Melanie Fumero Padrón

Aproximación Compleja

Complex Approximation

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2018

Dirigido por
Juan Carlos Fariña Gil
Lourdes Rodríguez Mesa

Juan Carlos Fariña Gil
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Lourdes Rodríguez Mesa
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mis tutores,
porque sin ellos este trabajo no sería
el mismo.

A mi familia,
por su apoyo incondicional.

A mi primo, a Ana y a Dani.

Resumen · Abstract

Resumen

Esta memoria gira entorno al Teorema de aproximación de Runge del que presentamos dos pruebas ambas basadas en la fórmula integral de Cauchy. La primera usa el hecho de que el núcleo de Cauchy es racional y la segunda, también clásica y de carácter funcional, se basa en el Teorema de representación de Riesz. Como novedad, presentamos una curiosa relación entre el Teorema de aproximación de Runge y las ecuaciones en derivadas parciales, en este caso, la ecuación no homogénea de Cauchy-Riemann. Por la complejidad de su demostración, solo enunciamos el Teorema de Mergelyan y probamos algunas generalizaciones del mismo.

Palabras clave: *Teoremas de Runge y Mergelyan – La ecuación $\overline{\partial}$ – La transformación integral de Vitushkin – Teorema de localización de Bishop.*

Abstract

This memoir swivels around Runge´s approximation Theorem about which two proofs, both based on Cauchy's integral formula, are given. The first uses the fact that Cauchy's kernel is rational and the second, also classic and with a functional analysis taste, is founded in Riesz representation Theorem. As a novelty, we include an intriguing relation between Runge's theorem and partial differential equations, in this case, the non homogeneous Cauchy-Riemann equation. Due to the complexity of its proof, we only formulate Mergelyan's theorem and prove some generalization of this theorem.

Keywords: *Runge's and Mergelyan's Theorems – The $\overline{\partial}$-equation – Vitushkin's integral transform – Bishop's localization Theorem .*

Contenido

Introducción

Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$: sea $P(K)$ la clausura uniforme en $C(K)$ de polinomios en la variable z, $R(K)$ la clausura uniforme en $C(K)$ de las funciones racionales holomorfas en un entorno de K (sin polos en K) y sea $A(K)$ la subálgebra de $C(K)$ que consiste en aquellas funciones continuas en K que son holomorfas en su interior K^o. Las inclusiones

$$P(K) \subset R(K) \subset A(K) \subset C(K)$$

son evidentes como es el hecho de que $A(K) = C(K)$ si, y solo si, K no tiene interior.

El problema que abordamos en esta memoria es el siguiente:

Problema de aproximación: Encontrar condiciones en una función $f \in C(K)$ para que $f \in P(K)$ ó $f \in R(K)$, o decidir para qué compactos K se tiene que $P(K) = A(K)$ ó $R(K) = A(K)$.

El Teorema de Weierstrass clásico resuelve el problema cuando $n = 1$ y $K \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto del eje real; en este caso, cualquier función $f \in C(K)$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios holomorfos. De forma más general, dicho Teorema muestra que todas estas álgebras coinciden con $C(K)$ cuando $K \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

En el plano complejo ($K \subset \mathbb{C}$), muchos son los resultados conocidos. Empezando con el Teorema de Runge tenemos

• *Teorema de Runge* (1885)[1]: Si f es holomorfa en un entorno de K entonces $f \in R(K)$. Si además $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo entonces $f \in P(K)$.

• *Teorema de Hartogs-Rosenthal* (1931): Si K tiene área cero entonces $R(K) = C(K)$.

• *Teorema de Levrentiev* (1936): $P(K) = C(K)$ si, y solo si, $K^o = \emptyset$ y $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo.

[1] Curiosamente en este mismo año fue probado el Teorema de Weierstrass sobre aproximación polinómica en intervalos.

• *Teorema de Keldish* (1945): Si el complementario de K es conexo y K^o es denso en K, entonces $A(K) = P(K)$.

• *Teorema de Mergelyan* (1951): $A(K) = P(K)$ si, y solo si K tiene complementario conexo.

• *Teorema de Bishop* (1958): Si $f \in C(K)$ es tal que todo $z \in K$ tiene un entorno en el que f se puede aproximar uniformemente por funciones racionales, entonces $f \in R(K)$.

En esta memoria se lleva a cabo un estudio medianamente exhaustivo del Teorema de Runge del que presentamos dos pruebas ambas basadas en la fórmula integral de Cauchy, la primera más directa e intuitiva y la segunda de índole funcional. En cualquier caso, en todos los problemas de aproximación para funciones analíticas en el plano complejo, el problema principal se reduce a aproximar la función $z \to \frac{1}{z-a}$ en un dominio dado $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Consideremos el problema de extensión de funciones holomorfas. En general, dados dos dominios planos $\Omega \subsetneq \widetilde{\Omega}$ y función holomorfa f en Ω, en general, no existe $\tilde{f}$ holomorfa en $\widetilde{\Omega}$ tal que $f = \tilde{f}|_{\Omega}$. A este respecto [13, Remark 16.4] no es difícil construir funciones holomorfas en Ω que no admiten extensiones holomorfas a ningún domino que lo contenga propiamente: si A es un subconjunto de Ω sin puntos de acumulación pero que cada punto de $\partial\Omega$ sea un punto de acumulación de A entonces, la función holomorfa (no nula) que se anula precisamente en A (Teorema de Weierstrass), no puede extenderse a ningún dominio propio de contenga a Ω. Si $\tilde{f}$ es holomorfa en un dominio $\widetilde{\Omega}$ que contiene a Ω y extiende a f, entonces el conjunto de ceros de $\tilde{f}$ tendría puntos límite en $\widetilde{\Omega}$ que es una contradicción. Sin embargo, como veremos a lo largo de la memoria, este problema de extensión es cierto para la clase de funciones C^∞ y, en particular, está relacionada con la existencia de particiones de la unidad: para cualquier compacto $K \subset \Omega$ existe una función $\chi \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\chi \equiv 1$ en un entorno U relativamente compacto en Ω que contiene a K y $\chi \equiv 0$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Volviendo al problema de extensión de funciones holomorfas, si f es holomorfa en un entorno de un compacto $K \subset \Omega$ y χ es una función $C^\infty(\Omega)$ tal que $\chi \equiv 1$ en un entorno de K, la función χf es claramente $C^\infty(\mathbb{C})$, coincide con f cerca de K pero no es entera. Ahora, y a la vista de lo anterior, nuestra esperanza radica en perturbar χf para construir otra función $\tilde{f}$ entera tal que $\tilde{f}$ y χf, aunque no pueden coincidir, estén lo suficientemente próximas en K. Esta idea se puede llevar a buen puerto si estamos dispuestos a entrar, y así lo haremos, en el campo de la ecuaciones en derivadas parciales.

La memoria continúa con un estudio de la aproximación de funciones en $A(K)$. Comenzamos con el teorema de Mergelyan de aproximación por polinomios cuya demostración no incluimos porque escapa del alcance de este trabajo, y donde al compacto K se le exige que tenga complementario conexo. Damos también un ejemplo donde no se tiene aproximación si $\mathbb{C} \setminus K$ es no conexo, incluso sustituyendo de modo lógico los polinomios por funciones racionales. Este ejemplo es el conocido como "Queso suizo"de Alice Roth. Para concluir esta sección introducimos el operador de localización de Vituhskin que usaremos para dar una prueba del Teorema de localización de Bishop. Una de sus aplicaciones permite dar una generalización del Teorema de Mergelyan, a saber, $R(K) = A(K)$ si $\mathbb{C} \setminus K$ tiene un número finito de componentes.

Para finalizar, hemos incluido un apéndice donde se recogen las herramientas, en su mayoría aquellas que se refieren a Teoría de la Medida, que se usan a lo largo de esta memoria.

1

Aproximación compleja en compactos.

1. Preliminares.

Sea K un subconjunto compacto del plano complejo $\mathbb{C}$. A lo largo de esta memoria utilizaremos la siguiente notación,

- $C(K)$ es el espacio de las funciones complejas continuas en K.
- $P(K)$ denota el conjunto de todas las funciones que son límites uniforme en K de polinomios en z, esto es la clausura uniforme en $C(K)$ de polinomios.
- $f \in R(K)$, si f es límite uniforme en K de funciónes racionales con polos fuera de K, es decir la clausura uniforme en $C(K)$ de funciones racionales sin polos en K.
- Diremos que f es holomorfa en K y lo denotaremos por $f \in H(K)$, si existe un abierto Ω que contiene a K donde f es holomorfa ($f \in H(\Omega)$).
- $f \in A(K)$ si f es una función holomorfa en el interior de K y continua en K, es decir, $A(K) = C(K) \cap H(K^o)$.

Además para referirnos a la norma uniforme de una función f acotada en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, en algunos casos denotaremos

$$\|f\|_A = \sup_{z \in A} |f(z)|.$$

Definición 1.1. *Si X es un espacio topológico, una curva en X es una aplicación continua γ de un intervalo compacto $[a,b] \subset \mathbb{R}$ en X. Llamaremos a la imagen de γ la traza de γ y la denotaremos por $tr\{\gamma\}$. Además si el punto inicial $\gamma(a)$ coincide con su punto final $\gamma(b)$, diremos que γ es una curva cerrada. Un camino es una curva en $\mathbb{C}$ continuamente diferenciable a trozos.*

Supongamos que $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ son caminos en el plano y sea $M = tr\{\gamma_1\} \cup tr\{\gamma_2\} \cup \ldots \cup tr\{\gamma_n\}$. Cada γ_j induce un funcional lineal $\widetilde{\gamma_j}$ en el espacio vectorial $C(M)$ por la fórmula

$$\widetilde{\gamma_j}(f) = \int_{\gamma_j} f(z)\,dz. \tag{1.1}$$

Definamos

$$\widetilde{\Gamma} = \widetilde{\gamma_1} + \ldots + \widetilde{\gamma_n}. \tag{1.2}$$

Explícitamente, $\widetilde{\Gamma}(f) = \widetilde{\gamma_1}(f) + \ldots + \widetilde{\gamma_n}(f)$ para cada $f \in C(M)$. La relación (1.2) sugiere que introduzcamos una "suma formal"

$$\Gamma = \gamma_1 \mathring{+} \ldots \mathring{+} \gamma_n \tag{1.3}$$

y definamos

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \widetilde{\Gamma}(f). \tag{1.4}$$

Entonces, (1.4) es simplemente una expresión abreviada de la relación

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,dz, \quad (f \in C(M)). \tag{1.5}$$

Obsérvese que (1.5) sirve como definición del miembro de la izquierda.

Definición 1.2. *Los objetos Γ definidos de este modo se llaman cadenas, y si cada γ_j en (1.3) es un camino cerrado , entonces se dice que Γ es un ciclo. Además si Γ viene dada por (1.3) se puede hablar de la traza de la cadena y*

$$tr\{\Gamma\} = tr\{\gamma_1\} \cup \cdots \cup tr\{\gamma_n\}.$$

2. El Teorema de Runge: Una demostración constructiva.

Sabemos que si una función es holomorfa en un disco abierto, existe una sucesión de polinomios que converge uniformemente sobre compactos a dicha función. Basta considerar las sumas parciales de su serie de potencias. ¿Podríamos generalizar este resultado para un abierto cualquiera? es decir, si f es una función holomorfa en un abierto Ω ¿existirá una sucesión de polinomios que converja uniformemente a f en subconjuntos compactos de dicho abierto? La respuesta es no, como prueba el siguiente ejemplo. Consideramos $\Omega = \{z : 0 < |z| < 2\}$ y $f(z) = \frac{1}{z}$. Observemos que $f \in H(\Omega)$, supongamos ahora que existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ que converge uniformemente sobre compactos de Ω a f. En particular, si tomamos $K = \{z \in \mathbb{C} : 1 \le |z| \le \frac{3}{2}\}$ y $\epsilon = 1$, existe n_0 tal que si $n \ge n_0$, se tiene que $\sup_{z\in K} |\frac{1}{z} - p_n(z)| < 1$. Así, en $|z| = 1$, tenemos que

$$1 > \left|\frac{1}{z} - p_n(z)\right| = |1 - zp_n(z)| \tag{2.1}$$

y como $g(z) = 1 - zp_n(z)$ es una función entera, por el principio del máximo, (2.1) se verifica para todo $z \in D(0,1)$, sin embargo, para $z = 0$ en (2.1) se tiene que $1 < 1$, esta contradicción resulta al suponer que existe una sucesión de polinomios que convergen uniformemente sobre compactos a f.

En esta sección estudiaremos la posibilidad de aproximar funciones holomorfas en un entorno de un compacto K por polinomios y, más generalmente, por funciones racionales con polos fuera de K. El principal resultado es el Teorema de Runge [14] del cual daremos dos demostraciones, una que llamaremos constructiva ([1] y [2]) y otra donde utilizaremos algunos resultados de análisis funcional y que parece más directa.

Comenzaremos con una primera proposición que se puede ver como una versión de la fórmula integral de Cauchy.

Proposición 2.1. *Sea K un compacto contenido en un abierto Ω. Existen segmentos $\gamma_1 \dots \gamma_n$ contenidos en $\Omega \setminus K$, paralelos a los ejes y que forman un ciclo tales que para toda función f holomorfa en Ω se tiene que:*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, \qquad z \in K. \tag{2.2}$$

Demostración. Consideramos una malla en $\mathbb{C}$ formada por cuadrados R_j, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas y tienen una longitud δ con $0 < \delta < \frac{1}{2} dist(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Nótese que δ puede ser elegido ya que al ser K compacto, $\mathbb{C} \setminus \Omega$ cerrado y $\mathbb{C} \setminus K = \emptyset$, se tiene que $dist(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Como K es compacto, existe un número finito de cuadrados $R_1, \dots, R_m$ que intersecan a K y además están contenidos en Ω ya que la diagonal de los cuadrados es menor que $\sqrt{2}\delta$. Para $j = 1, .., m$ denotamos por ∂R_j a la frontera del cuadrado R_j, orientada positivamente. Ahora llamamos $\gamma_1 \dots \gamma_n$ a los segmentos, con sus orientaciones, que forman parte de un solo R_j , $1 \le j \le m$. Entonces, para toda función φ continua en $\cup_{j=1}^{m} \partial R_j$ se verifica que:

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\partial R_j} \varphi(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \varphi(z) dz, \tag{2.3}$$

puesto que si R_i y R_j tienen un lado común, $R_i \cap R_j = \{\sigma_i\} = \{\sigma_j\}$, donde σ_i y σ_j denotan al mismo segmento y ya que se recorren en sentidos opuestos, se tiene que:

$$\int_{\sigma_i} \varphi(z) dz + \int_{\sigma_j} \varphi(z) dz = 0.$$

Es claro que $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ están contenidos en $\Omega \setminus K$, pues si algún γ_k intersecase a K, existirían dos rectángulos R_i y R_j que lo tendrían como lado común, lo cual es imposible por construcción de los γ_k, $1 \le k \le n$.

Probaremos ahora que la identidad (2.2) se verifica para todo $z \in K \setminus \cup_{j=1}^m \partial R_j$. Fijamos $z \in K \setminus \cup_{j=1}^m \partial R_j$ y consideramos $\varphi(\omega) = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{f(\omega)}{\omega - z}$, $\omega \in \cup_{j=1}^m \partial R_j$, que es una función continua en $\cup_{j=1}^m \partial R_j$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\cup_{j=1}^m \partial R_j} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R_{j_0}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = f(z)$$

donde la última igualdad se obtiene al aplicar el teorema de Cauchy, y siendo R_{j_0} el cuadrado al que pertenece z. Por tanto, de la identidad (2.3) tenemos que,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\cup_{j=1}^m \partial R_j} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \varphi(\omega) d\omega = f(z)$$

por lo que (2.2) se verifica para todo $z \in K \setminus \cup_{j=1}^m \partial R_j$.

