Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Arturo Juan Jiménez González

Halcones y Palomas: estudio dinámico y espacial

Hawk and Doves: dynamic and spatial study

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2018

Dirigido por
Carlos M. González Alcón

Carlos M. González Alcón
Departamento de Matemáticas. Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
La Laguna, Tenerife

Carlos M. González Alcón
Departamento de Matemáticas. Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Agradecerle especialmente a mi tutor Carlos M. González Alcón, tanto por su ayuda en todo momento, como por la facilitación de todo el material necesario para este trabajo de fin de grado. Asimismo quería agradecerle también el hecho de que haya presentado esta línea de trabajo, ya que gracias a ella he conocido un enfoque de las matemáticas hasta ahora desconocida para mí, el cual ha resultado fascinante.

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo se estudia el juego Halcones y Palomas, en el que dos jugadores se enfrentan por un recurso, adoptando una estrategia: agresiva o pasiva. Mediante el programa NetLogo, se simulan diferentes escenarios y se comparan los resultados obtenidos con los reflejados en la teoría. Por último, se traslada este juego al caso espacial, en el que los jugadores están distribuidos en un tablero donde solo podrán interactuar con sus vecinos.

Palabras clave: *Teoría de juegos – Halcones – Palomas – Espacial.*

Abstract

The aim of this paper is to study the theory about the Hawk-Dove game, whereby two players fight for a resource, adopting one strategie: the aggressive or the passive one. Using the Netlogo program, different scenarios are simulated and the results obtained are compared with those reported in the theory. Finally, this game is transferred to the spatial case, whereby players are distributed on a board. There, they can only interact with their neighbors.

Keywords: *Game theory – Hawks – Doves – Spatial.*

Contenido

Introducción

Un tema recurrente en el estudio del comportamiento animal es la existencia de “luchas formales”, en particular en animales dotados de armas poderosas. El resultado, en general, se alcanza no a través de la pelea física sino después de una serie de amenazas y demostraciones de fuerza.

La muerte o las heridas serias rara vez ocurren en estos combates. Después de una secuencia de demostraciones, cada vez más amenazantes, que llegan tal vez al contacto físico (por ejemplo entre los ciervos machos), uno de los contrincantes cede y abandona el combate. Este tipo de combate requiere una explicación. Después de todo, un macho que efectivamente matase a todos sus rivales, se aseguraría la propagación de sus propios genes. Entonces, ¿por qué la pelea a muerte es tan rara? El biólogo John Maynard Smith usó la teoría de juegos para mostrar, a principios de los 70's, cómo era posible esto [7]. Su principal argumento es un experimento en el que interaccionan dos individuos que pueden asumir dos tipos de comportamientos:

1. Halcón: Muy agresivos, lucharán tan duramente como puedan por obtener el recurso, retirándose sólo cuando estén heridos. Solemos decir que agravan el conflicto hasta la lucha física o la retirada del oponente.
2. Paloma: Nunca luchan por el recurso. Hacen demostraciones de agresión, pero se retiran si el otro agrava el conflicto.

Entonces podemos decir que el modelo Halcón-Paloma sirve para analizar situaciones de conflicto entre estrategias agresivas y conciliadoras. Este modelo es conocido en la literatura anglosajona como el “Hawk-Dove”.

Analizaremos este juego simulando casos no espaciales y espaciales.

1

Teoría de Juegos

1.1. Introducción

La Teoría de Juegos estudia las decisiones óptimas que se deben tomar en conflictos a través de modelos matemáticos. Esas decisiones se consideran estratégicas ya que cada individuo actuará teniendo en cuenta las acciones de los demás, así como los riesgos y beneficios.

Los jugadores no tienen por qué ser únicamente humanos, por ejemplo pueden ser animales, encontrándose la respuesta de sus numerosos mecanismos de cooperación a través de la Teoría de Juegos.

Por la palabra “juegos”podemos pensar que esta disciplina tiene por objeto de estudio los típicos juegos de mesa, que aunque también algunos entren en su ámbito, no es su principal objetivo. Otras situaciones en las que centra su interés, podrían ser conflictos militares, campañas políticas o diversas formas de competencia entre empresas o individuos.

Un juego en forma normal o estratégica se denotará por $G = \{S, E\}$ y consta de tres elementos esenciales:

- El número de jugadores n.
- Las estrategias disponibles para los jugadores, que son $S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, donde $S_i = \left\{s_1^i, \ldots, s_k^i\right\}$ es el conjunto de estrategias disponibles para el jugador i.
- Las funciones de pago $E = (E_1, \ldots, E_n)$, $E_i : S \longrightarrow \mathbb{R}$, donde E_i es el obtenido por el i-ésimo jugador.

En un juego en forma normal los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea, es decir, que cada jugador elige su jugada sin conocer las decisiones de los demás. Dado un perfil de estrategias $(s_1, ..., s_n)$, entonces el pago al jugador i viene dado por $E_i(s_1, ..., s_n)$.

En este tipo de juego destacan aquellos para dos jugadores, en los que cada jugador tiene un número de opciones finitas. Tales juegos suelen llamarse bimatriciales, por ejemplo:

*Ejemplo 1.1 (**Dilema del prisionero**).*

La enunciación clásica del dilema del prisionero es:

La policía arresta a dos sospechosos. No hay pruebas suficientes para condenarlos y, tras haberlos separado, los visita a cada uno y les ofrece el mismo trato. Si uno confiesa y su cómplice no, el cómplice será condenado a la pena total, diez años, y el primero será liberado. Si ambos confiesan, ambos serán condenados a seis años. Si ambos lo niegan, todo lo que podrán hacer será encerrarlos durante un año por un cargo menor.

	Confesar	No confesar
Confesar	6 años 6 años	10 años libre
No confesar	libre 10 años	1 año 1 año

De manera conjunta para ambos jugadores no confesar sería la estrategia óptima, ya que la totalidad de años entre los dos sería la menor posible. Sin embargo, confesar es una estrategia dominante para ambos jugadores. Sea cual sea la elección del otro jugador, pueden reducir siempre su sentencia confesando. Por desgracia para los prisioneros, esto conduce a un resultado que no da un beneficio máximo común, en el que ambos confiesan y ambos reciben largas condenas.

1.2. Equilibrio de Nash en estrategias puras

Como vimos en el ejemplo del dilema del prisionero, uno sabe que el otro confesará, su mejor estrategia será hacer lo mismo. Definamos esto formalmente.

Definición 1.2 (Mejor respuesta). *Decimos que la estrategia $s_i^* \in S_i$ es la mejor respuesta del jugador i a un perfil de estrategias de los otros jugadores $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ si:*

$$E_i(s_1, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n) \geq E_i(s_1, \ldots, s_i, \ldots, s_n) \quad \forall s_i \in S_i.$$

Un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias en el que cada una es mejor respuesta a las de los demás, es decir:

Definición 1.3 (Equilibrio de Nash en estrategias puras). *Dado un juego* $G = \{S, E\}$*, un perfil de estrategias* $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$*,* $\in S$*, es un equilibrio de Nash si:*

$$E_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq E_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*) \quad \textit{para cualquier}\, s_i \in S_i.$$

Para el juego $G = \{S_1 \times S_2; E_1, E_2\}$ la pareja de estrategias (s_1^*, s_2^*) forman un equilibrio de Nash si:

- $E_1(s_1^*, s_2^*) \geq E_1(s_1, s_2^*)$, $\forall s_1 \in S_1$.
- $E_2(s_1^*, s_2^*) \geq E_2(s_1^*, s_2)$, $\forall s_2 \in S_2$.

1.2.1. Equilibrio de Nash en el juego de Halcones y Palomas

En este juego cada jugador podrá elegir dos tipos de comportamiento (que denominaremos Halcón o Paloma) en la lucha por un recurso de valor r. Los jugadores que se comporten como halcones pelearán siempre, en cambio los que actúen como palomas intentarán buscar una vía diplomática sin llegar a luchar. Si se enfrentan dos halcones, ambos lucharán por el recurso y acabarán obteniendo la mitad de éste más un daño, el cual llamaremos costo de la pelea (c). En el caso halcón contra paloma se llevará todo el recurso el halcón y la paloma nada. Cuando dos palomas se encuentran se reparten el recurso.

Por lo tanto tendríamos $G = \left\{S^2; (E_1, E_2)\right\}$, donde $S = \{H, P\}$, y las ganancias de los jugadores están distribuidas de acuerdo a la siguiente tabla:

	Halcón	Paloma
Halcón	$r/2 - c$ $r/2 - c$	0 r
Paloma	r 0	$r/2$ $r/2$

Dado que los recursos y el costo siempre son positivos, nos centraremos en estudiar el equilibrio de Nash según el signo que tome el valor del pago cuando se enfrentan dos halcones, $r/2 - c$.

Antes de empezar con este análisis, recalquemos que las ganancias:

$$E_2(H, P)$$

son las ganancias del jugador dos, el cual es paloma en este ejemplo, frente al jugador uno que eligió halcón. Por lo tanto $E_2(H, P) = 0$.

- Primer caso: $r/2 - c > 0$. Como $E_i(H, H) > 0$ siempre tenemos que

$$E_1(H, H) > 0 \geq E_1(P, H) = 0,$$
$$E_2(H, H) > 0 \geq E_2(H, P) = 0.$$

  Por lo que el perfil de estrategias (H,H) es equilibrio de Nash. Este caso representa el dilema del prisionero que vimos anteriormente, en el cual confesar sería actuar como halcón.
- Segundo caso: $r/2 - c < 0$.
  Para este caso (H, P) y (P, H) serían equilibrios ya que

$$E_1(H, P) = r \geq E_1(P, P) = \frac{r}{2},$$
$$E_2(H, P) = 0 \geq E_2(H, H) < 0.$$

  Por lo tanto (H, P) sería equilibrio de Nash y recíprocamente (P, H) también lo sería. Esta situación se conoce como *juego del gallina*.
- Tercer caso $r/2 - c = 0$.
  Los dos equilibrios anteriores se mantendrán ya que lo único que varia es que $E_2(H, H) = 0$. Además tendríamos un equilibrio adicional que sería (H, H) debido a que ahora

$$E_1(H, H) = 0 \geq E_1(P, H) = 0,$$
$$E_2(H, H) = 0 \geq E_2(H, P) = 0.$$

  Por lo que el perfil de estrategias (H,H) es equilibrio de Nash también para este caso.

2

Teoría evolutiva de Juegos

A partir de ahora consideraremos que los juegos son simétricos, es decir, todos los participantes tienen el mismo espacio de estrategias y los mismos pagos ante iguales situaciones.

