



Universidad  
de La Laguna

---

# El Teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones

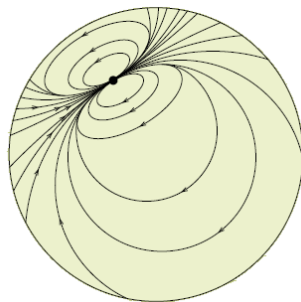
*The Gauss-Bonnet Theorem and its applications*

Lorena Díaz Morales

*Trabajo de Fin de Grado*

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna



---

La Laguna, 11 de junio de 2015



Dr. D. **José Carmelo González Dávila**, con N.I.F. 43.344.965-Q profesor catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

## **C E R T I F I C A**

Que la presente memoria titulada:

*”El Teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones.”*

Ha sido realizada bajo su dirección por D. **Lorena Díaz Morales**, con N.I.F. 54.061.523-T.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 11 de junio de 2015.



## Agradecimientos

A todo aquel que haya colaborado para la realización de este trabajo.  
A mis familiares y amigos, que me apoyaron siempre de forma incondicional,  
comprendiéndome y dándome su amor y cariño.  
A mi tutor José Carmelo, por sus buenos consejos, por su gran comprensión y  
paciencia y por aportarme valiosos conocimientos.  
A todos mis profesores y demás miembros de la ULL que de alguna u otra  
manera han contribuido en mi formación profesional.



## Resumen

*En este trabajo se prueban las distintas versiones del Teorema de Gauss-Bonnet. Comenzamos con la versión local, esto es, para regiones simples de superficies regulares contenidas en algún entorno coordenado. A continuación extendemos este resultado a regiones simples compactas no necesariamente contenidas en un entorno coordenado. Finalmente probamos la versión global del teorema, tanto para regiones regulares como para superficies compactas. En el último capítulo describimos algunas aplicaciones importantes del teorema, centrandó nuestra atención en el estudio de singularidades de campos de vectores sobre superficies y demostrando el Teorema de Poincaré.*

**Palabras clave:** Región simple, región regular, geodésica, curvatura geodésica, curvatura de Gauss, curvatura integral, característica de Euler-Poincaré.





## Abstract

*In this paper we will show the different versions of Gauss-Bonnet Theorem. We start with the local version, namely, for simple regions of regular surfaces contained in some coordinate neighborhood. Afterwards, we extend this result to simple and compact regions, not necessarily contained in coordinate neighborhoods. Finally we prove the global version of the Gauss-Bonnet Theorem, for regular regions and compact surfaces. In the last chapter, some important applications of this theorem are described. We focus on the study of singularities of vector fields on surfaces and we prove the Poincaré's Theorem.*

**Keywords:** *Simple region, regular region, geodesic, geodesic curvature, Gaussian curvature, integral curvature, Euler-Poincaré characteristic.*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Superficies regulares</b>	<b>5</b>
2.1. Superficies regulares . . . . .	5
2.2. La primera forma fundamental . . . . .	6
2.3. Operador forma. Segunda forma fundamental . . . . .	8
2.4. Curvas geodésicas . . . . .	11
2.5. Transporte paralelo . . . . .	14
<b>3. Teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>17</b>
3.1. Teorema de Gauss-Bonnet en la esfera . . . . .	17
3.2. La curvatura integral . . . . .	19
3.3. Versión local del teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	22
3.4. Teorema de Gauss-Bonnet para regiones simples . . . . .	25
3.5. Versión global del teorema de Gauss-Bonnet . . . . .	28
<b>4. Aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>33</b>
4.1. Superficies orientadas de curvatura positiva . . . . .	33
4.2. Superficies orientadas de curvatura no positiva . . . . .	34
4.3. Singularidades de campos de vectores sobre superficies . . . . .	35
<b>A. Derivación en <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>39</b>
A.1. Derivada direccional en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
A.2. Campos de vectores en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	39
A.3. Derivada covariante en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40



# Índice de figuras

1.1.	Triángulo cuyos lados son arcos geodésicos . . . . .	1
3.1.	Un triángulo geodésico en $S^2$ . . . . .	18
3.2.	Transporte paralelo de un vector a lo largo de la frontera $\partial D$ . . . . .	20
3.3.	Región simple $\mathcal{R}$ limitada por la curva $\vec{\alpha}$ . . . . .	23
3.4.	Signo del ángulo exterior $\theta_i$ . . . . .	23
3.5.	Orientación positiva de la frontera . . . . .	24
3.6.	Triangulación $\mathfrak{S}$ orientada . . . . .	26
3.7.	Unión de dos dominios $D_1$ y $D_2$ . . . . .	26
3.8.	Triangulación para $p=0$ , $p=1$ , $p=2$ . . . . .	28
3.9.	Dominio no simplemente conexo . . . . .	29
3.10.	Triangulación de la esfera . . . . .	31
3.11.	Clasificación de superficies compactas . . . . .	31
3.12.	Esfera, 1-toro, 2-toro, 3-toro . . . . .	32
4.1.	$V_{(x,y)} = -xE_{1(x,y)} - yE_{2(x,y)}$ . . . . .	36
4.2.	$V_{(x,y)} = -yE_{1(x,y)} + xE_{2(x,y)}$ . . . . .	36
4.3.	$V_{(x,y)} = -xE_{1(x,y)} + yE_{2(x,y)}$ . . . . .	36
4.4.	Campo de vectores con dos singularidades de índice 1 cada uno . . . . .	38
4.5.	Campo de vectores con una singularidad de índice 2 . . . . .	38
4.6.	Campo de vectores sin singularidades . . . . .	38



# Capítulo 1

## Introducción

El teorema de Gauss-Bonnet es probablemente el resultado más interesante y profundo de la geometría diferencial de superficies. Representa un maravilloso ejemplo de conexión entre dos ramas de las matemáticas que de entrada pudieran parecer no tener relación. Por un lado, *la curvatura de Gauss*, elemento propio de la geometría intrínseca de la superficie (Teorema Egregium de Gauss), y por otro lado, la *característica de Euler-Poincaré*, que es un invariante topológico de las regiones regulares y de las superficies compactas.

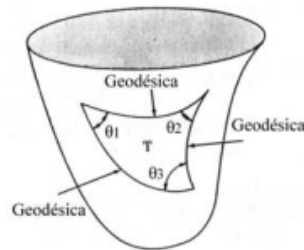


Figura 1.1: Triángulo cuyos lados son arcos geodésicos

Una primera versión de este teorema la presentó Gauss en 1827 en el afamado artículo [6], traducido al inglés en 1965. Aquí Gauss considera triángulos geodésicos sobre superficies, esto es, triángulos cuyos lados son arcos geodésicos (véase Figura 1.1), y prueba que la suma de los ángulos interiores  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , de un triángulo geodésico  $T$  en una superficie depende exclusivamente de la integral de la curvatura de Gauss  $K$  sobre  $T$ . Concretamente, se obtiene

$$\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi = \iint_T K dA. \quad (1.0.1)$$

Por lo tanto sobre una esfera la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es mayor que  $\pi$  y el exceso sobre  $\pi$ , para una esfera de radio uno, es exactamente el área del triángulo. En cambio para triángulos geodésicos en la pseudoesfera o en la zona interior de un toro, la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es menor que  $\pi$ .

Por su lado, T. Harriot ya había probado en 1603 el resultado de Gauss para el caso particular de superficies esféricas. Anteriormente a Harriot, Arquímedes (aprox. 250 a.C.) probó un caso especial del teorema: *El área de la superficie de una región de una esfera cortada por un plano es igual al área de un círculo cuyo radio es la distancia desde el punto central de la región a la frontera de la misma*. Usando este resultado, o la interpretación más moderna del uso de integrales para el cálculo de áreas en superficies (véase Sección 2.2), damos en Teorema 3.1.1 una demostración sencilla y geométrica, debida a T. Harriot, de la célebre fórmula de Gauss (1.0.1).

Sin duda alguna, Arquímedes se restringió a superficies esféricas en forma diferente a Harriot y Gauss, ya que estos últimos consideraban a geodésicas como frontera de la región. Posteriormente, Pierre Ossian Bonnet en 1848 publicó en [3] la extensión del teorema a una región acotada por una curva simple no geodésica. La consideración de una superficie compacta como una región sin frontera permite presentar el Teorema de Gauss-Bonnet (Teorema 3.5.6), como ya hemos comentado, como un nexo fundamental y sorprendente entre la topología de una superficie compacta y la integral de su curvatura, también llamada *curvatura integral* (véase Sección 3.2). Como una primera consecuencia de este resultado, se tiene que la curvatura integral se convierte en un invariante topológico para superficies compactas. Este teorema fue generalizado por Allendoerfer y Weyl a dimensiones arbitrarias casi un siglo más tarde [1].

El trabajo está estructurado en tres capítulos y contiene un pequeño apéndice sobre derivada direccional y derivada covariante de campos de vectores en  $\mathbb{R}^n$ . En el primero daremos unos breves preliminares sobre superficies regulares necesarios para abordar el Teorema de Gauss-Bonnet y sus aplicaciones. Introduciremos la primera y segunda forma fundamental de una superficie regular, lo que nos permitirá definir las nociones de *área* de una región acotada y de *conexión de Levi-Civita*. Nos centraremos fundamentalmente en el estudio de las *curvas geodésicas*, especialmente de la *curvatura geodésica* de una curva, y del *transporte paralelo* y probaremos en Proposición 2.5.7 que la curvatura geodésica de una curva coincide con la variación del ángulo orientado entre un campo de vectores paralelo a lo largo de una curva y su vector tangente.

En el segundo capítulo probamos las diferentes versiones del Teorema de Gauss-Bonnet. Comenzamos con la demostración del Teorema de Harriot (Teorema 3.1.1) para triángulos geodésicos en la esfera, siguiendo [12], y sus implicaciones en la diferenciación de las geometrías euclidiana y esférica. Luego establecemos el Teorema de Gauss-Bonnet local (Teorema 3.3.2), esto es, para regiones simples de superficies regulares contenidas en algún *entorno coordinado*. Su demostración es consecuencia de la Proposición 2.5.7, ya comentada, y del Teorema 3.2.3 donde se prueba que la curvatura integral sobre una región simple contenida en un entorno coordinado es el ángulo de rotación resultante del transporte paralelo de un vector a lo largo de su frontera. A continuación, en Teorema 3.4.1, extendemos este resultado a regiones simples compactas no necesariamente contenidas en un entorno coordinado. Para ello, se hace necesario el uso de triangulaciones de regiones regulares de superficies orientadas adaptadas a una familia de entornos coordinados (véase Proposición 3.4.5).

Finalmente probamos la versión global del Teorema de Gauss-Bonnet, tanto para regiones regulares como para superficies compactas. Previamente, se presenta la característica



de Euler-Poincaré  $\chi(\mathcal{R})$  de una región regular  $\mathcal{R}$  como un invariante topológico dependiente únicamente del número de agujeros  $p$  de  $\mathcal{R}$ . Concretamente, se tiene (Teorema 3.5.2)

$$\chi(\mathcal{R}) = 1 - p.$$

Procediendo por inducción en el número de agujeros  $p$  y aplicando Teorema 3.4.1, se prueba en Teorema 3.5.3 la siguiente fórmula para una región regular  $\mathcal{R}$  de una superficie orientada

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi\chi(\mathcal{R}),$$

donde  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , son los ángulos exteriores orientados de las curvas que conforman la frontera de  $\mathcal{R}$  y  $\kappa_g$  denota su curvatura geodésica. Para la versión del Teorema de Gauss-Bonnet para superficies compactas, se introduce el *género*  $g(\mathcal{M})$  de una superficie compacta  $\mathcal{M}$ , como el número de agujeros de  $\mathcal{M}$  cuando se considera como región regular, esto es, como región regular sin frontera, el cual viene dado por

$$g(\mathcal{M}) = \frac{2 - \chi(\mathcal{M})}{2}.$$

Este invariante topológico clasifica las superficies compactas de acuerdo a su número de asas. Entonces, descomponiendo  $\mathcal{M}$  en dos dominios regulares cada uno de ellos con  $p = g(\mathcal{M})$  agujeros se tiene, usando Teorema 3.5.3, en Teorema 3.5.6 la siguiente fórmula

$$\iint_{\mathcal{M}} K dA = 2\pi\chi(\mathcal{M}),$$

fórmula a la que hemos hecho ya referencia al inicio de esta introducción.

En el tercer capítulo describimos algunas de las más importantes aplicaciones del Teorema de Gauss-Bonnet. Probaremos, entre otras, que una superficie compacta y orientada de curvatura positiva ha de ser homeomorfa a una esfera y, en el caso de superficies orientadas de curvatura de Gauss no positiva, que no existen geodésicas cerradas y simples frontera de una región simple. Centraremos nuestra atención en una de las aplicaciones más interesantes de este teorema, como es la teoría de singularidades de campos de vectores sobre superficies orientadas. Para ello, introducimos la noción de *índice* de una singularidad y probamos el Teorema de Poincaré (Teorema 4.3.4) en el que se demuestra que la suma de los índices de cualquier campo de vectores sobre una superficie compacta depende exclusivamente de la topología, concretamente de su característica de Euler-Poincaré.



## Capítulo 2

# Superficies regulares

### 2.1. Superficies regulares

Las superficies que consideraremos a lo largo de este trabajo son subespacios topológicos de  $\mathbb{R}^3$ , esto es, subconjuntos  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^3$  dotados de la topología inducida o relativa.

**Definición 2.1.1** Un subespacio topológico  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^3$  es una *superficie regular* si para cada punto  $p \in \mathcal{M}$  existe un entorno abierto  $V \subset \mathbb{R}^3$  de  $p$  y una aplicación  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ ,  $(u^1, u^2) \mapsto \vec{x}(u^1, u^2) = (x(u^1, u^2), y(u^1, u^2), z(u^1, u^2))$ , de un abierto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  en  $V \cap \mathcal{M}$  tal que

- (i)  $\vec{x}$  es diferenciable.
- (ii)  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap \mathcal{M}$  es homeomorfismo. Dado que  $\vec{x}$  es diferenciable, es continua como aplicación de  $U \subset \mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  y por tanto es continua en  $V \cap \mathcal{M}$ . Luego esta condición significa que  $\vec{x}$  es biyectiva y su inversa  $\vec{x}^{-1} : \vec{x}(U) \rightarrow U$  es continua, o equivalentemente, es abierta.
- (iii)  $\vec{x}$  es regular, es decir, para todo  $(u^1, u^2) \in U$ ,  $\vec{x}_1(u^1, u^2) \times \vec{x}_2(u^1, u^2) \neq \vec{0}$ , donde  $\vec{x}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^1}$  y  $\vec{x}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^2}$ .

A la aplicación  $\vec{x}$  se le denomina *parametrización o sistema de coordenadas* de  $\mathcal{M}$ , al entorno  $\vec{x}(U) = V \cap \mathcal{M}$  de  $p$  en  $\mathcal{M}$  se le denomina *entorno coordinado* y al par  $(\vec{x}(U), \vec{x})$  *carta local*. Además, a los parámetros  $u^1$  y  $u^2$  los denominamos *coordenadas curvilíneas* del punto  $\vec{x}(u^1, u^2) \in \vec{x}(U)$  respecto de la parametrización  $\vec{x}$ .

Sea  $p$  un punto de una superficie regular  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ . Un vector  $\vec{v} \in T_p \mathbb{R}^3$  se dice *vector tangente* a  $\mathcal{M}$  en  $p$  si  $\vec{v}$  es el vector velocidad de un trozo de curva en  $\mathbb{R}^3$  cuya traza pasa por  $p$  y descansa en  $\mathcal{M}$ , esto es, existe  $\vec{\alpha} : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  diferenciable con  $\vec{\alpha}(0) = p$  y  $\vec{\alpha}'(0) = \vec{v}$ . Se llama *plano tangente* de  $\mathcal{M}$  en  $p \in \mathcal{M}$  y se denota por  $T_p \mathcal{M}$ , al conjunto de todos los vectores tangentes a  $\mathcal{M}$  en  $p$ .