Veamos ahora que para $1 \leq k \leq n$, $g(z) = \displaystyle\int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega$ es una función continua en K. Sean $z_0 \in K$ y $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\beta > 0$ tal que si $z \in D(z_0, \beta)$ entonces, $|g(z) - g(z_0)| < \epsilon$. En efecto,

$$\begin{aligned}\left|g(z) - g(z_0)\right| &= \left|\int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z_0} d\omega\right| = \left|\int_{\gamma_k} f(\omega)\left(\frac{1}{\omega - z} - \frac{1}{\omega - z_0}\right) d\omega\right| \\ &\leq \int_{\gamma_k} |f(\omega)| \frac{|z - z_0|}{|\omega - z||\omega - z_0|} |d\omega|\end{aligned}$$

Tomamos $0 < \eta < \frac{1}{4} dist(\gamma_k, K)$, entonces, $|\omega - z_0|$ y $|\omega - z|$ son mayores que η cuando $z_0 \in K$, $z \in D(z_0, \beta), \omega \in \gamma_k$. Por otro lado, sabemos que $f \in C(\Omega)$ y en particular, en la traza de γ_k, que es compacta. Por tanto, existe $M > 0$ tal que $|f(\omega)| \leq M$, $\omega \in tr(\gamma_k)$. Eligiendo $\beta = \text{mín}\{\frac{1}{4} dist(\gamma_k, K), \frac{\epsilon \eta^2}{long(\gamma_k)}\}$ se tiene que,

$$\int_{\gamma_k} |f(\omega)| \frac{|z - z_0|}{|\omega - z||\omega - z_0|} |d\omega| \leq \frac{M}{\eta^2} long(\gamma_k)|z - z_0| < \epsilon.$$

Luego, la función g es continua en K y como $K \setminus \cup_{j=1}^m \partial R_j$ es denso en K, resulta que

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, \qquad z \in K.$$

□

La siguiente proposición proporciona un primer resultado de aproximación por funciones racionales para funciones definidas por la integral de Cauchy, construidas a partir de las sumas de Riemann que definen dicha integral.

Proposición 2.2. *Sean γ un camino contenido en el plano y K un conjunto compacto tal que $K \cap tr\{\gamma\} = \emptyset$. Si f es una función continua en la traza de γ y $\epsilon > 0$ entonces, existe una función racional $R(z)$ con todos sus polos en la traza de γ tal que*

$$\left| \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - R(z) \right| < \epsilon, \qquad z \in K.$$

Demostración. Sea $f \in C(tr\{\gamma\})$ y consideramos que γ está parametrizada en $[0,1]$. Como por hipótesis, $K \cap tr\{\gamma\} = \emptyset$ existe un número r verificando $0 < r < dist(K, tr\{\gamma\})$. Teniendo en cuenta que $|\gamma(t) - z| > r$, para $x \in [0,1]$ y $z \in K$ y que como K y $tr\{\gamma\}$ son compactos y $f \in C(tr\{\gamma\})$, existe una constante $C > 0$ tal que $|z| \leq C$ para $z \in K$, $|\gamma(t)| \leq C$ y $|f(\gamma(t))| \leq C$ para $t \in [0,1]$, se tiene que

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(s))}{\gamma(s) - z} \right| = \frac{|f(\gamma(t))\gamma(s) - f(\gamma(t))z - f(\gamma(s))\gamma(t) + f(\gamma(s))z|}{|\gamma(t) - z||\gamma(s) - z|}$$

$$\leq \frac{1}{r^2}[\left|f(\gamma(t))\right||\gamma(s) - \gamma(t)| + |\gamma(t)||f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|$$

$$+ |z||f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|]$$

$$\leq \frac{2C}{r^2}\left[|\gamma(s) - \gamma(t)| + |f(\gamma(s)) - f(\gamma(t))|\right], \qquad s, t \in [0,1], z \in K.$$

Ahora, como γ y $f \circ \gamma$ son funciones continuas en $[0,1]$, son uniformemente continuas, por lo que dado $\epsilon > 0$, existe una partición $P = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1\}$ tal que para $j = 1, ..., n$

$$\left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} - \frac{f(\gamma(t_j))}{\gamma(t_j) - z} \right| \leq \frac{\epsilon}{long(\gamma)}, \qquad t_{j-1} \leq t \leq t_j,\ z \in K.$$

Definimos $R(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\gamma(t_{j-1}))[\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})]}{\gamma(t_{j-1}) - z}, z \in K$, una función racional cuyos polos son $\gamma(t_{j-1})$ con $j = 1, ..., n$ pertenecientes a la traza de γ. Puesto que $\int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt = \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})$ se tiene que

$$\left| \int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - R(z) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)dt - \sum_{j=1}^{n} \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1}) - z} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt \right|$$

$$= \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1})-z} \right) \gamma'(t)dt \right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left| \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t)-z} - \frac{f(\gamma(t_{j-1}))}{\gamma(t_{j-1})-z} \right| |\gamma'(t)|dt$$

$$\leq \frac{\epsilon}{long(\gamma)} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \gamma'(t)dt \leq \epsilon.$$

□

Como consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.1 y 2.2 se puede enunciar el siguiente resultado.

Proposición 2.3. *Sea K un subconjunto compacto de un abierto Ω. Entonces, existe un ciclo formado por segmentos $\gamma_1 ... \gamma_n$ en $\Omega \setminus K$ tal que para toda función holomorfa en Ω y para cada $\epsilon > 0$, existe una función racional R con polos en los segmentos γ_k, $k = 1, .., n$, que verifica que*

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon, \qquad z \in K.$$

Demostración. Sean $f \in H(\Omega)$ y $\epsilon > 0$, por la Proposición 2.1 existen $\gamma_1, ..., \gamma_n$ segmentos contenidos en $\Omega \setminus K$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, \qquad z \in K.$$

En virtud de la Proposición 2.2, para cada $k = 1, ..., n$ se encuentra una función racional R_k con polos en la traza de γ_k de manera que $\left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - R_k(z) \right| < \epsilon / n$ para $z \in K$. Considerando $R(z) = \sum_{k=1}^{n} R_k$, $z \in K$ se llega a que

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon, \qquad z \in K.$$

□

Esta última proposición establece la aproximación de funciones holomorfas en Ω por funciones racionales cuyos polos se encuentran en Ω, a continuación, vamos a demostrar el método conocido por desplazamiento de polos que nos permitirá considerar funciones racionales con polos fuera de Ω. Puesto que cualquier función racional puede escribirse como $R(z) = P_0(z) + \sum_{i=1}^{n} P(\frac{1}{z-a_i})$ siendo $P_0, ..., P_n$ polinomios y $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, ..., n$ basta considerar la siguiente proposición para el caso $\frac{1}{z-a}$.

Proposición 2.4. *Sea K un conjunto compacto del plano.*

(i) Si V es una componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ y $a, b \in V$, entonces, la función $\frac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente sobre K por polinomios en $\frac{1}{z-b}$.
(ii) Si V_∞ es la componente no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ y $a \in V_\infty$, la función $\frac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios.
(iii) Recíprocamente, si $a \notin K$ y $\frac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente por polinomios en K, se tiene que $a \in V_\infty$.

Demostración. En primer lugar, probaremos el apartado (i). Sean V una componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ y $b \in V$ y consideremos el conjunto

$$A = \left\{ a \in V : \frac{1}{z-a} \text{ es límite uniforme en K de polinomios en } \frac{1}{z-b} \right\}.$$

Queremos ver que $A = V$. Para ello utilizaremos un argumento de conexidad: probaremos que A es un conjunto abierto y cerrado en V conexo y que A es no vacío (pues claramente $b \in A$).

Veamos que A es cerrado en V. Sean $a \in V$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ tal que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a a. Se tiene que $dist(a_n, K) \geq r$, $n \in \mathbb{N}$ y $dist(a, K) \geq r$, para algún $r > 0$. Así,

$$\left| \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a_n} \right| = \frac{|a-a_n|}{|z-a||z-a_n|} \leq \frac{|a-a_n|}{r^2}, \qquad z \in K, n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $\left(\frac{1}{z-a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\frac{1}{z-a}$ en K. Por definición de convergencia uniforme, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z\in K} \left| \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-a_n} \right| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad n \geq n_0.$$

Como $a_{n_0} \in A$ existe $\left\{P_n\left(\frac{1}{z-b}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\frac{1}{z-a_{n_0}}$ es límite uniforme de $P_n\left(\frac{1}{z-b}\right)$, por lo que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z\in K} \left| \frac{1}{z-a_{n_0}} - P_n\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad n \geq n_1.$$

Eligiendo $N = \text{máx}\{n_0, n_1\}$, se tiene, por desigualdad triangular, que si $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{z-a} - P_n\left(\frac{1}{z-b}\right) \right| < \epsilon, \qquad z \in K.$$

Luego, $a \in A$ y A es cerrado en V. Veamos ahora que A es un abierto en V. Sean $a \in A$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset V$, basta probar que para todo $\omega \in D(a,r)$ se tiene que $\omega \in A$. Sea $\omega \in D(a,r)$. Podemos escribir

$$\frac{1}{z-\omega} = \frac{1}{z-a-(\omega-a)} = \frac{1}{(z-a)(1-\frac{\omega-a}{z-a})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega-a)^n}{(z-a)^{n+1}}, \qquad z \in K.$$

Esta serie es uniformemente convergente en K pues $\left|\frac{\omega-a}{z-a}\right| < \frac{r}{|z-a|} < 1$, ya que $\overline{D(a,r)} \subset V$ y $z \notin V$. Por tanto, $\frac{1}{z-\omega}$ se puede aproximar uniformemente sobre K por $P_n\left(\frac{1}{z-a}\right)$, que a su vez como $a \in A$, se puede aproximar uniformemente en K por $P_n\left(\frac{1}{z-b}\right)$. Por transitividad como en el caso anterior, se concluye que $w \in A$.

Para probar (*ii*) tomamos $M = \max\{|z| : z \in K\}$ y $b \in \mathbb{C}$ de manera que $|b| > M+1$, así $b \in V_\infty$. Ahora,

$$\frac{1}{z-b} = \frac{1}{b(\frac{z}{b}-1)} = \frac{-1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{b}\right)^n, \qquad z \in K.$$

Esta serie es uniformemente convergente en K pues $\left|\frac{z}{b}\right| \leq \frac{M}{M+1} < 1$, por lo que $\frac{1}{z-b}$ se puede aproximar uniformemente en K por polinomios. Como $a \in V_\infty$, por el apartado anterior, $\frac{1}{z-a}$ se puede aproximar uniformemente en K por $P_n\left(\frac{1}{z-b}\right)$ y por transitividad, $\frac{1}{z-a}$ se aproxima uniformemente sobre K por polinomios.

Por último, para (*iii*) consideramos $a \notin K$ y $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios que converge uniformemente en K a $\frac{1}{z-a}$. Procediendo por reducción al absurdo vamos a suponer que $a \in V$, una componente acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Es claro que $\partial V \subset K$, por lo que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\frac{1}{z-a}$ en ∂V. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ y para n suficientemente grande, se tiene que

$$\left|P_n(z) - \frac{1}{z-a}\right| < \epsilon, \qquad z \in \partial V.$$

Tomando $\epsilon < \frac{1}{2diam(\overline{V})}$ se sigue que $|(z-a)P_n(z)-1| < \epsilon|z-a| < \frac{1}{2}, z \in \partial V$ y por el principio del máximo,

$$|(z-a)P_n(z)-1| \leq \frac{1}{2}, \qquad z \in \overline{V}.$$

Esta desigualdad es imposible si $z = a \in V$. Por tanto, $a \in V_\infty$.

$\square$

Estamos en condiciones de probar el Teorema de Runge, principal objetivo de esta sección.

Teorema 2.5 (Teorema de Runge). *Sean K un conjunto compacto del plano y $E = \{\alpha_j\}$ un conjunto que contiene un punto en cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Si Ω es un abierto que contiene a K y $f \in H(\Omega)$ entonces, dado $\epsilon > 0$ existe una función racional R_E con polos en el conjunto E tal que*

$$|f(z) - R_E(z)| < \epsilon, \qquad z \in K.$$

Podemos tomar el ∞ como el punto preasignado en la componente conexa no acotada, ya que es el caso más interesante.

Demostración. Sean f una función holomorfa en Ω, un abierto que contiene a K, y $\epsilon > 0$. Por la Proposición 2.1 existe un ciclo $\Gamma \subset \Omega \setminus K$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega, \qquad \forall z \in K$$

y una función racional R con polos en la traza de Γ que verifica

$$|f(z) - R(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad z \in K. \tag{2.4}$$

La función $R(z)$ se puede poner como suma de polinomios en $\frac{1}{z-c_j}$, $c_j \notin K$. Así,

$$R(z) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} S_i\left(\frac{1}{z-a_j}\right)}_{R_1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{M} Q_j\left(\frac{1}{z-b_j}\right)}_{R_2}$$

donde $a_i \in V_\infty$, $i = 1,\ldots,N$ y $b_j, j = 1,\ldots,M$, pertenece a las componentes conexas acotadas de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$.

Veamos que podemos aproximar la función R por funciones racionales con polos en E. Por la Proposición 2.4 (*ii*), para cada S_i, $i = 1,\ldots,N$, existe un polinomio P_i que la aproxima uniformemente en K, tomando $P = \sum_{i=1}^{N} P_i$ se tiene que

$$|R_1(z) - P(z)| < \epsilon/4, \qquad z \in K.$$

Para aproximar uniformente R_2 será suficiente con demostrar que $\frac{1}{z-b}$, $b \notin V_\infty, b \notin K$ se puede aproximar uniformemente en K por funciones racionales con polos en E. Sea V la componente acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ que contiene a b. Por hipótesis, existe $\alpha_{j_0} \in V \cap E$. Aplicando la Proposición 2.4 (*i*) se tiene que $\frac{1}{z-b}$ se puede aproximar uniformemente sobre K por polinomios en $\frac{1}{z-\alpha_{j_0}}$. Como R_2 tiene todos sus polos en $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, podemos encontrar un función racional Q con todos sus polos en E verificando que

$$|R_2(z) - Q(z)| < \epsilon/4, \qquad z \in K.$$

Así, para $z \in K$ se tiene que $|f(z) - R_E(z)| < \epsilon$ siendo $R_E = P + Q$.

□

A continuación establecemos un resultado topológico que será de utilidad en lo que sigue.

Proposición 2.6. *Si Ω es un abierto en $\mathbb{C}$, existe una sucesión $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos compactos de Ω tal que $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ que además verifican:*

(i) $K_n \subset (K_{n+1})^o$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_n$, para $n \geq n_0$.
(iii) Cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, $n \in \mathbb{N}$, contiene una componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$K_n = \{z : |z| \leq n\} \cap \left\{ z : dist(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Obsérvese que K_n es compacto ya que K_n es cerrado por ser intersección de cerrados y además es acotado por estar contenido en el disco cerrado $\overline{D(0,n)}$.

Veamos que $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Es claro que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $z \in K_n$, como $dist(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ entonces, $z \in \Omega$.

Por otro lado, si $z \in \Omega$, como Ω es abierto, existe $r > 0$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$ y por tanto, $dist(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > r > \frac{1}{M_0}$, para un cierto $M_0 \in \mathbb{N}$. Además, $z \in \overline{D(0, M_1)}$, para algún $M_1 \in \mathbb{N}$. Tomando $n_0 = \max\{M_0, M_1\}$ se concluye que $z \in K_{n_0}$.

En primer lugar veremos que (i) se cumple pues

$$K_n \subset \{z : |z| < n+1\} \cap \left\{ z : dist(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > \frac{1}{n+1} \right\} = (K_{n+1})^o.$$

Para probar (ii) consideramos K un compacto de Ω. Como $\{(K_n)^o\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por abiertos de K, se tiene que $K \subset \bigcup_{i=1}^N (K_{n_i})^o \subset \bigcup_{i=1}^N K_{n_i}$, para cierto $N \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta el apartado (i) basta elegir $n_0 = \max\{n_1, ..., n_N\}$.

