpinski Carpet.

Theorem 3.1 The Hausdorff dimension of the Sierpinski Carpet is $\ln 8 / \ln 3$.



Figure 3: Menger Sponge.

Theorem 3.2 The Hausdorff dimension of the Menger Sponge is $\ln 20 / \ln 3$.

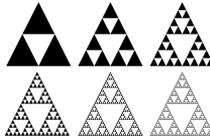


Figure 4: Sierpinski Triangle.

Theorem 3.3 The Hausdorff dimension of the Sierpinski Triangle is $\ln 3 / \ln 2$.

Theorem 3.4 The Hausdorff dimension of the Koch Curve is $\ln 4 / \ln 3$.



Figure 5: Koch curve.

4. Fractals

Definition 4.1 A subset S of \mathbb{R}^n has topological dimension zero if every point of S has arbitrarily small neighborhoods whose boundaries do not intersect S .

Definition 4.2 A non-empty subset S of \mathbb{R}^n has topological dimension k if every point of S has arbitrarily small neighborhoods whose boundaries intersect S in a set of dimension $k-1$, being k the smallest positive integer with this property.

A self-similar set is a set whose parts have the same shape or structure of the whole set.

Definition 4.3 A fractal is an self-similar set with its Hausdorff dimension greater than its topological dimension.

Examples of fractals:

- The Cantor set.
- The middle- α Cantor set.
- The n -ary Cantor set.
- The Sierpinski Triangle.
- The Sierpinski Carpet.
- The Menger Sponge.
- The Koch Curve.

5. Hausdorff dimension of graphs

Theorem 5.1 Suppose that $\lambda > 1$ and $1 < s < 2$. We define $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ as:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{(s-2)k} \sin(\lambda^k t).$$

Assuming that λ is sufficiently large, we have that $\dim_{\text{graph}} f = s$.

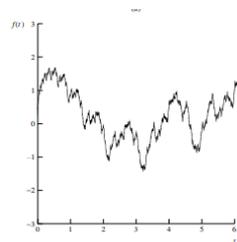


Figure 6: Weierstrass function.

References

- [1] K. J. FALCONER *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 1990.
- [2] EVAN DUMMIT *Dynamics, Chaos and Fractals (Part 4): Fractals*, 2015.
- [3] LEVI VALGAERTS *Space-Filling Curves: An Introduction*, 2005.