

Óscar Méndez Villavicencio

Teorema de Whitehead y Aproximación Celular

Whitehead Theorem and Cellular Approximation

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2018

DIRIGIDO POR

Josué Remedios Gómez

Josué Remedios Gómez

Departamento de Matemáticas, Es-
tadística e Investigación Operativa

Universidad de La Laguna

38271 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco la labor de mi tutor Josué Remedios Gómez, cuya dedicación y paciencia han permitido dar el máximo de mis capacidades.

Agradezco también a mi familia por haberme dado el apoyo necesario durante todos los años que he estudiado en esta facultad, así como a los compañeros de clase que he ido conociendo con el paso del tiempo.

Finalmente, no puedo olvidarme de los grandes matemáticos que ha habido a lo largo de la historia, de los que he obtenido una gran inspiración para escribir esta memoria.

Resumen • Abstract

Resumen

En el año 1949 J.H.C. Whitehead introduce la noción de CW complejo como una estructura celular obtenida de manera inductiva. Estos espacios topológicos, que pueden ser vistos como una generalización de los poliedros asociados a los complejos simpliciales, presentan una serie de ventajas a la hora de desarrollar la teoría de homotopía: por ejemplo, si una aplicación induce isomorfismos entre los grupos de homotopía de los CW complejos, entonces es una equivalencia de homotopía (Teorema de Whitehead). El objetivo de esta memoria es presentar y demostrar una serie de teoremas clásicos, como el que se acaba de mencionar, que han puesto de manifiesto la relevancia de los CW complejos a partir de la segunda mitad del siglo XX.

Palabras clave: *CW complejo – Ley exponencial – Sucesión exacta – equivalencia débil – Cofibración – Teorema de Whitehead – Aproximación celular.*

Abstract

J.H.C. introduced in 1949 the CW complex notion as a cellular structure defined inductively. These topological spaces can be interpreted as a generalization of the polyhedrons of simplicial complexes, and also have some advantages in order to develop homotopy theory: for instance, if a function induces isomorphisms between homotopy groups of CW complexes then this function is a homotopy equivalence as well (Whitehead theorem). The goal of this memory is to introduce and prove some classical theorems, like the previous one, which show the relevance of CW complexes since the second half of twentieth century.

Keywords: *CW complex – Exponential law – Exact sequence – Weak equivalence – Cofibration – Whitehead theorem – Cellular approximation.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	IV
Introducción	VI
1. Teoría de categorías y homotopía	1
1.1. Preliminares. Teoría de categorías.	1
1.2. Espacios de funciones	12
1.3. Categoría homotópica y grupos de homotopía	18
1.4. Cofibraciones y fibraciones. Sucesiones exactas	23
2. CW complejos y Teoremas de aproximación	34
2.1. CW complejos	34
2.2. Teorema de Whitehead y aproximación por CW complejos	42
Bibliografía	54
Poster	55

Introducción

John Henry Constantine Whitehead (1904-1960) fue un matemático de familia británica nacido en Madras, India. Fue sobrino de Alfred North Whitehead, matemático y filósofo inglés que colaboró con Bertrand Russel en el desarrollo de la teoría de tipos. J.H.C. Whitehead se trasladó rápidamente a Oxford, donde estudió matemáticas y, después de un año probando como corredor de bolsa, empezó en 1929 un doctorado en Princeton, Nueva Jersey. En 1949 Whitehead llevó a cabo una de sus mayores aportaciones a las Matemáticas: en sus artículos *Combinatorial Homotopy I* y *Combinatorial Homotopy II* (véase [10], [11]) define los CW complejos, una clase de espacios que impulsará el desarrollo de la teoría de homotopía. Los CW complejos presentan mejores propiedades categóricas que los complejos simpliciales, y además se definen de manera inductiva, lo que en conjunto facilita muchas demostraciones. En concreto, al final de esta memoria se explican algunas de sus aplicaciones: Toda equivalencia débil entre CW complejos (es decir, toda aplicación induce isomorfismos entre sus grupos de homotopía) es una equivalencia de homotopía (teorema de Whitehead), cualquier aplicación continua entre CW complejos es homótopa a un tipo de aplicación compatible con la estructura de los CW complejos (teorema aproximación celular), y todo espacio topológico es débilmente equivalente a un CW complejo (teorema de CW Aproximación).

El presente trabajo consta de dos capítulos; el primero se centra en proporcionarnos herramientas matemáticas para el posterior estudio de los CW complejos, esto es: se describen las nociones generales de teoría de categorías, se definen los grupos de homotopía y se estudian algunas sucesiones exactas que conectan estos grupos de homotopía. En el segundo capítulo se definen extensamente los CW complejos y seguidamente se estudian y exponen sus principales propiedades. Finalmente, el capítulo (y la memoria) concluyen con el enunciado y demostración de los tres teoremas clásicos antes mencionados.