Finalmente, para demostrar (iii) denotaremos por V_∞ a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$. Sabemos que $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$. En particular, $V_\infty \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, por tanto, V_∞ que es conexo, estará contenida en la componente no acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, por maximalidad. Ahora consideramos V una componente conexa acotada de $\mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ y elegimos $z \in V$ tal que $dist(z, \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega) < \frac{1}{n}$. Óbservese que z puede ser elegido pues $z \notin K_n$. Por definición de distancia, existe $\omega \in \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tal que $|z - \omega| < \frac{1}{n}$. La bola $B(\omega, \frac{1}{n}) \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$ ya que de existir $y \in B(\omega, \frac{1}{n}) \cap K_n$ se produciría una contradicción; además, $B(\omega, \frac{1}{n})$ es conexo, por tanto, $B(\omega, \frac{1}{n}) \subset V$. Denotamos por V_1 a la componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ que contiene a ω. Como $\omega \in V \cap V_1$ y $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K_n$, por maximalidad se tiene que $V_1 \subset V$.

□

Corolario 2.7. *Consideramos Ω un abierto en $\mathbb{C}$, $E \subset \mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ tal que E interseca a cada componente de $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ y denotamos por $R(\Omega, E)$ al conjunto de funciones racionales cuyos polos están en E. Entonces, para cada función f holomorfa en Ω, existe una sucesión $\{R_n\}_{n=1}^\infty$ en $R(\Omega, E)$ tal que*

$$f = \lim_{n\to\infty} R_n.$$

donde la convergencia se entiende uniformemente sobre compactos.

Demostración. Sean $f \in H(\Omega)$ y $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de compactos que verifica la Proposición 2.6. En virtud del teorema de Runge (Teorema 2.5), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una función racional $R_n \in R(\Omega, E)$ tal que

$$|f(z) - R_n(z)| < \frac{1}{n}, \qquad z \in K_n. \tag{2.5}$$

Veamos que la sucesión $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en compactos. Sea K un compacto en Ω y consideramos $\epsilon > 0$ y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_1} < \epsilon$. Por la Proposición 2.6 (*ii*) existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{n_2}$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ por (2.5) tenemos que para $n \geq n_0$ se verifica

$$|f(z) - R_n(z)| < \frac{1}{n} < \epsilon, \qquad z \in K.$$

□

Otra consecuencia directa del Teorema de Runge es la siguiente aplicación.

Corolario 2.8. *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y K un subconjunto compacto de Ω tal que cualquier componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ interseca a $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Entonces, cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones holomorfas en Ω.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema de Runge (Teorema 2.5) considerando el conjunto E que aparece en el enunciado del teorema de modo que haya un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ que a su vez esté en $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

□

Definición 2.9. *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $A \subset \Omega$. Decimos que A es relativamente compacto en Ω si existe un compacto B tal que $A \subset B \subset \Omega$.*

Lema 2.10. *Sea K un compacto contenido en Ω un abierto de $\mathbb{C}$. Entonces,*

(i) Para toda componente conexa V de $\Omega \setminus K$ se tiene que $\Omega \cap \partial V$ está contenido en K. Si además, V es relativamente compacto en Ω entonces, para toda función $f \in H(\Omega)$, $||f||_V \leq ||f||_K$.

(ii) Cualquier componente conexa V_0 de $\mathbb{C} \setminus K$ contenida en Ω es una componente conexa de $\Omega \setminus K$. Si además, V_0 es acotada entonces, V_0 es relativamente compacta en Ω.

Demostración. Sea V una componente conexa de $\Omega \setminus K$ y supongamos que existe $a \in \Omega \cap \partial V$, $a \in \mathbb{C} \setminus K$. Como $a \in \Omega \setminus K$ y $\Omega \setminus K$ es abierto, existe un disco D_a centrado en a tal que $D_a \subset \Omega \setminus K$. Además, como $a \in \partial V$ se tiene que $D_a \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, por maximalidad, $D_a \subset V$ y a sería un punto interior de V, esto contradice al hecho de que $a \in \partial V$. Supongamos ahora que V es relativamente compacto en Ω entonces,

$\Omega \cap \partial V = \partial V$ que por la primera parte, $\partial V \subset K$. Aplicando el principio del módulo máximo, $||f||_V \leq ||f||_K$, $f \in H(\Omega)$. Así (i) queda demostrado.

Para probar el apartado (ii) consideramos V_0 una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$ contenida en Ω y V_1 una componente conexa de $\Omega \setminus K$ tal que $V_0 \subset V_1$. Sabemos que $V_1 \subset \Omega \setminus K \subset \mathbb{C} \setminus K$, además $V_1 \subset V_0 \cup V_1 \subset V_0$. Por otro lado, $V_0 \cup V_1$ es un conexo en $\mathbb{C} \setminus K$ contenido en él, por tanto, $V_1 \subset V_0$. Así V_0 es una componente de $\Omega \setminus K$. En particular, si V_0 está acotado, entonces $\overline{V_0} = V_0 \cup \partial V_0$ es compacto. Aplicando el apartado anterior siendo $\Omega = \mathbb{C}$ se tiene que $\mathbb{C} \cap \partial V_0 = \partial V_0 \subset K \subset \Omega$. Luego, V_0 es relativamente compacto en Ω, ya que $V_0 \subset \overline{V_0} \subset \Omega$.

□

El siguiente teorema muestra una versión generalizada del Teorema de Runge.

Teorema 2.11. *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $K \subset \Omega$ un compacto. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(i) Ninguna componente de $\Omega \setminus K$ es relativamente compacta en Ω.
(ii) Toda componente acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ interseca a $\mathbb{C} \setminus \Omega$.
(iii) Cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar por funciones racionales con polos fuera de Ω.
(iv) Cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar por funciones holomorfas en Ω.
(v) Para todo $a \in \Omega \setminus K$, existe una función $h \in H(\Omega)$ tal que $|h(a)| > ||h||_K$.

Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que existe V_0, una componente acotada de $\mathbb{C} \setminus K$ que no interseca a $\mathbb{C} \setminus \Omega$, entonces $V_0 \subset \Omega$. Por el Lema 2.10 (ii), V_0 es una componente de $\Omega \setminus K$, que además, por ser acotada, es relativamente compacta en Ω. Por tanto, se contradice la hipótesis.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se prueba aplicando el Corolario 2.8.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Basta observar que todas las funciones racionales con polos fuera de Ω son funciones holomorfas en Ω.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Sean V_0 una componente conexa de $\Omega \setminus K$ relativamente compacta en Ω y $p \in V_0$. Consideremos $f(z) = \frac{1}{z-p}$, $z \neq p$, que es holomorfa en K. Por (iv), dado $\epsilon = 1/diamK$, existe una función $g \in H(\Omega)$ tal que $|f(z) - g(z)| < \frac{1}{diamK}$, $z \in K$. Puesto que $diamK > |z-p|$, $z \in K$, se sigue que

$$\left| \frac{1}{z-p} - g(z) \right| = \frac{|1-(z-p)g(z)|}{|z-p|} < \frac{1}{diamK} < \frac{1}{|z-p|}, \qquad z \in K.$$

La función $h(z) = 1-(z-p)g(z)$, $z \in \Omega$, es holomorfa en Ω, y en particular en V_0. Además,

$$|h(z)| = |1-(z-p)g(z)| < 1, \qquad z \in K. \tag{2.6}$$

Como $\partial V_0 \subset K$ (Lema 2.10), por el principio del módulo máximo, la desigualdad 2.6 se verifica para todo $z \in V_0$. Sin embargo, si tomamos $z = p$, llegamos a que $1 < 1$. Esta contradicción viene de suponer que en $\Omega \setminus K$ hay alguna componente conexa relativamente compacta en Ω.

$(i) \Rightarrow (v)$ Sea $a \in \Omega \setminus K$. Las componentes conexas de $\Omega \setminus K$ y $\Omega \setminus (K \cup \{a\})$ son iguales, salvo la componente de $\Omega \setminus K$ que contiene a a. Por otro lado, si a una componente conexa no relativamente compacta le quitamos un punto, esta nueva componente sigue siendo una componente conexa no relativamente compacta. Por tanto, (i) se verifica para $K \cup \{a\}$, y por implicaciones anteriores, (iv) también. De este modo, dado U entorno de K en Ω y $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y $D(a,r) \cap U = \emptyset$, la función

$$f(z) = \begin{cases} 0, & z \in U \\ 1, & z \in D(a,r) \end{cases}$$

es holomorfa en un entorno de $K \cup \{a\}$ y se puede aproximar uniformemente en $K \cup \{a\}$ por funciones holomorfas en Ω. En particular, existe una función $h \in H(\Omega)$ tal que

$$|f(z) - h(z)| < \frac{1}{2}, \qquad z \in K \cup \{a\}.$$

Por tanto,

$$\begin{cases} ||h||_K < \frac{1}{2} \\ |h(a) - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow |h(a)| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$(v) \Rightarrow (i)$ Sea V una componente conexa de $\Omega \setminus K$ relativamente compacta en Ω. Por el Lema 2.10 (i), se tiene que $||f||_V \leq ||f||_K$, $f \in H(\Omega)$, que es una contradicción ya que por (v), $||f||_K < ||f||_V$.

□

Definición 2.12. *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. La envolvente polinomialmente convexa de K denotada por $\hat{K}$ se define como el conjunto de todos los puntos ω tal que para todo polinomio P se tiene que $|P(\omega)| \leq ||P||_K$. Entonces,*

$$\hat{K} = \{\omega \in \mathbb{C} : |P(\omega)| \leq ||P||_K, \ P \text{ polinomios}\}.$$

Observación 2.13. $\hat{K}_\Omega = \{K \cup \text{componentes relativamente compactas de } \Omega \setminus K \text{ en } \Omega\}$

Los enunciados del teorema anterior (Teorema 2.11) son equivalentes al hecho de que $K = \hat{K}_\Omega$, lo que implica que Ω y K tengan los mismos “ agujeros".

Observación 2.14. Si $\Omega = \mathbb{C}$ y $K = \hat{K}_\Omega$ entonces, K no tiene agujeros, es decir, $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, lo cual implica que $\mathbb{C} \setminus K$ no tiene componentes acotadas.

2.1. Sucesiones de polinomios que convergen puntualmente pero no compactamente

Es fácil construir sucesiones de funciones continuas que convergen puntualmente a funciones que tienen puntos de discontinuidad. Pero resulta mas difícil encontrar sucesiones de funciones holomorfas que converjan puntualmente a funciones que no sean holomorfas. A este respecto cabe mencionar el Teorema de Osgood [12, sección 7.1.5*] que afirma que si una sucesión de funciones holomorfas converge puntualmente en un abierto Ω, entonces lo hace uniformemente en compactos de algún abierto denso $D \subset \Omega$. Como consecuencia del Teorema de Runge podemos enunciar el siguiente resultado

Proposición 2.15 ([12]). *Sea* $\mathbb{R}^+ = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\right\}$. *Existe una sucesión de polinomios* $\left\{p_n\right\}$ *con las siguientes propiedades*

(*a*) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(0) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(z) = 0$ *para todo* $z \neq 0$.
(*b*) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^{(k}(z) = 0$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y todo* $k \geq 1$.
(*c*) *Para cada* $k \geq 1$ *la sucesión* $\left\{p_n^{(k}\right\}$ *converge uniformemente en compactos de* $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, *pero ninguna de ellas lo hace en algún entorno de cualquier punto de* $\mathbb{R}^+$.

Demostración. Sea $K_n = \{0\} \cup [1/n, n] \cup L_n$ donde $L_n = \left\{z \in \overline{\Delta(0,n)} \,/\, \mathrm{dist}\left(z, \mathbb{R}^+\right) \geq 1/n\right\}$, $n \geq 1$. K_n es compacto y $\mathbb{C} \setminus K_n$ conexo (figura 1.1). Ahora añadimos rectángulos R_n y S_n alrededor de 0 y del intervalo $[1/n, n]$ respectivamente de tal forma que

- R_n, S_n y L_{n+1} sean disjuntos dos a dos,
- $K_n \subset \mathring{E}_n$ donde $E_n := R_n \cup S_n \cup L_{n+1}$ y $\mathbb{C} \setminus E_n$ sea conexo.

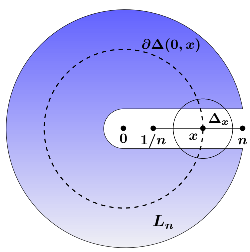


Figura 1.1:

Para cada $n \geq 1$, la función

$$g_n(z) = \begin{cases} 0, \text{ si } z \in E_n \setminus R_n \\ 1, \text{ si } z \in R_n \end{cases}$$

es holomorfa en un entorno de E_n. Así, por el Teorema de Runge, existe un polinomio p_n tal que

$$\|p_n - g_n\|_{E_n} < 1/n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Puesto que g_n es constante en $\mathring{E}_n$ podemos incluso elegir los polinomios p_n que también satisfagan[1]

$$\|p_n^{(k}\|_{K_n} < 1/n, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \; n = 1, 2, \ldots \tag{2.8}$$

Puesto que $\bigcup K_n = \mathbb{C}$, (a) y (b) siguen inmediatamente de (2.7) y (2.8).

Por construcción las sucesiones $\{p_n^{(k}\}$ convergen uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ y, ciertamente, $\{p_n\}$ no lo hace en ningún disco centrado en el origen. Además, y esto prueba (c), si $\{p_n^{(k}\}$ convergiera en algún disco Δ_x centrado en algún $x > 0$, entonces convergería en $\partial\Delta(0, x)$ (la frontera del disco centrado en 0 y radio x). Por el principio del máximo la convergencia tendría también lugar en todo el disco $\Delta(0, x)$ que es imposible. □

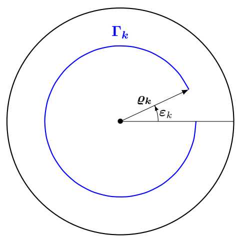


Figura 1.2: Arcos circulares

2.2. Conjuntos límite de funciones holomorfas

Sea f una función holomorfa en el disco unidad Δ y $\zeta \in \mathbb{T} = \partial\Delta$. El conjunto radial límite de f en ζ consiste en aquellos $w \in \mathbb{C}$ para los que existe una sucesión de radios $0 < r_j < 1$ tales que $f(r_j\zeta) \to w$, es decir, la adherencia de la imagen bajo f del radio que termina en ζ. Como consecuencia del Teorema de Runge tenemos el siguiente [7]

Teorema 2.16. *Existen funciones holomorfas en el disco unidad cuyo conjunto radial límite es todo el plano complejo en cualquier punto $\zeta \in \mathbb{T}$.*

[1] Esto sigue inmediatamente de la estimaciones de Cauchy en subconjuntos compactos [13, theorem 10.26] [9, teorema 1.10].

Demostración. Sea $\varrho_k \nearrow 1^-$ una sucesión creciente de números positivos con límite 1 y $\varepsilon_k \searrow 0^+$ otra decreciente de números positivos con límite 0. Consideremos los arcos circulares $\Gamma_k = \left\{\varrho_k e^{i\theta} \,/\, \varepsilon_k \leq \theta \leq 2\pi\right\}$ (figura 1.2) y un conjunto $S = \{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ numerable denso.

Así, para cualquier $w \in \mathbb{C}$ y todo $\zeta \in \mathbb{T}$ existe una sucesión k_j tal que $\varrho_{k_j}\zeta \in \Gamma_{k_j}$ y $w_{k_j} \to w$. La estrategia ahora consiste en usar el Teorema de Runge para aproximar la función que es constante w_k en Γ_k por una función f analítica en todo en disco. Esto lo haremos por inducción como sigue: sea f_1 la función constante w_1. Si ya hemos construido la función f_{k-1} observemos que el conjunto $\Gamma_k \cup \Delta(0, \varrho_{k-1}) \subset \mathbb{C}$ es compacto y tiene complementario conexo y, por el Teorema de Runge, podemos encontrar un polinomio f_m tal que $\left|f_m(z) - f_{m-1}(z)\right| < 1/2^m$ si $|z| \leq \varrho_{m-1}$ mientras que $\left|f_m(z) - w_m\right| < 1/2^m$ para $z \in \Gamma_m$. Consecuentemente, la serie $\sum \left(f_n - f_{n-1}\right)$ converge uniformemente en $|z| \leq \varrho_{m-1}$ para todo m y así, uniformemente en compactos de Δ a una función $f \in H(\Delta)$

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} f_m(z) = f_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(f_n(z) - f_{n-1}(z)\right).$$

Puesto que $f = f_m + \sum_{n>m} \left(f_n - f_{n-1}\right)$ podemos estimar

$$\left|f(z) - w_m\right| \leq \left|f_m(z) - w_m\right| + \sum_{n>m} \left|f_n(z) - f_{n-1}(z)\right| < 2^{-m} + \sum_{n>m} 2^{-n} = 2^{1-m}$$

para $z \in \Gamma_m$. Esto implica que

$$\lim_{j\to\infty} f\left(\varrho_{k_j}\zeta\right) = \lim_{j\to\infty} w_{k_j} = w$$

y cualquier complejo w pertenece al conjunto radial límite de f en ζ. □

3. El Teorema de Runge: Una demostración funcional.

En esta sección daremos una prueba distinta del Teorema de Runge (Teorema 2.5) basada en ciertos resultados del análisis funcional como pueden ser el teorema de representación de Riesz o el teorema de Hahn-Banach.