Los vectores velocidad de las líneas coordenadas de una parametrización  $\vec{x}$  son las correspondientes parciales  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$ . Sea  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{x}(U)$  una parametrización regular

de una superficie  $\mathcal{M}$  y  $p = \vec{x}(u_0^1, u_0^2) \in \vec{x}(U)$ . Un vector  $\vec{v} \in T_p\mathbb{R}^3$  es tangente a  $\mathcal{M}$ , esto es,  $\vec{v} \in T_p\mathcal{M}$  si y solo si existen  $v^1, v^2 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\vec{v} = v^1 \vec{x}_1(u_0^1, u_0^2) + v^2 \vec{x}_2(u_0^1, u_0^2).$$

A la recta que pasa por  $p \in \mathcal{M}$  y es perpendicular al plano tangente  $T_p\mathcal{M}$  se le llama *recta normal* a  $\mathcal{M}$  en  $p$ . A cualquier vector director de esta recta se le denomina *vector normal* a  $\mathcal{M}$  en  $p$ . Denotaremos por  $N_p$  al vector unitario normal a  $\mathcal{M}$  en  $p$

$$N_p = \frac{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|}(u_0^1, u_0^2),$$

el cual es único salvo el signo.

## 2.2. La primera forma fundamental

El producto interior estándar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$  induce en cada plano tangente  $T_p\mathcal{M}$  de una superficie regular  $\mathcal{M}$ , un producto interior obtenido como restricción.

**Definición 2.2.1** Se denomina *primera forma fundamental* de una superficie  $\mathcal{M}$  en un punto  $p \in \mathcal{M}$  a la aplicación bilineal, simétrica y definida positiva  $I_p$  dada por

$$I_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle. \quad (2.2.1)$$

Sea  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{x}(U)$  una representación paramétrica, regular y local de  $\mathcal{M}$  y  $p \in \vec{x}(U)$  con coordenadas curvilíneas  $(u_0^1, u_0^2)$ . Dado que  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  pueden escribirse como  $\vec{v} = \sum_{i=1}^2 v^i \vec{x}_i(u_0^1, u_0^2)$ ,  $\vec{w} = \sum_{j=1}^2 w^j \vec{x}_j(u_0^1, u_0^2)$ , se tiene  $I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j=1}^2 v^i w^j g_{ij}(u_0^1, u_0^2)$ , donde las funciones  $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_{ij}(u^1, u^2) = \langle \vec{x}_i, \vec{x}_j \rangle(u^1, u^2)$  con  $i, j = 1, 2$ , se les denomina *coeficientes métricos o coeficientes de la primera forma fundamental* relativos a  $\vec{x}$ . Éstos forman una matriz simétrica ( $g_{12} = g_{21}$ ) que es no singular.

Sea ahora  $\vec{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una representación paramétrica de una curva tal que  $\vec{\alpha}(I) \subset \vec{x}(U)$ . Entonces,  $\vec{\alpha}(t)$  puede escribirse como  $\vec{\alpha}(t) = \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$ .

**Definición 2.2.2** La *longitud del arco*  $l(\vec{\alpha}(a), \vec{\alpha}(b))$ , para  $[a, b] \subset I$ , es la integral

$$l(\vec{\alpha}(a), \vec{\alpha}(b)) = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^2 g_{ij}(u^1(t), u^2(t)) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt}} dt.$$

Una cuestión métrica que también puede tratarse con la primera forma fundamental es el cálculo del área de una región acotada de una superficie regular  $\mathcal{M}$ . Una *región*  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{M}$  es la unión de un dominio, un subconjunto de  $\mathcal{M}$  abierto y conexo, con su frontera. Una región de  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  está acotada si está contenida en alguna bola de  $\mathbb{R}^3$ .

Consideremos ahora regiones acotadas  $\mathcal{R}$  que estén contenidas en un entorno coordinado  $\vec{x}(U)$  de una parametrización  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ , es decir,  $\mathcal{R}$  es la imagen mediante  $\vec{x}$  de una región acotada  $Q \subset U$  ( $\mathcal{R} = \vec{x}(Q)$ ).

La función  $\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|$ , definida en  $U$ , mide el área del paralelogramo generado por los vectores  $\vec{x}_1$  y  $\vec{x}_2$ . Veamos que

$$\iint_Q \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\| du^1 du^2$$

no depende de la parametrización. Para ello, tomamos otra parametrización  $\tilde{x} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\tilde{x} = \tilde{x}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$  con  $\mathcal{R} \subset \tilde{x}(\tilde{U})$  y sea  $\tilde{Q} = \tilde{x}^{-1}(\mathcal{R})$ . Entonces

$$\iint_{\tilde{Q}} \|\tilde{x}_1 \times \tilde{x}_2\| d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \iint_{\tilde{Q}} \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\| \left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} \right| d\tilde{u}^1 d\tilde{u}^2 = \iint_Q \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\| du^1 du^2,$$

siendo  $\left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)} \right|$  el jacobiano del cambio de parámetros  $h = \vec{x}^{-1} \circ \tilde{x}$ . Por lo tanto, la integral utilizada para calcular el área de regiones contenidas en una superficie es independiente de la parametrización escogida.

**Definición 2.2.3** Sea  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  una región acotada de una superficie regular, contenida en un entorno coordinado de una parametrización  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ . Al número positivo  $A(\mathcal{R})$  dado por

$$A(\mathcal{R}) = \iint_Q \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\| du^1 du^2,$$

con  $Q = \vec{x}^{-1}(\mathcal{R})$  se denomina *área de  $\mathcal{R}$* .

Usando ahora la identidad de Lagrange, se tiene  $\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\| = \sqrt{\|\vec{x}_1\|^2 \|\vec{x}_2\|^2 - \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle^2}$ . Entonces  $A(\mathcal{R})$  puede expresarse, en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental, como sigue

$$A(\mathcal{R}) = \iint_Q \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2. \quad (2.2.2)$$

También debería subrayarse que, en la mayoría de los ejemplos, la restricción de que  $\mathcal{R}$  esté contenida en algún entorno coordinado desaparece, debido a que existen entornos coordinados que recubren la totalidad de la superficie exceptuando algunas curvas, las cuales no contribuyen al área.

**Ejemplo 2.2.4 (Esfera)** Consideramos la esfera  $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$  de centro el origen y radio  $r > 0$  parametrizada de la siguiente manera  $\vec{x}(\theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$ , con  $0 < \theta < \pi$  y  $0 < \varphi < 2\pi$ . Dado que  $\vec{x}([0, \pi[ \times ]0, 2\pi[)$  recubre la esfera  $S^2(r)$  excepto  $\mathcal{C} = \{(x, 0, z) \in S^2(r) / x \geq 0\}$  y  $\mathcal{C}$  es un conjunto de medida nula, se tiene que el área  $A(S^2(r))$  de  $S^2(r)$  utilizando (2.2.2) está dado por

$$A(S^2(r)) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} d\theta d\varphi.$$

Primero vamos a calcular los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\vec{x}_\theta = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta), \quad \vec{x}_\varphi = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0).$$

Dado que

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}_\theta, \vec{x}_\theta \rangle &= r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2, \\ \langle \vec{x}_\theta, \vec{x}_\varphi \rangle &= 0, \\ \langle \vec{x}_\varphi, \vec{x}_\varphi \rangle &= r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi = r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \sin^2 \theta,\end{aligned}$$

se tiene

$$A(S^2) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^4 \sin^2 \theta} d\theta d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = r^2 \int_0^{2\pi} 2d\varphi = 4\pi r^2.$$

**Ejemplo 2.2.5 (Toro)** El toro  $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$  queda parametrizado por  $\vec{x}(\theta, \varphi) = ((a + r \cos \theta) \cos \varphi, (a + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta)$ , con  $0 < \theta < 2\pi$  y  $0 < \varphi < 2\pi$ , excepto un conjunto de medida nula. Dado que

$$\vec{x}_\theta = (-r \sin \theta \cos \varphi, -r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta), \quad \vec{x}_\varphi = (-(a + r \cos \theta) \sin \varphi, (a + r \cos \theta) \cos \varphi, 0),$$

se tiene

$$\begin{aligned}\langle \vec{x}_\theta, \vec{x}_\theta \rangle &= r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2. \\ \langle \vec{x}_\theta, \vec{x}_\varphi \rangle &= 0. \\ \langle \vec{x}_\varphi, \vec{x}_\varphi \rangle &= (a + r \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi + (a + r \cos \theta)^2 \cos^2 \varphi = (a + r \cos \theta)^2.\end{aligned}$$

Entonces el área del toro, usando (2.2.2) está dada por

$$\begin{aligned}A(\mathbb{T}^2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(a + r \cos \theta)^2} d\theta d\varphi = r \int_0^{2\pi} (\int_0^{2\pi} a d\theta + \int_0^{2\pi} r \cos \theta d\theta) d\varphi \\ &= r \int_0^{2\pi} 2a\pi d\varphi = 4\pi^2 r a.\end{aligned}$$

### 2.3. Operador forma. Segunda forma fundamental

Un campo de vectores  $X$  sobre una superficie regular  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{R}^3$  es una aplicación  $X : p \in \mathcal{M} \mapsto X_p \in T_p \mathbb{R}^3$  que asigna un vector  $X_p \in T_p \mathbb{R}^3$  a cada punto  $p$  de  $\mathcal{M}$ . Entonces la restricción  $X|_{\vec{x}(U)}$  de  $X$  a un entorno coordenado  $\vec{x}(U)$  de  $\mathcal{M}$  se expresa como

$$X|_{\vec{x}(U)} = \sum_{i=1}^3 X^i(u^1, u^2) E_{i\vec{x}(u^1, u^2)},$$

donde  $X^i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , son funciones  $X^i : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $X$  es un campo de vectores diferenciable si, para cada representación paramétrica  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \vec{x}(U)$  de  $\mathcal{M}$ , las funciones  $X^i$  son diferenciables. Para cada  $\vec{v} \in T_p \mathcal{M}$ , la derivada covariante  $D_{\vec{v}} X$  del campo de vectores diferenciable  $X$  sobre  $\mathcal{M}$  tiene sentido (véase A.3) y se calcula por cualquiera de los siguientes métodos:

- (1) Si  $C$  es una curva  $\vec{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $\mathcal{M}$ , tal que,  $\vec{\alpha}(0) = p$  y  $\vec{\alpha}'(0) = \vec{v}$ , entonces  $\frac{d}{dt}|_{t=0} X(\vec{\alpha}(t))$ .
- (2) Si  $X = \sum_{i=1}^3 X^i E_i$  tenemos  $D_{\vec{v}}X = \sum_{i=1}^3 \vec{v}(X^i) E_i$ .

**Nota 2.3.1** Aunque se considere  $X$  tangente a  $\mathcal{M}$ , esto es,  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,  $D_{\vec{v}}X$  no tiene por qué ser tangente a  $\mathcal{M}$ .

**Definición 2.3.2** Sea  $p \in \mathcal{M}$ , la aplicación  $S_p : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ , definida por  $S_p\vec{v} = -D_{\vec{v}}N$ , se denomina *operador forma* de  $\mathcal{M}$  en  $p$ . Siendo  $N$  una normal unitaria definida en un entorno de  $p$ . Tal normal unitaria local y diferenciable siempre existe.

**Nota 2.3.3**  $S$  mide la variación de  $N$  en la dirección de  $\vec{v}$  y, por consiguiente, la variación del plano tangente; describe cómo se curva la superficie alrededor de  $p$ .

Sea  $p$  un punto de una superficie regular  $\mathcal{M}$  y  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización con  $p = \vec{x}(u_0, v_0) \in \vec{x}(U)$ . Entonces  $S_p$  es una aplicación autoadjunta, esto es,  $\langle S_p\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, S_p\vec{w} \rangle$ , para todo  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\mathcal{M}$ .

Toda transformación lineal, en particular  $S_p$ , posee dos invariantes numéricos: el determinante y la traza, es decir, el valor de estas cantidades es fijo y no depende de la base elegida para calcular la expresión de su matriz asociada.

**Definición 2.3.4** La *curvatura de Gauss* de  $\mathcal{M}$  en  $p$  es  $K(p) = \det S_p$  y la *curvatura media* es  $H(p) = \frac{1}{2}$  traza  $S_p$ .

Como el operador forma  $S_p$  es autoadjunto, existe una base ortonormal  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  de  $T_p\mathcal{M}$  tal que respecto de ella, la matriz asociada a  $S_p$  es diagonal, esto es,

$$S_p = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Entonces  $S_p\vec{v}_1 = k_1(p)\vec{v}_1$  y  $S_p\vec{v}_2 = k_2(p)\vec{v}_2$ , siendo  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$  los autovalores asociados y que además coinciden con los valores máximo y mínimo de la forma cuadrática natural asociada a  $S_p$ ,  $Q(\vec{v}) = \langle S_p\vec{v}, \vec{v} \rangle$ , para  $\vec{v} \in T_p\mathcal{M}$ ,  $\|\vec{v}\| = 1$ . A los autovectores  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  de  $S_p$  se denominan *vectores principales* y a los autovalores  $k_1(p)$  y  $k_2(p)$ , *curvaturas principales* de  $\mathcal{M}$  en  $p$ . Entonces, la curvatura de Gauss y la curvatura media se relacionan con las curvaturas principales por

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

La curvatura de Gauss es independiente de la elección de la normal unitaria a la superficie. Sin embargo, las curvaturas principales y la curvatura media cambian de signo según se fije la normal. Gracias a esto, podemos clasificar los puntos de una superficie en:

- (1)  $p$  es un punto *elíptico* si  $K(p) > 0$ . Ejemplo: Los puntos de la esfera.

- (2)  $p$  es un punto *hiperbólico* si  $K(p) < 0$ . Ejemplo: El origen del paraboloides hiperbólico.
- (3)  $p$  es un punto *parabólico* si  $K(p) = 0$  y  $(k_1(p), k_2(p)) \neq (0, 0)$ . Ejemplo: Los puntos del cilindro.
- (4)  $p$  es un punto *plano* si  $K(p) = 0$  y  $(k_1(p), k_2(p)) = (0, 0)$ . Ejemplo: El plano tiene todos sus puntos planos.

**Definición 2.3.5** Sea  $p$  un punto de una superficie regular  $\mathcal{M}$ . A la forma bilineal simétrica

$$II_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto II_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle S_p\vec{v}, \vec{w} \rangle, \quad (2.3.1)$$

se le denomina *segunda forma fundamental* de la superficie  $\mathcal{M}$  en  $p$ .

$II_p$  está bien definida en cada  $p \in \mathcal{M}$ , salvo el signo que proviene de la elección local de la normal. Si fijamos una parametrización  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  y tomamos cualquier  $p = \vec{x}(u^1, u^2) \in \vec{x}(U)$ , dados cualesquiera vectores  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p\mathcal{M}$ , se tiene

$$II_p(\vec{v}, \vec{w}) = II_p\left(\sum_{i=1}^2 v^i \vec{x}_i(u^1, u^2), \sum_{j=1}^2 w^j \vec{x}_j(u^1, u^2)\right) = \sum_{i,j=1}^2 v^i w^j II_p(\vec{x}_i, \vec{x}_j)(u^1, u^2).$$

Denotamos por  $L_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ , a las funciones  $L_{ij} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$L_{ij}(u^1, u^2) = II_p(\vec{x}_i, \vec{x}_j)(u^1, u^2) = \langle S_p \vec{x}_i(u^1, u^2), \vec{x}_j(u^1, u^2) \rangle = \langle \vec{x}_{ij}, N_{\vec{x}} \rangle(u^1, u^2).$$

Entonces la forma bilineal simétrica  $II_p$  se expresa como  $II_p(\vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j=1}^2 v^i w^j L_{ij}(u^1, u^2)$ . A las funciones  $L_{ij}$  se les denomina *coeficientes de la segunda forma fundamental* de  $\mathcal{M}$  respecto de  $\vec{x}$ .