Definición 2.1 (Juego simétrico). *Un juego para dos jugadores es simétrico si $S_1 = S_2$, y además para cualquier par de estrategias s_i, s_j se cumple que:*

$$E_1(s_i, s_j) = E_2(s_j, s_i).$$

Sea G un juego simétrico y tengamos una población grande de individuos (infinita a fines prácticos). En cada periodo $t = 1, 2, \ldots,$ los individuos son emparejados aleatoriamente y juegan la etapa del juego t. Cada individuo adopta alguna estrategia pura $s_i \in S$ de tal manera que juegan dicha estrategia en cada etapa del juego. Sea p_i la proporción de individuos que juegan la estrategia s_i en un tiempo t, llamaremos $\sigma = (p_1, \ldots, p_n)$ a la distribución de estrategias de toda población en dicho tiempo. El pago a un jugador que usa la estrategia s en una población que usa la distribución de estrategias σ estará definido por

$$E(s, \sigma) = \sum_{j=1}^{n} p_j E_1(s, s_j),$$

que será el pago esperado. Estas condiciones definen un nuevo juego, llamado *juego evolutivo*.

Supongamos que la distribución de estrategias es $\sigma = (p_1, \ldots, p_n)$. El pago esperado a un individuo de la población será

$$E(\sigma, \sigma) = \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j E_1(s_i, s_j).$$

2.1. Estrategias evolutivamente estables

Supongamos que tenemos una población con distribución de estrategias σ^* y que en algún momento t hay una pequeña porción de la población que muta, cambiando su distribución de estrategias a $\sigma \neq \sigma^*$. Queda entonces una población con nueva distribución de estrategias

$$\tau = (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma,$$

donde ε es la fracción de población que muta.

El pago para un individuo elegido aleatoriamente de la población no mutante es

$$E(\sigma^*, \tau) = (1-\varepsilon)E(\sigma^*, \sigma^*) + \varepsilon E(\sigma^*, \sigma),$$

y para un mutante es

$$E(\sigma, \tau) = (1-\varepsilon)E(\sigma, \sigma^*) + \varepsilon E(\sigma, \sigma).$$

Para que la población original pueda perdurar ante estos mutantes, debe mantener un mejor valor esperado de sus pago frente al de los mutantes, es decir:

$$E(\sigma^*, \tau) > E(\sigma, \tau),$$

lo que es equivalente a

$$E(\sigma^*, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma) > E(\sigma, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma).$$

Definimos a continuación el concepto de estrategia evolutivamente estable.

Definición 2.2. *Una distribución de estrategias σ^* es evolutivamente estable si existe un $\delta > 0$ tal que para cada distribución de estrategias $\sigma \neq \sigma^*$ y para cada $0 < \varepsilon < \delta$ se verifica que*

$$E(\sigma^*, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma) \geq E(\sigma, (1-\varepsilon)\sigma^* + \varepsilon\sigma).$$

A este δ se le llama barrera de invasión.

Dado que ε es un valor pequeño, podemos ofrecer una formulación más sencilla como se expone a continuación:

Proposición 2.3 (Estrategia evolutivamente estable). *Una estrategia σ^* será evolutivamente estable si y solo si se cumplen simultáneamente las dos condiciones:*

1. $E(\sigma^*, \sigma^*) \geq E(\sigma, \sigma^*)$.

2. *Si* $E(\sigma^*, \sigma^*) = E(\sigma, \sigma^*)$, *entonces* $E(\sigma^*, \sigma) \geq E(\sigma, \sigma)$.

2.2. Estrategias evolutivamente estables en el juego de Halcones y Palomas

Al igual que para el equilibrio de Nash, dividiremos nuestro estudio según el signo que tome el pago a cada uno de los halcones cuando se enfrentan entre ellos $(r/2 - c)$.

Llamaremos $p = p_h$ a la proporción de la población que es halcón y $(1 - p) = p_p$ a la que es paloma.

- $r/2 - c > 0$
En este caso la estrategia pura de ser halcón, es decir: $p_h = 1$ $(\sigma^* = (1, 0))$, es una estrategia estable, ya que
$$E(\sigma^*, \sigma^*) = 1\left(\frac{r}{2} - c\right),$$
y si tomamos cualquier otra población con distribución de estrategias $\sigma = (q, 1 - q)$, $q \in [0, 1)$ sus pagos serán
$$E(\sigma, \sigma^*) = q\left(\frac{r}{2} - c\right) + (1 - q) \cdot 0 = q\left(\frac{r}{2} - c\right).$$
Por lo tanto tenemos que
$$E(\sigma^*, \sigma^*) > E(\sigma, \sigma^*).$$

- $r/2 - c < 0$:
Una estrategia evolutivamente estable en este caso será $\sigma^* = \left(\frac{r}{2c}, 1 - \frac{r}{2c}\right)$. Veamos primero los pagos esperados en una población cualquiera con distribución de estrategias $\sigma = (p, 1 - p)$, $p \in [0, 1]$. Dicho pago es
$$E(\sigma, \sigma^*) = p\left(\frac{r}{2c}\right)\left(\frac{r}{2} - c\right) + p\left(1 - \frac{r}{2c}\right)r + (1 - p)\frac{r}{2c}0 + (1 - p)\left(1 - \frac{r}{2c}\right)\frac{r}{2},$$
de tal forma que
$$E(\sigma, \sigma^*) = \left(\frac{2pr^2}{4c} - \frac{pr^2}{2c}\right) + \left(pr - 2p\left(\frac{r}{2}\right)\right) + \frac{2rc - r^2}{4c} = \frac{2rc - r^2}{4c}.$$
Como este resultado no depende de p, tendremos que
$$E(\sigma^*, \sigma^*) = E(\sigma, \sigma^*).$$
Por lo tanto tenemos que comprobar que $E(\sigma^*, \sigma)$ sea mayor que $E(\sigma, \sigma)$.
$$E(\sigma^*, \sigma) = \frac{r}{2c}q\left(\frac{r}{2} - c\right) + \frac{r}{2c}(1 - q)r + \left(1 - \frac{r}{2c}\right)q \cdot 0 + \left(1 - \frac{r}{2c}\right)(1 - q)\frac{r}{2};$$
$$E(\sigma, \sigma) = q^2\left(\frac{r}{2} - c\right) + q(1 - q)r + (1 - q)\,q \cdot 0 + (1 - q)^2\frac{r}{2}.$$

Por consiguiente obtenemos que:

$$E(\sigma^*, \sigma) - E(\sigma, \sigma) = c\left(q - \frac{r}{2c}\right)^2 > 0.$$

Lo cual implica que $\sigma^* = \left(\frac{r}{2c}, 1 - \frac{r}{2c}\right)$ es una estrategia evolutivamente estable.

- $r/2 - c = 0$:
  En este caso la distribución de estrategias $\sigma^* = (1, 0)$ sigue siendo estable porque

$$E(\sigma^*, \sigma^*) = 1(\frac{r}{2} - c) = 0;$$
$$E(\sigma, \sigma^*) = q(\frac{r}{2} - c) + (1 - q) \cdot 0 = q(\frac{r}{2} - c) = 0.$$

  Por lo que tenemos que ver que $E(\sigma^*, \sigma) > E(\sigma, \sigma)$:

$$E(\sigma^*, \sigma) = q(\frac{r}{2} - c) + (1 - q)r;$$
$$E(\sigma, \sigma) = q^2(\frac{r}{2} - c) + (1 - q)\, qr + (1 - q)\, q \cdot 0 + (1 - q)^2 \frac{r}{2},$$

  como $\left(\frac{r}{2} - c\right) = 0$, queda que

$$E(\sigma, \sigma) = q(1 - q)r + (1 - q)^2 \frac{r}{2} = (1 - q)r\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right).$$

  De aquí

$$E(\sigma^*, \sigma) - E(\sigma, \sigma) = (1 - q)r\left(1 - \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) > 0,$$

  ya que $q < 1$.

3

Dinámica evolutiva

Acabamos de ver que una estrategia evolutivamente estable es aquella que se mantiene a lo largo del tiempo y no se ve afectada por mutaciones. Ahora nos preguntamos si dada una población con una distribución aleatoria de estrategias, ésta irá evolucionando a lo largo del tiempo a una estrategia evolutivamente estable o irá cambiando continuamente. Para ello vamos a introducir previamente una serie de conceptos.

3.1. Ecuación del replicador

Consideremos que todos los individuos tienen el mismo conjunto de estrategias puras $S = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ y sea $\sigma = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ las proporciones de jugadores de la población que utilizan las distintas estrategias puras. Estas proporciones podrán variar a lo largo del tiempo, ya que los jugadores irán adoptando las estrategias que más le beneficien en cada momento. Por lo tanto hablaremos de $\sigma_t = \sigma(t)$ que será la distribución de estrategias elegidas por la población en el momento t. Recordemos que

$$E(s_k, \sigma_t) = \sum_{i=1}^{n} p_i E(s_k, s_i)$$

será el pago esperado por los individuos que juegan la estrategia s_k en el momento t.

Queremos ver cómo va a crecer o decrecer el porcentaje de población que juega cada estrategia a lo largo del tiempo. Para ello definamos cómo crece $p_s(t)$ $s \in S$, usando la *ecuación del replicador*:

$$p_s(t+\tau) - p_s(t) = \tau p_s(t) \left(E(s, \sigma(t)) - \bar{E}(\sigma(t)) \right)$$

donde

$$\bar{E}(\sigma(t)) = E(\sigma(t), \sigma(t)) = \sum_{s \in S} p_s(t) E(s, \sigma(t))$$

es la ganancia promedio de la población en el instante t. Pensemos en esta ecuación como ventaja (o desventaja) de una estrategia con respecto al promedio de la población. Cuanto mejor, más se reproducirá dicha estrategia. Tomando el límite $\tau \longrightarrow 0$, podemos expresar la dinámica del sistema mediante una ecuación diferencial.

Definición 3.1 (Ecuación del replicador).
La ecuación diferencial del replicador(en realidad un sistema) es:

$$p_s'(t) = p_s(t) \left(E(s, \sigma(t)) - \bar{E}(\sigma(t)) \right), \quad s \in S.$$

Observemos que para todo instante t se verifica:

$$\sum_{s \in S} p_s(t) = 1.$$

Definiendo $\phi(t) = \sum_{s \in S} p_s(t)$ es fácil ver que se satisface:

$$\phi'(t) = (1 - \phi(t)) \bar{E}(\sigma(t)),$$

con la condición inicial $\phi(0) = 1$. Lo que nos asegura que $\sum_{s \in S} p_s(t) = 1$.

3.2. Ecuación del replicador en el juego de Halcones y Palomas

Sea $p(t)$ la proporción de la población que juega como halcón en un instante t. La ecuación diferencial del replicador es:

$$\begin{aligned} p'(t) = p(t)[(p(t)E(H,H) + (1-p(t))E(H,P) - p^2(t)E(H,H) \\ -p(t)(1-p(t))E(H,P) - (1-p(t))p(t)(E(P,H) - (1-p(t))^2 E(P,P)] = \\ = p(t) \left[\left(\frac{r}{2} - c \right) p(t)(1-p(t)) + r(1-p(t))^2 - \frac{r}{2}(1-p(t))^2 \right] = \\ = p(t) \left[(1-p(t)) \left((\frac{r}{2} - c) p(t) + \frac{r}{2}(1-p(t)) \right) \right]. \end{aligned}$$

Nos queda entonces la ecuación del replicador de la siguente manera:

$$p'(t) = c\, p(t) \left(\frac{r}{2c} - p(t) \right) (1 - p(t)).$$

4

Simulaciones básicas

Para esta simulación vamos a tener una población de n individuos de los cuales h actuarán puramente como halcones y $(n-h)$ como palomas.