Teorema 3.1 (Teorema de Runge). *Sean Ω un abierto en $\mathbb{C}$ y $K \subset \Omega$ un compacto. Consideramos $E \subset \mathbb{C}$ formado con al menos un punto de cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Si $f \in H(\Omega)$, entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe una función racional $R(z)$ con polos en E tal que*

$$|f(z) - R(z)| < \epsilon, \qquad z \in K.$$

Demostración. Denotamos por M al subespacio de $C(K)$ formado por las restricciones a K de funciones racionales con polos en E.

Sea $f \in H(\Omega)$. El teorema afirma que $f \in \overline{M}$. En virtud del Corolario A.4.2 tenemos que ver que todo funcional acotado que se anula en M también se anula en f y además por el Teorema de Representación de Riesz (Teorema A.2.3), debemos probar que si μ es una medida de Borel compleja en K tal que

$$\int_K R d\mu = 0, \qquad R \in M, \tag{3.1}$$

entonces $\int_K f d\mu = 0$.

Sea μ una medida compleja verificando (3.1) y Γ un ciclo en $\Omega \setminus K$, como el de la Proposición 2.1. Podemos escribir f como

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\zeta} dz, \qquad \zeta \in K.$$

Aplicando el Teorema de Fubini (Teorema A.3.3) obtenemos

$$\int_K f(\zeta) d\mu(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left(\int_K \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \right) f(z) dz.$$

Denotamos

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z}, \;\; z \in \mathbb{C}_\infty \setminus K,$$

Veamos que $h \equiv 0$ en $\mathbb{C}_\infty \setminus K$, lo que permite concluir que $\int_K f d\mu = 0$, pues $tr\{\Gamma\} \subset \Omega \setminus K \subset \mathbb{C}_\infty \setminus K$. Para ello, basta probar que $h \equiv 0$ en cada componente conex de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Fijamos $\alpha \in E$ y V la componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ que contiene a α y tomamos $r > 0$ tal que $D(\alpha, r) \subset V$.

Por el Teorema de Identidad de funciones holomorfas es suficiente establecer que $h(z) = 0$, $z \in D(\alpha, r)$ para un cierto $r > 0$.

Sea $z \in D(\alpha, r)$. En primer lugar consideramos $\alpha \neq \infty$. En este caso,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha - z + \alpha} = \frac{1}{(\zeta - \alpha)(1 - \frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}, \;\; \zeta \in K,$$

donde en la última igualdad se ha tenido en cuenta que $|z-\alpha| < |\zeta - \alpha|$, $\zeta \in K$. La serie converge uniformemente en K, es decir, la sucesión de sumas parciales,

$$R_N(\zeta) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(z-\alpha)^n}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}, \qquad \zeta \in K,$$

es uniformemente convergente en K. Además, $\{R_N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset M$. Así,

$$h(z) = \int_K \frac{d\mu(\zeta)}{\zeta - z} = \int_K \lim_{N\to\infty} R_n(\zeta) d\zeta = \lim_{N\to\infty} \int_K R_N(\zeta) d\zeta = 0, \;\; z \in D(\alpha, r).$$

Consideramos ahora $\alpha = \infty$. En este caso, se tiene que $|z| > r$ y entonces

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{-1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = \frac{-1}{z}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\zeta}{z}\right)^n = -\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\zeta^n}{z^{n+1}}\right), \quad \zeta \in K.$$

De manera análoga al caso anterior,

$$h(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_K \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}\,d\mu(\zeta).$$

Nótese que para $n \in \mathbb{N}$, $R_n(\zeta) = \zeta^n \subset M$. Luego, por (3.1) tenemos que $h(z) = 0$, $z \in D(\infty, r)$.

□

4. La ecuación $\overline{\partial}$ y el Teorema de Runge.

La ecuación $\overline{\partial}$ consiste en resolver el siguiente problema: dada una función $f \in C^\infty(\Omega)$ encontrar otra función $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\overline{\partial} u = f \tag{4.1}$$

en Ω, donde

$$\overline{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Esto es, si $u = \alpha + i\beta$, donde $\alpha, \beta : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ y $z = x + iy$, entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \beta}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i\frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

Observamos que si $\overline{\partial} u = 0$, entonces u es holomorfa en Ω, ya que entonces,

$$\overline{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i\frac{\partial \beta}{\partial x} + i\frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} + i\left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)\right) = 0$$

de donde se obtienen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = & \dfrac{\partial \beta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} = & -\dfrac{\partial \alpha}{\partial y}. \end{cases}$$

4.1. Solución de la ecuación $\overline{\partial}$

La importancia de la ecuación (4.1) cuando se trata de una ecuación homogénea ($f \equiv 0$), radica en su uso para la construcción de funciones holomorfas que, por su rigidez (no existen particiones de la unidad holomorfas) hacen de ella una herramienta extremadamente útil. A continuación probaremos, usando el Teorema de Runge, que la ecuación (4.1) tiene solución para cualquier $f \in C^\infty(\Omega)$. La idea es ver que la ecuación (4.1) se puede resolver localmente para luego utilizando el Teorema de Runge construir una solución global corrigiendo estas soluciones locales en las superposiciones ([11]).

Teorema 4.1. *Sea Ω un abierto del plano. La ecuación $\overline{\partial}u = f$ tiene solución $u \in C^\infty(\Omega)$ para toda $f \in C^\infty(\Omega)$.*

Demostración. Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de subconjuntos compactos de Ω que cumplen las condiciones dadas en la Proposición 2.6, y donde elegimoa $K_0 = \emptyset$. Consideramos $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_n = 1$ en K_n, $n \in \mathbb{N}$. Por el Corolario A.6.3, existen $u_1, u_2 \in C^\infty(\Omega)$ tal que

$$\overline{\partial}u_1 = \phi_1 f \qquad \text{y} \qquad \overline{\partial}u_2 = \phi_2 f.$$

Nótese que $\phi_1 = \phi_2$ en K_1, pues $K_1 \subset K_2$. Por tanto, $\overline{\partial}(u_2 - u_1) = (\phi_2 - \phi_1)f = 0$ en K_1 así, la función $u_2 - u_1$ es holomorfa en K_1^o. Supongamos ahora que hemos construido $u_1, ..., u_n \in C^\infty(\Omega)$ que verifican

(*i*) $\overline{\partial}u_j = \phi_j f$.
(*ii*) $u_{j+1} - u_j \in H(K_j^o)$.
(*iii*) $|u_{j+1} - u_j| < \frac{1}{2^j}$ en K_{j-1} para $j = 1, ..., n-1$.

Para construir u_{n+1} consideramos $v \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\overline{\partial}v = \phi_{n+1} f$. Nuevamente, $\phi_n = \phi_{n+1}$ en K_n de modo que $\overline{\partial}(v - u_n) = (\phi_{n+1} - \phi_n)f = 0$ en K_n. Así pues, $v - u_n \in H(K_n^o)$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.6 (*iii*) y la consecuencia del Teorema de Runge dada en el Corolario 2.8 podemos encontrar $\omega \in H(\Omega)$ tal que $|v - u_n - \omega| < \frac{1}{2^n}$ en K_{n-1}. Eligiendo $u_{n+1} := v - w$ se tiene que $\overline{\partial}u_{n+1} = \overline{\partial}(v - w) = \overline{\partial}v - \overline{\partial}w = \phi_{n+1} f$, pues $\omega \in H(\Omega)$. Asímismo, $u_{n+1} - u_n \in H(K_n^o)$ ya que $v - u_n \in H(K_n^o)$ y $w \in H(\Omega)$. Finalmente $|u_{n+1} - u_n| = |v - w - u_n| < \frac{1}{2^n}$ en K_{n-1}, por la elección de ω.

Tenemos así una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$ tal que

(*i*) $\overline{\partial}u_n = \phi_n f$.
(*ii*) $u_{n+1} - u_n \in H(K_n^o)$.
(*iii*) $|u_{n+1} - u_n| < \frac{1}{2^n}$ en K_{n-1}.

Definimos ahora la función u en Ω, mediante,

$$u := u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n).$$

Esta función está bien definida. En efecto, veamos que $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ converge uniformemente en cualquier compacto $K \subset \Omega$. Sea K un compacto contenido en Ω. En virtud de la Proposición 2.6 (*ii*) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset K_{n_0}$ y entonces $K \subset K_n$, $n \geq n_0$. Escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_{n+1}(z)-u_n(z)| = \sum_{n=1}^{n_0}|u_{n+1}(z)-u_n(z)| + \sum_{n=n_0+1}^{\infty}|u_{n+1}(z)-u_n(z)|, \ \ z \in K.$$

Para estudiar la convergencia uniforme de esta serie en K observamos por un lado que al ser u_n, $n \in \mathbb{N}$, funciones continuas, para cierta constante $C_{n_0} > 0$,

$$\sum_{n=1}^{n_0}|u_{n+1}(z)-u_n(z)| \leq 2\sum_{n=1}^{n_0}\|u_n\|_K \leq C_{n_0}, \quad z \in K.$$

Para acotar el segundo sumando aplicamos la prueba M de Weierstrass. Observamos que para cada $n \geq n_0+1$, $K \subset K_{n-1}$ y entonces se tiene que $|u_{n+1}(z)-u_n(z)| < 1/2^n, z \in K_{n-1}$ por lo que se deduce que

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|u_{n+1}(z)-u_n(z)| < \sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty, \qquad z \in K.$$

En particular, podemos escribir

$$u - u_N = \sum_{n=N}^{\infty}(u_{n+1}-u_n) \qquad N > n_0. \tag{4.2}$$

Además, $u_{n+1}-u_n \in H(K_{n_0}^o)$ para $n \geq n_0$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$ es el límite uniforme de una sucesión de funciones holomorfas en el interior de K_{n_0} así, $\sum_{n=N}^{\infty}(u_{n+1}-u_n) \in H(K_N^o)$. Por ende, $u \in C^{\infty}(K_N^o)$ y como N es arbitraria, $u \in C^{\infty}(\Omega)$. De (4.2) se sigue que, para todo $N \geq n_0, \overline{\partial}(u-u_N) = 0$ en K_N^o. Luego, $\overline{\partial}u = \overline{\partial}u_N = \phi_N f$ en K_N^o. Por la arbitrariedad de N se concluye que $\overline{\partial}u = f$ en Ω.

Sea K un subconjunto compacto de un abierto Ω en $\mathbb{C}$. Resulta interesante que los siguientes problemas

Problema A: Dado K un compacto y Ω un abierto tal que $K \subset \Omega$. ¿Se puede aproximar uniformemente funciones holomorfas en K por funciones holomorfas en Ω?

Problema H: Dado $\epsilon > 0$ y $f \in C^{\infty}(\Omega)$ tal que $K \cap sop f = \emptyset$. ¿Se puede encontrar una solución $u \in C^{\infty}(\Omega)$ de la ecuación $\overline{\partial}u = f$ en Ω tal que $|u(z)| < \epsilon, z \in K$?

son equivalentes.

En efecto, veamos primero que el problema A implica el problema H :

Sea K un compacto en Ω tal que $K \cap sop f = \emptyset$ y sea $u_0 \in C^{\infty}(\Omega)$ una solución del problema $\overline{\partial} u = f$, $f \in C^{\infty}(\Omega)$. Puesto que $\overline{\partial} u_0 = 0$ en $\Omega \setminus sop f$, u_0 es holomorfa en $\Omega \setminus sop f$, abierto que contiene a K, por tanto, $u_0 \in H(K)$. Como estamos suponiendo que el problema A tiene solución, dado $\epsilon > 0$ existe una función $h \in H(\Omega)$ tal que $|u_0(z) - h(z)| < \epsilon$, $z \in K$.

Tomando $u = u_0 - h$ tenemos que u es solución de $\overline{\partial} u = f$ en Ω, ya que

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial u_0}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial h}{\partial \overline{z}} = f - 0 = f.$$

Probemos ahora que el problema H implica el problema A:

Sea g una función holomorfa en U, donde U es un abierto tal que $K \subset U \subset \Omega$ y consideremos una función $\phi \in C_c^{\infty}(U)$ tal que $\phi \equiv 1$ en algún entorno de K cuya clausura esté contenida en U y $\phi \equiv 0$ en $\Omega \setminus U$. Tomamos $f = g\overline{\partial}\phi$. Por construcción $f \in C_c^{\infty}(\Omega)$ y $sop f \cap K = \emptyset$. Como por hipótesis el problema H se verifica, dado $\epsilon > 0$ existe una función $u \in C^{\infty}(\Omega)$ solución de $\overline{\partial} u = f$ en Ω tal que $|u(z)| < \epsilon, z \in K$. Debemos probar A, luego como la función $g \in H(K)$, tenemos que encontrar una función h holomorfa en Ω que la aproxime uniformemente en K. Para ello, consideramos $h = g\phi - u$. por un lado $h \in H(\Omega)$ pues $\overline{\partial} h = \overline{\partial}(g\phi) - \overline{\partial} u = \overline{\partial}(g\phi) - f = \phi\overline{\partial} g + \cancel{g\overline{\partial}\phi} - \cancel{g\overline{\partial}\phi} = 0$ en Ω y por otr, como $\phi(z) = 1, z \in K$ sigue que

$$|g(z) - h(z)| = |g(z) - g\phi(z) - u(z)| = |u(z)| < \epsilon, \quad z \in K.$$

Por lo que ya tenemos probada la equivalencia de los problemas.

Como sabemos, si el problema A tiene solución, $\hat{K}_{\Omega} = K$ es decir, cualquier componente acotada de $\Omega \setminus K$ contiene una de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Esto se puede ver directamente del problema H: si $a \in \Omega \setminus K$ y $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que $\phi \equiv 1$ en un entorno de a y $\phi \equiv 0$ en algún entorno de K entonces, para $\tilde{K} = K \cup \{a\}$ se tiene que $\tilde{K} \cap \operatorname{sop} \overline{\partial}\phi = \emptyset$ y por tanto, si relativo a $\tilde{K}$ el problema H tiene solución u con $f = \overline{\partial}\phi$ entonces $h = u - \phi \in H(\Omega)$, $|h - 1| < \epsilon$ cerca de a y $|h| < \epsilon$ sobre K. Así, tomando $\epsilon \leq 1/2$, $|h(a)| > 1 - \epsilon \geq \epsilon > ||h||_K$. Puesto que $a \in \Omega \setminus K$ es arbitrario concluimos que $\hat{K}_{\Omega} = K$.

Teorema 4.2. *Sea $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto de un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Son equivalentes:*

(*i*) *Cualquier función holomorfa en un entorno de K se puede aproximar uniformemente en K por funciones holomorfas en Ω.*
(*ii*) *Para todo $\epsilon > 0$ y toda función $f \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tal que $K \cap \mathrm{sopf} = \emptyset$ existe una solución $u \in C^{\infty}(\Omega)$ de la ecuación $\overline{\partial} u = f$ en Ω tal que $|u(z)| < \epsilon$, $z \in K$.*
(*iii*) $\hat{K}_{\Omega} = K$.