Ahora supondremos que  $Y$  es un campo de vectores tangente a  $\mathcal{M}$ , definido en un entorno abierto de  $p \in \mathcal{M}$ . Entonces, la derivada covariante  $D_{\vec{v}}Y$  es un vector en  $\mathbb{R}^3$  que descomponemos, de forma única, en la parte tangente y la parte normal a la superficie

$$D_{\vec{v}}Y = \nabla_{\vec{v}}Y + \alpha N_p,$$

donde  $\nabla_{\vec{v}}Y \in T_p\mathcal{M}$ . De las propiedades de la derivada covariante (véase A.3), se tiene  $\alpha = \langle N_p, D_{\vec{v}}Y \rangle = -\langle D_{\vec{v}}N, Y_p \rangle = \langle S\vec{v}, Y_p \rangle = II(\vec{v}, Y_p)$ . Tenemos entonces la *Ecuación de Gauss*  $D_{\vec{v}}Y = \nabla_{\vec{v}}Y + II(\vec{v}, Y_p)N_p$ . Y puede ser extendida a campo de vectores tangentes  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ,

$$D_XY = \nabla_XY + II(X, Y)N, \quad (2.3.2)$$

donde  $(\nabla_XY)(u^1, u^2) = \nabla_{X(u^1, u^2)}Y$ . A  $\nabla_{\vec{v}}$  se le denomina *derivada covariante* de la superficie con respecto a  $\vec{v}$  o *conexión de Levi-Civita* y tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \nabla_X(\lambda Y_1 + \mu Y_2) &= \lambda \nabla_XY_1 + \mu \nabla_XY_2, \\ \nabla_{\lambda X_1 + \mu X_2}Y &= \lambda \nabla_{X_1}Y + \mu \nabla_{X_2}Y, \\ \nabla_X(fY) &= X(f)Y + f \nabla_XY, \\ \nabla_{fX}Y &= f \nabla_XY, \\ X\langle Y_1, Y_2 \rangle &= \langle \nabla_XY_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_XY_2 \rangle, \\ \nabla_XY - \nabla_YX &= [X, Y], \end{aligned}$$



para todo  $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(\mathcal{M})$ ;  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ;  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$ .

Sea  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$  una parametrización local de  $\mathcal{M}$ . Expresamos las derivadas covariantes de los campos de vectores básicos en función de ellos mismos, por las expresiones

$$\nabla_{\vec{x}_i} \vec{x}_j = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k. \quad (2.3.3)$$

A las funciones  $\Gamma_{ij}^k : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se les denomina *símbolos de Christoffel de segunda especie* o *coeficientes de la conexión de Levi-Civita*. Entonces la ecuación de Gauss (2.3.3) se expresa por

$$\vec{x}_{ij} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \vec{x}_k + L_{ij} N. \quad (2.3.4)$$

Además si los campos de vectores  $X, Y$  tangentes a  $\mathcal{M}$  se expresan localmente por  $X = \sum_{i=1}^2 X^i \vec{x}_i$ ,  $Y = \sum_{j=1}^2 Y^j \vec{x}_j$  entonces, aplicando las propiedades de Levi-Civita y (2.3.3), obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum_{i=1}^2 X^i \left( \sum_{j=1}^2 \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \vec{x}_j + \sum_{j=1}^2 Y^j \nabla_{\vec{x}_i} \vec{x}_j \right) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^2 X^i \left( \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \vec{x}_k. \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Por tanto, la conexión de Levi-Civita queda determinada por los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ .

**Nota 2.3.6** Los coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ , usando la fórmula de Kossul, pueden expresarse en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental como sigue [8, pág. 127]

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^2 g^{hk} \left( \frac{\partial g_{jh}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^h} \right).$$

De aquí se deduce fácilmente que los símbolos de Christoffel verifican la siguiente propiedad de simetría  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

## 2.4. Curvas geodésicas

Las líneas geodésicas sobre una superficie son las curvas de menor longitud uniendo dos puntos. Éstas constituyen la generalización natural de las rectas en el plano euclídeo.

**Definición 2.4.1** Una curva en una superficie  $\mathcal{M}$  con parametrización  $\vec{\alpha} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  se dice que es *geodésica* si  $\vec{\alpha}''$  es normal a  $\mathcal{M}$ , esto es,  $\vec{\alpha}'' \parallel N \circ \vec{\alpha}$ .

Por tanto, la noción de geodésica depende de la parametrización  $\vec{\alpha}$  de la curva. Tal parametrización verifica la siguiente propiedad.

**Proposición 2.4.2** Si  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$  es la parametrización de una geodésica en  $\mathcal{M}$ , entonces  $\|\vec{\alpha}'\| = c$ , siendo  $c$  constante.

**Demostración.** Dado que la curva está en  $\mathcal{M}$ , se tiene que  $\vec{\alpha}'$  es ortogonal a  $N \circ \vec{\alpha}$ . Por otro lado,

$$\frac{d}{dt} \|\vec{\alpha}'\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \vec{\alpha}', \vec{\alpha}' \rangle = 2 \langle \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}' \rangle.$$

Por tanto, si  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$  es geodésica, se sigue que  $\langle \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}' \rangle = 0$ . Y de aquí,  $\frac{d}{dt} \|\vec{\alpha}'\| = 0$ , esto es,  $\|\vec{\alpha}'\| = c$ , siendo  $c$  constante.  $\square$

En lo que sigue, supondremos que las geodésicas  $\vec{\alpha}$  de  $\mathcal{M}$  están parametrizadas con el parámetro natural  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ . Denotaremos por  $\vec{\alpha}(s), \vec{\alpha}(s), \dots$  a  $\vec{\alpha}'(s), \vec{\alpha}''(s), \dots$ . Entonces  $\vec{\alpha}$  es colineal con  $N$  a lo largo de la curva. Consideremos que la normal unitaria  $N$  tiene signo de forma que  $N \circ \vec{\alpha} = \vec{n}$ , donde  $\vec{n}$  es la *normal principal* de  $\vec{\alpha}$ . De aquí,  $\vec{\alpha} = \kappa N \circ \vec{\alpha}$ , donde  $\kappa$  denota la curvatura de la geodésica como curva en  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposición 2.4.3** Si  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$  es una geodésica en  $\mathcal{M}$  con parametrización natural, entonces  $S(\vec{t}) = \kappa \vec{t} - \tau \vec{b}$ .

**Demostración.** Usando las fórmulas del Triedro de Frenet se tiene

$$S(\vec{t}) = -\frac{d(\vec{N} \circ \vec{\alpha})}{ds} = -\dot{\vec{n}} = \kappa \vec{t} - \tau \vec{b},$$

donde  $\tau$  es la torsión de la curva y  $\vec{b}$  un vector binormal.  $\square$

A continuación estudiamos algunos ejemplos de curvas geodésicas:

1. Geodésicas en el plano: Dado que la normal unitaria  $N$  de un plano permanece constante a lo largo de cada curva  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$  en el plano, se sigue que

$$0 = \frac{d}{dt} \langle \vec{\alpha}', N \circ \vec{\alpha} \rangle = \langle \vec{\alpha}'', N \circ \vec{\alpha} \rangle + \langle \vec{\alpha}', \frac{d}{dt} N \circ \vec{\alpha} \rangle = \langle \vec{\alpha}'', N \circ \vec{\alpha} \rangle.$$

Si además  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$  es geodésica, entonces  $\vec{\alpha}'' = 0$  y obtenemos  $\vec{\alpha}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$ , siendo  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ . Recíprocamente, cada recta parametrizada como  $\vec{\alpha}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$  satisface  $\vec{\alpha}''(t) = \vec{0}$  y, por tanto, es geodésica.

**Nota 2.4.4**  $\vec{\beta}(t) = \vec{a}t^3 + \vec{b}$  es una reparametrización de  $\vec{\alpha}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$ . Sin embargo, obtenemos que  $\|\vec{\beta}'(t)\| = 3t^2 \|\vec{a}\|$ . Esto significa que  $\|\vec{\beta}'(t)\|$  no es constante y, por tanto, usando la Proposición 2.4.2,  $\vec{\beta}$  no es una parametrización geodésica.

2. Geodésicas en las esferas: Consideramos la esfera  $S^2(r) \subset \mathbb{R}^3$  de centro el origen y radio  $r > 0$ . Su normal unitaria  $N$  es colineal con el vector posición en cada punto de la esfera. Tomando  $N$  con sentido hacia el centro de la esfera, viene dado por  $N_{(x,y,z)} = -\frac{1}{r}(x, y, z)$ . Para cada  $v = (v^1, v^2, v^3) \in T_{(x,y,z)}S^2(r)$ , se tiene

$$S_{(x,y,z)}(\vec{v}) = -dN(\vec{v}) = -(v^1 \frac{\partial N}{\partial x} + v^2 \frac{\partial N}{\partial y} + v^3 \frac{\partial N}{\partial z}) = \frac{1}{r}(v^1, v^2, v^3) = \frac{1}{r}\vec{v}.$$

De aquí,  $S_{(x,y,z)} = \frac{1}{r}I$  donde  $I$  denota la aplicación identidad en cada plano tangente de  $S^2(r)$  y la curvatura de Gauss  $K$  es constante y viene dada por

$$K = \frac{1}{r^2}. \quad (2.4.1)$$

Sea  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$  una geodésica con parametrización natural en  $S^2(r)$ . De la Proposición 2.4.3, dado que  $S = \frac{1}{r}I$ , obtenemos que  $\kappa = \frac{1}{r}$  y  $\tau = 0$ . Esto significa que la curva ha de ser una circunferencia máxima de radio  $r$ . Recíprocamente, una circunferencia máxima se puede expresar como intersección de un plano que pasa por el centro y la esfera. Entonces  $\vec{\alpha}$  y  $\ddot{\alpha}$  son paralelas al plano y ortogonales entre sí. Dado que la normal unitaria  $N$  es perpendicular a  $\vec{\alpha}$  y paralela al plano, ha de ocurrir que  $N$  es colineal a  $\ddot{\alpha}$ , o lo que es lo mismo, la circunferencia es geodésica.

3. Geodésicas en el cilindro circular: Sea  $\mathcal{C}(r)$  el cilindro recto de base una circunferencia de radio  $r$  centrada en el origen,  $\mathcal{C}(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = r^2\}$ . La normal unitaria viene dada por  $N_{(x,y,z)} = -\frac{1}{r}(x, y, 0)$ ,  $(x, y, z) \in \mathcal{C}(r)$ . Entonces,  $S_{(x,y,z)}\vec{v} = -dN(\vec{v}) = \frac{1}{r}(v^1, v^2, 0)$ . Cualquier curva en  $\mathcal{C}(r)$  tiene parametrizaciones  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$  de la forma  $\vec{\alpha}(t) = (r \cos \theta(t), r \sin \theta(t), h(t))$ , siendo  $\theta$  y  $h$  funciones diferenciables. Si  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$  es geodésica, se sigue de la propia definición que  $h''(t) = 0$ . Por otro lado,  $\vec{\alpha}'(t) = (-r\theta'(t) \sin \theta(t), r\theta'(t) \cos \theta(t), h'(t))$  y  $\|\vec{\alpha}'(t)\|^2 = r^2(\theta'(t))^2 + (h'(t))^2$ . Entonces usando la Proposición 2.4.2,  $\theta(t)$  ha de ser constante. Por tanto, obtenemos  $\theta(t) = at + b$ ,  $h(t) = ct + d$  y  $\vec{\alpha}(t) = (r \cos(at + b), r \sin(at + b), ct + d)$ .

Si  $a \neq 0$  y  $c \neq 0$ ,  $\vec{\alpha}$  es la representación paramétrica de una hélice; Si  $a = 0$ ,  $\vec{\alpha}$  es una generatriz y si  $c = 0$ ,  $\vec{\alpha}$  es una circunferencia paralela a la base.

El vector  $\ddot{\alpha}$  de una curva  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ , parametrizada con parámetro arco, sobre una superficie  $\mathcal{M}$ , se descompone, usando el producto interior en  $\mathbb{R}^3$ , en un vector  $\vec{k}_g$  tangente a la superficie (vector *curvatura geodésica*) y en un vector  $\vec{k}_n$  en la dirección de la normal  $N$  a la superficie (vector *curvatura normal*). Esto es,  $\ddot{\alpha}$  es la suma directa

$$\ddot{\alpha} = \vec{k}_g \oplus \vec{k}_n.$$

Entonces,  $\vec{\alpha}(s)$  es geodésica si y solo si  $\vec{k}_g$  es idénticamente nula. De acuerdo a la ecuación de Gauss (2.3.2) resulta

$$\vec{k}_g = \nabla_{\dot{\alpha}} \ddot{\alpha}, \quad \vec{k}_n = II(\dot{\alpha}, \dot{\alpha})N.$$

Supongamos que la curva está sobre la superficie de representación paramétrica  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$ , y que la ecuación paramétrica de la curva en coordenadas curvilíneas es  $u^i = u^i(s)$ ,  $i = 1, 2$ , con  $s$  parámetro longitud de arco, es decir, la representación paramétrica vectorial de la curva será  $\vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u^1(s), u^2(s))$ . Por lo tanto, usando (2.3.5), se tiene

$$\vec{k}_g = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \vec{x}_k. \quad (2.4.2)$$

$$\vec{k}_n = \left( \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) N. \quad (2.4.3)$$

Como el vector  $\ddot{\alpha}$  es independiente del sentido de recorrido de la curva y como además, el vector  $\vec{k}_g$  no depende de la elección de la parametrización de la superficie, se trata de un invariante isométrico.

Consideremos una curva  $\vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u^1(s), u^2(s))$ . En cada punto  $p$  de la curva consideremos el vector unitario  $\vec{u} \in T_p\mathcal{M}$ , definido por  $\vec{u} = N \times \vec{t}$  al que llamaremos *normal geodésica*. Se tiene que la terna  $\{\vec{t}, \vec{u}, N\}$  está orientada positivamente en  $\mathbb{R}^3$  y que el sentido del vector  $\vec{u}$  depende de la orientación de la superficie. Puesto que tanto  $\vec{k}_g$  como  $\vec{u}$  son ortogonales a  $N$  y a  $\vec{t}$ , tendrán la misma dirección, por tanto

$$\vec{k}_g = \kappa_g \vec{u}. \quad (2.4.4)$$

Al coeficiente  $\kappa_g$  le denominamos *curvatura geodésica* de la curva sobre la superficie  $\mathcal{M}$ . Sabiendo que  $\vec{k}_g$  es invariante por isometrías y  $\vec{u}$  es invariante si no cambia la orientación y cambia su signo en caso contrario, resulta que la curvatura geodésica  $\kappa_g$  tiene la misma propiedad. Por lo tanto, podemos decir que el valor absoluto de la curvatura geodésica es un invariante isométrico y su signo cambia con la orientación de la superficie.