Vamos a ver cómo van evolucionando las estrategias a medidas que pasan las generaciones a través del programa NetLogo. Netlogo es un software libre que sirve de plataforma para el desarrollo y estudio de sistemas multiagentes. Los agentes en Netlogo por cuestiones históricas se denominan *turtles* y el entorno *patches*. Un programa en Netlogo está dividido en tres ventanas, una de ellas es la interfaz que vemos a continuación:

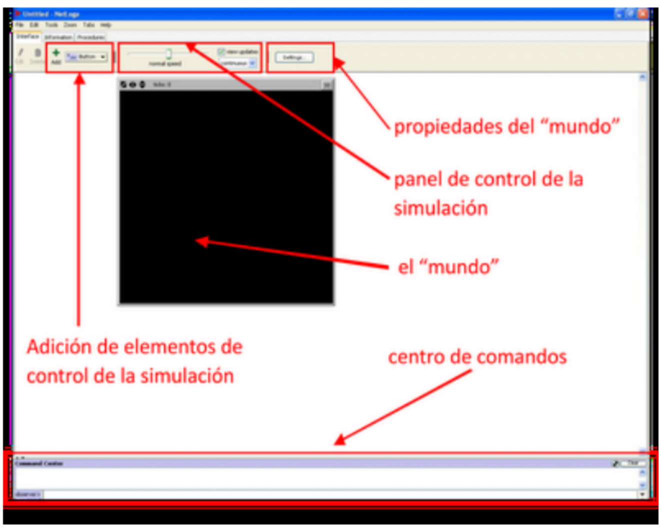


Figura 4.1. Interfaz de Netlogo

Otra la de información, donde se puede describir el programa y explicar su funcionamiento. Y una última de código.

Las simulaciones dispondrán de las siguientes variables:

- r : recursos
- c : costo de la lucha (varía para cada halcón entre $[0, 2c]$)
- p : porcentaje de la población que pierde y se va en cada generación
- n : número de individuos
- h : número de halcones
- g : número de generaciones

El juego funcionará de la siguiente manera:
- Tendremos una población inicial de n individuos de los cuales h actuarán como halcones y $(n - h)$ como palomas.
- Enfrentaremos cada individuo con toda la población y hallaremos su ganancia media, la cual esta regida por las siguientes fórmulas:
Pago a las palomas: $\frac{(r/2)(n-h)}{n}$.
Pago a los halcones: $\frac{r(n-h)+((r/2)-c)h}{n}$.
- Morirán los $n \times p$ individuos con menores ganancias y los nuevos jugadores tomarán la estrategia de los $n \times p$ individuos con mayores ganancias.
Según sus ganancias nuestro sistema tenderá a alguno de los tres siguientes casos:

4.1. $r/2 - c > 0$

Cuando tomamos cualquier combinación de recursos y costos tal que $r/2 - c > 0$, debería llevarnos a que nuestra población pasa a ser solo de halcones lo cual es el equilibrio de Nash visto anteriormente para este caso.

Si tomamos $r = 10$, $c = 4$ y $p = 20$ resulta la gráfica 4.2, en la cual se observa que efectivamente en pocas generaciones se logra una población únicamente de halcones.

En el gráfico 4.3 se puede apreciar la rapidez con la que esto sucede, pues en tan solo ocho generaciones toda la población pasa a comportarse como halcones. Haciendo varios experimentos más vemos que el porcentaje de muerte solo afecta a la rapidez con la que se consigue dicho resultado, cuanto mayor es este valor más rápido queda una población con jugadores que se comportan únicamente como halcones.

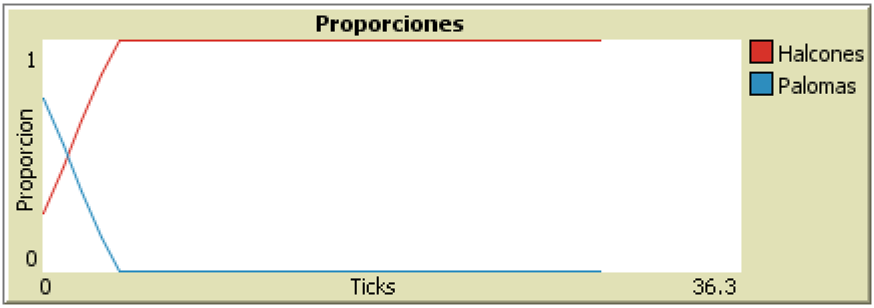
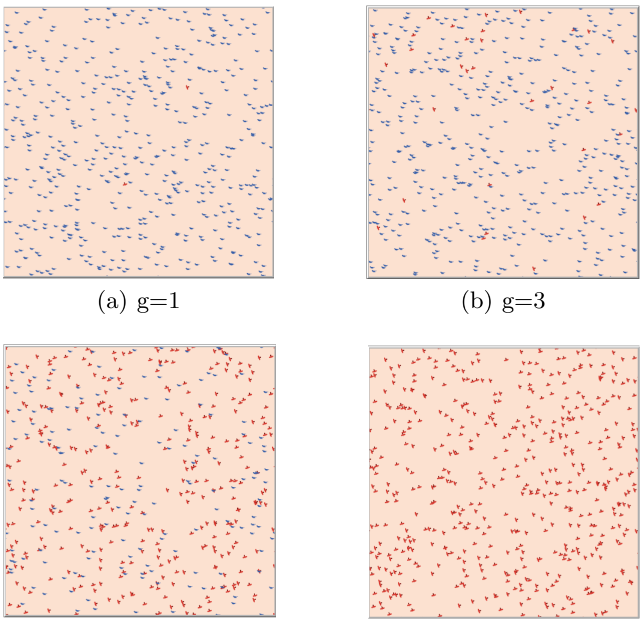


Figura 4.2. Evolución temporal de las proporciones de halcones y de palomas para $r = 10$, $c = 4$ y $p = 20$.



(a) g=1 (b) g=3

(c) g=5 (d) g=8

Figura 4.3. Evolución temporal del número de halcones(rojos) y palomas(azules) tomando $r = 10$, $c = 6$ y $p = 20$.

4.2. $r/2 - c = 0$

Este caso resulta igual al de $r/2 - c > 0$, obtendremos una población formada únicamente por halcones.

Tomando $r = 10$, $c = 5$ y $p = 20$, resulta la figura 4.4.

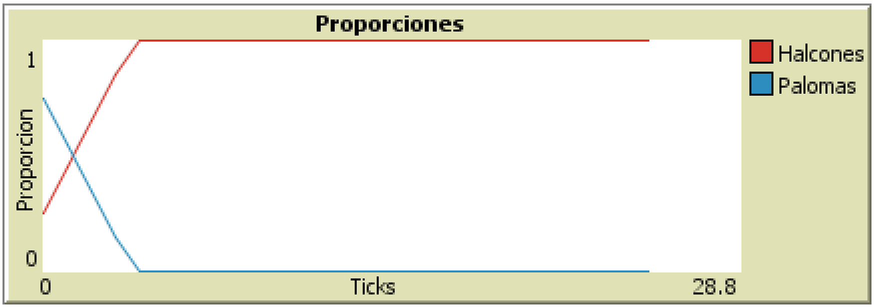


Figura 4.4. Evolución temporal de las proporciones de halcones y de palomas para $r = 10$, $c = 5$ y $p = 20$.

El porcentaje de muertes sigue influyendo únicamente en la velocidad con la que se da este resultado.

4.3. $r/2 - c < 0$

Distinguiremos dos casos:

1. $\frac{r}{2c}$ sea un valor muy cercano a 0, por ejemplo, $r = 10$ y $c = 200$;
2. $\frac{r}{2c}$ casos no tan extremos como por ejemplo: $r = 10$ y $c = 30$.

4.3.1. Primer caso

La gráfica 4.5 muestra que ocurre si tomamos $r = 10$, $c = 200$ y $p = 20$.

Se observa que toda la población acaba actuando como palomas. Este resultado se alcanza de una manera mucho más lenta que la de los dos anteriores e igualmente el porcentaje de muertes acelera este equilibrio.

4.3.2. Segundo caso

Este caso es más complicado que los anteriores, debido a que aquí el porcentaje de muertes va a influir en si tenemos un equilibrio o hay caos en la población.

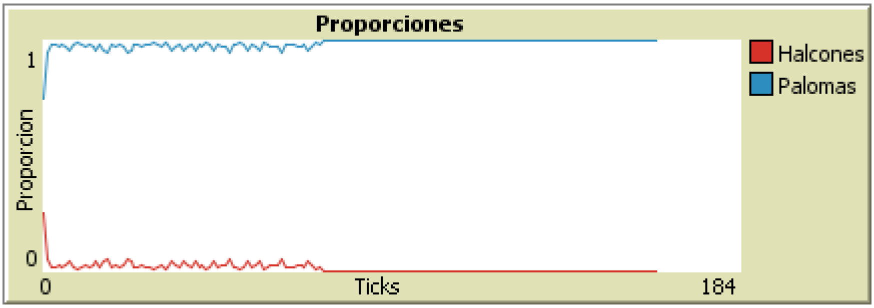


Figura 4.5. Evolución temporal de los porcentajes de halcones y de palomas para $r = 10$, $c = 200$ y $p = 20$.

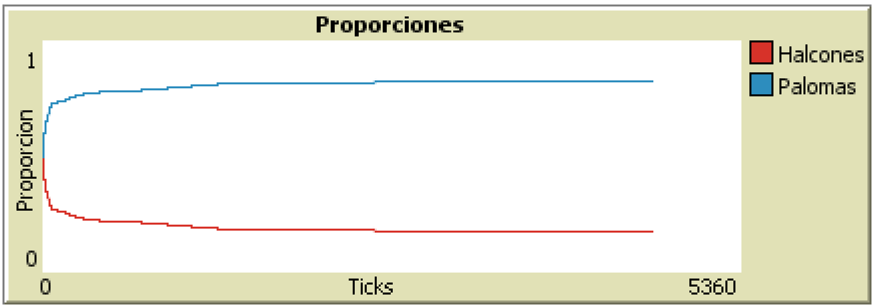


Figura 4.6. Evolución temporal de las proporciones de halcones y de palomas para $r = 30$, $c = 100$ y $p = 10$.

Vamos a trabajar primero con los valores $r = 30$, $c = 100$ y $p = 10$.

En la gráfica 4.6 se observa que la proporción de halcones y palomas está en equilibrio, habiendo simulado hasta la generación 4400.

En cambio si en vez de $p = 10$ tomamos $p = 25$ llegamos a que aún en la generación 10000 el porcentaje de halcones y paloma varía. Ver gráfica 4.7.