5. Teorema de Mergelyan.

Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $f \in H(K)$, el Teorema de Runge (Teorema 2.5) afirma que f es el límite uniforme en K de polinomios o de funciones racionales con polos fuera de K. En general los límites uniformes en K de estos tipos de funciones nos dan funciones continuas en K que son holomorfas en el interior de K ($f \in A(K)$). Luego, si queremos extender el Teorema de Runge aumentando el conjunto de funciones a aproximar, tenemos que el hecho de que $f \in A(K)$ es condición necesaria. El Teorema de Mergelyan ([10]) que enunciaremos a continuación y cuya demostración omitimos ya que se encuentra fuera del alcance de esta memoria, prueba que en el caso de aproximación polinomial dicha condición también es suficiente.

Teorema 5.1 (Teorema de Mergelyan). *Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo y $f \in A(K)$ entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe un polinomio P tal que $|f(z) - P(z)| < \epsilon$, $z \in K$.*

Observamos que cuando K tiene interior vacío $A(K)$ coincide con $C(K)$ y así el clásico Teorema de Weierstrass para un intervalo es un caso particular del Teorema de Mergelyan.

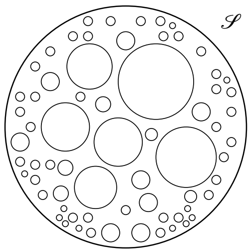
Otra extensión del Teorema de aproximación de Weierstrass y por ende de Mergelyan, nos la proporciona el Teorema de Carleman ([3]) que permite aproximar sobre toda la recta real y donde ε se puede sustituir por cualquier función continua positiva $\varepsilon(x)$.

Teorema 5.2 (Teorema de Carleman). *Si $f \in C(\mathbb{R})$ entonces, para cada función continua $\varepsilon : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ existe una función entera F tal que*

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon(x), \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Si $\mathbb{C} \setminus K$ no es conexo, nos surge la cuestión de si se verifica el Teorema de Mergelyan con el cambio lógico de sustituir los polinomios por funciones racionales con polos fuera de K. La respuesta en este caso depende, en cierto modo, del número de componentes conexas que tenga $\mathbb{C} \setminus K$. Así, si $\mathbb{C} \setminus K$ tiene un número finito de componentes conexas la respuesta es afirmativa como veremos en el Corolario 5.7; en cambio si $\mathbb{C} \setminus K$ tiene un número infinito de componentes conexas el Teorema de Mergelyan no se verifica en general. Un ejemplo de esta última situación lo proporciona el conocido como “queso suizo" que fue construído por Alice Roth (1938) y que presentamos a continuación.

Queso Suizo (Alice Roth)



Sean $\overline{\mathbb{D}}$ el disco unidad cerrado y $S = \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión densa en él. Consideramos una sucesión de discos abiertos $\{\triangle_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ que definimos de la siguiente manera: tomamos $\triangle_1 = \triangle(z_1, r_1)$ donde $r_1 < 1/2^2$ y $\triangle_1 \subset \mathbb{D}$. Para construir $\triangle_2$ elegimos $\tilde{z}_2$ el primer elemento de S que no está en $\triangle_1$ y $r_2 < 1/2^3$ de modo que $\triangle_1 \cap \triangle_2 = \emptyset$. Supongamos ahora que hemos elegido $\triangle_j$, $j = 1, ..., n-1$. Para definir $\triangle_n$ seleccionamos $\tilde{z_n}$ el primer elemento que no pertenezca a $\cup_{j=1}^{n-1} \triangle_j$ y $r_n < 1/2^{n+1}$ tal que $\cap_{j=1}^{n} \triangle_j = \emptyset$. Obsérvese que $\sum_{j=1}^{\infty} r_j < 1$ y que $\{\triangle_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos. Así, el queso suizo se define como el siguiente conjunto:

$$\mathscr{S} = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} \triangle_j \,.$$

Claramente $\mathscr{S}$ es cerrado y acotado y por tanto $\mathscr{S}$ es compacto. Además tiene interior vacío, ya que si existiese un disco $D \subseteq \mathscr{S} \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, por densidad, existe $z_{j_0} \in D$ y por construcción $z_{j_0} \in \cup \triangle_j$ por lo que $D \nsubseteq \mathscr{S}$.

Queremos ver que existe una función $f \in A(\mathscr{S})$ que no se puede aproximar uniformemente en $\mathscr{S}$ por funciones racionales con polos fuera de $\mathscr{S}$. Para ello, definimos

$$dv = \begin{cases} dz, & \partial\mathbb{D} \\ -dz, & \partial \triangle_j \end{cases}$$

y tomamos $f(z) = \overline{z}, z \in \mathscr{S}$. Es claro que $f \in A(\mathscr{S})$. Supongamos ahora que existen $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ funciones racionales con polos fuera de $\mathscr{S}$ tales que $\overline{z} = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(z)$ uniformemente en $\mathscr{S}$. Entonces, por convergencia uniforme se tiene que

$$\int_{\mathscr{S}} \overline{z} dv = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{S}} R_n(z) dv.$$

Observamos que para toda función racional con polos fuera de $\mathscr{S}$, g, se tiene, por el Teorema de Cauchy,

$$\int_{\mathscr{S}} g dv = \int_{\partial\mathscr{S}} g dv = \int_{\partial\overline{\mathbb{D}}} g dz - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\triangle_j} g dz = 0.$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathscr{S}} \overline{z} dv = \int_{\partial\mathbb{D}} \overline{z} dz - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\partial\triangle_j} \overline{z} dz = -2\pi i + \sum_{j=1}^{\infty} 2\pi i r_j^2 = -2\pi i + 2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} r_j^2,$$

ya que si Δ es un disco de radio $r > 0$ se sigue que

$$\int_{\partial\Delta} \overline{z} dz = \int_{\partial\Delta} (x - iy)(dx + idy) = \int_{\partial\Delta} (xdx + ydy) + i \int_{\partial\Delta} (xdy - ydx)$$

$$= \int_{\Delta} 0 dxdy + i \int_{\Delta} -2dxdy = -2\pi i r^2.$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{j=1}^{\infty} r_j^2 < \sum_{j=1}^{\infty} r_j < 1$ concluimos que $\int_{\mathscr{S}} \overline{z} dv \neq 0$ lo que contradice el hecho de que $\overline{z} = \lim\limits_{n\to\infty} R_n(z)$ uniformemente en $\mathscr{S}$.

Observación 5.3. $\mathscr{S}$ es conexo y su demostración es una consecuencia de un resultado de topología general que establece que la intersección encajada de compactos conexos sigue siendo compacta y conexa. Dado que $\mathscr{S} = \cap_j (\overline{\mathbb{D}} \setminus D_k)$ con $D_k = \cup_{j\leq K} \triangle_j$ y D_k es conexo entonces $\mathscr{S}$ también es conexo. La prueba de este resultado topológico va como sigue: si $\{K_j\}_{j\geq 1}$ es una familia de compactos conexos encajados ($K_{j+1} \subset K_j$) en un espacio topológico X y U, V son abiertos disjuntos tales que $K = \cap_j K_j \subset W = U \cup V$ entonces $\cap_j K_j \cap X \setminus W = \emptyset$ que, por compacidad, implica que $\cap_{l\leq m} K_{j_l} \cap X \setminus W = \emptyset$ ya que $K_j \cap X \setminus W$ es cerrado para $j \geq 1$. Así $K_{j_m} \cap X \setminus W = \emptyset$ y por tanto $K_{j_m} \subset W = U \cup V$. Puesto que K_{j_m} es conexo y $U \cap V = \emptyset$ se sigue que $K_{j_m} \subset U$ o $K_{j_m} \subset V$. Esto implica que $K \subset K_{j_m} \subset U$ o $K \subset K_{j_m} \subset V$ y K es conexo. Por último K es compacto ya que es intersección de compactos. Para $j \geq 1$ los conjuntos $K_j : x^2/j^2 + y^2 \geq 1$, $|y| \leq 1$ son conexos y encajados pero, sin embargo $K = \cap_j K_j = \{y = \pm 1\}$ no es conexo. Así, en general, la intersección encajada de conexos no es conexa. Esto prueba que, en el resultado anterior no se puede omitir la hipótesis de compacidad.

5.1. El teorema de Bishop.

En este apartado haremos uso de una transformación integral, conocida como la Transformada de Vitushkin, muy usada en teoría de aproximación cualitativa y cuyas propiedades recogemos en el siguiente teorema (ver [5]).

Teorema 5.4 (Operador de Vitushkin). *Sea f una función continua en $\mathbb{C}$ y consideramos $\phi \in C_c^1(\mathbb{C})$. Si definimos el operador*

$$T_\phi f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\omega}}(\omega) dm(\omega), z \notin \operatorname{sop}(\phi),$$

entonces se verifica:

(i) $T_\phi f$ se puede escribir como

$$T_\phi f(z) = f(z)\phi(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\omega}}(\omega) dm(\omega).$$

(ii) $T_\phi f$ *es continua en* $\mathbb{C}$ *y además,* $T_\phi f(z)$ *tiende a cero, cuando* $|z| \to \infty$.
(iii) $T_\phi f$ *es holomorfa en* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{sop}(\phi)$.
(iv) Si f *es holomorfa en un abierto* Ω*, entonces* $T_\phi f \in H(\Omega)$.
(v) Sea $\delta > 0$. *Si* $diam(sop(\phi)) \leq \delta$*, entonces*

$$||T_\phi f||_{\mathbb{C}} \leq 2\delta w_f(\delta)||\overline{\partial}\phi||_{\mathbb{C}},$$

donde $w_f(\delta) = \text{máx}\{|f(z_2) - f(z_1)| : |z_1 - z_2| \leq \delta\}$ *(módulo de continuidad). En particular,*

$$||T_\phi f||_{\mathbb{C}} \leq 4 diam(sop(\phi))||\overline{\partial}\phi||_{\mathbb{C}}||f||_{\mathbb{C}}. \tag{5.1}$$

Demostración. Por definición,

$$\begin{aligned} T_\phi f(z) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)-f(z)}{\omega - z}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}}(\omega)dm(\omega) \\ &= \frac{-1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(z)}{\omega - z}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}}(\omega)dm(\omega) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}}(\omega)dm(\omega) \\ &= f(z)\phi(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}}(\omega)dm(\omega) \end{aligned}$$

ya que por la Proposición A.6.1 $\phi(z) = \dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}}(\omega)}{\omega - z}dm(\omega)$. Así (i) se verifica.

(ii) En primer lugar, veamos que $T_\phi f$ es continua en $\mathbb{C}$. Como $f(z)\phi(z)$ es continuo en $\mathbb{C}$ por ser producto de funciones continuas, basta probar que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}}(\omega)dm(\omega)$ también lo es.

Sea $F(\omega) = \dfrac{f(\omega)}{\omega - z}\dfrac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}}(\omega)$ y considerando el siguiente cambio de variable donde $\omega = z - t$, resulta

$$G(z) = \frac{-1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{F(z-t)}{t}dm(t). \tag{5.2}$$

Para ver que $G(z)$ es continuo, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$, entonces $|G(z) - G(z_0)| < \epsilon$. Como G tiene soporte compacto tenemos que

$$\begin{aligned} |G(z) - G(z_0)| &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\mathbb{C}} \frac{F(z-t) - F(z_0 - t)}{t}dm(t)\right| \\ &= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\overline{D(0,M)}} \frac{F(z-t) - F(z_0 - t)}{t}dm(t)\right| \\ &\leq \frac{1}{\pi}\int_{\overline{D(0,M)}} \frac{|F(z-t) - F(z_0 - t)|}{|t|}dm(t). \end{aligned}$$

Dado que F es uniformemente continua en $\mathbb{C}$ existe un $\delta > 0$, $|z - z_0| < \delta$ tal que $|F(z-t) - F(z_0 - t)| < \epsilon/2M$. Así,

$$|G(z) - G(z_0)| \le \frac{\epsilon}{2\pi M}\int_{\overline{D(0,M)}} \frac{dm(t)}{|t|} = \frac{\epsilon}{2\pi M} 2\pi M = \epsilon.$$

Ahora veamos que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \int_{\mathbb{C}} \frac{F(\omega)}{\omega - z} dm(\omega) = 0$. Para $\epsilon > 0$ debemos encontrar $B > 0$ tal que si $|z| > B$, entonces $\displaystyle\left|\int_{\mathbb{C}} \frac{F(\omega)}{\omega - z} dm(\omega)\right| < \epsilon$. Como cualquier función continua en un compacto está acotada, se tiene que $|F(\omega)| \le A$, $\omega \in \mathbb{C}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{C}} \frac{F(\omega)}{\omega - z} dm(\omega)\right| &\le \int_{\overline{D(0,M)}} \frac{|F(\omega)|}{|\omega - z|} dm(\omega) \le A\int_{\overline{D(0,M)}} \frac{dm(\omega)}{|\omega - z|} \\ &\le A\int_{\overline{D(0,M)}} \frac{dm(\omega)}{|B - M|} = \frac{A}{B-M}\int_{\overline{D(0,M)}} dm(\omega) = \frac{AM^2\pi}{B-M} < \epsilon.\end{aligned}$$

En efecto, basta considerar $B > \frac{AM^2\pi}{\epsilon} + M$.

Para probar (iii) consideramos $z \in \mathbb{C}\setminus sop(\phi)$ y $\overline{D(z,r)} \subset \mathbb{C}\setminus sop(\phi)$. Tomamos un triángulo $\Delta \subset \overline{D(z,r)}$ y aplicando el Teorema de Fubini A.3.3, resulta

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} T_\phi f(z) dz &= \frac{1}{\pi}\int_{\partial\Delta}\left(\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{\omega - z}\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}} dm(\omega)\right) dz \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\left(\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{\omega - z}\right) f(\omega)\frac{\partial\phi}{\partial\overline{\omega}} dm(\omega).\end{aligned}$$

En virtud del Teorema de Cauchy, $\displaystyle\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{\omega - z} = 0$. Finalmente, por el Teorema de Morera se puede afirmar que $T_\phi f \in H(\mathbb{C}\setminus sop(\phi))$.

(iv) Sigue por el Teorema de Leibniz, derivando bajo el signo de la integral.

(v) Por los apartados (ii) y (iii) el máximo de $|T_\phi f|$ se alcanza en $z_0 \in sop(\phi)$. Luego,

$$
\begin{aligned}
|T_\phi f(z_0)| &= \left| \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega) - f(z_0)}{\omega - z_0} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\omega}}(\omega) dm(\omega) \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} \right\|_{\mathbb{C}} \left| \int_{sop(\phi)} \frac{f(\omega) - f(z_0)}{\omega - z_0} dm(\omega) \right| \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} \right\|_{\mathbb{C}} \int_{sop(\phi)} \frac{|f(\omega) - f(z_0)|}{|\omega - z_0|} dm(\omega) \\
&\leq \frac{1}{\pi} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} \right\|_{\mathbb{C}} w_f(\delta) \int_{sop(\phi)} \frac{dm(\omega)}{|\omega - z_0|} \leq 2\delta w_f(\delta) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \overline{z}} \right\|_{\mathbb{C}}
\end{aligned}
$$

donde la última desigualdad se debe a resolver la siguiente integral mediante un cambio a polares. Consideramos $w = z_0 + re^{i\theta}$ donde $0 \leq \theta \leq \delta$ y $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Así,

$$
\int_{sop(\phi)} \frac{dm(\omega)}{|\omega - z_0|} = \int_{|\omega - z| < \delta} \frac{dm(\omega)}{|\omega - z_0|} = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\delta \frac{dr}{r} r = 2\pi\delta.
$$

Esto sigue tomando $\delta = diam(\text{sop}(\phi))$. Además, $\omega_f(\delta) \leq 2||f||_{\mathbb{C}}$. Luego,

$$
||T_\phi f||_{\mathbb{C}} \leq 4 diam(\text{sop}(\phi)) \; ||\text{f}||_{\mathbb{C}} \left\| \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\text{z}}} \right\|_{\mathbb{C}}.
$$

□

El resultado más importante de este apartado es el Teorema de Localización de Bishop que permite concluir que la propiedad de aproximación sobre compactos tiene caráter local y además en ciertos casos permite extender el Teorema de Mergelyan a compactos cuyo complementario tiene un número finito de componentes conexas (ver [5]).