**Proposición 2.4.5** *Si  $\vec{v} \in T_p\mathcal{M}$  entonces existe un intervalo abierto  $I$  alrededor de 0 y una única geodésica  $\vec{\alpha} : I \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $\vec{\alpha}(0) = p$  y  $\dot{\vec{\alpha}}(0) = \vec{v}$ .*

**Demostración.** De la expresión (2.4.2) para la curvatura geodésica, las geodésicas con parametrización natural  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u^1(s), u^2(s))$  son soluciones del siguiente sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \quad k = 1, 2.$$

Si  $p = \vec{x}(p^1, p^2)$  y  $\vec{v} = v^1 \vec{x}_1(p^1, p^2) + v^2 \vec{x}_2(p^1, p^2)$ , se tiene  $p^1 = u^1(0), p^2 = u^2(0)$  y  $v^1 = \frac{du^1}{ds}(0), v^2 = \frac{du^2}{ds}(0)$ . Estas igualdades son condiciones iniciales para el anterior sistema. Entonces el resultado sigue del teorema de existencia y unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.  $\square$

## 2.5. Transporte paralelo

Un campo de vectores diferenciable  $Y$  tangente a una superficie  $\mathcal{M}$  a lo largo de una curva  $\vec{\alpha}(t) = \vec{x}(u^1(t), u^2(t))$  se define como  $Y(t) = \sum_{i=1}^2 Y^i(t) \vec{x}_i(u^1(t), u^2(t))$ , donde  $Y^i = Y^i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , son funciones diferenciables. Usando la ecuación (2.3.5), la conexión de Levi-Civita de un campo de vectores  $Y(t)$  a lo largo de un trozo de curva  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$  en  $\mathcal{M}$ , viene dada por

$$\nabla_{\vec{\alpha}'} Y = \sum_{i,j,k=1}^2 \frac{du^i}{dt} \left( \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k Y^j \right) \vec{x}_k = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y^j \frac{du^i}{dt} \right) \vec{x}_k.$$

Dado que  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , obtenemos

$$\nabla_{\vec{\alpha}'} Y = \sum_{k=1}^2 \left( \frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y^i \frac{du^j}{dt} \right) \vec{x}_k. \quad (2.5.1)$$

**Definición 2.5.1** Se dice que  $Y$  es un *campo de vectores paralelo* a lo largo de la curva  $\vec{\alpha}$  si  $\nabla_{\vec{\alpha}'} Y = \vec{0}$ .

De (2.5.1),  $Y$  es paralelo a lo largo de  $\vec{\alpha}$  si y sólo si

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k Y^i \frac{du^j}{dt} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (2.5.2)$$

**Proposición 2.5.2** Una curva  $\vec{\alpha}$  sobre una superficie  $\mathcal{M}$  es geodésica sobre  $\mathcal{M}$  si y solo si su campo de vectores tangente unitario es paralelo.

**Demostración.** Si  $\vec{\alpha}$  es geodésica se tiene de la Proposición 2.4.2 que  $\vec{\alpha}'' \parallel N \circ \vec{\alpha}$  y  $\|\vec{\alpha}'\| = c = cte$ . Entonces de la ecuación de Gauss  $\vec{\alpha}'' = \nabla_{\vec{\alpha}'} \vec{\alpha}' + II(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')N$  resulta,  $\nabla_{\vec{\alpha}'} \vec{\alpha}' = \nabla_{\vec{\alpha}'} c \vec{\alpha}' = 0$ . Por lo tanto,  $\nabla_{\dot{\vec{\alpha}}} \vec{\alpha} = 0$ . El recíproco se sigue usando que  $\kappa_g = \nabla_{\dot{\vec{\alpha}}} \vec{\alpha}$ .  $\square$

**Proposición 2.5.3** Sea  $\vec{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una curva sobre  $\mathcal{M}$ . Para cada vector  $\vec{v} \in T_{\vec{\alpha}(0)}\mathcal{M}$  existe un único campo de vectores diferenciable  $Y$  sobre  $\vec{\alpha}$  tal que  $Y(0) = \vec{v}$  e  $Y$  es paralelo a lo largo de  $\vec{\alpha}$ . La aplicación  $P_\alpha : T_{\vec{\alpha}(0)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\vec{\alpha}(t)}\mathcal{M}, \vec{v} \mapsto P_\alpha(\vec{v}) = Y_{\vec{\alpha}(t)}$ , es un isomorfismo.

**Demostración.** Sea  $(u^1, u^2)$  las coordenadas de una parametrización  $\vec{x}$  alrededor de  $\vec{\alpha}(0)$ . Un campo de vectores  $Y$  sobre  $\vec{\alpha}$  es paralelo si y solo si satisface a las ecuaciones (2.5.2). La condición  $Y(0) = v_0^1 \vec{x}_1 + v_0^2 \vec{x}_2$  define el valor inicial; y la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias dan una única solución diferenciable  $Y^i(t)$ , satisfaciendo dichas ecuaciones, sobre algún intervalo  $[0, a]$ . Esto determina el campo de vectores  $Y$ .

Para  $t \in [0, a]$ , la aplicación  $P_\alpha : T_{\vec{\alpha}(0)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\vec{\alpha}(t)}\mathcal{M}$  es lineal por la linealidad de dichas ecuaciones diferenciales ya que las soluciones dependen linealmente de sus condiciones iniciales. Si  $t \in [0, 1]$ , obtenemos  $P_\alpha$  recubriendo el conjunto compacto  $\vec{\alpha}([0, t])$  con un número finito de representaciones paramétricas y trasladando paralelamente en cada entorno coordinado vía la solución del sistema dado.  $\square$

**Definición 2.5.4** La aplicación  $P_\alpha : T_{\vec{\alpha}(0)}\mathcal{M} \rightarrow T_{\vec{\alpha}(t)}\mathcal{M}$  se denomina *transporte paralelo de Levi-Civita* de  $\vec{v} \in T_{\vec{\alpha}(0)}\mathcal{M}$  a lo largo de  $\vec{\alpha}$ .

**Proposición 2.5.5** El transporte paralelo a lo largo de una curva conserva el producto interior de dos vectores. En consecuencia, conserva también la longitud y el ángulo entre ellos.

**Demostración.** Sean  $Y, Z$  dos campos de vectores paralelos a lo largo de una curva  $\vec{\alpha}$ . Para comprobar que su producto interior es constante, demostremos que su derivada es nula:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle &= \left\langle \frac{dY}{dt}, Z \right\rangle + \left\langle Y, \frac{dZ}{dt} \right\rangle = \\ &= \langle (\nabla_{\vec{\alpha}'} Y + II(\vec{\alpha}', Y)N), Z \rangle + \langle Y, (\nabla_{\vec{\alpha}'} Z + II(\vec{\alpha}', Z)N) \rangle = \\ &= \langle \nabla_{\vec{\alpha}'} Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_{\vec{\alpha}'} Z \rangle = 0. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposición 2.5.6** *Si dos superficies son mutuamente tangentes a lo largo de una curva, entonces las derivadas covariantes de un campo de vectores tangente a ambas superficies a lo largo de la curva, coinciden.*

**Demostración.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{M}^*$  dichas superficies con conexiones de Levi-Civita  $\nabla$  y  $\nabla^*$ , e  $Y$  un campo de vectores a lo largo de la curva  $\vec{\alpha}$  (curva intersección) tangente a ambas superficies, entonces

$$\frac{dY}{dt} = \nabla_{\vec{\alpha}'} Y + II(\vec{\alpha}', Y)N = \nabla_{\vec{\alpha}'}^* Y + II^*(\vec{\alpha}', Y)N^*.$$

Y como  $N = \pm N^*$ , se tiene  $\nabla_{\vec{\alpha}'} Y = \nabla_{\vec{\alpha}'}^* Y$ .  $\square$

Decimos que una superficie regular  $\mathcal{M}$  es *orientada* u *orientable* si existe un campo de vectores global, unitario y normal  $N$  a  $\mathcal{M}$  que es diferenciable.

Terminamos esta sección dando una interpretación geométrica de la curvatura geodésica en términos del transporte paralelo sobre superficies orientadas.

**Proposición 2.5.7** *Sea  $\vec{x} = \vec{x}(u^1, u^2)$  una representación paramétrica de una superficie orientada  $\mathcal{M}$ ,  $C$  una curva sobre  $\mathcal{M}$  de ecuaciones paramétricas  $u^i = u^i(s)$ ,  $s$  el parámetro arco,  $Y(s)$  un campo de vectores tangente a  $\mathcal{M}$  a lo largo de  $C$  unitario y paralelo,  $\theta(s)$  el ángulo orientado entre  $Y(s)$  y  $\vec{t}(s)$ , entonces*

$$\frac{d\theta}{ds} = \kappa_g, \quad (2.5.3)$$

donde  $\kappa_g$  es la curvatura geodésica de  $C$ .

**Demostración.** Observemos, en primer lugar, que la consideración de un campo de vectores paralelo u otro no es fundamental, pues si cambiamos de campo de vectores paralelo a lo largo de  $C$ , eso será cambiar  $\theta$  aumentándole un ángulo constante y eso no afecta a la derivada de  $\theta$  (véase Proposición 2.5.5).

A lo largo de la curva,  $\cos \theta = \langle Y(s), \vec{t}(s) \rangle$  y, por tanto,

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds} \langle Y(s), \vec{t}(s) \rangle = \langle \nabla_{\vec{t}} Y, \vec{t} \rangle + \langle Y, \nabla_{\vec{t}} \vec{t} \rangle.$$

Pero  $\nabla_{\vec{t}} Y = 0$ , puesto que  $Y$  es paralelo a lo largo de  $C$ . Por otra parte, recordando que  $\nabla_{\vec{t}} \vec{t} = \vec{k}_g = \kappa_g \vec{u}$ , siendo  $\vec{u} = N \times \vec{t}$ , por tanto,

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{ds} = \kappa_g \langle Y, \vec{u} \rangle,$$

y esta fórmula es válida para todo campo de vectores  $Y$  paralelo a lo largo de  $C$ . Entonces, fijando arbitrariamente un punto  $s_0$  de la curva, podemos elegir el campo  $Y$  de forma que en  $s_0$  sea  $Y(s_0) = \vec{u}(s_0)$ ; entonces el ángulo  $\theta(s_0) = -\pi/2$ ,  $\langle Y(s_0), \vec{u}(s_0) \rangle = 1$ ,  $\sin \theta(s_0) = -1$  y tenemos

$$\frac{d\theta}{ds}(s_0) = \kappa_g(s_0).$$

Como  $s_0$  es arbitrario, obtenemos (2.5.3).  $\square$

## Capítulo 3

# Teorema de Gauss-Bonnet

Gauss prueba en 1827 en el artículo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [6], que el exceso sobre  $\pi$  de la suma de los ángulos interiores  $\alpha, \beta, \gamma$  de un triángulo geodésico  $\Delta$  en una superficie regular, es igual a la integral de la curvatura de Gauss  $K$  sobre  $\Delta$ ; esto es,

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_{\Delta} K dA.$$

De esta fórmula se deduce:

- (a) Si  $K$  es idénticamente nula, entonces  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , como ya sabíamos de la geometría euclidiana.
- (b) Si  $K > 0$ , entonces  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ . Esta situación se tiene en la esfera  $S^2(r)$  de radio  $r > 0$ , cuya curvatura de Gauss es constante  $K = \frac{1}{r^2}$  (véase (2.4.1)). Se sigue entonces que el exceso sobre  $\pi$  de la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico  $\Delta$  en  $S^2(r)$  depende exclusivamente de su área y viene dado por

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{1}{r^2} \text{area}(\Delta).$$

- (c) Si  $K < 0$ , entonces  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ . Este es el caso del plano hiperbólico o de la pseudoesfera donde  $K$  es una constante negativa.

### 3.1. Teorema de Gauss-Bonnet en la esfera

Antes de probar el Teorema de Gauss para triángulos geodésicos en una superficie arbitraria consideramos, en esta primera sección, el caso particular de la esfera  $S^2(r)$  en  $\mathbb{R}^3$  de radio  $r > 0$ . Como sabemos de la ecuación (2.4.1),  $S^2(r)$  es una superficie de curvatura constante  $K = \frac{1}{r^2}$  cuyas geodésicas son sus circunferencias de radio  $r$  y parametrizadas con velocidad constante.

**Teorema 3.1.1 (Teorema de Harriot)** Sea  $\Delta$  un triángulo geodésico en  $S^2(r)$  con ángulos interiores  $\alpha, \beta, \gamma$ . El área de  $\Delta$  viene dada por

$$\text{area}(\Delta) = r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \quad (3.1.1)$$

**Demostración.** Veamos una demostración puramente geométrica de este teorema. Denominemos a las circunferencias máximas como  $a, b, c$ , de tal manera que el ángulo  $\alpha$  se encuentra entre  $b$  y  $c$  y así sucesivamente (véase Figura 3.1). Cada par de circunferencias máximas, divide la superficie de la esfera en cuatro piezas. Dado que el área de  $S^2(r)$  es  $4\pi r^2$ , el área combinada de dos piezas con ángulo interior  $\alpha$  es  $2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 4\alpha r^2$ . Una fórmula similar vale para las otras dos regiones correspondientes a  $\beta$  y  $\gamma$ .

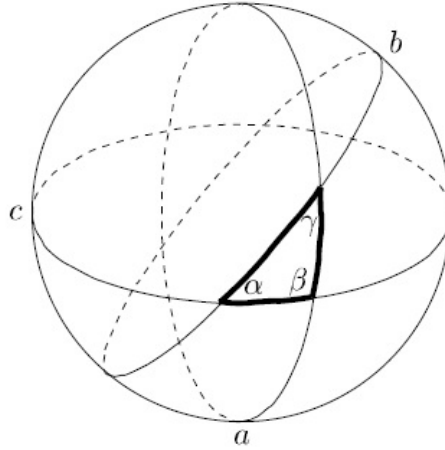


Figura 3.1: Un triángulo geodésico en  $S^2$

Las tres regiones juntas cubren la esfera completa, pero  $\Delta$  y su imagen antipodal (lado opuesto de la esfera) son recubiertas exactamente 3 veces. Por lo tanto,

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = 4\pi r^2 + 2 \cdot 2\text{area}(\Delta)$$

De aquí se prueba (3.1.1). □

A la fórmula (3.1.1) se le denomina *fórmula del área del triángulo* en la esfera.

El resultado más elemental del Teorema de Gauss-Bonnet como es el teorema que acabamos de demostrar, tiene diferentes e interesantes consecuencias. A continuación describimos dos de ellas:

- (i) En la esfera  $S^2(r)$ , el área de un triángulo geodésico depende exclusivamente de sus ángulos. Este hecho no se produce en los triángulos del plano. Triángulos en el plano con mismos ángulos interiores han de ser semejantes y claramente las áreas de éstos son distintas, de hecho están relacionadas bajo un factor de proporcionalidad.
- (ii) La suma de los ángulos interiores de un triángulo geodésico en  $S^2(r)$  es mayor que  $\pi$ . Además, la diferencia crece con el tamaño del triángulo y es inversamente proporcional al radio de la esfera al cuadrado.



Las leyes propias de la geometría euclidiana no pueden, por tanto, aplicarse a la esfera. Ello se debe precisamente a que la esfera no es llana, esto es, su curvatura es diferente de cero. De (ii), la comprobación de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suficientemente grande sobre la superficie de la Tierra excede de  $\pi$ , podría haber resuelto la controversia que en su momento suscitó el que la Tierra fuera o no plana.

La fórmula (3.1.1) muestra también que no podemos representar exactamente a través de mapas en el plano, ninguna porción de la Tierra y que esta representación se aleja más de la realidad en la medida en que la porción de la superficie que se considera es mayor. Pensemos que los segmentos de círculos geodésicos tendrían que representarse como segmentos de rectas de nuestro mapa, dado que las geodésicas son las curvas de menor longitud uniendo dos puntos. Un triángulo geodésico tendría así que convertirse en un triángulo del mapa, pero esto no es posible, ya que, como hemos probado, la suma de los ángulos interiores de ambos triángulos no es la misma. En uno es  $\pi$  y en el otro es mayor que  $\pi$ .

## 3.2. La curvatura integral

Consideremos una parametrización  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  y  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  una región acotada de una superficie regular contenida en un entorno coordenado. Si  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, usando los mismos argumentos previos a la Definición 2.2.3, se puede ver que la integral

$$\iint_{\vec{x}^{-1}(\mathcal{R})} (f \circ \vec{x})(u^1, u^2) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2$$

no depende de la parametrización elegida.

**Definición 3.2.1** A esta integral se le denomina *integral de f sobre la región  $\mathcal{R}$*  y se denota por

$$\iint_{\mathcal{R}} f dA.$$

De esta manera podemos definir lo siguiente.

**Definición 3.2.2** Se denomina *curvatura integral* de la región  $\mathcal{R}$  a

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA,$$

donde  $K$  es la curvatura de Gauss y  $dA$  el elemento de área.