Supondremos que el lector está familiarizado con conocimientos básicos de topología general y homotopía, tales como nociones de espacios cocientes, espacios conexos por caminos, compacidad, conexidad o grupo fundamental. Pueden servir como referencia los textos de S. Willard [12], J.R. Munkres [2] y C. Kosniowski [13].

Teoría de categorías y homotopía

En este primer capítulo se desarrollan conceptos y resultados tanto algebraicos como de teoría de homotopía, necesarios para completar las demostraciones de los teoremas clásicos en el segundo capítulo. Debido a las limitaciones sobre la extensión de la memoria, en algunas demostraciones se han omitido los detalles o bien, cuando no eran evidentes, se han sustituido por la correspondiente referencia bibliográfica.

En la primera sección se presentan nociones de teoría de categorías mostrando algunos ejemplos relevantes, profundizando en el estudio de las categorías de espacios topológicos y de espacios topológicos punteados. En la siguiente sección, utilizando algunas de estas herramientas categóricas, se introducen los espacios de funciones y se prueba la ley exponencial, resultado clave para el estudio de estos espacios. En la tercera sección se estudia la categoría homotópica de espacios topológicos y se definen los grupos superiores de homotopía. Finalmente, en la última sección, tras el estudio de las cofibraciones y fibraciones, se prueba la exactitud de distintas sucesiones de grupos de homotopía.

1.1. Preliminares. Teoría de categorías.

En esta sección se comienza recordando conceptos básicos de topología y teoría de homotopía, así como resultados generales sin exponer las demostraciones. A continuación se introduce la teoría de categorías y se muestran algunos ejemplos, así como sus principales propiedades. Una categoría se podría entender como la formalización de una estructura matemática específica, por ejemplo, la teoría de conjuntos, en términos de grafos dirigidos (los nodos del grafo son los conjuntos y las aristas orientadas son las aplicaciones entre ellos). En palabras de los pioneros de esta disciplina, Saunders Mac Lane y Samuel Eilenberg, en 1942, la teoría de categorías nace de la observación de que muchas propiedades de sistemas matemáticos pueden ser unificadas y simplificadas por diagramas de flechas que enlazan puntos.

Más adelante, y también en el contexto de la teoría de categorías, se definen construcciones importantes como los “push out”, los “pull back” y los colímites, que usaremos a lo largo de todo el estudio de los CW complejos.

Definición 1.1. *Un espacio topológico X se dice localmente compacto en el punto x si existe un subespacio compacto de X que contiene un entorno de x . Si X es localmente compacto en todos sus puntos, entonces se dice que X es localmente compacto.*

A continuación se enuncia un lema de uso frecuente para probar la correcta definición de muchas aplicaciones entre espacios topológicos. Puede verse una demostración, por ejemplo, en [3], pág. 108.

Lema 1.2. *(Lema de continuidad) Sea X un espacio topológico tal que $X = F_1 \cup \dots \cup F_n$, donde F_i es un subespacio cerrado de X , para todo i, \dots, n . Se suponen continuas las aplicaciones $f_i : F_i \rightarrow Y$ con $f_i|_{F_i \cap F_j} = f_j|_{F_i \cap F_j}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.*

Entonces la aplicación $f : X \rightarrow Y$ definida por $f(x) = f_i(x), x \in F_i$ es continua

Definición 1.3. *Si $f, g : X \rightarrow Y$ son aplicaciones continuas y $A \subset X$, se dice que f es homótopa a g relativamente a A (denotado $f \simeq g \text{ rel } A$) si existe una aplicación continua $H : X \times I \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ y $H(a, t) = f(a) = g(a)$, para todo $x \in X$, $a \in A$ y $t \in I$. La aplicación continua H se denomina homotopía relativa de f a g relativa a A , y se denota $H : f \simeq_H g \text{ rel } A$.*

Definición 1.4. *Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se dice nulhomótopa si es homótopa a una aplicación constante. Una homotopía F entre f y la aplicación constante se denomina nulhomotopía.*

Definición 1.5. *Sean X, Y espacios topológicos. Se dice que la aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es equivalencia de homotopía si existe alguna aplicación $g : Y \rightarrow X$ tal que $gf \simeq 1_X$ y $fg \simeq 1_Y$. También se dice que X es homotópicamente equivalente a Y o que X e Y son del mismo tipo de homotopía, lo cual se denota por $X \simeq Y$.*

Lema 1.6. *Sean dos aplicaciones continuas $f, f' : X \rightarrow Y$ y un subconjunto $A \subseteq X$. Si $f \simeq f' \text{ rel } A$ entonces:*

1. $gf \simeq gf' \text{ rel } A$ para toda aplicación continua $g : Y \rightarrow Z$.
2. $fh \simeq f'h \text{ rel } B$ para toda aplicación continua $h : Z \rightarrow Z$ y para todo B tal que $h(B) \subseteq A$

Definición 1.7. *Una categoría \mathbf{C} consiste en la siguiente estructura:*

1. Una clase $\text{Ob}(\mathbf{C})$, cuyos elementos se denominan objetos de la categoría.
2. Para cada par de objetos X e Y , un conjunto $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, cuyos elementos se denominan morfismos de X a Y (Un morfismo $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ se denota por $f : X \rightarrow Y$)

3. Para cada terna de objetos X, Y, Z una aplicación llamada composición :

$$\circ : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f = gf$$

Para cada objeto X , un morfismo $1_X : X \rightarrow X$ llamado identidad en X , satisfaciendo dos axiomas:

A1. Axioma de asociatividad : Dados $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$, se verifica $h(gf) = (hg)f$.