Veamos otro ejemplo al tomar $r = 10$, $c = 10$ y $p = 10$, resulta la gráfica 4.8 en la que al igual que en el ejemplo anterior el porcentaje de halcones y palomas permanece en equilibrio. Tomemos ahora $p = 25$ y a continuación $p = 50$.

Como podemos observar tanto en la figura 4.9 como en la 4.10 la proporción de halcones y palomas sigue variando continuamente, quedando gráficas bastante similares. Mediante dicha observación se puede pensar que esta variación va a ser más grande según aumentemos el valor de p. Realizaremos un *diagrama de bifurcación* para ver si es cierto que esta variación irá aumentando

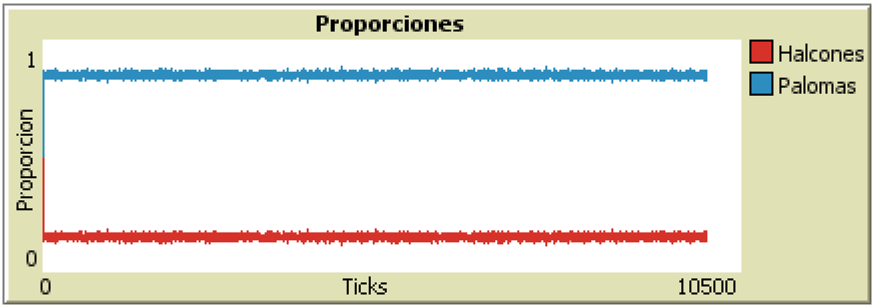


Figura 4.7. Evolución temporal de las proporciones de halcones y de palomas para $r = 30$, $c = 100$ y $p = 25$.

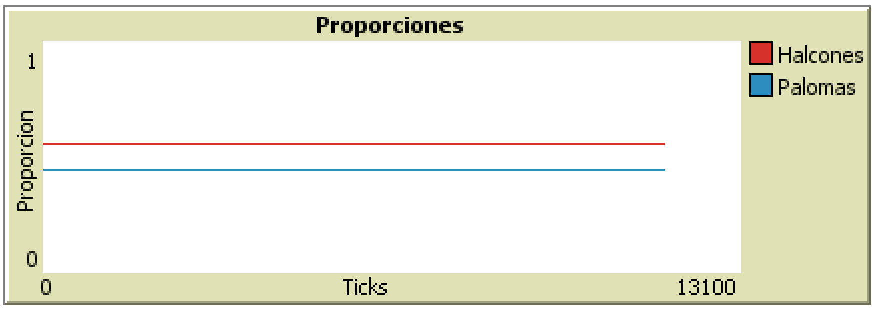


Figura 4.8. Evolución temporal de las proporciones de halcones y de palomas para $r = 10$, $c = 10$ y $p = 10$.

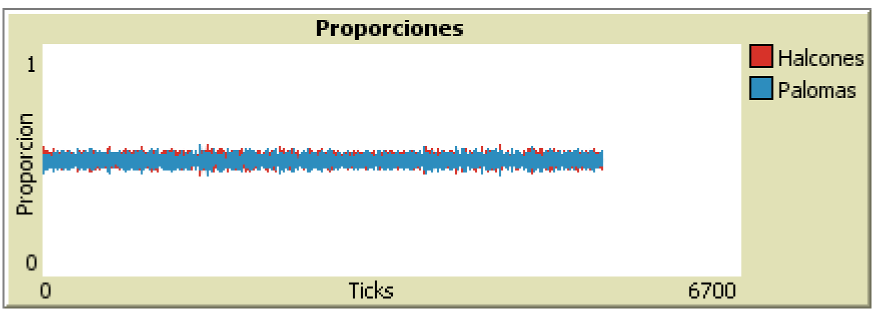


Figura 4.9. Evolución temporal de las proporciones de halcones y de palomas para $r = 10$, $c = 10$ y $p = 25$.

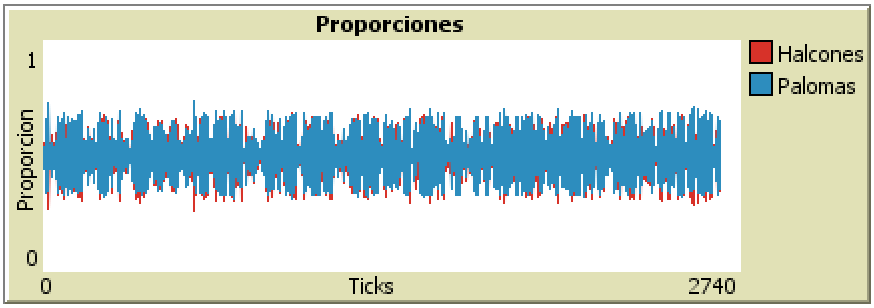


Figura 4.10. Evolución temporal de las proporciones de halcones y de palomas para $r = 10$, $c = 10$ y $p = 50$.

a medida que p va creciendo. Para ello simularemos 1000 generaciones en cada valor de p y representamos en la gráfica de bifurcación la proporción de halcones respecto al porcentaje de muerte de las 50 generaciones posteriores.

Tomando $r = 30$ $c = 100$ nos queda la gráfica de bifurcación que se muestra en la figura 4.11.

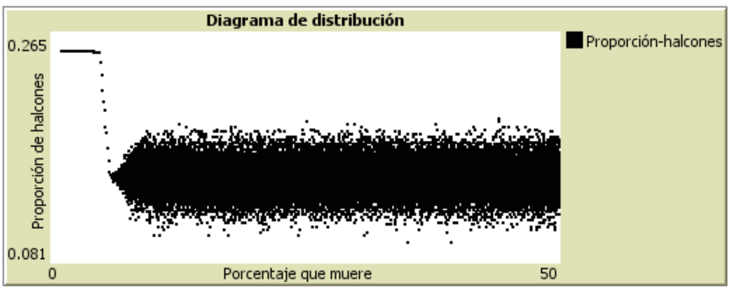


Figura 4.11. Proporción de halcones según el porcentaje de muerte en las generaciones $g = \{1000, 1050\}$, con $r = 30$ y $c = 100$.

Podemos observar que la proporción de halcones se mantiene estable para valores pequeños del parámetro p como habíamos visto anteriormente y luego vemos cómo empieza a variar cada vez más, llegando a un punto en el que se mantiene la variación al contrario de lo que habíamos supuesto.

Hemos hallado la media de la proporción de halcones de dicho gráfico resultando que la proporción media de halcones ha sido 0.15, que es exactamente $r/2c$ para este caso, que es una estrategia evolutivamente estable. Las pequeñas oscilaciones alrededor de este valor se deben a la aleatoriedad del costo de nuestro modelo.

Tomando ahora $r = 10$ y $c = 10$ nos queda la gráfica de bifurcación de la figura 4.12.

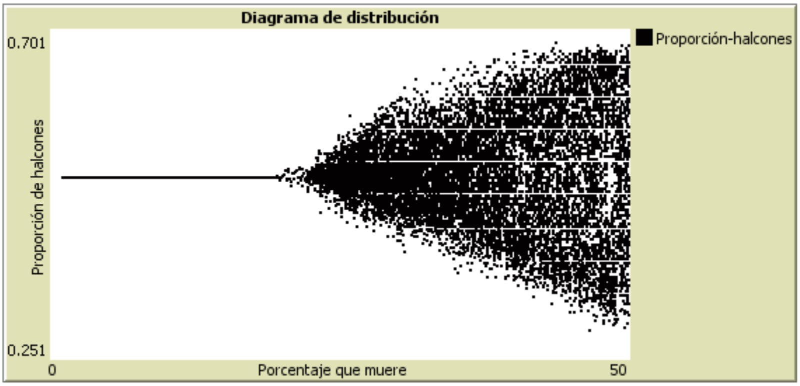


Figura 4.12. Proporción de halcones según el porcentaje de muerte en las generaciones $g = \{1000, 1050\}$, con $r = 10$ y $c = 20$.

En este caso la variación del porcentaje de halcones sí aumenta según p va creciendo. Aún así la proporción media de halcones ha sido 0.25, que es una estrategia evolutivamente estable para este caso.

5

Teoría de juegos espacial

5.1. Introducción

Ahora los jugadores se colocarán aleatoriamente en un tablero e interaccionarán únicamente con sus vecinos. El tablero dispone de n filas y m columnas con lo que tendrá $n \times m$ casillas. En cada casilla podrá haber un único jugador, al que designaremos por a_{ij} donde i corresponde a la fila en la que está colocado y j a la columna.

Los vecinos de un jugador serán aquellos situados en casillas cercanas. Veamos esta definición de manera más formal.

Definición 5.1. *Llamaremos k-vecinos de un jugador a_{ij} a los a_{rt} tales que $r \equiv i + l \pmod{n}$ y $t \equiv j + h \pmod{m}$, con $l, h \in -k, \ldots, k$.*

Sea v el número de vecinos y $G = \{S, E\}$ con $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un juego simétrico. Denotaremos por $E(s_i, [s_1, \ldots, s_v])$ al pago medio de un jugador usando la estrategia s_i respecto a sus vecinos que usan las estrategias $s_1, \ldots, s_v$.

Podemos tratar el tablero como un grafo, siendo los vértices las casillas ocupadas por jugadores del tablero. Dichos vértices estarán conectados por una arista si los jugadores son vecinos.

Definición 5.2. *Un camino será una secuencia de vértices $C = (v_1, \ldots, v_k)$ tal que existe una arista entre v_i y v_{i+1}, $i = 1, \ldots, k - 1$.*

Definición 5.3. *Las componentes conexas (CC) de un grafo son sus subgrafos maximales conexos, es decir, conjuntos de vértices $I = (v_1, \ldots, v_t)$ tal que $\forall i, j$ ($i \neq k$) existe un camino C entre v_i y v_j y además dado $v_k \notin I$ no existe un camino entre v_i y v_k.*

5.2. Halcones y palomas (espacial)

Denotaremos como p_{v_i} al número de palomas vecinas y h_{v_i} al número de halcones vecinos del jugador i.

Cada jugador se enfrentará a cada uno de sus vecinos y posteriormente se le calculará la ganancia media dividiendo su ganancia total entre el número de sus vecinos. Si el jugador tiene v vecinos de los cuales p_v son palomas y h_v son halcones, sus pagos serán:
Si el jugador es paloma: $\frac{rp_v}{2v}$.
Si el jugador es halcón: $\frac{rp_v+(r/2-c)h_v}{v}$.

Estudiaremos los distintos equilibrios de Nash que se puedan formar en las distintas CC. Se puede llegar fácilmente a la conclusión de que vamos a tener infinitud de equilibrios, ya que dependerá en cada caso de los vecinos que tenga cada jugador, del comportamiento de cada uno de ellos y del tamaño y forma de la CC.