Una región  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  (unión de un conjunto abierto conexo  $D$  con su frontera) se dice que es una *región simple* si  $\mathcal{R}$  es homeomorfo a un disco, esto es,  $D$  es simplemente conexo, y la frontera  $\partial D$  de  $D$  es la traza de una curva simple, cerrada y regular a trozos.

En lo que sigue, supondremos que  $\partial D$  de la región simple  $\mathcal{R}$  está parametrizada con parámetro natural  $\vec{\alpha} : [0, l] \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ , siendo  $l$  la longitud de  $\partial D$ . Sea  $\vec{v}$  un vector tangente a una superficie  $\mathcal{M}$  en uno de los puntos  $p$  de la frontera  $\partial D$  de una región simple  $D \subset \mathcal{M}$ . Entonces, existe un único campo de vectores  $Y$  obtenido por transporte paralelo

a lo largo de  $\partial D$  tal que  $Y(0) = \vec{v}$ . Por lo tanto, el ángulo de rotación resultante del transporte paralelo es  $\Delta\phi = \text{ang}(\vec{v}, Y(l))$ . En el plano se observa claramente que  $\Delta\phi = 0$ . Sin embargo, como veremos a continuación, en la esfera se tiene  $\Delta\phi = \frac{1}{r^2} \text{area}(D)$ .

**Teorema 3.2.3** *Sea  $\mathcal{R}$  una región simple contenida en un abierto imagen de una representación paramétrica regular  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ . Entonces el ángulo de rotación resultante del transporte paralelo de un vector a lo largo de la frontera de  $\mathcal{D}$  está dado por*

$$\Delta\phi = \iint_{\mathcal{R}} K dA. \quad (3.2.1)$$

**Demostración.** Sea  $X$  un campo de vectores tangente a  $\mathcal{M}$  unitario sobre  $\vec{x}(U)$ . Denotemos por  $Z$  el campo de vectores tangente a  $\mathcal{M}$  obtenido a partir de  $X$  girando un ángulo igual a  $\frac{\pi}{2}$  en sentido positivo en cada punto, es decir,  $Z = N \times X$ . Sea  $Y$  el campo de vectores paralelo a lo largo de  $\partial D$  tal que  $Y(s_0) = Z(u^1(s_0), u^2(s_0))$ , siendo  $s_0$  el parámetro de un punto  $p$  arbitrario sobre  $\partial D$  (véase Figura(3.2)). Si  $\phi$  es el ángulo que forman  $X$  e  $Y$  sobre la frontera  $\partial D$ , entonces  $\phi$  es una función del parámetro natural  $s$  de  $\partial D$ ,

$$\phi(s) = \text{ang}(X(u^1(s), u^2(s)), Y(s)), \quad \cos\phi(s) = \langle X(u^1(s), u^2(s)), Y(s) \rangle.$$

Por tanto,

$$-\sin\phi(s) \frac{d\phi}{ds} = \frac{d}{ds}(\cos\phi(s)) = \langle \nabla_{\dot{\alpha}(s)} X, Y \rangle + \langle X, \nabla_{\dot{\alpha}(s)} Y \rangle = \langle \nabla_{\dot{\alpha}(s)} X, Y \rangle,$$

pues  $\nabla_{\dot{\alpha}} Y = 0$  al ser  $Y$  paralelo.

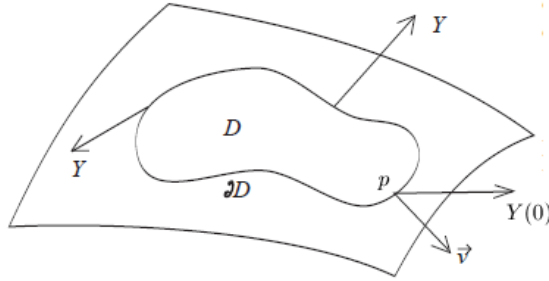


Figura 3.2: Transporte paralelo de un vector a lo largo de la frontera  $\partial D$

Dado que  $\phi(s_0) = \frac{\pi}{2}$  y  $\sin\phi(s_0) = 1$ , se tiene

$$\frac{d\phi}{ds} \Big|_{s=s_0} = -\langle Z(u^1(s_0), u^2(s_0)), \nabla_{\dot{\alpha}(s_0)} X \rangle.$$

Esta identidad se verifica en todos los puntos de la frontera al variar  $s_0$  en  $[0, l]$ . De aquí, obtenemos

$$\frac{d\phi}{ds} = -\langle Z, \nabla_{\dot{\alpha}(s)} X \rangle.$$

Por la ecuación de Gauss (2.3.2) se tiene

$$\frac{d\phi}{ds} = -\langle Z, \nabla_{\dot{\alpha}(s)} X \rangle = -\langle Z, D_{\dot{\alpha}(s)} X \rangle = -\langle Z, \frac{d}{ds} X \rangle.$$

Ahora necesitamos considerar  $x^{-1}(D)$  para hallar la integral. Poniendo  $\tilde{D} = x^{-1}(D)$  y  $\partial\tilde{D} = x^{-1}(\partial D)$  se tiene

$$\Delta\phi = - \int_{\partial\tilde{D}} \langle Z, \frac{d}{ds} X \rangle ds.$$

Utilizando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{d}{ds} X = \frac{d}{ds} X(u^1(s), u^2(s)) = \frac{\partial X}{\partial u^1} \frac{du^1}{ds} + \frac{\partial X}{\partial u^2} \frac{du^2}{ds}$$

Entonces,

$$\Delta\phi = - \int_{\partial\tilde{D}} \langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^1} du^1 + \frac{\partial X}{\partial u^2} du^2 \rangle = - \int_{\partial\tilde{D}} \left( \langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle du^1 + \langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle du^2 \right).$$

Como las funciones  $\langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle$  y  $\langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle$  están definidas en  $D \cup \partial D$ , podemos aplicar la fórmula de Green en el plano,

$$\int_{\partial\tilde{D}} M dx + N dy = \iint_{\tilde{D}} \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy.$$

Tomando

$$M = \langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle, \quad N = \langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= - \iint_{\tilde{D}} \left( \frac{\partial \langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle}{\partial u^1} - \frac{\partial \langle Z, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle}{\partial u^2} \right) du^1 du^2 \\ &= - \iint_{\tilde{D}} \left( \langle \frac{\partial Z}{\partial u^1}, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle + \langle Z, \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{\partial X}{\partial u^2} \right) \rangle - \left( \langle \frac{\partial Z}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle + \langle Z, \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{\partial X}{\partial u^1} \right) \rangle \right) \right) \\ &= - \iint_{\tilde{D}} \left( \langle \frac{\partial Z}{\partial u^1}, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle - \langle \frac{\partial Z}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle \right) du^1 du^2 \\ &= \iint_{\tilde{D}} \left( \langle \frac{\partial Z}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle - \langle \frac{\partial Z}{\partial u^1}, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle \right) du^1 du^2. \end{aligned}$$

Como  $\{X, Z, N\}$  forman una base ortonormal, se tiene

$$\frac{\partial X}{\partial u^i} = \lambda^i X + \mu^i N.$$

$$\frac{\partial Z}{\partial u^i} = -\lambda^i X + \nu^i N.$$

$$\frac{\partial N}{\partial u^i} = -\mu^i X - \nu^i Z.$$

Resulta entonces que

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial Z}{\partial u^2}, \frac{\partial X}{\partial u^1} \rangle - \langle \frac{\partial Z}{\partial u^1}, \frac{\partial X}{\partial u^2} \rangle &= \langle -\lambda^2 X + \nu^2 N, \lambda^1 X + \mu^1 N \rangle - \langle -\lambda^1 X + \nu^1 N, \lambda^2 X + \mu^2 N \rangle \\ &= \nu^2 \mu^1 - \nu^1 \mu^2. \end{aligned}$$

Además

$$\frac{\partial N}{\partial u^1} \times \frac{\partial N}{\partial u^2} = \begin{vmatrix} X & Z & N \\ -\mu^1 & -\nu^1 & 0 \\ -\mu^2 & -\nu^2 & 0 \end{vmatrix} = (\nu^2 \mu^1 - \nu^1 \mu^2) N.$$

De estas dos observaciones y de la definición de operador forma,  $S\vec{x}_i = -\frac{\partial N}{\partial u^i}$ ,  $i = 1, 2$ , obtenemos

$$S\vec{x}_1 \times S\vec{x}_2 = (\nu^2 \mu^1 - \nu^1 \mu^2) N.$$

$$\langle S\vec{x}_1 \times S\vec{x}_2, N \rangle = \nu^2 \mu^1 - \nu^1 \mu^2 = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^1}, \frac{\partial Z}{\partial u^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^2}, \frac{\partial Z}{\partial u^1} \right\rangle.$$

Por otro lado,  $S\vec{x}_1 = \lambda \vec{x}_1 + \mu \vec{x}_2$  y  $S\vec{x}_2 = \gamma \vec{x}_1 + \delta \vec{x}_2$ , donde  $\lambda, \mu, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ . Entonces  $S\vec{x}_1 \times S\vec{x}_2 = (\lambda\delta - \mu\gamma) \vec{x}_1 \times \vec{x}_2 = K \vec{x}_1 \times \vec{x}_2$ . Por lo tanto

$$K \langle \vec{x}_1 \times \vec{x}_2, N \rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^1}, \frac{\partial Z}{\partial u^2} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X}{\partial u^2}, \frac{\partial Z}{\partial u^1} \right\rangle.$$

Pero,  $K \langle \vec{x}_1 \times \vec{x}_2, N \rangle = K \langle \vec{x}_1 \times \vec{x}_2, \frac{\vec{x}_1 \times \vec{x}_2}{\|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|} \rangle = K \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\| = K \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$ . En definitiva se tiene entonces (3.2.1).  $\square$

### 3.3. Versión local del teorema de Gauss-Bonnet

Antes de establecer la versión local del teorema de Gauss-Bonnet, necesitamos algunas nociones previas. Como ya comentábamos en la sección anterior, tomaremos regiones simples  $\mathcal{R}$  con frontera  $\partial D$  parametrizados con el parámetro natural  $\vec{\alpha} : [0, l] \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ . Dado que  $\vec{\alpha}$  es una curva simple, cerrada y regular a trozos (véase Figura 3.3) satisface las siguientes condiciones:

- (i)  $\vec{\alpha}(0) = \vec{\alpha}(l)$  que significa que  $\vec{\alpha}$  es una curva cerrada.
- (ii)  $s_1 \neq s_2$ ,  $s_1, s_2 \in [0, l[$  implica que  $\vec{\alpha}(s_1) \neq \vec{\alpha}(s_2)$ , es decir, la curva  $\vec{\alpha}$  no posee autointersecciones.
- (iii) Existe una partición  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_k < s_{k+1} = l$  de  $[0, l]$ , tal que  $\vec{\alpha}$  es diferenciable y regular en cada  $[s_i, s_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Es decir,  $\vec{\alpha}$  deja de tener una recta tangente en un número finito de puntos.

A los puntos  $\vec{\alpha}(s_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$  se denominan *vértices* de  $\vec{\alpha}$  y a  $\vec{\alpha}([s_i, s_{i+1}])$  *arcos regulares* de  $\vec{\alpha}$ . Por la condición de regularidad, para cada vértice  $\vec{\alpha}(s_i)$ , existe límite por la derecha y por la izquierda, es decir,

$$\vec{\alpha}'(s_i^-) = \lim_{s \rightarrow s_i^-} \vec{\alpha}'(s), \quad \vec{\alpha}'(s_i^+) = \lim_{s \rightarrow s_i^+} \vec{\alpha}'(s)$$

los cuáles son distintos de cero.

Supongamos que  $\mathcal{M}$  es una superficie orientada. Entonces existe una normal unitaria diferenciable  $N$  definida globalmente sobre  $\mathcal{M}$  y que determina la orientación positiva. Esto

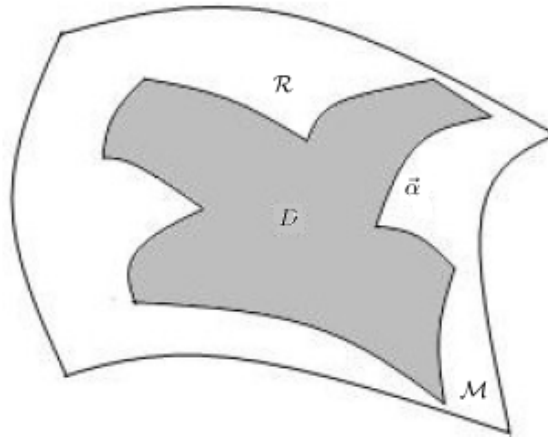


Figura 3.3: Región simple  $\mathcal{R}$  limitada por la curva  $\vec{\alpha}$

significa que una base  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$  de vectores tangentes a  $\mathcal{M}$  en algún punto de  $\mathcal{M}$  está orientada positivamente si el determinante  $|\vec{u}, \vec{v}, N|$  es positivo. Un entorno coordinado  $\vec{x}(U)$  se dice que es *compatible con la orientación* de  $\mathcal{M}$  si la base  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  está orientada positivamente.

Además, decimos que la curva  $\vec{\alpha}$  está *orientada positivamente* si en cada uno de los arcos regulares abiertos  $\vec{\alpha}(]s_i, s_{i+1}[)$  de  $\vec{\alpha}$  se tiene que el campo de vectores  $N \times \vec{\alpha}'$ , producto vectorial de  $N$  y  $\vec{\alpha}'$ , apunta hacia el interior de  $D$ . Esto significa que  $\{\vec{\alpha}', \vec{n}\}$ , donde  $\vec{n}$  es cualquier campo de vectores apuntando hacia el interior de  $D$ , forman una base orientada positivamente. Por tanto, la orientación de  $\vec{\alpha}$  dependerá de la orientación de  $\mathcal{M}$ . Intuitivamente, eso significa que mientras caminamos por la curva  $\vec{\alpha}$  en dirección positiva con la cabeza apuntando hacia  $N$ , la región  $\mathcal{R}$  queda a nuestra izquierda.

**Definición 3.3.1** El *ángulo exterior*  $\theta_i$  en el vértice  $\vec{\alpha}(t_i)$  es el ángulo orientado de  $\vec{\alpha}'(t_i^-)$  a  $\vec{\alpha}'(t_i^+)$  (véase Figura 3.4). Si el ángulo exterior de  $\theta_i$  es  $\pi$ , se denomina, *cúspide*.

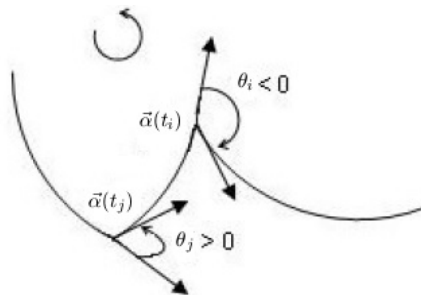


Figura 3.4: Signo del ángulo exterior  $\theta_i$

A continuación presentamos el teorema de Gauss-Bonnet en su versión local.

**Teorema 3.3.2 (Teorema de Gauss-Bonnet local)** Sea  $\vec{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$  una parametrización compatible con la orientación de una superficie regular  $\mathcal{M}$ , sea  $\mathcal{R} \subset \vec{x}(U)$

una región simple de  $\mathcal{M}$  y sea  $\vec{\alpha} : [0, l] \rightarrow \mathcal{M}$  tal que  $\partial D = \vec{\alpha}([0, l])$ . Entonces se tiene la siguiente fórmula de Gauss-Bonnet:

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi,$$

donde  $\kappa_g$  es la curvatura geodésica de  $\partial D$  y  $\theta_i$  los ángulos exteriores de los vértices de la frontera.