Teorema 5.5 (Teorema de Bishop). *Sean K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $f \in C(\mathbb{C})$. Si para cada $z \in K$ existe un entorno U_z tal que $f_{|K_z} \in R(K_z)$ con $K_z = K \cap \overline{U_z}$ entonces, $f \in R(K)$.*

Demostración. En primer lugar, descomponemos f en K. Para cada $z \in K$ consideramos el entorno U_z dado en las hipótesis del teorema y que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que es un disco cerrado centrado en z. Denotamos por Δ_z al disco centrado en z y cuyo radio es la mitad del de U_z. Por compacidad, K se puede recubrir por una cantidad finita de los discos Δ_z, digamos Δ_j, $j = 1, ..., n$. Por el Teorema A.5.2, existen ϕ_j, $j = 1, ..., n$, asociadas a Δ_j tal que $\sum_{j=1}^n \phi_j(z) = 1$ para $z \in V = \cup_{j=1}^n \overline{\Delta_j}$ y $\text{sop}\phi_j \subset U_j$. Escribimos

$$
\sum_{j=1}^n f_j(z) = f(z) \sum_{j=1}^n \phi_j(z) + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{C}} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \frac{\partial \phi_j}{\partial \overline{\omega}}(\omega) dm(\omega).
$$

Puesto que $\phi(z) := \sum_{j=1}^{n} \phi_j(z) \equiv 1$ en V resulta

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(z) = f(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}\setminus V} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\omega}}(\omega) dm(\omega), \qquad z \in V. \tag{5.3}$$

Llamando $\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}\setminus V} \frac{f(\omega)}{\omega - z} \frac{\partial \phi}{\partial \overline{\omega}}(\omega) dm(\omega)$ tenemos que $\Phi(z) \in H(V^o)$. Ésta última afirmación puede verse tanto por el Teorema [13, Th.10.7] como por el Teorema de Morera. Así, $\Phi(z) \in H(K)$ y por tanto, en virtud del Teorema de Runge se deduce que $\Phi \in R(K)$ por lo que, como $f = \sum_{j=1}^{n} f_j - \Phi$, será suficiente probar que $f_j \in R(K)$, $j = 1, ..., n$.

Sea $1 \le j \le n$ y consideramos de nuevo las aproximaciones locales. Tomamos $K_j = K \cap \overline{U_j}$ y para $\varepsilon_1 > 0$ dado, existe R_j una función racional con polos fuera de K_j tal que $|f(z) - R_j(z)| < \varepsilon_1, z \in K_j$. Tomamos conjuntos abiertos V_j y W_j con $K_j \subset V_j \subset \overline{V_j} \subset W_j$ para los que se tenga que $|f(z) - R_j(z)| < \varepsilon_1, z \in \overline{W_j}$ y elegimos $\varphi_\in C_c^\infty(W_j)$ verificando el Lema A.5.1, es decir, $\varphi_j \equiv 1$ en $\overline{V_j}$. Sea $s_j = f - (f - R_j)\varphi_j$ que es continua en $\mathbb{C}$, ya que $f \in C(\mathbb{C})$ y $\varphi_\in C_c^\infty(W_j)$. Entonces,

$$s_j(z) = \begin{cases} R_j(z), & z \in V_j \\ f(z), & z \in \mathbb{C}\setminus W_j. \end{cases}$$

Además, $||f - s_j||_\mathbb{C} = ||f - s_j||_{W_j} = ||(f - R_j)\varphi_j||_{W_j} \le ||f - R_j||_{W_j} < \varepsilon_1$. Utilizando estas s_j definimos $g_j := T_{\phi_j} s_j$. Así, por la estimación (5.1) dada en el Teorema 5.4 (v) resulta,

$$||g_j - f_j||_\mathbb{C} = ||T_{\phi_j} s_j - T_{\phi_j} f||_\mathbb{C} = ||T_{\phi_j}(s_j - f)||_\mathbb{C} \le 4\mathrm{diam}(\mathrm{sop}\phi_\mathrm{j})||\overline{\partial}\phi_\mathrm{j}||_\mathbb{C}\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

En virtud del Teorema 5.4 (iii) se tiene que $g_j \in H(\mathbb{C}\setminus sop\phi_j)$ y por consiguiente en $\mathbb{C}\setminus\overline{U_j}$. La función g_j también es holomorfa en V_j, pues $s_j = R_j \in H(V_j)$. Tenemos que $K \subset V_j \cup \mathbb{C}\setminus\overline{U_j}$ puesto que si $z \in K$ y $z \notin \mathbb{C}\setminus\overline{U_j}$ entonces, $z \in K \cap \overline{U_j} = K_j \subset V_j$. Luego, $g_j \in H(K)$ y aplicando el Teorema de Runge, tenemos una función racional R_j con polos fuera de K tal que $|g_j(z) - R_j(z)| < \varepsilon, z \in K$ y por tanto, $|f_j(z) - R_j(z)| < 2\varepsilon$. Considerando $R = \sum_{j=1}^{n} R_j$ la prueba concluye.

□

Teorema 5.6. *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto tal que el diámetro de las componentes conexas de $\mathbb{C}\setminus K$ está acotado inferiormente por una cantidad $\delta > 0$. Entonces, $A(K) = R(K)$.*

Demostración. Sea $z \in K$ y elegimos U_z un disco centrado en z y de radio $\delta/2$. Denotemos por $K_z = K \cap \overline{U_z}$ y consideremos su complementario $K_z^c = K^c \cup \overline{U_z}^c$. Si $\zeta \in K_z^c$ y $\zeta \in \overline{U_z}$ entonces, $\zeta \in K^c$. Por tanto, ζ pertenece a una de las componentes conexas de $\mathbb{C}\setminus K$ con diámetro mayor que δ, por hipótesis. Esta componente debe contener puntos fuera de $\overline{U_z}$,esto es, $K^c \subset K_z^c$ podemos conectar ζ con un punto de $\overline{U_z}^c$.

Luego, K_z^c es conexo y por el Teorema de Mergelyan (Teorema 5.1) tenemos que $f_{|K_z} \in P(K_z) \subset R(K_z)$. Finalmente, como consecuencia del Teorema de Bishop (Teorema 5.5), se tiene que $f \in R(K)$ para todo $z \in K$.

□

Corolario 5.7. *Si $\mathbb{C} \setminus K$ tiene un número finito de componentes conexas entonces, $A(K) = R(K)$.*

Demostración. Sea $\{U_j\}_{j=1}^n$ las componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus K$ y consideramos $z_j \in U_j$. Como U_j, $j = 1, \dots, n$ son abiertos, existen discos $D_j(z_j, r_j)$ contenidos en U_j. Por tanto, para todo $j = 1, \dots, n$ se tiene que

$$\mathrm{diam}\, \mathrm{U_j} > \mathrm{r_0} = 1/2\, \mathrm{mín}\{\mathrm{r_j}, \mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n}\} > 0.$$

Finalmente, el Teorema 5.6 afirma que $A(K) = R(K)$.

□

A

Apéndice

Contenido

A.1. La esfera de Riemann

Cuando estudiamos funciones analíticas cerca de singularidades aisladas es interesante tratar el infinito como un punto más, de modo que podamos hablar de funciones continuas o analíticas en él. Para ello se introduce la esfera de Riemann conocida también como el plano complejo extendido. Como un ejemplo consideremos la aplicaión $z \to \dfrac{1}{z}$ que tiene una singularidad aislada en $z = 0$ y cuya imagen no contiene al 0. Añadiendo el punto del infinito, ∞, e imponiendo las reglas $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$ convertiremos a esta función en un homeomorfismo del plano complejo extendido.

Definición A.1.1. *El plano complejo extendido $\mathbb{C}_\infty$ está formado por el plano complejo más un punto extra ∞ (llamado infinito). En dicho conjunto $\mathbb{C}_\infty$ consideramos la topología formada por los abiertos de $\mathbb{C}$ más los conjuntos de la forma $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$, siendo K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Estos últimos conjuntos son los entornos de ∞ (Obsérvese que realmente estamos considerando la compactificación unipuntual de Alexandrov).*

Los conjuntos

$$B(\infty, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$$

constituyen una base de entornos para el punto ∞.

Geométricamente podemos interpretar $\mathbb{C}_\infty$ como la esfera unidad

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

en $\mathbb{R}^3$, estableciendo un homeomorfismo entre ambos. Dicho homeomorfismo se conoce como la proyección estereográfica y viene definido de la siguiente manera: consideremos $N = (0, 0, 1)$ el polo norte de S^2 y establezcamos una biyección π de $S^2 \setminus \{N\}$ en $\mathbb{C}$ para luego definir $\pi(N) = \infty$ y tenerla así definida de S^2 en $\mathbb{C}_\infty$:

$$\pi(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{x + iy}{1 - z}, & (x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\} \\ \infty, & N = (0, 0, 1), \end{cases}$$

cuya inversa $\pi^{-1} : \mathbb{C}_\infty \to S^2$ tiene la expresión

$$\pi^{-1}(z) = \begin{cases} \dfrac{(2\mathbb{R}ez, 2\mathbb{I}mz, |z|^2 - 1)}{|z|^2 + 1}, & z \in \mathbb{C}. \\ (0, 0, 1), & z = \infty, \end{cases}$$

Geométricamente podemos pensar que para calcular la imagen de $(x, y, z) \in S^2$, trazamos la recta que une N con (x, y, z) y la imagen será el punto donde dicha recta corte a $\mathbb{C}$, recíprocamente si queremos calcular la imagen de $z = x + iy \in \mathbb{C}$ por π^{-1}, consideramos la recta que une $(x, y, 0)$ con N y tomamos el punto donde esta corta a S^2.

Utilizando esta proyección estereográfica podemos definir el concepto de holomorfía en ∞ y ver cuándo una función tiene una singularidad en él.

Definición A.1.2. *1. Una función $f : B(\infty; r) \to \mathbb{C}$ es holomorfa en ∞ si la función $\omega \to f(\omega^{-1})$ lo es el* 0.

2. *Una función $f : B(\infty; r) \to \mathbb{C}$ se dice que tiene una singularidad aislada en ∞ si f es holomorfa en $B(\infty, r) \setminus \{\infty\}$, para algún $r > 0$. Dicha singularidad es evitable, polo o esencial si lo es* 0 *para la función $\omega \to f(\omega^{-1})$, respectivamente.*

Obsérvese que si $P(z)$ es un polinomio es holomorfo en $\mathbb{C}$ y tiene un polo en ∞ así que la podemos considerar como una función racional cuyo único polo es el ∞.

A.2. Elementos de Teoría de la Medida

A.2.1. Medidas complejas

Sea $\mathfrak{M}$ una σ-álgebra en un conjunto X. Una función de conjunto $\mu \colon \mathfrak{M} \to \mathbb{C}$ tal que

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) \tag{2.1}$$

si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset 2^{\mathfrak{M}}$ es una partición de $E = \cup_j E_j \in \mathfrak{M}$, es decir, $E_j \cap E_k = \emptyset$ si $j \neq k$.

Obsérvese que, al contrario que para medidas positivas, la convergencia de la serie (2.1) es parte de los requisitos. Puesto que la unión de los conjuntos E_j no cambia si permutamos los índices, toda reordenación de la serie (2.1) también converge. Así la serie converge absolutamente.

Si μ es una medida compleja, existe una medida positiva $|\mu|$ que domina a μ que es lo mas pequeña posible. Si λ es una medida positiva que domina a μ entonces $\lambda(E) = \sum_j \lambda(E_j) \geq \sum_j |\mu(E_j)|$ si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es cualquier partición del conjunto $E \subset \mathfrak{M}$. Resulta que

$$|\mu|(E) :\, = \sup\Big\{\sum_j |\mu(E_j)|\Big\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset 2^{\mathfrak{M}}$ de E, es una medida positiva [13, theorem 6.2]. Claramente, $|\mu|$ es mínima respecto a la propiedad de dominación en el sentido que si λ es una medida positiva que domina a μ ($|\mu(E)| \leq \lambda(E)$ para todo $E \in \mathfrak{M}$), entonces $|\mu|(E) \leq \lambda(E)$.

La medida $|\mu|$ se llama *medida de variación total* de μ. Por otro lado, por *variación total* de μ se entiende el número $|\mu|(X)$. Nótese que $|\mu|(E) \geq |\mu(E)|$ pero en general no son iguales y que si μ es positiva entonces $|\mu| = \mu$.

Aparte de ser una medida, $|\mu|$ es, inesperadamente, finita: $|\mu|(X) < \infty$ [13, theorem 6.4]. $|\mu|$ está acotada, esto es, $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) \leq |\mu|(X)$ para todo $E \in \mathfrak{M}(E)$ y, por tanto, la imagen de $|\mu|$ está contenida en un disco. A veces a esta propiedad se refiere diciendo que μ es de *variación acotada*.

Dadas dos medidas complejas μ y $\tilde{\mu}$ sobre la misma σ-álgebra se pueden definir (de la forma usual) las nuevas medidas complejas $\mu + \tilde{\mu}$ y $c\mu$ ($c \in \mathbb{C}$) mediante

$$\begin{aligned} (\mu + \tilde{\mu})(E) &= \mu(E) + \tilde{\mu}(E) \\ (c\mu)(E) &= c\mu(E) \end{aligned} \tag{2.2}$$

si $E \in \mathfrak{M}$. De esta forma, la colección de todas las medidas complejas en $\mathfrak{M}$ forman un espacio vectorial complejo. Si denotamos $\|\mu\| = |\mu|(X)$, no resulta difícil comprobar $\|\cdot\|$ es una norma. Así, este espacio es normado.

Variaciones positivas y negativas

Consideremos el caso en que μ sea real (tales medidas se denominan *signadas*). Las medidas

$$\mu^+ = (|\mu| + \mu)/2, \qquad \mu^- = (|\mu| - \mu)/2 \tag{2.3}$$

son positivas y acotadas y

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-. \tag{2.4}$$

Las medidas μ^+ y μ^- se llaman *variaciones positivas y negativas* de μ respectivamente. Esta descomposición se conoce con el nombre de *descomposición de Jordan* de μ. Como consecuencia del Teorema de descomposición de Hahn[1] [13, theorem 6.14], de entre todas las descomposiciones de μ como diferencias de dos medidas positivas, la descomposición de Jordan tiene cierta propiedad de minimalidad: si λ_1 y λ_2 son dos medidas positivas y $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$ entonces $\lambda_1 \geq \mu^+$ y $\lambda_2 \geq \mu^-$.

Continuidad absoluta

Sea μ una medida compleja en una σ-álgebra $\mathfrak{M}$ y λ cualquier otra medida en $\mathfrak{M}$, λ puede ser positiva o compleja (recordemos que las medidas complejas tienen rango en el plano complejo, pero el concepto de "medida positiva" incluye ∞ como una valor admisible. Así las medidas positivas no forman una subclase de las complejas).

Se dice que λ es *absolutamente continua* respecto a μ, hecho que denotaremos por $\lambda \ll \mu$, si $\lambda(E) = 0$ para todo $E \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(E) = 0$. Si existe un conjunto $A \in \mathfrak{M}$ tal que $\lambda(E) = \lambda(A \cap E)$ para todo $E \in \mathfrak{M}$ (equivalentemente, $\lambda(E) = 0$ si $E \cap A = \emptyset$), decimos que λ se concentra en A.

Dos medidas λ_1 y λ_2 en $\mathfrak{M}$ se dicen *mutuamente singulares* ($\lambda_1 \perp \lambda_2$) si están concentradas en dos conjuntos disjuntos $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$.

Ahora podemos enunciar el resultado principal sobre la continuidad absoluta, el Teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym. De hecho, este es probablemente el resultado mas importante en Teoría de la Medida.

Teorema A.2.1 (*Lebesgue-Radon-Nikodym*). *Sea μ es una medida positiva σ-finita sobre una σ-álgebra $\mathfrak{M}$ en un conjunto X. Si λ es una medida compleja sobre $\mathfrak{M}$, entonces*

(*a*) *existe un único par de medidas complejas λ_a y λ_s en $\mathfrak{M}$ tales que*

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \qquad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu.$$

Si λ es positiva, entonces λ_a y λ_s también lo son.