Para ello estudiaremos cuál será la estrategia óptima a elegir por cada jugador i, el cual sabrá inicialmente cuántos vecinos tiene, así como su comportamiento. Distinguiremos tres casos:

- Sus vecinos son únicamente halcones ($h_{v_i} > 0,\ p_{v_i} = 0$).
- Sus vecinos son únicamente palomas ($h_{v_i} = 0,\ p_{v_i} > 0$).
- Sus vecinos son tanto halcones como palomas ($h_{v_i} > 0,\ p_{v_i} > 0$).

Además, al igual que anteriormente, distinguiremos tres casos en función del signo de $r/2 - c$.

Este estudio lo realizaremos teóricamente y lo simularemos con NetLogo. Para visualizar dichos resultados distribuiremos aleatoriamente h halcones y p palomas en un tablero representados por cuadrados rojos y azules respectivamente. Y calcularemos para cada uno su ganancia según sea halcón o paloma, eligiendo para cada jugador su estrategia óptima.

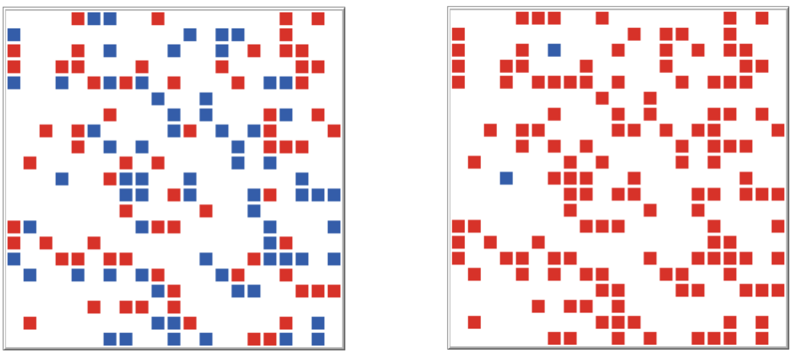
- $r/2 - c > 0$
  1. Si el jugador tiene como vecinos únicamente halcones ($h_{v_i} > 0,\ p_{v_i} = 0$), se da que
  $$E(H, [H, \ldots, H]) > 0 > E(P, [H, \ldots, H]) = 0.$$
  Por lo que su mejor respuesta será actuar como halcón.
  2. Si el jugador tiene como vecinos únicamente palomas ($h_{v_i} = 0,\ p_{v_i} > 0$), tendremos que
  $$E(H, [P, \ldots, P]) = rp_v > E(P, [P, \ldots, P]) = \frac{r(p_v)}{2}.$$
  Por lo que también su mejor respuesta será actuar como halcón.

3. Si el jugador tiene tanto palomas como halcones por vecinos ($h_{v_i} > 0$, $p_{v_i} > 0$), se cumple que

$$(H,[H,\ldots,H,P,\ldots,P]) = rp_v + \left(\frac{r}{2} - c\right) h_v \geq E(P,[H,\ldots,H,P,\ldots,P]) = \frac{rp_v}{2},$$

ya que $(r/2 - c) > 0$. Por lo tanto su mejor respuesta al igual que en los dos casos anteriores será actuar como halcón.

Se observa, que independientemente de sus vecinos, al jugador le interesa siempre actuar como halcón. Por lo tanto tendremos como equilibrios de Nash "islas" formadas únicamente por halcones.
Por ejemplo, si tomamos $r = 10$, $c = 2$, $p = 70$, $h = 70$ y distribuimos los jugadores aleatoriamente ($10/2 - 2 = 3 > 0$), nos queda la figura 5.1.



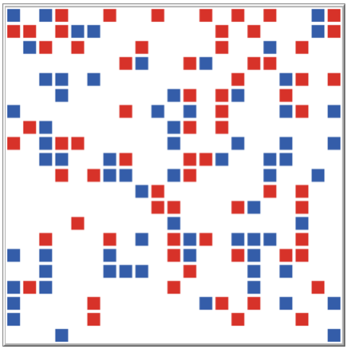
(a) Inicial (b) Equilibrio

Figura 5.1. Ejemplo de simulación en el caso $r/2 - c > 0$.

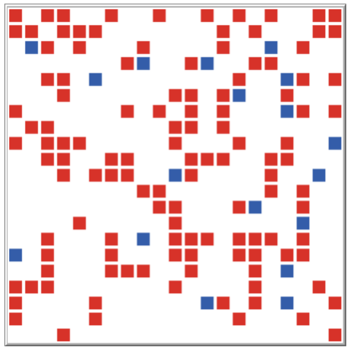
Todos los individuos han cambiado su comportamiento a halcón, quedando islas de halcones, salvo aquellos jugadores aislados que han actuado inicialmente como palomas, cuya ganancia es siempre nula al no tener vecinos, independiente de su comportamiento.

- $r/2 - c = 0$
  1. Si el jugador tiene como vecinos únicamente halcones ($h_{v_i} > 0,\ p_{v_i} = 0$), se da que
     $$E(H, [H, \ldots, H]) = 0 \geq E(P, [H, \ldots, H]) = 0.$$
     Como los pagos de un jugador cuyos vecinos son halcones son iguales le dará igual cómo actuar, lo que implicará que en la simulación su comportamiento sea el inicial.
  2. Si el jugador tiene como vecinos únicamente palomas ($h_{v_i} = 0,\ p_{v_i} > 0$), tendremos que
     $$E(H, [P, \ldots, P]) = rp_v \geq E(P, [P, \ldots, P]) = \frac{rp_v}{2}.$$
     Por lo tanto su mejor respuesta será actuar como halcón.
  3. Si el jugador tiene tanto palomas como halcones por vecinos ($h_{v_i} > 0,\ p_{v_i} > 0$), se cumple que
     $$\begin{aligned} E(H, [H, \ldots, H, P, \ldots, P]) &= r(p_v) + (\frac{r}{2} - c)h_v \\ &\geq E(P, [H, \ldots, H, P, \ldots, P]) = \frac{rp_v}{2}, \end{aligned}$$
     ya que $(r/2 - c) = 0$. Por lo tanto al igual que en el caso anterior su mejor respuesta será actuar como halcón.

  En este caso tendremos un equilibrio de Nash si la isla está formada por halcones y algunas palomas cuyos vecinos sean exclusivamente halcones.
  Por ejemplo tomemos $r = 10$, $c = 5$, $p = 70$, $h = 70$ y distribuyamos los jugadores aleatoriamente $(10/2 - 5 = 0)$.
  Efectivamente podemos ver en la figura 5.2 que quedan islas formadas por halcones y algunas palomas cuyos vecinos son halcones.
- $r/2 - c < 0$
  1. Si el jugador tiene como vecinos únicamente halcones ($h_{v_i} > 0,\ p_{v_i} = 0$), se da que
     $$E(P, [H, \ldots, H]) = 0 \geq E(H, [H, \ldots, H]) < 0.$$
     Por lo tanto su mejor respuesta será actuar como paloma.
  2. Si el jugador tiene como vecinos únicamente palomas ($h_{v_i} = 0,\ p_{v_i} > 0$), tendremos que



(a) Inicial



(b) Equilibrio

Figura 5.2. Ejemplo de simulación en el caso $r/2 - c = 0$.

$$E(H,[P,\ldots,P]) = rp_v \geq E(P,[P,\ldots,P]) = \frac{rp_v}{2}.$$

Por lo que la mejor respuesta del jugador sera actuar como halcón.

3. Si el jugador tiene tanto palomas como halcones por vecinos ($h_{v_i} > 0,\ p_{v_i} > 0$), tendremos las siguientes ecuaciones:

$$E(H,[H,\ldots,H,P,\ldots,P]) = r(p_v) + \left(\frac{r}{2} - c\right) h_v; \tag{5.1}$$

$$E(P,[H,\ldots,H,P,\ldots,P]) = \frac{rp_v}{2}. \tag{5.2}$$

Se cumple que 5.1 $\geq$ 5.2 si

$$\frac{r(p_v + h_v)}{2} \geq c \Rightarrow (h_v + p_v) \geq \frac{2c}{r}. \tag{5.3}$$

Análogamente, 5.2 $\geq$ 5.1 si

$$\frac{r(p_v + h_v)}{2} \leq c \Rightarrow (h_v + p_v) \leq \frac{2c}{r}. \tag{5.4}$$

Recordemos que en ambos casos se tiene que cumplir que $p_v > 0$ y $h_v > 0$. En este caso tendremos un equilibrio de Nash si la isla está formada simultáneamente por halcones y palomas cumpliendo 5.3 los halcones y 5.4 las palomas.

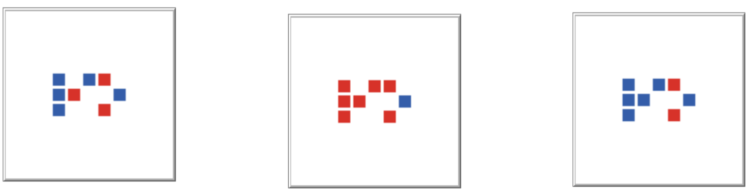
En la figura 5.3 pueden observar dos ejemplos de islas en equilibrio tomando $r = 10$ y $c = 7$. AEn la figura 5.4 tenemos un ejemplo de una isla que nunca alcanza un equilibrio. La isla inicial se transformará en una isla con solo halcones o solo palomas, entre las que va variado continuamente.

Figura 5.3. Ejemplos de islas en equilibrio.

(a) Inicial (b) Palomas (c) Halcones

Figura 5.4. Ejemplo de isla que no alcanza un equilibrio, alternándose (b) y (c) continuamente.

Por último tenemos un ejemplo de isla mixta en la figura 5.5 en el que habrá algunos jugadores en equilibrio y otros variando continuamente de estrategia en la isla.



(a) Inicial (b) Disposición 1 (c) Disposición 2

Figura 5.5. Ejemplo de isla mixta en la que se alterna entre (b) y (c).

6

Dinámica evolutiva espacial del juego Halcones y Palomas

Vamos a simular ahora el juego de Palomas y Halcones en un terreno y ver qué pasa a lo largo del tiempo.

Hemos usado para dicho estudio dos tipos distintos de códigos de Netlogo.

En ambos casos partiremos una población de h halcones y p palomas, distribuidos de forma aleatoria a lo largo del terreno.

Se tendrán las siguientes variables:

- r: recursos
- c: costos
- g: generaciones
- e: probabilidad de expansión

6.1. Ganancias globales

En este caso, además de las mencionadas anteriormente tendremos otra variable m, que será el porcentaje de población que muere en cada generación.

Funcionará de la siguiente forma:

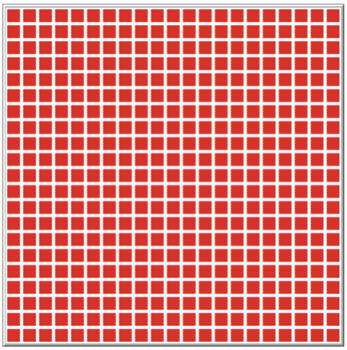
- Cada individuo calculará sus ganancias según las fórmulas vistas anteriormente.
- Morirá el porcentaje m con menor ganancia de la población y se reproducirá ese mismo porcentaje con mayor ganancia, ocupando los nuevos individuos la posición de los que han muerto.