**Demostración.** Sea  $X$  un campo de vectores tangente unitario sobre  $\vec{x}(U)$ . Sea  $\vec{t} = \dot{\vec{\alpha}}$  el campo de vectores tangente y unitario a lo largo de la frontera  $\partial D$ , el cual está definido en todos los puntos salvo en los vértices. Lo mismo ocurre con la función  $\psi$  que determina el ángulo entre  $X$  y  $\vec{t}$  en cada punto, es decir,  $\psi = \text{ang}(X, \vec{t})$  (véase Figura 3.5).

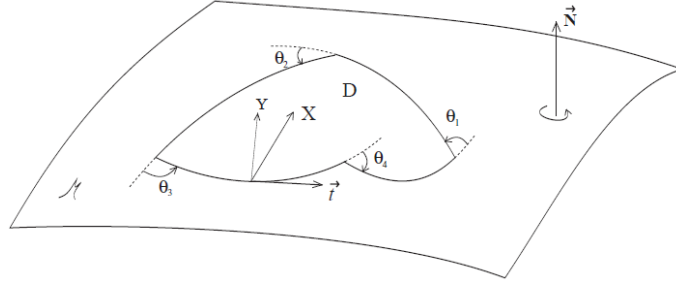


Figura 3.5: Orientación positiva de la frontera

Si recorremos el borde de  $D$ , el ángulo  $\psi$  cambia y su valor salta  $\theta_i$ , cuando se pasa por el vértice  $i$ -ésimo. Al dar una vuelta completa a lo largo de  $\partial D$  hasta llegar al vector inicial, el incremento de este ángulo será exactamente  $2\pi$ .

Consideremos ahora un campo de vectores auxiliar  $Y$  obtenido por transporte paralelo a lo largo de  $\partial D$ . Entonces se tiene

$$\psi = \text{ang}(X, \vec{t}) = \text{ang}(X, Y) + \text{ang}(Y, \vec{t}) = \phi + \chi,$$

siendo  $\phi = \text{ang}(X, Y)$  y  $\chi = \text{ang}(Y, \vec{t})$ . En consecuencia,

$$2\pi = \Delta\psi = \Delta\phi + \Delta\chi.$$

Por la Proposición 2.5.7, sabemos que  $\frac{d\chi}{ds} = \kappa_g$ . Entonces si  $\vec{\alpha}$  no tuviera vértices, se tiene

$$\Delta\chi = \int_0^l \kappa_g ds.$$

Puesto que los saltos en los vértices, en caso de existir, suman  $\sum_{i=1}^n \theta_i$  obtenemos

$$\Delta\chi = \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

De aquí, usando (3.2.1) llegamos a la fórmula de Gauss-Bonnet

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi.$$

□

### 3.4. Teorema de Gauss-Bonnet para regiones simples

Hemos probado el Teorema 3.3.2 bajo una hipótesis restrictiva sobre la región simple  $\mathcal{R}$ , pero el teorema también es válido, como veremos a continuación, para dominios simplemente conexos de clase más amplia. De hecho, si el dominio  $D$  de la región simple  $\mathcal{R}$  puede ser descompuesto en un número finito de dominios que no se superpongan dos a dos, tales que podamos aplicar el teorema en cada uno de los dominios por separado, entonces la conclusión del teorema es válida para el dominio total.

**Teorema 3.4.1** *Sea  $\mathcal{R}$  una región simple compacta de una superficie  $\mathcal{M}$ . Entonces,*

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi,$$

donde  $\kappa_g$  es la curvatura geodésica de  $\partial D$  y  $\theta_i$  los ángulos exteriores de los vértices de la frontera.

Para su demostración necesitaremos introducir algunos preliminares topológicos.

**Definición 3.4.2** Sea  $\mathcal{M}$  una superficie regular. Se dice que una región  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  es *regular* en  $\mathbb{R}^3$  si  $\mathcal{R}$  es compacta y su frontera  $\partial D$  es la unión de un número finito de curvas regulares a trozos, cerradas y simples que no se cortan.

**Definición 3.4.3** Llamaremos *triángulo* a una región simple con sólo tres vértices y ángulos exteriores  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**Definición 3.4.4** Una *triangulación* de una región regular  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  es una familia finita  $\mathfrak{S}$  de triángulos  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que:

- (i)  $\cup_{i=1}^n T_i = \mathcal{R}$ ;
- (ii) Si  $T_i \cap T_j \neq \emptyset$  con  $i \neq j$ , entonces  $T_i \cap T_j$  es un lado en común de  $T_i$  y  $T_j$ , o bien, es un vértice en común de  $T_i$  y  $T_j$ .

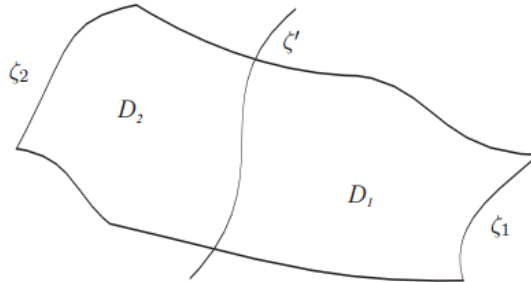
Las siguiente proposición se presentan sin demostración ya que se aleja de los objetivos marcados para este trabajo (véase demostración en [2]).

Figura 3.6: Triangulación  $\mathfrak{S}$  orientada

**Proposición 3.4.5** Sea  $\mathcal{M}$  una superficie orientada y  $\{\vec{x}_\alpha\}, \alpha \in A$ , una familia de parametrizaciones compatible con la orientación de  $\mathcal{M}$ . Sea  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  una región regular de  $\mathcal{M}$ . Entonces existe una triangulación  $\mathfrak{S}$  de  $\mathcal{R}$  tal que cada triángulo  $T \in \mathfrak{S}$  está contenido en un entorno coordenado de la familia  $\{\vec{x}_\alpha\}$ . Además, si la frontera de cada triángulo de  $\mathfrak{S}$  está orientada positivamente, triángulos adyacentes determinan orientaciones opuestas en el lado común.

Demostración del Teorema 3.4.1 Comenzaremos considerando el caso de un dominio  $D$  descompuesto en dos dominios  $D_1$  y  $D_2$ , tal que  $D_1$  y  $D_2$  junto con sus fronteras se encuentran en abiertos coordenados.

Sea  $\zeta = \partial D$  la frontera de  $D$  y  $\zeta_1, \zeta_2$  las partes de  $\zeta$  en  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente, y  $\zeta'$  la curva que separa  $D_1$  y  $D_2$ . Así  $\partial D = \zeta_1 \cup \zeta_2$ ,  $\partial D_1 = \zeta_1 \cup \zeta'$  y  $\partial D_2 = \zeta_2 \cup \zeta'$  (véase Figura 3.7).

Figura 3.7: Unión de dos dominios  $D_1$  y  $D_2$ 

Representemos por  $\theta_j^1$  los ángulos exteriores en los vértices de la frontera  $\partial D_1$  y por  $\theta_k^2$  los ángulos exteriores en los vértices de la frontera de  $\partial D_2$ . Entonces, para los dominios  $D_1$  y  $D_2$  se tiene

$$\iint_{D_1} K dA + \int_{\partial D_1} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^{n_1} \theta_j^1 = 2\pi; \quad \iint_{D_2} K dA + \int_{\partial D_2} \kappa_g ds + \sum_{k=1}^{n_2} \theta_k^2 = 2\pi. \quad (3.4.1)$$

Con la orientación adecuada sobre  $\zeta'$ , se tiene

$$\int_{\partial D_1} \kappa_g ds = \int_{\zeta_1} \kappa_g ds + \int_{\zeta'} \kappa_g ds, \quad \int_{\partial D_2} \kappa_g ds = \int_{\zeta_2} \kappa_g ds - \int_{\zeta'} \kappa_g ds.$$



Por tanto,

$$\int_{\partial D_1} \kappa_g ds + \int_{\partial D_2} \kappa_g ds = \int_{\zeta} \kappa_g ds.$$

Además,

$$\sum_{j=1}^{n_1} \theta_j^1 + \sum_{k=1}^{n_2} \theta_k^2 = \sum_{i=1}^n \theta_i + 2\pi.$$

Ahora, sumando término a término, las ecuaciones (3.4.1)

$$\iint_{D_1} K dA + \iint_{D_2} K dA + \int_{\partial D_1} \kappa_g ds + \int_{\partial D_2} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^{n_1} \theta_j^1 + \sum_{k=1}^{n_2} \theta_k^2 = 4\pi,$$

es decir,

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i + 2\pi = 4\pi$$

o

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi,$$

que es la fórmula de Gauss-Bonnet para  $D$ . De igual forma, procediendo por inducción sobre el número de dominios  $D_i$ , podemos obtenerla cuando  $D$  se descompone en una familia arbitraria y finita de dominios cumpliendo las condiciones ya comentadas.

Para  $\mathcal{R}$  una región simple compacta, consideramos por dominios  $D_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , a los triángulos  $T_i$  de una triangulación, verificando las condiciones de la Proposición 3.4.5. De aquí, el teorema queda probado.

Consideremos ahora algunos casos particulares donde se hace más simple la fórmula de Gauss-Bonnet:

(i) Si la frontera de  $D$  es diferenciable se tiene

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds = 2\pi.$$

(ii) Si la frontera de  $D$  es un polígono geodésico entonces

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi.$$

(iii) Si denotamos los ángulos interiores de un polígono geodésico de  $n$  lados por  $\phi_1, \dots, \phi_n$  y los ángulos exteriores por  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , se tiene  $\theta_i = \pi - \phi_i$ . Entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \sum_{i=1}^n (\pi - \phi_i) = 2\pi$$

y de aquí,

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA = \sum_{i=1}^n \phi_i - \pi(n - 2).$$

En particular, para triángulos geodésicos con ángulos interiores  $\alpha, \beta, \gamma$  se tiene

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

**Definición 3.4.6** A la diferencia  $\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$  se le denomina *defecto angular del triángulo*.

### 3.5. Versión global del teorema de Gauss-Bonnet

Con el fin de establecer la versión global del teorema de Gauss-Bonnet, introducimos la noción de característica de Euler-Poincaré de una región regular.

Dada una triangulación  $\mathfrak{T}$  de una región regular  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  de una superficie  $\mathcal{M}$ , denotamos por  $F$  al número de triángulos, por  $E$  al número de lados y por  $V$  al número de vértices de la triangulación.

**Definición 3.5.1** Al número  $\chi$  dado por

$$\chi = F - E + V \tag{3.5.1}$$

se denomina *característica de Euler-Poincaré* de la triangulación.

Nosotros usaremos la siguiente propiedad bien conocida de la característica de Euler-Poincaré  $\chi$  de una triangulación de  $\mathcal{R}$  (véase [2]):

**Teorema 3.5.2** Sea  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  una región regular. Entonces  $\chi$  es independiente de la triangulación y depende exclusivamente del número de agujeros  $p$  de  $\mathcal{R}$ . Concretamente, se tiene

$$\chi(\mathcal{R}) = 1 - p \tag{3.5.2}$$

Por tanto,  $\chi$  es un invariante topológico de la región regular. A partir de ahora, denotamos por  $\chi(\mathcal{R})$  a  $\chi$  y diremos que  $\chi(\mathcal{R})$  es la característica de Euler-Poincaré de la región  $\mathcal{R}$ . Podemos comprobar directamente la fórmula (3.5.2), utilizando (3.5.1), en Figura 3.8.

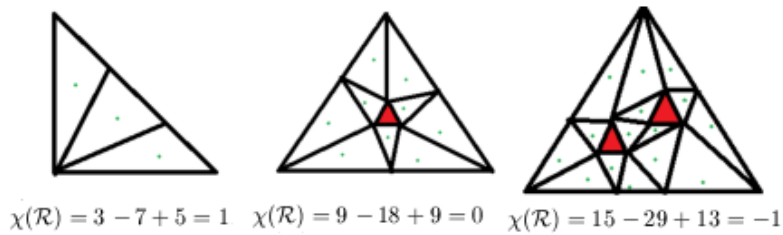


Figura 3.8: Triangulación para  $p=0$ ,  $p=1$ ,  $p=2$

Ahora estamos en condiciones de demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 3.5.3 (Teorema de Gauss-Bonnet para regiones regulares)** Sea  $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$  una región regular de una superficie orientada. Supongamos que cada una de sus componentes está orientada positivamente y sea  $\theta_1, \dots, \theta_n$  los ángulos exteriores de todas ellas. Entonces:

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi\chi(\mathcal{R}), \quad (3.5.3)$$

donde  $\kappa_g$  es la curvatura geodésica de  $\partial D$  y  $s$  denota la longitud de arco de  $\partial D$ .

**Demostración.** Nosotros probaremos la siguiente fórmula

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 2\pi(1 - p), \quad (3.5.4)$$

donde  $D$  es el dominio de una región regular  $\mathcal{R}$  con  $p$  agujeros y  $\theta_i$  son los ángulos exteriores de la frontera del dominio. Entonces, usando Teorema 3.5.2 se obtiene (3.5.3) quedando así probado el teorema.

Consideremos entonces un dominio  $D$  en forma de anillo (con 1 agujero) cuya frontera consta de las curvas  $C$  y  $C'$  (diferenciables a trozos). Mediante dos curvas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  conectamos un punto sobre  $C$  ( $A$  y  $B$ , respectivamente) con un punto sobre  $C'$  ( $A'$  y  $B'$ , respectivamente) y así dividimos el anillo en dos dominios simplemente conexos que no se superponen  $D_1$  y  $D_2$  (véase Figura 3.9).

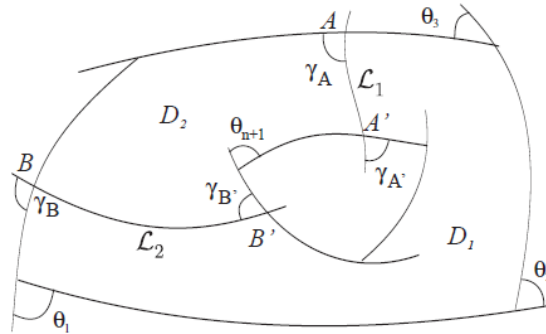


Figura 3.9: Dominio no simplemente conexo

Denotemos por  $C_1$  (respectivamente  $C_2$ ) a la parte de  $C$  que pertenece a la frontera de  $D_1$  (respectivamente  $D_2$ ), y análogamente para  $C'$  sería  $C'_1$  y  $C'_2$ . Así el borde de  $D_1$  consta de las curvas  $C_1, \mathcal{L}_1, C'_1, \mathcal{L}_2$  y el borde de  $D_2$  consta de las curvas  $C_2, -\mathcal{L}_2, C'_2, -\mathcal{L}_1$  donde vemos que  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  en  $D_1$  tienen orientación opuesta a  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  en  $D_2$ , respectivamente.

Representemos por  $\theta_1, \dots, \theta_m$ , los ángulos orientados en los vértices de  $C_1$  y  $C'_1$ ; y por  $\theta_{m+1}, \dots, \theta_n$  en los vértices de  $C_2$  y  $C'_2$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que los puntos  $A, A', B$  y  $B'$  son puntos de  $C$  o  $C'$  en los cuales la curva es regular, estos puntos son, sin embargo, vértices de los bordes de  $D_1$  y  $D_2$ . Los ángulos en los vértices del borde de  $D_1$  serán

$$\theta_1, \dots, \theta_m, \gamma_A, \gamma_{A'}, \gamma_B, \gamma_{B'}$$

y los ángulos en los vértices del borde de  $D_2$

$$\theta_{m+1}, \dots, \theta_n, \delta_A, \delta_{A'}, \delta_B, \delta_{B'}.$$

Observemos que

$$\gamma_A + \delta_A = \gamma_{A'} + \delta_{A'} = \gamma_B + \delta_B = \gamma_{B'} + \delta_{B'} = \pi,$$

pues son ángulos suplementarios.