(*b*) *Existe una función $h \in L^1(\mu)$ tal que*

$$\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu \tag{2.5}$$

para todo $E \in \mathfrak{M}$.

[1] Las medidas signadas descomponen $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ de tal forma que $\mu^+(E) = \mu(A \cap E)$ y $\mu^-(E) = -\mu(B \cap E)$ para todo $E \in \mathfrak{M}$. En otras palabras, en A se concentra la masa positiva de μ y en B su masa negativa.

La descomposición dada en (a) se llama la *descomposición de Lebesgue* de λ respecto a μ.

El resultado en (b) se conoce como Teorema de Radon-Nikodym. La unicidad de la función h es inmediata [13, theorem 1.39(b)]. También, si h es cualquier función en $L^1(\mu)$, la integral en (2.5) define una medida sobre $\mathfrak{M}$ [13, theorem 1.29] que claramente es absolutamente continua respecto a μ. El Teorema de Radon-Nikodym establece el recíproco: toda $\lambda \ll \mu$ (en cuyo caso $\lambda_a = \lambda$) se obtiene de esta manera.

La función que se obtiene en (b) se llama *derivada de Radon-Nikodym* de λ_a respecto a μ. Esto se puede expresar como $d\lambda_a = hd\mu$ o incluso $h = d\lambda_a/d\mu$.

Si ambas medidas λ y μ son positivas y σ-finitas, la mayor parte del teorema A.2.1 sigue siendo cierto. Ahora se puede escribir $X = \cup_n X_n$ donde $\lambda(X_n) < \infty$ y $\mu(X_n) < \infty$ para $n = 1, 2, \ldots$ Las descomposiciones de las medidas $E \to \lambda(E \cap X_n)$ todavía proporciona una descomposición de Lebesgue λ y aún obtenemos una función h que satisface (2.5), sin embargo, ya no es cierto que h sea integrable con respecto a μ, aunque h es localmente integrable, es decir, $\int_{X_n} hd\mu < \infty$ para todo $n = 1, 2, \ldots$

Por último si relajamos la condición de σ-finitud, podemos encontrarnos con situaciones en las que los dos resultados en el teorema A.2.1 no son ciertos. Por ejemplo, sea μ es la medida de Lebesgue en $X = (0, 1)$ y λ es la medida contadora[2] definida en la σ-álgebra de todos los conjuntos medibles Lebesgue. Entonces λ no tiene descomposición de Lebesgue con respecto a μ y, aunque $\mu \ll \lambda$ y μ es acotada, no existe $h \in L^1(\lambda)$ tal que $d\mu = hd\lambda$.

El teorema 6.11 en [13] explica el término 'continuidad' en la definición de $\lambda \ll \mu$: si μ es una medida positiva y λ una compleja definida en una σ-álgebra $\mathfrak{M}$, entonces $\lambda \ll \mu$ si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\lambda(E)| < \varepsilon$ para todo $E \in \mathfrak{M}$ con $\mu(E) < \delta$. Si $h \in L^1(\mu)$, esto se puede reescribir como

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E hd\mu = 0.$$

Como consecuencia del Teorema de Radon-Nikodym se tiene

- Si μ es una medida compleja sobre una σ-algebra $\mathfrak{M}$ en X, entonces existe una función medible Lebesgue h tal que $|h(x)| = 1$ para todo $x \in X$ y $d\mu = hd|\nu|$ [13, theorem 6.12].
- Si μ es positiva y $d\lambda/d\mu = g \in L^1(\mu)$, entonces $d|\lambda|/d\mu = |g|$ [13, theorem 6.13].

A.2.2. Medidas de Radon

En esta sección recogemos los resultados esenciales sobre conjuntos localmente compactos. En $\mathbb{R}^n$ sabemos que la medida de Lebesgue interactúa muy bien con su topología: los conjuntos medibles se pueden aproximar por abiertos o compactos y

[2] Esta medida viene definida sobre las partes 2^X en cualquier conjunto X: si $E \subset X$, $\lambda(E) = \infty$ si E es infinito y $\lambda(E) = \#E$ (el cardinal de E) si E es finito.

las funciones medibles se pueden aproximar por funciones continuas. De este modo, resulta interesante estudiar aquellas medidas que posean propiedades similares en conjuntos más generales. Además, resulta que ciertos funcionales lineales sobre espacios de funciones continuas vienen dados por integración contra tales medidas. Este hecho constituye un nexo entre Teoría de la Medida y Análisis Funcional y proporciona una herramienta para la construcción de medidas.

A lo largo de esta sección, X denota un espacio localmente compacto. $\mathscr{B}_X$ denota la σ-algebra de Borel sobre X, es decir, la σ-álgebra generada por los abiertos de X: las medidas sobre $\mathscr{B}_X$ se llaman *medidas de Borel*. Las uniones/intersecciones numerables de conjuntos cerrados/abiertos se denominan conjuntos F_σ/G_δ.

Funcionales positivos en $C_c(X)$

Recordemos que $C_c(X)$ denota el espacio de las funciones continuas con soporte compacto en X. Un funcional Λ en $C_c(X)$ se dice positivo si $\Lambda f \geq 0$ siempre que $f \geq 0$.

Si μ es una medida de Borel positiva localmente finita, es decir, $\mu(K) < \infty$ para todo subconjunto compacto $K \subset X$, entonces $C_c(X) \subset L^1(\mu)$ y por tanto, la aplicación $f \to \int_X f \, d\mu$ define un funcional positivo en $C_c(X)$. El Teorema de Representación de Riesz afirma que el recíproco también es cierto, es decir, que todo funcional positivo se construye de esta forma. Además, la unicidad sigue si se imponen ciertas condiciones de regularidad a μ. Estas condiciones son las siguientes: si μ es una medida de Borel y en un subconjunto de Borel $E \subset X$,

- μ es *regular exterior* en E si

$$\mu(E) = \text{ínf}\left\{\mu(U) \bigm/ E \subset U,\ U \,\text{abierto}\right\}$$

- μ es *regular interior* en E si

$$\mu(E) = \sup\left\{\mu(K) \bigm/ K \subset E,\ K \,\text{compacto}\right\}.$$

Una medida regular exterior e interior en conjuntos de Borel se dice *regular*. Resulta que la regularidad de una medida impone serias restricciones cuando X no es σ-compacto. La noción adecuada es la de *medida de Radon*: aquellas que son localmente finitas, regulares exteriores en conjuntos de Borel y regulares interiores solo en conjuntos abiertos. Cabe señalar que las medidas de Radon son regulares interiores en subconjuntos σ-finitos.

Ahora podemos enunciar el Teorema de Representación de Riesz para funcionales positivos. Para su enunciado usaremos la siguiente notación: si $U \subset X$ es abierto y $f \in C_c^\infty(X)$, con $f \prec U$ se debe entender que $0 \leq f \leq 1$ y sop $f \subset U$.

Teorema A.2.2. *Si Λ es un funcional lineal positivo sobre $C_c(X)$, entonces existe una única medida de Radon tal que $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$ para cualquier $f \in C_c(X)$.*

Además μ satisface

$$\mu(U) = \sup\left\{\Lambda f \,\big/\, f \in C_c(X),\ f \prec U\right\} \text{ para todo abierto } U \subset X \tag{2.6}$$

y

$$\mu(K) = \inf\left\{\Lambda f \,\big/\, f \in C_c(X),\ f \geq \chi_K\right\} \text{ para todo compacto } K \subset X. \tag{2.7}$$

A.2.3. El dual de $C_0(X)$. El Teorema de Representación de Riesz

Si X es un espacio topológico Hausdorff, $C_0(X)$ es la clausura uniforme de $C_c(X)$ y por tanto, si μ es una medida de Radon en X, el funcional $\Lambda f = \int_X f\,d\mu$ extiende continuamente a $C_0(X)$ si, y solo si, está uniformemente acotado respecto a la norma uniforme. De la igualdad (esto es un caso particular de (2.6))

$$\mu(X) = \sup\left\{\int_X f\,d\mu \,\Big/\, f \in C_c(X),\, 0 \leq f \leq 1\right\}$$

y el hecho que $\left|\int_X f\,d\mu\right| \leq \int_X |f|\,d\mu$, esto sucede precisamente cuando $\mu(X) < \infty$ y en este caso $\mu(X)$ coincide con la norma de Λ como operador. Esto identifica los funcionales lineales acotados y positivos en $C_0(X)$: vienen dados por integración contra una medida de Radon positiva.

El Teorema A.2.3 extiende este resultado e identifica el dual $\big(C_c(X)\big)^*$.

Teorema A.2.3 **(*de Representación de Riesz*).** *Sea X un espacio Hausdorff localmente compacto. Para $\mu \in \mathcal{M}(X)$ y $f \in C_0(X)$ sea $\Lambda_\mu f = \int_X f\,d\mu$. Entonces la aplicación $\mu \mapsto \Lambda_\mu$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{M}(X)$ y $\big(C_0(X)\big)^*$.*

Aquí $\mathcal{M}(X)$ denota el espacio de las medidas complejas de Radon, es decir, aquellas cuyas partes real e imaginaria son medidas signadas cuyas variaciones positivas y negativas son medidas de Radon. Para $\mu \in \mathcal{M}(X)$, $\|\mu\| = |\mu|(X)$ denota la variación total de μ. Si μ es una medida de Borel compleja entonces μ es Radon si, y solo si, $|\mu|$ es Radon. Además, en este caso, $\mathcal{M}(X)$ es un espacio vectorial y $\|\mu\|$ una norma en él.

A.3. Producto de medidas de Radon. El Teorema de Tonelli-Fubini

En esta sección recogemos las propiedades mas relevantes que presentan las medidas de radon en espacios producto. Sean X e Y dos espacios Hausdorff localmente compactos y π_X, π_Y las proyecciones de $X \times Y$ sobre X e Y, respectivamente.

Si $\mathfrak{M}_X$ y $\mathfrak{M}_Y$ son σ-álgebras en X e Y, la *σ-álgebra producto* en $X \times Y$, $\mathfrak{M}_{X\times Y}$ es aquella generada por las preimágenes $\pi_X^{-1}(E_X)$ y $\pi_Y^{-1}(E_Y)$ donde E_X y E_Y recorren todos los medibles $E_X \subset \mathfrak{M}_X$ y $E_Y \subset \mathfrak{M}_Y$.

Definición A.3.1. *A cada función f en $X \times Y$ y a cada $x \in X$ se le asocia una función $f_x(y) = f(x, y)$.*

Análogamente, si $y \in Y$, f^y es la función definida en X por $f^y(x) = f(x, y)$.

Teorema A.3.2. *Sea f un función $\mathfrak{M}_X \times Y$-medible eb $X \times Y$. Entonces,*

1. *Para cada $x \in X$, f_x es una función $\mathfrak{M}_Y$-medible.*
2. *Para cada $y \in Y$, f^y es una función $\mathfrak{M}_X$-medible.*

Teorema A.3.3. *Sean $(X; \mathfrak{M}_X, \mu)$ e $(Y; \mathfrak{M}_Y, \lambda)$ espacios de medida σ-finita, y sea f una función $(\mathfrak{M}_{X\times Y}$.*

1. *Si $0 \le f \le \infty$, y si*
$$\varphi(x) = \int_Y f_x d\lambda, \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu \qquad (x \in X, y \in Y) \tag{3.1}$$
entonces φ es $\mathfrak{M}_X$-medible, $\psi(y)$ es$\mathfrak{M}_Y$-medible, y
$$\int_X \varphi d\mu = \int_{X\times Y} \lambda) = \int_Y \psi d\lambda. \tag{3.2}$$
2. *Si f es compleja y si*
$$\varphi^*(x) = \int_Y |f|_x d\lambda \quad y \quad \int_X \varphi^* d\mu < \infty, \tag{3.3}$$
3. *Si $f \in L^1(\mu \times \lambda)$, entonces $f_x \in L^1(\lambda)$ para casi todo $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$; las funciones φ y ψ definidas por (3.1) en casi todo punto están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\lambda$, respectivamente, y se verifica (3.2)*

A.4. El Teorema de Hahn-Banach

Teorema A.4.1. *Sea M un subespacio de un espacio vectorial normado V. Si Λ un funcional lineal acotado en M, entonces Λ puede ser extendido a un funcional lineal acotado $\widetilde{\Lambda}$ en V tal que $\|\widetilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$.*

Comentarios:

- Que $\widetilde{\Lambda}$ sea una extensión de Λ significa que $\widetilde{\Lambda}x = \Lambda x$ para todo $x \in M$.
- Las normas $\|\widetilde{\Lambda}\|$ y $\|\Lambda\|$ se entienden calculadas respecto a sus respectivos dominios, es decir,
$$\|\Lambda\| = \left\{|\Lambda x| \,\big/\, x \in M,\ \|x\| \le 1\right\}, \qquad \|\widetilde{\Lambda}\| = \left\{|\widetilde{\Lambda}x| \,\big/\, x \in V,\ \|x\| \le 1\right\}.$$
- El cuerpo de escalares puede ser tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{C}$, es decir, V puede ser un espacio vectorial real o complejo. De hecho las demostraciones en ambos casos son idénticas.

Como consecuencia tenemos

Corolario A.4.2. *Sea M un subespacio de un espacio vectorial normado V. Entonces $x_0 \in \overline{M}$ si, y solo si, cualquier funcional lineal acotado Λ en V que se anula en M también lo hace en x_0, es decir, si $\Lambda x = 0$ para todo $x \in M$ entonces $\Lambda x_0 = 0$.*

Demostración. Por continuidad, si $x_0 \in \overline{M}$ y $\Lambda\big|_M = 0$ entonces $\Lambda x_0 = 0$. Recíprocamente, supongamos que $x_0 \notin \overline{M}$. Entonces existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in M$ $\|x - x_0\| > \delta$. En el subespacio $\widetilde{M}$ generado por M y x_0 definamos el funcional $\widetilde{\Lambda}$ en $\widetilde{M}$ mediante $\widetilde{\Lambda}(x + \lambda x_0) = \lambda$. Puesto que

$$\|x + \lambda x_0\| = |\lambda| \|x/\lambda + x_0\| \geq |\lambda|\delta$$

para $x \in M$ y $\lambda \neq 0$ vemos que $\widetilde{\Lambda}$ define un funcional lineal acotado en $\widetilde{M}$ con norma $\|\widetilde{\Lambda}\| \leq 1/\delta$. Puesto que por construcción $\widetilde{\Lambda}\big|_{\widetilde{M}} = 0$ y $\widetilde{\Lambda} x_0 = 1$, el Teorema de Hahn-Banach permite extender $\widetilde{\Lambda}$ a V. □

A.5. Particiones de la unidad

Las particiones de la unidad constituyen un recurso que, en la categoría C^∞, permite construir (o ensamblar) objetos globales a partir de datos locales. Siguiendo [8], en esta sección mostramos como construirlas.

Nuestro primer objetivo es construir una función C^∞ $\varphi : \mathbb{C} \to [0,1]$ tal que, si $0 < a < b$

(i) $\varphi(z) = 1$ si $|z| \leq a$,

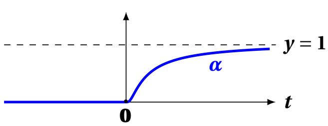
(ii) $0 < \varphi(z) < 1$ si $a < |z| < b$,

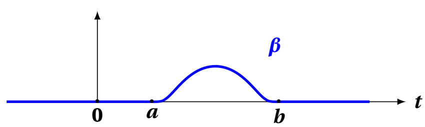
(iii) $\varphi(z) = 0$ si $|z| \geq b$.

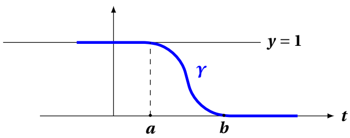
Primero consideremos la función $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

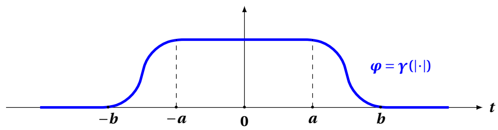
$$\alpha(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-1/t}, & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

y sea $\beta(t) = \alpha(t-a)\alpha(b-t)$. Si $\gamma(t) = \int_t^b \beta(s)ds \big/ \int_a^b \beta(s)ds$, la función $\varphi(z) = \gamma(|z|)$ cumple (i)–(iii).