Además las casillas vacías tendrán una probabilidad e de que entre un nuevo jugador, que adoptará su estrategia según la más frecuente entre sus vecinos. Por lo que iremos llenando el tablero a lo largo de las generaciones.

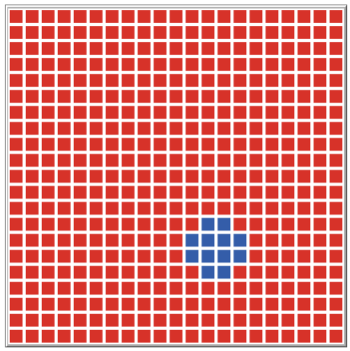
Analizaremos los distintos tipos de configuraciones espaciales según el valor $r/2 - c$.

6.1.1. $r/2 - c > 0$

Nos quedarán tres tipos de configuraciones distintas. Dos de ellas en equilibrio pero no necesariamente evolutivamente estables, pudiéndose ver afectadas por mutaciones en la población. El primer caso será una población sólo de halcones y en el segundo serán pequeñas agrupaciones de palomas rodeadas por halcones, figura 6.1.



(a) Configuración 1



(b) Configuración 2

Figura 6.1. Distribuciones espaciales de halcones y palomas con $r/2 - c = 2$.

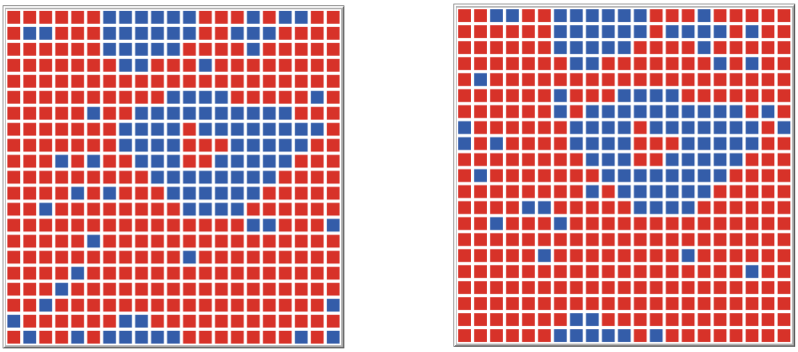
La tercera configuración será la de la figura 6.2, en la cual vuelve a haber agrupaciones de palomas rodeadas por halcones, pero además van surgiendo y desapareciendo palomas entre los halcones.

Que pase la configuración 2 o la 3 dependerá de m y del número de palomas en las agrupaciones formadas. Si el número de palomas es mayor estaremos en el caso 3, ya que habrá algunas palomas reproduciéndose aparte de los halcones con mayor ganancia, ocupando los lugares de halcones rodeados de halcones, los cuales son los que tienen menor ganancia. En la siguiente generación éstas desaparecerán al tener ganancia 0 por lo general y aparecerán otras en otros lugares.

Además a medida que vaya aumentado el valor de $r/2 - c$ tanto la configuración 2 como la 3 dejarán de aparecer.

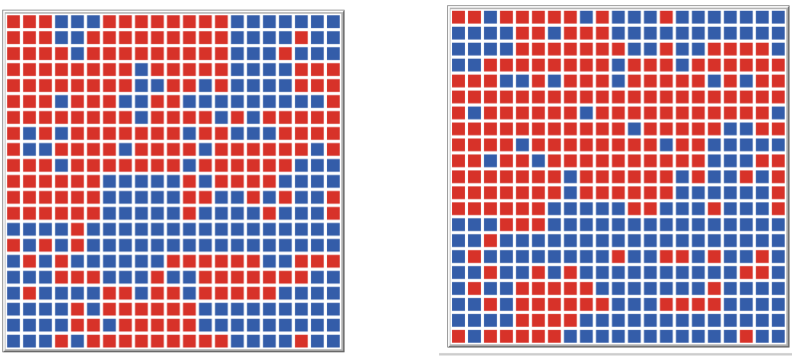
6.1.2. $r/2 - c = 0$

En este caso la población estará formada por grupos de halcones y palomas, los cuales van cambiando continuamente, como vemos en la figura 6.3



(a) Configuración 3(1) (b) Configuración 3(2)

Figura 6.2. Distribución espacial de halcones y palomas con $r/2 - c = 2$.

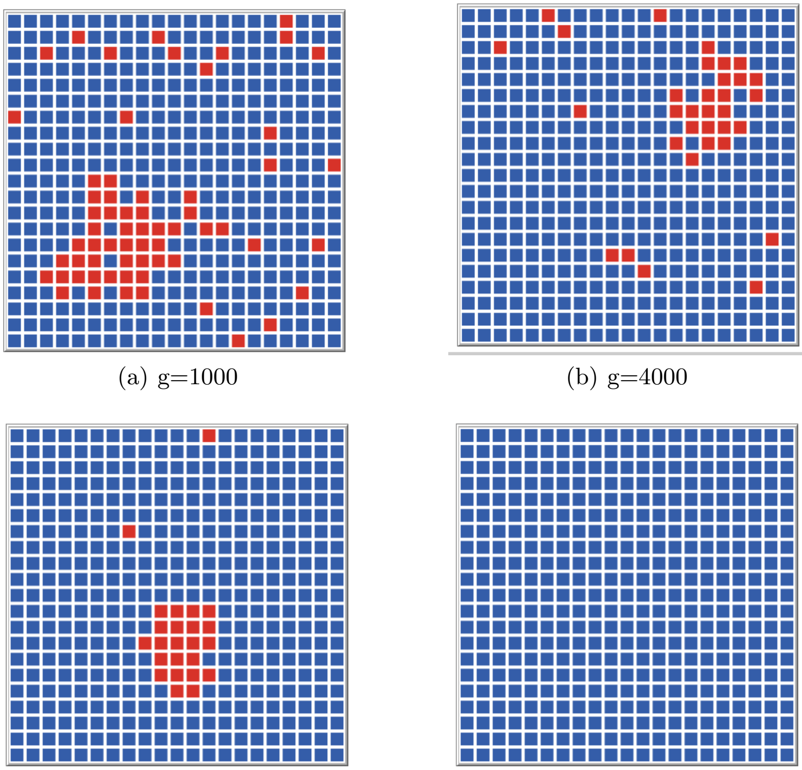


(a) Generación 1000 (b) Generación 2000

Figura 6.3. Distribución espacial de halcones y palomas con $r/2 - c = 0$.

6.1.3. $r/2 - c < 0$

Este caso es quizás el más curioso. La población estará formada por halcones cuyos vecinos serán principalmente palomas y pequeños grupos de halcones rodeados por palomas. Los grupos de halcones se irán desplazando a lo largo del tablero y "absorbiend" los halcones dispersos, mientras su tamaño va aumentando y disminuyendo. Una vez no queden halcones sueltos este grupo desaparecerá y quedará una población de solo palomas. La velocidad con la que esto pase dependerá tanto de m y de lo negativo que sea $r/2 - c$, sucediendo más rápido cuanto más negativo.



(a) g=1000 (b) g=4000

(c) g=7000 (d) g=10000

Figura 6.4. Distribución espacial de halcones y palomas con $r/2 - c = -2$.

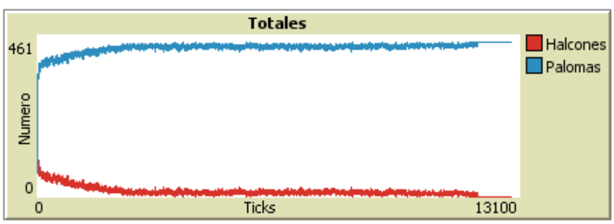


Figura 6.5. Evolución temporal del número halcones y palomas con $r/2 - c = -2$.

Que la población sea únicamente de palomas es una estrategia evolutivamente estable para este caso.

6.2. Evolución por imitación del mejor

Dada individuo calculará sus ganancias de la forma vista anteriormente y se fijará en las de sus vecinos. Si alguno de sus vecinos ha obtenido una ganancia mayor que la suya, pasará a adoptar la estrategia de éste.

Además las casillas vacías tendrán una probabilidad e de que entre un nuevo jugador, que adoptará la estrategia del vecino (a esa casilla) con mayor ganancia.

Para ello realizaremos primero un diagrama de bifurcación en el que variaremos los recursos y costos, tomando $r = 6$ y variando c desde 3,5 a 10. De tal forma que $r/2 - c$ obtendrá valores desde -3 hasta 0,5.

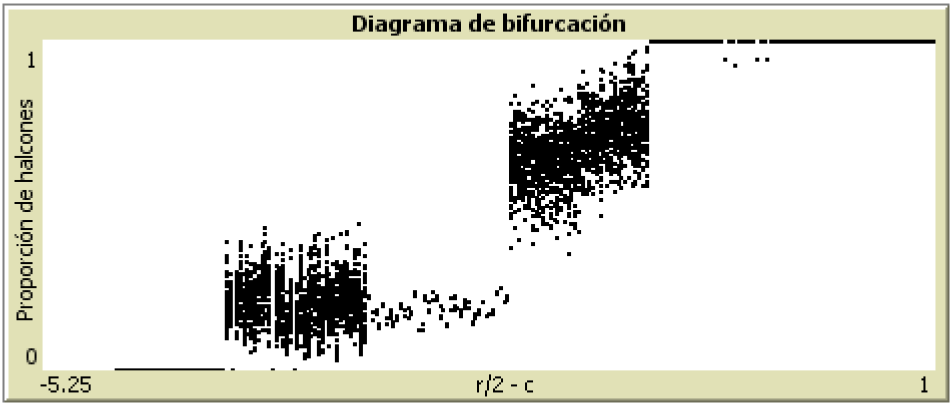
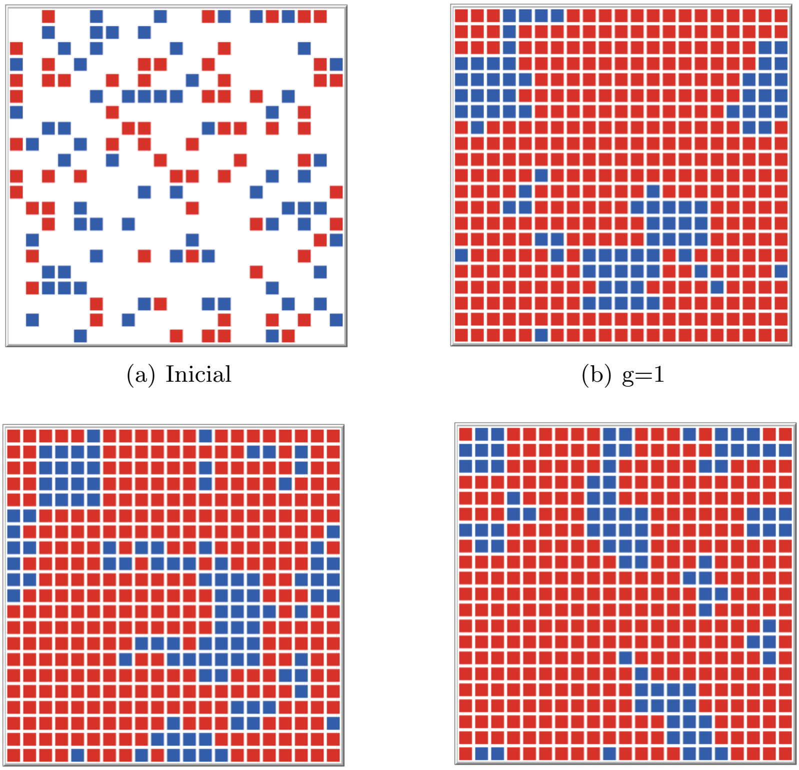


Figura 6.6. Representación de la proporción de halcones de las 100 siguientes generaciones a la 1000 respecto a $r/2 - c$.