Apliquemos ahora el Teorema 3.4.1 a cada dominio simplemente conexo  $D_1$  y  $D_2$ , teniendo en cuenta que las curvas  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  no intervienen por ser de medida nula. Entonces, se tiene

$$\iint_{D_1} K dA + \int_{C_1} \kappa_g ds + \int_{\mathcal{L}_1} \kappa_g ds + \int_{C'_1} \kappa_g ds + \int_{\mathcal{L}_2} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^m \theta_i + \gamma_A + \gamma_{A'} + \gamma_B + \gamma_{B'} = 2\pi,$$

$$\iint_{D_2} K dA + \int_{C_2} \kappa_g ds - \int_{\mathcal{L}_1} \kappa_g ds + \int_{C'_2} \kappa_g ds - \int_{\mathcal{L}_2} \kappa_g ds + \sum_{i=m+1}^n \theta_i + \delta_A + \delta_{A'} + \delta_B + \delta_{B'} = 2\pi.$$

Sumando miembro a miembro, se sigue

$$\iint_D K dA + \int_C \kappa_g ds + \int_{C'} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i + 4\pi = 4\pi.$$

Por lo tanto,

$$\iint_D K dA + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i = 0.$$

Supongamos ahora que la fórmula (3.5.4) se verifica para regiones regulares  $\mathcal{R}_1$  con  $p - 1$  agujeros, esto es,

$$\iint_{D_1} K dA + \int_{\partial D_1} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^n \theta_i^1 = 2\pi(2 - p),$$

donde  $\theta_i$  son los ángulos exteriores en los vértices de la frontera  $\partial D_1$ . Probemos que (3.5.4) se satisface para una región  $\mathcal{R}$  con  $p$  agujeros.

Tomamos una curva en  $\mathcal{M}$  que divida el dominio  $D$  de  $\mathcal{R}$  en dos dominios  $D_1$  y  $D_2$ , de manera que  $D_1$  contenga  $p - 1$  agujeros y  $D_2$  el agujero restante. Entonces usando la correspondiente fórmula para  $D_1$  y  $D_2$ ,

$$\iint_{D_1} K dA + \int_{\partial D_1} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^{n_1} \theta_j^1 = 2\pi(2 - p),$$

$$\iint_{D_2} K dA + \int_{\partial D_2} \kappa_g ds + \sum_{i=1}^{n_2} \theta_i^2 = 0,$$

obtenemos (3.5.4). □

Cuando por  $\mathcal{R}$  se considera una superficie compacta  $\mathcal{M}$  (su frontera es vacía),  $\chi(\mathcal{M})$  permite dar una clasificación completa de las superficies compactas y conexas bajo homeomorfismos. Con un cálculo directo, puede observarse que la característica de Euler de la esfera es 2. En efecto, considerando la triangulación que aparece en la Figura 3.10, observamos que está formada por 8 triángulos, 12 lados y 6 vértices, entonces la característica de Euler-Poincaré  $\chi(S^2)$  de la esfera  $S^2$  es  $\chi(S^2) = 8 - 12 + 6 = 2$ . De igual manera

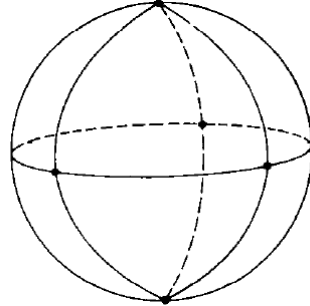


Figura 3.10: Triangulación de la esfera

obtenemos que la del toro (la esfera con un asa) es 0, la del toro doble (la esfera con dos asas) es  $-2$  y, en general, la del  $n$ -toro (la esfera con  $n$  asas) es  $-2(n - 1)$ .

**Teorema 3.5.4 (Clasificación de superficies compactas)** *Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie conexa y compacta. Entonces la característica de Euler-Poincaré  $\chi(\mathcal{M})$  toma uno de los valores  $2, 0, -2, \dots, -2n, \dots$ . Además, si  $\mathcal{M}' \subset \mathbb{R}^3$  es otra superficie compacta y  $\chi(\mathcal{M}) = \chi(\mathcal{M}')$ , entonces  $\mathcal{M}$  es homeomorfa a  $\mathcal{M}'$  (véase Figura 3.11).*

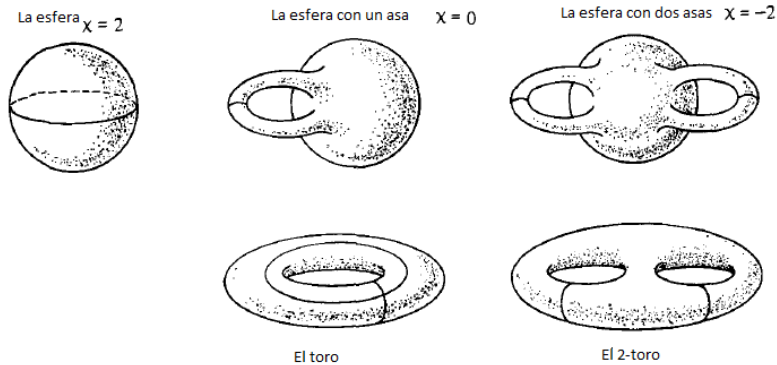


Figura 3.11: Clasificación de superficies compactas

En otras palabras, cada superficie conexa y compacta  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  es homeomorfa a la esfera con un número  $p$  de agujeros. El número

$$g(\mathcal{M}) = \frac{2 - \chi(\mathcal{M})}{2} \tag{3.5.5}$$

es llamado *género de  $\mathcal{M}$* .

**Nota 3.5.5** Poincaré propuso en 1904 extender este resultado a variedades topológicas de dimensiones superiores, especialmente para dimensión 3. Este fue el origen de la famosa conjetura conocida como conjetura de Poincaré resuelta después de mucho tiempo por Grisha Perelman en 2002.

**Teorema 3.5.6 (Teorema de Gauss-Bonnet para superficies compactas)** *Sea  $\mathcal{M}$  una superficie compacta, conexa y orientable. Entonces su curvatura integral viene dada por*

$$\iint_{\mathcal{M}} K dA = 2\pi\chi(\mathcal{M}).$$

**Demostración.** De acuerdo con el Teorema 3.5.4,  $\mathcal{M}$  ha de ser una superficie homeomorfa a un  $p$ -toro, entendiendo por un 0-toro a una esfera (véase Figura 3.12). Podemos descomponer un  $p$ -toro en dos dominios  $D_1$  y  $D_2$ , cada uno de ellos con  $p = g(\mathcal{M})$  agujeros, cuyas fronteras están formadas por  $k + 1$  curvas regulares comunes con orientaciones opuestas. Usando (3.5.4) en cada  $D_i$ ,  $i = 1, 2$ , obtenemos

$$\iint_{D_i} K dA + \int_{\partial D_i} \kappa_g ds = 2\pi(1 - p).$$

Puesto que  $\int_{\partial D_1} \kappa_g ds = -\int_{\partial D_2} \kappa_g ds$ , si sumamos ambos términos se tiene

$$\iint_{\mathcal{M}} K dA = 4\pi(1 - p).$$

Ahora, usando (3.5.5),  $\chi(\mathcal{M}) = 2(1 - p)$ , lo que prueba el teorema.  $\square$

Este teorema es de lo más sorprendente pues basta pensar en todas las formas posibles de una superficie homeomorfa a un  $p$ -toro para encontrarnos con el hecho de que la función curvatura se distribuya de forma tal que la curvatura integral, es decir,  $\iint K dA$ , sea la misma para todos los casos.

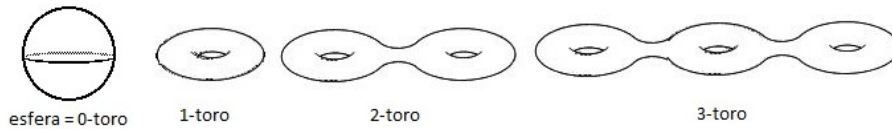


Figura 3.12: Esfera, 1-toro, 2-toro, 3-toro

## Capítulo 4

# Aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet

Vamos a presentar a continuación algunas aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet. Para estas aplicaciones, es necesario admitir un resultado básico de la topología del plano, el teorema de la curva de Jordan, que utilizaremos de la siguiente manera: cada curva simple, cerrada y regular a trozos del plano es la frontera de una región simple.

Recordemos también el siguiente enunciado: Sea  $f$  una función diferenciable,  $f \geq 0$ , en una región  $\mathcal{R}$  de área no nula. Entonces  $\int_{\mathcal{R}} f dA \geq 0$ . La igualdad se verifica si y solo si  $f = 0$  en todo punto en el que es continua.

### 4.1. Superficies orientadas de curvatura positiva

Establecemos a continuación tres aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet para superficies con curvatura de Gauss positiva.

1. *Una superficie compacta de curvatura positiva es homeomorfa a una esfera.*

Teniendo en cuenta el Teorema 3.5.6, la característica de Euler-Poincaré de tal superficie es positiva y observando el Teorema 3.5.4, la esfera es la única superficie que satisface esta condición.

2. *Si existen dos geodésicas cerradas y simples  $\vec{\gamma}_1$  y  $\vec{\gamma}_2$  en una superficie compacta, conexa y con curvatura positiva, entonces  $\vec{\gamma}_1$  y  $\vec{\gamma}_2$  se cortan, es decir,  $\vec{\gamma}_1 \cap \vec{\gamma}_2 \neq \emptyset$ .*

Por la aplicación anterior,  $\mathcal{M}$  es homeomorfa a una esfera. Si  $\vec{\gamma}_1$  y  $\vec{\gamma}_2$  no se intersecan, entonces el conjunto formado por estas geodésicas es la frontera de una región  $\mathcal{R}$ , cuya característica de Euler-Poincaré es  $\chi(\mathcal{R}) = 0$ . Por el teorema de Gauss-Bonnet,

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA = 0,$$

lo cual es una contradicción ya que  $K > 0$ .

3. Demostremos ahora el resultado siguiente, debido a Jacobi: *Sea  $\vec{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una*

curva parametrizada, regular, cerrada con curvatura no nula. Admitamos que la curva que describe el vector normal  $\vec{n}(s)$  en la esfera unidad  $S^2$  (la indicatriz normal) es simple. Entonces  $\vec{n}(I)$  divide a  $S^2$  en dos regiones con la misma área.

Los vectores normales unitarios al desplazarse a lo largo de una curva  $\vec{\alpha}$ , engendran una curva sobre la esfera que tiene centro el origen y radio igual a 1, la cual recibe el nombre de *indicatriz normal*  $\vec{n}(s)$ .

Podemos suponer que  $\vec{\alpha}$  está parametrizada con parámetro natural  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$ . Dado que  $\vec{\gamma}' = \frac{d}{ds}\vec{n} = \kappa\vec{t} - \tau\vec{b}$ . Se sigue que  $\|\vec{\gamma}'\| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$ . Denotemos por  $\bar{s}$  el parámetro natural de la indicatriz normal. Entonces se tiene

$$\left(\frac{ds}{d\bar{s}}\right)^2 = \frac{1}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

Haciendo un cálculo directo, se obtiene que la curvatura geodésica  $\kappa_g(\vec{\gamma})$  de  $\vec{\gamma}$  viene dada por la siguiente expresión

$$\kappa_g(\vec{\gamma}) = -\frac{d}{ds} \arctan\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) \frac{ds}{d\bar{s}}.$$

Entonces se tiene

$$\int_{\partial D} \kappa_g(\vec{\gamma}) d\bar{s} = -\int_0^l \frac{d}{ds} \arctan\left(\frac{\tau}{\kappa}\right) ds = 0,$$

siendo  $l$  la longitud de la curva  $\vec{\alpha}$ . De esta forma, aplicando el Teorema 3.4.1 y sabiendo que  $K = 1$  obtenemos

$$2\pi = \iint_{\mathcal{R}} K dA + \int_{\partial D} \kappa_g d\bar{s} = \iint_{\mathcal{R}} dA = \text{area}(\mathcal{R}).$$

Como el área de  $S^2$  es  $4\pi r^2$ , obtenemos el resultado deseado.

## 4.2. Superficies orientadas de curvatura no positiva

Damos ahora dos aplicaciones del teorema de Gauss-Bonnet relacionadas con propiedades de las geodésicas en superficies de curvatura de Gauss negativa o nula.

1. Sea  $\mathcal{M}$  una superficie orientable con curvatura negativa o nula. Entonces dos geodésicas  $\vec{\gamma}_1$  y  $\vec{\gamma}_2$  que partan del mismo punto  $p \in \mathcal{M}$  no pueden encontrarse otra vez en un punto  $q \in \mathcal{M}$  de forma que las trazas de  $\vec{\gamma}_1$  y  $\vec{\gamma}_2$  constituyan la frontera de una región simple  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{M}$ .

Supongamos que ocurre lo contrario. Por el teorema de Gauss-Bonnet para regiones simples (Teorema 3.4.1)

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi,$$

donde  $\mathcal{R}$  es una región simple y  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos exteriores de la región  $\mathcal{R}$ . Como las geodésicas  $\vec{\gamma}_1$  y  $\vec{\gamma}_2$  no pueden cortarse tangencialmente, tenemos que  $0 < \theta_i < \pi$ ,  $i = 1, 2$ . Por hipótesis tenemos que  $K \leq 0$ , esto implica que  $\iint_{\mathcal{R}} K dA \leq 0$ , pero por lo anterior,  $\iint_{\mathcal{R}} K dA > 0$ , lo cual nos lleva a una contradicción.



Esta propiedad sí que se cumple en la esfera, es decir, podemos coger dos geodésicas distintas que partan del mismo punto y puedan encontrarse en otro punto de forma que las trazas constituyan la frontera de una región simple.

2. Sea  $\mathcal{M}$  una superficie orientable con curvatura negativa o nula. Entonces no existe geodésica cerrada y simple que sea la frontera de una región simple de  $\mathcal{M}$ .

Cuando  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , las trazas geodésicas  $\vec{\gamma}_1$  y  $\vec{\gamma}_2$  constituyen una geodésica cerrada y simple de  $\mathcal{M}$ , es decir, una curva regular cerrada que es una geodésica. Actuemos de igual forma que en el apartado anterior. Por el teorema de Gauss-Bonnet y aplicando la hipótesis se tiene

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA = 2\pi,$$

lo cual, es un absurdo. Se sigue entonces que sobre una superficie de curvatura  $K \leq 0$ , no existe una geodésica simple y cerrada que sea la frontera de una región simple de  $\mathcal{M}$ .

Esta propiedad también la cumple la esfera, es decir, existe geodésica cerrada y simple que sea la frontera de una región simple de  $\mathcal{M}$ .

### 4.3. Singularidades de campos de vectores sobre superficies

Terminamos este capítulo con una de las aplicaciones más interesante del teorema de Gauss-Bonnet en la que se pone de relieve la estrecha relación entre conceptos geométricos, como son campos de vectores y curvas integrales, y la noción puramente topológica de la característica de Euler-Poincaré. Para ello, necesitaremos introducir los siguientes dos conceptos:

**Definición 4.3.1** Sea  $V$  un campo de vectores diferenciable en una superficie orientada  $\mathcal{M}$ . Decimos que  $p \in \mathcal{M}$  es un *punto singular* de  $V$  si  $V_p = 0$ . Además, es *aislado* si existe un entorno  $\vec{x}$  de  $p$  en  $\mathcal{M}$  tal que  $V$  no tiene puntos singulares en  $\vec{x}$  que no sea  $p$ .

A cada punto singular aislado  $p$  de un campo de vectores  $V$ , asociaremos un entero de  $V$ . Consideremos  $\vec{\alpha} : [0, l] \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(s)$  una curva diferenciable a trozos, simple y cerrada alrededor del punto  $p$  y contenida en algún entorno coordenado de  $\mathcal{M}$ .

**Definición 4.3.2** Se denomina *índice de  $V$  en  $p$*  al número  $\text{Ind}(V, p)$  de giros orientados que realiza el campo de vectores  $V$  al restringirse a la curva  $\vec{\alpha}$  considerando ésta con orientación positiva.