Lema A.5.1. *Sea $K \subset \mathbb{C}$ es compacto y $\Omega \supset K$ abierto. Entonces existe una función $\phi \in \mathbb{C}_c^\infty(U)$ tal que $0 \leq \phi \leq 1$ y $\phi \equiv 1$ en K.*

Demostración. Para cada $w \in K$ sean $\Delta_w \subset U_w \subset \Omega$ discos centrados en w y elijamos una función $\varphi_w \in C^\infty(U_w)$ con soporte en U_w tal que $0 \leq \varphi_w \leq 1$ en $\mathbb{C}$ y $\varphi_w \equiv 1$ en $\overline{\Delta_w}$. Puesto que K es compacto, un número finito de discos Δ_{w_j} $(j = 1, 2, \ldots m)$ recubren K. Ahora la función $\phi = 1 - \prod_{j=1}^n (1 - \varphi_{w_j})$ cumple la tesis del lema. □

Teorema A.5.2. *Sean $w_j \in \Delta_j \subset U_j$ una colección finita de discos centrados en los puntos w_j. Entonces existen funciones $\phi_j \in C_c^\infty(U_j)$ tales que $0 \leq \phi_j \leq 1$ en $\mathbb{C}$ y $\sum_j \phi_j \equiv 1$ en $\cup_j \Delta_j$.*

Demostración. Si φ_j las funciones consideradas en la demostración del lema anterior, sean D_j discos centrados en w_j, $\overline{\Delta_j} \subset D_j$ tales que $\varphi_j > 1/2$ en D_j. Sea ψ la función que proporciona el lema anterior aplicado al compacto $K = \cup_j \overline{\Delta_j}$ y al abierto $\Omega = \cup_j D_j$. Si

$$\phi_j = \psi \frac{\varphi_j}{\sum_k \varphi_k},$$

$\phi_j \in C^\infty(\mathbb{C})$ ya que en un entorno de Ω la suma $\sum_k \varphi_k$ es mayor que, por ejemplo, $1/4$ y $\psi \equiv 0$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Trivialmente, $0 \leq \phi \leq 1$ y $\sum_j \phi_j = \psi \equiv 1$ en $\cup_j \Delta_j \subset K$. □

A.6. Soluciones globales de la ecuación $\bar\partial$

Proposición A.6.1. *Si $f \in C_c^2(\mathbb{C})$, entonces*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial f / \partial \bar{w}(w)}{z - w} \, dA(w) \tag{6.1}$$

Demostración. Por la regla de la cadena (ver la observación A.6.2), en coordenadas polares tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{i}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \tag{6.2}$$

Una demostración alternativa va como sigue: sólo hemos de determinar dos funciones $A = A(\varrho, \theta)$ y $B = B(\varrho, \theta)$ tales que $\partial/\partial\bar{z} = A\partial/\partial\varrho + B\partial/\partial\theta$. Para ello basta testar esta igualdad para las funciones f y $\bar{f}$ donde $f(z) = z = \varrho e^{i\theta}$; para la primera tenemos $e^{i\theta} A + i e^{i\theta} \varrho B = 0$ y, para la segunda, $e^{-i\theta} A - i e^{-i\theta} \varrho B = 1$. Así

$$\left.\begin{aligned} A+i\varrho B&=0\\ A-i\varrho B&=e^{i\theta}\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad A=e^{i\theta}/2,\ B=ie^{i\theta}/2\varrho.$$

Para $z=0$, el lado derecho de (6.1) es igual al límite cuando $\varepsilon\to 0^+$ de

$$-\frac{1}{2\pi}\int_\varepsilon^\infty\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial f}{\partial\varrho}+\frac{i}{\varrho}\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)d\theta d\varrho \tag{6.3}$$

y puesto que para cada $\varrho>0$ la función $\theta\to f\left(\varrho e^{i\theta}\right)$ es 2π-periódica, la integral de $\partial f/\partial\theta$ es 0. (6.3) es por tanto igual a

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^\infty\frac{\partial f}{\partial\varrho}d\varrho=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)d\theta\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{}f(0)$$

ya que $f\left(\varepsilon e^{i\theta}\right)\to f(0)$ uniformemente cuando $\varepsilon\to 0^+$. Esto prueba (6.1) para $z=0$. El caso general sigue aplicando éste a las trasladadas de f: si $a\in\mathbb{C}$ y $f_a(z)=f(a+z)$, de (6.1) para $z=0$ tenemos

$$\begin{aligned} f(z)=f_z(0)&=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial f_z/\partial\bar w(w)}{w}dA(w)\\ &=-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial f/\partial\bar w(z+w)}{w}dA(w)\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial f/\partial\bar w(w)}{z-w}dA(w)\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variables $w\leftrightarrow z+w$ ya que, como se puede comprobar fácilmente, $\partial f_z/\partial\bar w(w)=\partial f/\partial\bar w(z+w)$. □

Observación A.6.2. Como se ha dicho anteriormente, (6.2) también sigue de la regla de la cadena, a saber,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varrho}&=\frac{\partial x}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\varrho}\frac{\partial}{\partial y}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial\theta}&=\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial y}=-\varrho\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial x}+\varrho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y},\end{aligned}$$

por lo que $\partial/\partial x=\left(\varrho\cos\theta\partial/\partial\varrho-\operatorname{sen}\theta\partial/\partial\theta\right)/\varrho$ y $\partial/\partial y=\left(\varrho\operatorname{sen}\theta\partial/\partial\varrho+\cos\theta\partial/\partial\theta\right)/\varrho$. Así,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\bar z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left((\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{(-\operatorname{sen}\theta+i\cos\theta)}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left((\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{i}{\varrho}(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{i}{\varrho}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)=\frac{1}{2}e^{i\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\varrho}+\frac{i}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).\end{aligned}$$

Corolario A.6.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado. Supongamos que $f \in C^1(\Omega)$ es acotada y sea*

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{f(w)}{z-w}\,dA(w),\; z \in \Omega. \tag{6.4}$$

Entonces $u \in C^1(\Omega)$ y $\partial u/\partial \bar{z} = f$ en Ω.

Demostración. Podemos considerar que f está definida en todo $\mathbb{C}$ sin más que hacer $f = 0$ fuera de Ω. Así (6.4) se puede escribir como

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(z-w)}{w}\,dA(w). \tag{6.5}$$

Puesto que en esta expresión se puede derivar bajo signo integral, $u \in C^1(\Omega)$.

Fijemos $a \in \Omega$ y sea $\phi \in C^1_c(\Omega)$ tal que $\psi \equiv 1$ en un entorno U de a. Si reemplazamos f por $(1-\psi)f$ en (6.4), la función resultante es holomorfa en U y, por tanto, f se puede reemplazar por ψf para el cómputo de $\partial f/\partial \bar{z}(a)$. De modo que, por (6.1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(a) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\psi f)/\partial \bar{w}(z-w)}{w}\,dA(w)\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial(\psi f)/\partial \bar{w}(w)}{z-w}\,dA(w) = (\psi f)(a)\end{aligned}$$

ya que $\psi f \in C^1_c(\mathbb{C})$. Pero $\psi(a) = 1$, por lo que, $\partial u/\partial \bar{z}(a) = f(a)$. □

Como ya se ha mencionado en la sección 4, este corolario combinado con el Teorema de Runge permite probar que la ecuación (4.1) admite soluciones globales cualesquiera que sean Ω y $f \in C^1(\Omega)$.

Bibliografía

[1] CONWAY J.B. *Functions of one complex variable.* Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin (1978).

[2] BRUNA, J. AND CUFÍ, J.. *Complex Analysis* EMS textbooks in mathematics, European Mathematical Society (2013).

[3] CARLEMAN, T *Sur un théorème de Weiwerstrass.* Ark. Mat. Astronom. Fys. 20B, 1-5. JB 53, 237. IV:3.1927

[4] FOLLAND, G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2nd Edition. John Wiley & Sons (1999).

[5] GAIER, D. *Lectures on Complex Approximation.* Birkhäuser, Boston (1987).

[6] GAMELIN, T.W. *Uniform Algebras.* Prentice-Hall (1969).

[7] GAMELIN, T.W. *Complex Analysis.* Undergraduate Text in Mathematics. Springer-Verlag, New York (2001).

[8] HIRSH, M.W. *Differential Topology.* Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York (1976).

[9] MACIÁ MEDINA, V. J. *Análisis Complejo: la ecuación $\bar{\partial}$ y funciones armónicas en el plano.* Trabajo Fin de Grado, Sección de Matemáticas – Universidad de la Laguna (2017).

[10] MERGELYAN, N. *Uniform approximations to functions of a complex variable.* Uspehi Mat. Nauk (. S.) 7, nº 2 (48), 31-122 (1952) (Russian). Translation: A. M. S. Translation Ser 1, Vol 3, 294-391.

[11] RAO, M., STETKÆR H. *Complex Analysis. An invitation.* World Scientific (1991).

[12] REMMERT, R. *Classical Topics in Complex Function Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 172. Springer-Verlag, New York-Berlin (1998).

[13] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis.* 3ª Edición. McGraw-Hill (1987).

[14] RUNGE, C. *Zur Theorie der eindeutigen analitischen Funktionen.* Acta Math. 6, 229-244 (1885)

Complex Approximation

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Melanie Fumero Padrón
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100828764@ull.edu.es

Abstract

THIS MEMOIR swivels around Runge´s approximation Theorem about which two proofs, both based on Cauchy's integral formula, are given. The first uses the fact that Cauchy's kernel is rational and the second, also classic and with a functional analysis taste, is founded in Riesz representation Theorem. As a novelty, we include an intriguing relation between Runge's theorem and partial differential equations, in this case, the non homogeneous Cauchy-Riemann equation. Due to the complexity of its proof, we only formulate Mergelyan's theorem and prove some generalization of this theorem.

1. Introduction

GIVEN a compact subset $K \subset \mathbb{C}$: let $P(K)$ be the uniform closure in $C(K)$ of holomorphic polynomials, $R(K)$ the uniform closure of rational functions with poles off K and $A(K)$ the subalgebra of $C(K)$ consisting of those continuous functions on K which are holomorphic in K^o. The inclusions $P(K) \subset R(K) \subset A(K) \subset C(K)$ are evident, as it is the fact that $A(K) = C(K)$ if, and only if $K^o = \emptyset$. The ***Aproximación Problem*** consists in finding conditions on an given function $f \in C(K)$ so that $f \in R(K)$ or $f \in P(K)$, or to decide for which compact sets K one has $P(K) = A(K)$ or $R(K) = A(K)$.
In this manuscript we carry out a fairly comprehensive study of Runge´s approximation Theorem to the extend that, under suitable hypothesis, holomorphic functions can be locally approximated by rational ones.
Two non standard features of this work lie in the fact that we present a relation of Runge´s Theorem with the problem of solving the $\bar\partial$ problem with certain estimates.

2. Runge's theorem

Runge's theorem claims that if K is a compact subset of $\mathbb{C}$, $E = \{\alpha_j\}$ a set with a point in each connected component of $\mathbb{C} \setminus K$ and $f \in H(K)$ then, for $\varepsilon > 0$ it exists a rational function R_E with poles in E such that

$$|f(z) - R_E(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

So, let Ω be an open of $\mathbb{C}$ and $K \subset \Omega$ compact. Then the following are equivalent:

- No connected component of $\Omega \setminus K$ is relatively compact in Ω.
- Every bounded component of $\mathbb{C} \setminus K$ intersects $\mathbb{C} \setminus \Omega$.
- Every $f \in H(K)$ can be approximated, uniformly on K, by rational functions with poles outside Ω.
- Every $f \in H(K)$ can be approximated, uniformly on K, by functions holomorphic on Ω.
- For every $a \in \Omega \setminus K$, it exists h a holomorphic function on Ω such that $|h(a)| > ||h||_K = \max\{|h(z)|, z \in K\}$.
- $K = \hat{K}_\Omega$, where $\hat{K}$ is the polynomial convex hull of K. This means that K and Ω has the same “holes ”.

3. $\bar\partial$ equation

Let $f \in C^\infty(\Omega)$. The $\bar\partial$ equation consists in finding another function $u \in C^\infty(\Omega)$ such that $\bar\partial u = f$ in Ω, where

$$\bar\partial u = \frac{\partial u}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Runge's theorem shows that the inhomogeneous Cauchy-Riemann equation $\bar\partial u = f$ has a solution on any open subset Ω of $\mathbb{C}$. Moreover, the next two problems are equivalent:

A problem: Let K be a compact and Ω an open such that $K \subset \Omega$. Every holomorphic function on K can be approximated by holomorphic functions on Ω?
H problem: Given $\varepsilon > 0$ and $f \in C^\infty(\Omega)$ such that $K \cap \mathrm{sopf} = \emptyset$. Can we find a solution $u \in C^\infty(\Omega)$ to $\bar\partial u = f$ in Ω such that $|u(z)| < \varepsilon, z \in K$?

4. Mergelyan's theorem

According to Mergelyan's theorem, if K is a compact set in the plane whose complement is connected, and $f \in A(K)$, then for all $\varepsilon > 0$ there exists a polynomial P such that

$$|f(z) - P(z)| < \varepsilon, \qquad z \in K.$$

However, what would happen if $\mathbb{C} \setminus K$ is not connected? In case $\mathbb{C} \setminus K$ has finitely many connected components, we can extend Mergelyan's theorem replacing polynomials with rational functions with poles in $\mathbb{C} \setminus K$. This will be accomplished with the help of the important localization theorem by Bishop.

On the other hand, if $\mathbb{C} \setminus K$ has a infinite number of connected components there are compact sets for which Mergelyan's theorem does not hold. We outline the construction of such an example, know as a Swiss cheese set (Alice Roth, 1938):

$$\mathscr{S} = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{j=1}^{\infty} \triangle_j,$$

where $\overline{\mathbb{D}}$ is the closed unit disc and $\{\triangle_j = D(z_j, r_j)\}$ is a countable family of open discs with the following properties:

- The $\overline{\triangle_j} \subset \overline{\mathbb{D}}$ are pairwise disjoint.
- $\sum r_j < 1$.
- $\overline{\mathbb{D}} \setminus \cup \triangle_j$ contains no disc, that is, $\mathscr{S}$ has no interior.

References

[1] BRUNA, J. ; CUFÍ, J. *Complex Analysis,* European Mathematical Society, Zürich (2013).

[2] CONWAY, J.B. *Functions of One Complex Variable,* Springer, New York (1973).

[3] CARLEMAN, T *Sur un théorème de Weiwerstrass*. Ark. Mat. Astronom. Fys. 20B, 1-5. JB 53, 237. IV:3.1927

[4] FOLLAND, G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* 2nd Edition. John Wiley & Sons (1999).

[5] GAIER, D. *Lectures on Complex Approximation,* Birkhäuser (1987).

[6] GAMELIN, T.W. *Uniform Algebras.* Prentice-Hall (1969).

[7] GAMELIN, T.W. *Complex Analysis,* Springer, New York (2001).

[8] MACIÁ MEDINA, V. J. *Análisis Complejo: la ecuación $\bar\partial$ y funciones armónicas en el plano.* Trabajo Fin de Grado, Sección de Matemáticas – Universidad de la Laguna (2017).

[9] MERGELYAN, N. *Uniform approximations to functions of a complex variable.* Uspehi Mat. Nauk (. S.) 7, nº 2 (48), 31-122 (1952) (Russian). Translation: A. M. S. Translation Ser 1, Vol 3, 294-391.

[10] RAO, M. ; STETKAER, H. *Complex Analysis,* World Scientific, Singapore (1991).

[11] REMMERT, R. *Classical Topics in Complex Function Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 172. Springer-Verlag, New York-Berlin (1998).

[12] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis,* Third Edition, Mc Graw Hill, Singapore (1987).

[13] RUNGE, C. *Zur Theorie der eindeutigen analitischen Funktionen.* Acta Math. 6, 229-244 (1885)