Observamos que para valores menores de -3 aproximadamente, la población pasa a ser de palomas únicamente. De forma análoga para valores mayores a -1 la población será de halcones. Solo en algunos casos quedan pequeños grupos de halcones o palomas.

Analizaremos con más detalle qué pasa en el intervalo $(-3, 0)$. Para ello daremos diferentes valores según los tres tipos de comportamientos que pueden apreciarse en el diagrama de bifurcación 6.6.

El primer tipo de conducta se observa en el intervalo $(-1, -2]$. Tomemos por ejemplo el valor $r/2 - c = -1{,}5$.



(a) Inicial (b) g=1

(c) g=2 (d) g=13

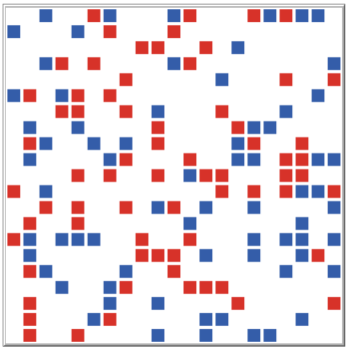
Figura 6.7. Evolución de la distribución de halcones y palomas con $r/2 - c = 1{,}5$.

Como se puede observar en la figura 6.7 quedan grupos de palomas rodeados por halcones. Estos grupos de palomas varían de forma y tamaño constantemente. Además se irán desplazando a lo largo del tablero.

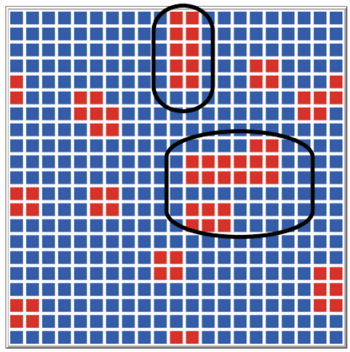
A continuación estudiaremos el segundo tipo de conducta que está en el intervalo $(-3, -2)$. Tomando por ejemplo $r/2 - c = -2{,}5$.

Vemos que en la figura 6.8 que quedan pequeños grupos de halcones rodeados por palomas que permanecen imperturbables a lo largo del tiempo manteniendo su forma y tamaño, salvo por un pequeño número de jugadores cercanos a algunos de estos grupos que van cambiando su estrategia constantemente entre halcón y paloma.

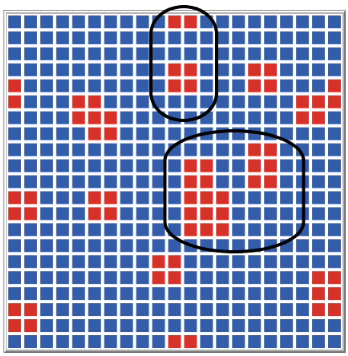
Por último observemos en intervalo $(-4, -3)$. Tomaremos $r/2 - c = 3{,}5$.



(a) Inicial



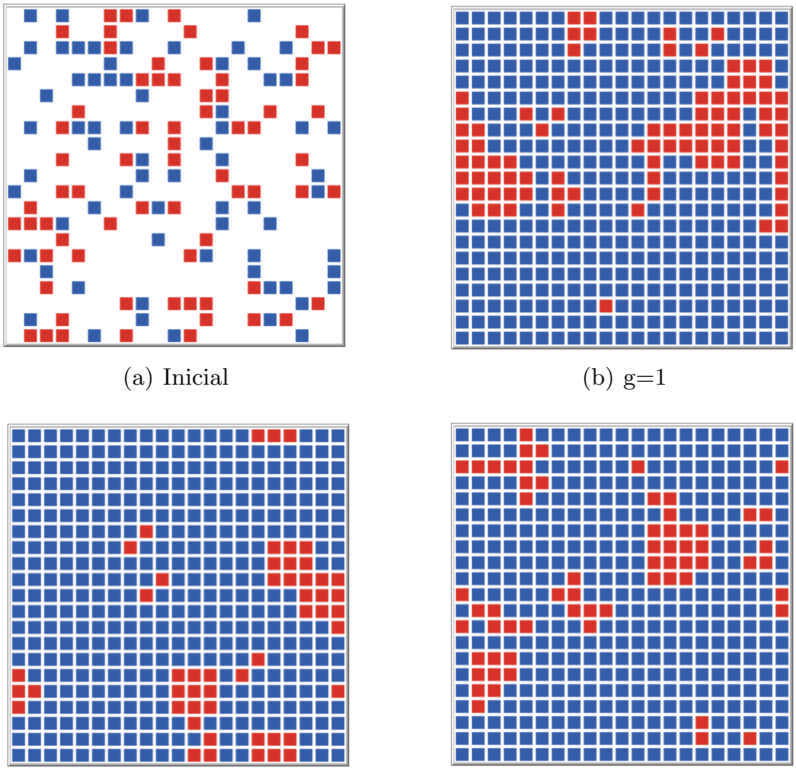
(b) Configuración 1



(c) Configuración 2

Figura 6.8. Ejemplos de configuraciones entre las que alterna una población cuando $r/2 - c = -2{,}5$, dada una distribución inicial.

Tendremos pequeños grupos de halcones rodeados por palomas, los cuales irán cambiando en forma y tamaño, aparte de irse desplazando a lo largo del tablero como podemos observar en la figura 6.9.



(a) Inicial (b) g=1 (c) g=2 (d) g=13

Figura 6.9. Evolución de la distribución de halcones y palomas cuando $r/2-c = -3{,}5$.

7

Conclusiones y posibles líneas de trabajo futuras

7.1. Conclusiones

Hemos estudiado el juego de Halcones y Palomas, en el cual dos individuos pelean por un recurso adoptando una estrategia pasiva o agresiva. Este estudio lo hemos realizado primeramente en el caso no espacial dónde un individuo podía interactuar con toda la población y posteriormente en el caso espacial, en el cual los individuos solo podían interactuar con sus vecinos.

El valor del pago de la lucha entre dos jugadores actuando de forma agresiva es un factor clave en ambos casos.

En el caso espacial para valores mayores cercanos a cero, aparecen pequeños grupos de palomas rodeados por halcones, mientras que en el no espacial quedaban para estos valores halcones únicamente. Si dicho valor de pago vale cero en el caso espacial queda una población con halcones y palomas cuya proporción es similar, y en el caso no espacial la población está formada únicamente por halcones. Por último si es menor que cero, en el caso espacial queda una población de palomas y en el no espacial varía la proporción de halcones y palomas entorno a un valor medio.

Estas simulaciones podrían aportar un poco de claridad al porqué del comportamiento animal. Aunque tenemos que considerar que nuestros individuos solo podían actuar con una estrategia pura.

7.2. Posibles líneas de trabajo futuras

Una posible línea de trabajo futura podría ser un estudio de este juego en el caso espacial con estrategias mixtas y profundizar en por qué ocurren las distintas distribuciones espaciales.

8

Anexo: códigos NetLogo

8.1. Código caso no espacial

```
;; Propiedades adicionales de las tortugas
turtles-own [
ganancias ;; ganancia media
halcones-vecinos ;; número de halcones cercanos
palomas-vecinas ;; número de palomas cercanas
]


to setup
clear-all
set-default-shape halcones "hawk" ;; forma de lo halcones
set-default-shape palomas "bird␣side" ;; forma de las palomas
ask patches [set pcolor (Color-Tablero)] ;;color del mundo
create-halcones num-halcones[setxy random-xcor random-ycor
set color red] ;; creamos los halcones
create-palomas num-palomas[setxy random-xcor random-ycor
set color blue] ;; creamos las palomas
do-plots
reset-ticks
end

 ;;Normalizamos los pagos
to recursos-obtenidos-no-tablero
ask palomas[
set ganancias recursos / 2 * (count palomas)
set ganancias (ganancias / (count turtles))
```

```
]
ask halcones [
set ganancias (recursos / 2 - costo) * (count halcones) *
    random-float 2 + recursos * (count palomas)
set ganancias (ganancias / (count turtles))
]
end

;; Vemos que porcentaje de poblacion pierde y cual procrea
to morir
let numero-muertos ((count turtles) * porcentaje-muere / 100)
let orden-ganancias sort-on [ganancias] turtles ;;hacemos una
    lista ordenando las turtles segun sus ganancias
let n 0
while [n < numero-muertos][
let tortuga-muere first orden-ganancias ;;muere la de menor
    ganancias
let tortuga-procrea last orden-ganancias ;;procrea la de mayor
    ganancia
ask tortuga-muere[die]
ask tortuga-procrea [hatch 1[setxy random-xcor random-ycor]]
set orden-ganancias but-first orden-ganancias ;;guardamos la
    lista como la lista salvo la primera tortuga
set orden-ganancias but-last orden-ganancias ;;guardamos la lista
    como la lista salvo la última tortuga
set n n + 1
]
end

;; Se realizan los gráficos
to do-plots
set-current-plot "Proporciones"
set-current-plot-pen "Halcones"
plot (count halcones) / count turtles
set-current-plot-pen "Palomas"
plot (count palomas) / count turtles
end

to resetear
ask palomas [
set color blue ;; normalizamos el color de las palomas nuevas de
    la ronda anterior
]
```

```
ask halcones [
set color red ;; normalizamos el color de las halcones nuevos de
    la ronda anterior
]
end

;;Proceso para hacer el diagrama
to diagrama-de-bifurcacion de bifurcación
setup
set porcentaje-muere 1
while [porcentaje-muere <= 50][
repeat 1000[
resetear
recursos-obtenidos-no-tablero
morir
tick
]
repeat 100[
resetear
recursos-obtenidos-no-tablero
morir
set-current-plot "Diagrama␣de␣distribución"
set-current-plot-pen "Proporción-halcones"
plotxy porcentaje-muere (count halcones / count turtles)
tick
]
set porcentaje-muere porcentaje-muere + 0.1
]
end

to go
resetear
recursos-obtenidos-no-tablero
morir
do-plots
tick
end
```