Denotemos por  $\psi = \psi(s)$  el ángulo orientado que determina el campo de vectores  $V$  restringido a  $\vec{\alpha}$  con un vector fijado. Entonces, se tiene

$$2\pi \text{Ind}(V, p) = \psi(l) - \psi(0).$$

Por otro lado, observando el Teorema 3.2.3, el ángulo de rotación resultante  $\phi$  del transporte paralelo depende de la curvatura integral, esto es,

$$\phi(l) - \phi(0) = \iint_{\mathcal{R}} K dA$$

Restando las ecuaciones anteriores obtenemos

$$\iint_{\mathcal{R}} K dA - 2\pi \text{Ind}(V, p) = (\phi - \psi)(l) - (\phi - \psi)(0) = \Delta(\phi - \psi). \quad (4.3.1)$$

Gracias a esto, podemos observar que  $\text{Ind}(V, p)$  es independiente del entorno coordenado así como de la curva  $\vec{\alpha}$ . Además, en general,  $\text{Ind}(V, p) = \text{Ind}(-V, p)$ .

**Ejemplo 4.3.3** Consideremos el plano euclídeo  $xy$  ( $\mathbb{R}^2, (x, y)$ ) donde  $\{E_1, E_2\}$  es la base canónica de campos de vectores en  $\mathbb{R}^2$ . En los ejemplos siguientes se tiene al origen  $(0, 0)$  como punto singular aislado de  $V$ . Además, tomaremos como curva  $\vec{\alpha}$  alrededor del origen, la circunferencia unidad.

- (i) Sea  $V$  el campo de vectores definido por  $V_{(x,y)} = -xE_{1(x,y)} - yE_{2(x,y)}$ . Observamos que  $V$  realiza un solo giro a lo largo de esa circunferencia en el sentido contrario a las agujas del reloj (sentido positivo). De aquí,  $\text{Ind}(V, (0, 0)) = 1$  (véase la Figura 4.1).
- (ii) Sea  $V$  el campo de vectores definido por  $V_{(x,y)} = -yE_{1(x,y)} + xE_{2(x,y)}$ . Apreciamos que  $V$  realiza un solo giro a lo largo de la circunferencia en el sentido contrario a las agujas del reloj. Por lo tanto,  $\text{Ind}(V, (0, 0)) = 1$  (véase la Figura 4.2).
- (iii) Sea  $V$  el campo de vectores definido por  $V_{(x,y)} = -xE_{1(x,y)} + yE_{2(x,y)}$ . Apreciamos que  $V$  realiza un solo giro a lo largo de la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj (sentido negativo). Por lo tanto,  $\text{Ind}(V, (0, 0)) = -1$  (véase la Figura 4.3).

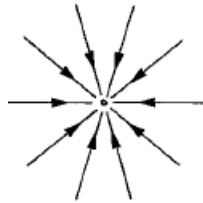


Figura 4.1:  $V_{(x,y)} = -xE_{1(x,y)} - yE_{2(x,y)}$

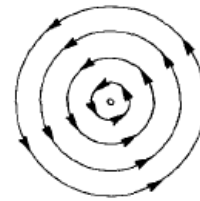


Figura 4.2:  $V_{(x,y)} = -yE_{1(x,y)} + xE_{2(x,y)}$

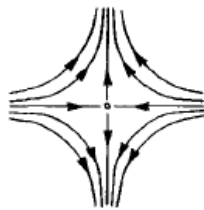


Figura 4.3:  $V_{(x,y)} = -xE_{1(x,y)} + yE_{2(x,y)}$

Sea ahora  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$  una superficie compacta y orientada, y sea  $V$  un campo de vectores diferenciable que sólo tiene puntos singulares aislados. Observemos que el número de éstos es finito. En caso contrario, por Bolzano-Weierstrass el conjunto de puntos singulares tendría un punto límite, el cual sería un punto singular no aislado. Sea  $\{\vec{x}_\alpha\}$  una familia de parametrizaciones compatibles con la orientación de  $\mathcal{M}$ . Sea  $\mathfrak{S}$  una triangulación de  $\mathcal{M}$  tal que

1. Cada triángulo  $T \in \mathfrak{S}$  está contenido en algún entorno coordenado de la familia  $\{\vec{x}_\alpha\}$ .
2. Cada  $T \in \mathfrak{S}$  contiene a lo más un punto singular.
3. La frontera de cada  $T \in \mathfrak{S}$  carece de puntos singulares y está orientada positivamente.

Si aplicamos la ecuación (4.3.1) a cada triángulo  $T \in \mathfrak{S}$ , sumamos los resultados y tenemos en cuenta que el lado de cada  $T \in \mathfrak{S}$  aparece dos veces con orientaciones opuestas, obtenemos

$$\iint_{\mathcal{M}} K dA - 2\pi \sum_{i=1}^k \text{Ind}(V, p_i) = 0,$$

donde  $\text{Ind}(V, p_i)$  es el índice del punto singular  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Este resultado unido al Teorema 3.5.6, permite llegar finalmente a

$$\sum_{i=1}^k \text{Ind}(V, p_i) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{M}} K dA = \chi(\mathcal{M}).$$

Hemos probado así el siguiente resultado.

**Teorema 4.3.4 (Teorema de Poincaré)** *La suma de los índices de un campo de vectores diferenciable  $V$  con puntos singulares aislados en una superficie compacta  $\mathcal{M}$  es igual a la característica de Euler-Poincaré de  $\mathcal{M}$ .*

Este resultado implica que  $\sum \text{Ind}_i$  no depende de  $V$  sino de la topología de  $\mathcal{M}$ . Por ejemplo, en cualquier superficie homeomorfa a la esfera, todos los campos de vectores con singularidades aisladas deben cumplir que la suma de sus índices sea igual a dos.

Si tomamos la parametrización de la esfera vista anteriormente (véase Ejemplo 2.2.4) obtenemos el campo de vectores  $x_\varphi(\theta, \varphi) = r \sin \theta (-\sin \varphi + \cos \varphi)$  que puede ser extendido a un campo de vectores global sobre la esfera de radio  $r > 0$  con dos singularidades de índice 1 cada uno que se obtienen en  $\theta = 0$  y  $\theta = \pi$ , esto es, en los polos de coordenadas  $(0, 0, r)$  y  $(0, 0, -r)$  (véase Figura 4.4). También podemos obtener un campo de vectores con una sola singularidad cuyo índice es 2 (véase Figura 4.5).

**Corolario 4.3.5** *Las únicas superficies conexas y compactas que admiten campos de vectores sin singularidades son homeomorfas al toro.*

**Demostración.** Dado que en superficies compactas con característica de Euler-Poincaré diferente de cero no existen campos de vectores sin singularidades, las superficies homeomorfas al toro serán las únicas que pueden admitirlos.

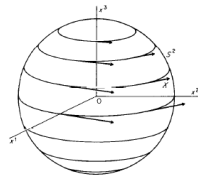


Figura 4.4: Campo de vectores con dos singularidades de índice 1 cada uno

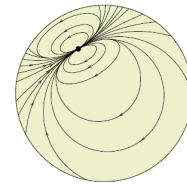


Figura 4.5: Campo de vectores con una singularidad de índice 2

Considerando la parametrización dada anteriormente (véase Ejemplo 2.2.5) obtenemos campos de vectores unitarios globales que se obtienen extendiendo los campos de vectores tangentes a las líneas coordenadas (véase Figura 4.6), esto es,

$$U(\theta, \varphi) = \frac{\vec{x}_\varphi}{a + r \cos \theta}; \quad V(\theta, \varphi) = \frac{\vec{x}_\theta}{r}$$

□

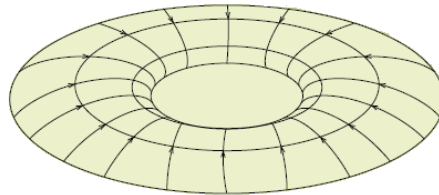


Figura 4.6: Campo de vectores sin singularidades

# Apéndice A

## Derivación en $\mathbb{R}^n$

### A.1. Derivada direccional en $\mathbb{R}^n$

Sean  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n v^i E_{i_p} \in T_p \mathbb{R}^n$ , donde  $\{E_1, \dots, E_n\}$  es la base canónica de campos de vectores de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F}(p)$  el conjunto de las funciones diferenciables en  $p$  y  $f \in \mathcal{F}(p)$ .

Se define la *derivada direccional de  $f$  en  $p$*  en la dirección de  $\vec{v}$  a

$$\vec{v}(f) \equiv D_{\vec{v}}(f) = \frac{d}{dt} f(p + tv)|_{t=0} = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Entonces  $\vec{v}(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ \vec{\alpha}(t)$ , donde  $\vec{\alpha}$  es una curva  $\vec{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $\vec{\alpha}(0) = p$  y  $\vec{\alpha}'(0) = \vec{v}$ . Tenemos así definida, para cada  $\vec{v}$ , una aplicación  $D_{\vec{v}} : \mathcal{F}(p) \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $D_{\vec{v}} \equiv \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Notemos que  $D_{\vec{v}}(x^i) = v^i$ , donde  $x^i$  es la  $i$ -ésima proyección  $x^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , por lo que el vector  $\vec{v}$  está completamente determinado si se conocen las derivadas direccionales sobre toda función diferenciable en  $p$ .

Propiedades de la derivada direccional:

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}(\lambda f + \mu h) &= \lambda D_{\vec{v}}(f) + \mu D_{\vec{v}}(h), \\ D_{\vec{v}}(fh) &= h(p)D_{\vec{v}}(f) + f(p)D_{\vec{v}}(h), \end{aligned}$$

siendo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $f, h \in \mathcal{F}(a)$ .

### A.2. Campos de vectores en $\mathbb{R}^n$

Un *campo de vectores*  $X$  en  $\mathbb{R}^n$  es una aplicación  $X : p \mapsto X_p \in T_p \mathbb{R}^n$ . Entonces  $X$  se expresa por  $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ , donde  $X^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  son funciones de  $\mathbb{R}^n$ . Además,  $X$  es *diferenciable* si las funciones componentes  $X^i$  lo son.

El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre  $\mathbb{R}^n$  se denotará por  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . Este conjunto tiene estructura de  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ -módulo con la operación externa  $(fX)(p) = f(p)X_p$ , para todo  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  y  $p \in \mathbb{R}^n$ .

La derivada direccional de una función  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  respecto a un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ , se define como la función  $X(f) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$X(f)(p) = X_p(f) = D_{X_p}(f) = \frac{d}{dt} f(p + tX_p)|_{t=0} = \sum_{i=1}^n X_p^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p.$$

Entonces, se tiene

$$X(x^i) = X^i, i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.2.1})$$

Por tanto, los campos de vectores  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  pueden identificarse como operadores denominados derivaciones  $X : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \mapsto X(f)$ , que verifican lo siguiente:

$$\begin{aligned} X(\lambda f + \mu h) &= \lambda X(f) + \mu X(h), \\ X(fh) &= hX(f) + fX(h), \end{aligned}$$

siendo  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y  $f, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición A.2.1** Dados dos campos de vectores  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  se define la *operación corchete o producto corchete* como el campo de vectores diferenciable sobre  $\mathbb{R}^n$  dado por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Entonces en cada  $p \in \mathbb{R}^n$ , se tiene  $[X, Y]_p(f) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f))$ . Usando (A.2.1), obtenemos  $[X, Y](x^i) = X(Y^i) - Y(X^i)$ . Por lo tanto, el producto corchete se expresa como

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}) E_i,$$

donde  $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ ,  $Y = \sum_{j=1}^n Y^j E_j$ . Tal producto verifica las siguientes propiedades:

- (i) Anticonmutatividad:  $[X, Y] = -[Y, X]$ .
- (ii)  $\mathbb{R}$  - bilinealidad:  $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda[X, Z] + \mu[Y, Z]$ .
- (iii) Identidad de Jacobi:  $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ .
- (iv)  $[fX, gY] = fX(g)Y - gY(f)X + fg[X, Y]$ .

### A.3. Derivada covariante en $\mathbb{R}^n$

Se denomina *derivada covariante* de un campo de vectores  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  en la dirección de  $\vec{v} \in T_p \mathbb{R}^n$  al vector en el punto  $p \in \mathbb{R}^n$ , dado por

$$D_{\vec{v}} X = \frac{d}{dt} X(p + tv)|_{t=0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} X(\vec{\alpha}(t)),$$

donde  $\vec{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\vec{\alpha}(0) = p$  y  $\vec{\alpha}'(0) = \vec{v}$ . Así, si  $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$ , se tiene  $D_{\vec{v}_p} X = \sum_{i=1}^n \vec{v}_p(X^i) E_{i_p}$ . La derivada covariante tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} D_{\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}_p} X &= \lambda D_{\vec{v}} X + \mu D_{\vec{w}} X, \\ D_{\vec{v}}(\lambda X + \mu Y) &= \lambda D_{\vec{v}} X + \mu D_{\vec{v}} Y, \\ D_{\vec{v}} f X &= \vec{v}(f) X_p + f(p) D_{\vec{v}} X, \\ \vec{v}\langle X, Y \rangle &= \langle D_{\vec{v}} X, Y_p \rangle + \langle X_p, D_{\vec{v}} Y \rangle, \end{aligned}$$

para todo  $\vec{v}, \vec{w} \in T_p \mathbb{R}^n$ ;  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ ;  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ , donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto interior estándar de  $\mathbb{R}^n$ .

Se denomina *derivada covariante* de un campo de vectores  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  en la dirección del campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$  al campo de vectores, cuyo representante en el punto  $p$ , viene dado por

$$(D_X Y)(p) = D_{X_p} Y.$$

Es decir, si  $Y = \sum_{i=1}^n Y^i E_{i_p}$ , entonces  $(D_X Y)(p) = \sum_{i=1}^n X_p(Y^i) E_{i_p}$ . Se tiene que  $[X, Y] = D_X Y - D_Y X$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ . En efecto, obtenemos

$$\begin{aligned} D_X Y - D_Y X &= \sum_{i=1}^n (X(Y^i) - Y(X^i)) E_i = \sum_{i,j=1}^n ((X^j E_j)(Y^i) - (Y^j E_j)(X^i)) E_i \\ &= \sum_{i,j=1}^n (X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}) E_i = [X, Y]. \end{aligned}$$





# Bibliografía

- [1] Allendoerfer, C. B. and Weyl, A., The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 53 (1943), 101-129.
- [2] Ahlfors, L. y Sario, L., *Riemann Surfaces*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1961, ch.1.
- [3] Bonnet, O., *J.École Polytechnique*, 19 (1848), 1-146.
- [4] Boothby, William M., *An introduction to differentiable manifolds and riemannian geometry*, second edition, 1986.
- [5] Celis, María Belen, Semitiel, José Abel y Sgreccia, Natalia Fátima, *El teorema de Gauss-Bonnet*, Monografía, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Rosario 2002.
- [6] Friedrich Gauss, Carl, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, *Comm. Soc. Göttingen.* Bd 6, 1827. Traducido al inglés en Raven Press, New York, bajo el título *General Investigations of Curved Surfaces* en 1965.
- [7] González Dávila, José Carmelo, *Apuntes de Geometría III*, Curso 2009 – 2010.
- [8] Montesdeoca Delgado, Ángel, *Apuntes de geometría diferencial de curvas y superficies*, 1996.
- [9] Nunes, Bruna, *Geometría Diferencial de Superficies e o Teorema de Gauss-Bonnet*, Florianópolis, Universidade Federal de Santa Catarina, 2010.
- [10] Paik, Steve T., *The Poincaré-Hopf index theorem for surfaces*, Caltech undergraduate research journal, November 2001, Vol 1, nº 2.
- [11] P. do Carmo, Manfredo, *Differential geometry of curves and surfaces*. Instituto de matemática pura e aplicada, Río de Janeiro, Brazil.
- [12] Schnell, Christian, *The Gauss-Bonnet Theorem*.

Figure 1: Mind map of Gauss-Bonnet Theorem and its applications