8.2. Código caso espacial

```
breed [halcones halcon] ;; Definimos un tipo especial de tortugas
breed [palomas paloma] ;; Definimos un tipo especial de tortugas
```

```
;; Propiedades adicionales de las tortugas
turtles-own [
ganancias ;; ganancia media por tick
halcones-vecinos ;; numero de halcones cercanos
palomas-vecinas ;; numero de palomas cercanas
mejor-vecino
mejor-ganancia-vecina
vecinos
]

;; Propiedades adicionales de las casillas
patches-own [
vecinos-paloma-patches ;; palomas vecinas de la casilla
vecinos-halcon-patches ;; halcones vecinos de la casilla
]

;;inicializamos la simulación
to setup
clear-all
reset-turtles
do-plots
reset-ticks
end

to reset-turtles
clear-turtles
;; Definimos la forma de los halcones y palomas
set-default-shape halcones "square"
set-default-shape palomas "square"
;; ponemos las casillas de color verde con una pequeña variación
    (puramente estético)
ask patches [set pcolor (Color-Tablero)]
;; creamos los halcones y palomas en casillas aleatorias.
ask n-of num-halcones patches [
sprout-halcones 1[
set color red
set heading 30
]
]
ask n-of num-palomas patches [
sprout-palomas 1[
set color blue
]
```

```
]
;; Comprobamos que el número de tortugas no sea mayor que el de
    casillas y en caso positivo devolvemos un error
ifelse (count turtles) > (count patches)
[ user-message (word "!ERROR!␣Hay␣␣" count turtles "␣turtles␣y␣"
    count patches "␣casillas.␣Debe␣haber␣menos␣individuos␣que␣
    casillas.")
stop]
;; En las casillas que haya mas de una tortuga se mueve a otra
    libre
[ask turtles [
if any? other turtles-on patch-ahead 0[
let empty-patches patches with [not any? turtles-here]
if any? empty-patches
[ let target one-of empty-patches
move-to target ]
]
]
]
end

;; Contamos el número de halcones vecinos y palomas vecinas
to definir-vecinos
ask turtles[
set halcones-vecinos count (halcones-on neighbors)
set palomas-vecinas count (palomas-on neighbors)
]
end

;; Calculamos las ganancias medias de cada individuo de una
    ronda, diferenciando si son palomas o halcones.
to recursos-obtenidos
ask palomas[
if (count (turtles-on neighbors)) > 0[
set ganancias (recursos / 2 * palomas-vecinas ) / (count
    (turtles-on neighbors)) ;; Añadimos las ganancias aunque
    estas se resetean a 0 cada ronda.
]
]
ask halcones [
if (count (turtles-on neighbors)) > 0[
```

```
set ganancias ((recursos / 2 - 2 * costo * random-float 1) *
    halcones-vecinos) ;; Añadimos las ganancias aunque estas se
    resetean a 0 cada ronda.
set ganancias (ganancias + recursos * palomas-vecinas) ;;
    Añadimos las ganancias aunque estas se resetean a 0 cada
    ronda.
set ganancias (ganancias / count (turtles-on neighbors)) ;;
    Dividimos las ganancias obtenidas entre el número de vecinos
    que tenía para hallar la media de lo que ganó.
]
]
end

;;Vemos que porcentaje muere y cual procrea
to morir
let numero-muertos ((count turtles) * porcentaje-muere / 100)
let orden-ganancias sort-on [ganancias] turtles ;;hacemos una
    lista ordenada de tortugas segun sus ganancias
let n 0
while [n < numero-muertos][
let tortuga-muere first orden-ganancias
let tortuga-procrea last orden-ganancias
ask tortuga-muere[set breed [breed] of tortuga-procrea
]
set orden-ganancias but-first orden-ganancias ;;guardamos la
    lista como la lista salvo el primer miembro
set orden-ganancias but-last orden-ganancias
set n n + 1
]
end

;;Genera palomas o halcones en las casillas vacías segun el
    número de palomas y halcones vecinos a la casilla.
to presion-vecinal
ask patches with [not any? turtles-here] [ ;; casillas vacías
if (probabilidad-de-expansion / 100) > random-float 1[ ;;
    probabilidad de que una casilla desocupada pase a estar
    ocupada
set vecinos-halcon-patches count (halcones-on neighbors) ;;
    contamos los halcones vecinos
set vecinos-paloma-patches count (palomas-on neighbors) ;;
    contamos las palomas vecinas
```

```
;; Si hay mas halcones vecinos que palomas generamos un halcon en
    la casilla
if vecinos-halcon-patches > vecinos-paloma-patches[
sprout-halcones 1[
set heading 30
set color (25 + random-float 3) ;; diferenciamos color con los
    que ya teníamos
]
]
;; Si hay mas palomas vecinas que halcones creamos una paloma
if vecinos-halcon-patches < vecinos-paloma-patches[
sprout-palomas 1[
set color (85 + random-float 1) ;; diferenciamos color con las
    que ya teníamos
] ;; crea una paloma
]
]
]
end

;;Realiza los gráficos
to do-plots
set-current-plot "Totales"
set-current-plot-pen "Halcones"
plot (count halcones)
set-current-plot-pen "Palomas"
plot (count palomas)
end

;;Realiza el diagrama de bifurcación
to diagrama-de-bifurcación
set recursos 6
set costo 3
while [costo < 10][
repeat 2000[
go
]
repeat 50[
go
set-current-plot "Diagrama de bifurcación"
set-current-plot-pen "Porcentaje-halcones"
plotxy (recursos / 2 - costo) (count halcones / count turtles)
tick
```

```
]
set costo costo - 0.025
reset-turtles
]
end

;;Dibujar un halcón en una casilla
to dibujar-halcon
while [mouse-down?][
ask patch mouse-xcor mouse-ycor[
sprout-halcones 1[set color red]
display ]
]
end

;;Dibujar una paloma en una casilla
to dibujar-paloma
while [mouse-down?][
ask patch mouse-xcor mouse-ycor[
sprout-palomas 1[set color blue]
display ]
]
end

to resetear
;;reiniciamos los valores
ask turtles [
set halcones-vecinos 0
set palomas-vecinas 0
]
end

to go
resetear
definir-vecinos
recursos-obtenidos
morir
;;Procedimientos según los cuales vamos a ir llenando los huecos
    vacíos del mundo
if (Tipo-de-expansión = "Vecinal") [
presion-vecinal
]
if (Tipo-de-expansión = "Ninguna") []
```

```
ask turtles[
ifelse mostrar-ganancias? ;;muestra las ganancias de los
    individuos
[set label precision ganancias 2]
[]
]
ask palomas [
set color blue ;; normalizamos el color de las palomas nuevas de
    la ronda anterior
set shape "square"
]
ask halcones [
set color red
set shape "square" ;; normalizamos el color de las halcones
    nuevos de la ronda anterior
]
do-plots
;
tick
end
```

Bibliografía

[1] Binmore, K. and L. Samuelson (2001): Evolution and Mixed Strategies. *Games and Economic Behavior.* **34**, 200–226.

[2] Gibbons, R. (2011): *Un primer curso de teoría de juegos.*

[3] Gintis, H. (2000): *Game theory evolving: A problem-centered introduction to modeling strategic behavior.*

[4] Hofbauer, J. and K. Sigmund (1998): *Evolutionary games and population dynamics.*

[5] Mangel, M. (1998): Evolutionary games and population dynamics. *Nature.* **395**, 32–32.

[6] Maynard Smith, J. (1982): *Evolution and the Theory of Games.*

[7] Wikipedia, The Free Encyclopedia (Español). *Teoría de juegos.*

[8] Wilensky, U. (1999): *NetLogo. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.*

Hawk and Doves: dynamic and spatial study

Arturo Juan Jiménez González
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100533163@ull.edu.es

Abstract

The aim of this paper is to study the theory about the Hawk-Dove game, whereby two players fight for a resource, adopting one of the two possible strategies: the aggressive or the passive one. Subsequently, using the NetLogo program, different scenarios are simulated and the results obtained are compared with those reported in the theory. Finally, this game is transferred to the spatial case, when players are distributed on a board. There, they can only interact with their neighbors.

1. Introduction

The biologist John Maynard Smith used the game theory to study the animal behavior whithin one species, through the Hawk-Dove game. In this game agents came in two brands:

- Hawks: very agressive, will fight for the resource as hard as they can.
- Doves: they demonstrate aggression, but will flee if the other aggravates the conflict.

This agents will be randomly paired and have the next payment table:

	Hawk	Dove
Hawk	$r/2-c$, $r/2-c$	0, r
Dove	r, 0	$r/2$, $r/2$

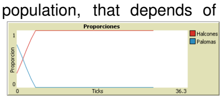
2. Game Theory

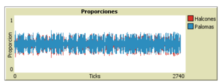
In order to study the Hawk-Dove game we introduced a set of propierties and definitions.

- Normal-form game: a game in normal form is a structure $G=\{S,E\}$ where $S=\{S_1,S_2,\dots,S_m\}$, is an m-tuple of pure strategy sets, one for each player, and $E=(E_1,\dots,E_n)$ is an m-tuple of payoff functions.
- Nash Equilibrium: a poblation is in equilibrium if nobody want to change him strategy.
- Symmetric game: a game of two is symmetric if they have the same possibles strategies and $E_1(s_i,s_j)=E_2(s_j,s_i)$..
- Evolutionary Stable Strategy: is a strategy which, if adopted by a population in a given environment, cannot be invaded by any alternative strategy.

3. Non-spatial study of Hawk-Dove

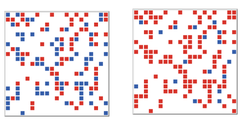
Each player may interact with any other. There are two differents distributions for a population, that depends of $r/2-c$:

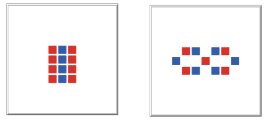




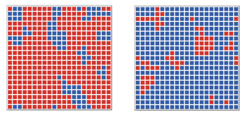
4. Spatial study of Hawk-Dove

Our population is distributed in a board and will be able to interact only with their neighbours. Some spatial Nash equilibriums, the first two figures correspond to an initial poblation and him equilibrium when $r/2-c=0$, while the another two are different islands in equilibrium when $r/2-c<0$.

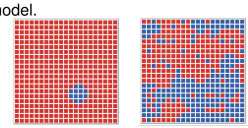




Results of spatial dynamics models:



Two examples of populations the first one not in equilibrium and the another in equilibrium, using the best neighbor profit model.



Another two examples this time using the global profits model. This time the first is in equilibrium and the second not.

References

[1] GIBBONS, R. (2011): *Un primer curso de teoría de juegos.*

[2] HOFBAUER, J. and K. SIGMUND (1998): *Evolutionary games and population dynamics.*

[3] MAYNARD SMITH, J. (1982): *Evolution and the Theory of Games.*

[4] WILENSKY, U. (1999): *NetLogo. http://ccl.northwestern.edu/netlogo/. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL.*