A2. Axioma de identidad : Dado $X \xrightarrow{f} Y$, verifica $1_Y f = f = f 1_X$.

A continuación se muestran algunos ejemplos de categorías:

- La categoría de conjuntos, denotada por **Set**, en la que $Ob(\mathbf{Set})$ es la clase formada por todos los conjuntos y $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, Y)$ es el conjunto formado por las aplicaciones de X en Y . La composición e identidades son obvias. También se puede tomar la categoría **Set**_{*}, formada por los conjuntos basados y las aplicaciones punteadas.
- La categoría de espacios topológicos **Top** formada por los espacios topológicos y las aplicaciones continuas, y la categoría análoga **Top**_{*} de espacios topológicos basados y aplicaciones punteadas.
- La categoría de parejas de espacios, denotada por **Top**⁽²⁾, que tiene por objetos los pares de espacios (X, A) con $A \subseteq X$, y los morfismos $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$ tales que $f(A) \subseteq B$.
- La categoría cociente:
Una *congruencia* en una categoría **C** es una relación de equivalencia \sim en la clase de todos los morfismos $\bigcup_{X, Y} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$, verificando:
 - a) Si $f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ y $f \sim g$ entonces $g \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$.
 - b) Si $f \sim f', g \sim g'$ y la composición gf existe (por tanto existe $g'f'$) entonces $gf \sim g'f'$.

Dadas una categoría **C** y una congruencia \sim entonces \mathbf{C}/\sim es una categoría considerando la siguiente estructura:

$$Ob(\mathbf{C}/\sim) = \mathbf{Ob}(\mathbf{C})$$

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}/\sim}(X, Y) = \{[f]/f \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)\}$$

donde $[f]$ denota la clase de f .

La composición se define por $[g][f] = [gf]$ y las identidades son $[1_X] : X \rightarrow X$. \mathbf{C}/\sim se denomina **categoría cociente de C**. Normalmente se usa la notación $[X, Y] = \text{Hom}_{\mathbf{C}/\sim}(X, Y)$.

Definición 1.8. Se dice que un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X Z & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \\ \downarrow \bar{g} & & \downarrow g \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

es un pull back si para todo par de morfismos $Y \xleftarrow{r} T \xrightarrow{s} Z$ tales que $fr = gs$, existe un único morfismo $h : T \rightarrow Y \times_X Z$ verificando $\bar{g}h = r$ y $\bar{f}h = s$.

El concepto dual* de pull back es el de push out. Se dice que un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow \bar{f} \\ Y & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \cup_X Z \end{array}$$

es un push out cuando para todo par de morfismos $Y \xrightarrow{r} T \xleftarrow{s} Z$ tales que $rf = sg$, existe un único morfismo $h : Y \cup_X Z \rightarrow T$ verificando $h\bar{g} = r$ y $h\bar{f} = s$.

El objeto $Y \times_X Z$ se denomina pull back y el objeto $Y \cup_X Z$ se denomina push out. Debemos mencionar que, en caso de existir, éstos son únicos salvo isomorfismo.

Presentamos a continuación la construcción explícita de los objetos push out y pull back en el caso de las categorías de conjuntos y de espacios topológicos:

- Push outs en **Set**. Sean $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ aplicaciones. Sobre la unión disjunta $Y \sqcup Z = (Y \times \{0\}) \cup (Z \times \{1\})$ se define la relación de equivalencia generada por $(f(x), 0) \sim (g(x), 1)$, y se tiene que

$$Y \cup_X Z = Y \sqcup Z / \sim$$

con inducidas definidas por $\bar{f}(z) = [(z, 1)]$ y $\bar{g}(y) = [(y, 0)]$.

- Pull backs en **Set**. Dadas dos aplicaciones $Y \xrightarrow{f} X \xleftarrow{g} Z$, se tiene que $Y \times_X Z = \{(y, z) \in Y \times Z / f(y) = g(z)\}$ con inducidas las correspondientes proyecciones.
- Push outs en **Top**. El push out de dos aplicaciones continuas

$$(Y, \tau_Y) \xrightarrow{f} (X, \tau_X) \xleftarrow{g} (Z, \tau_Z)$$

* Se hace referencia al concepto de dualidad de Eckmann y Hilton [7]

es el par $(Y \cup_X Z, \tau)$ donde $Y \cup_X Z$ es el push out conjuntista, y $A \in \tau$ si y sólo si $\bar{g}^{-1}(A) \in \tau_Z$. Esta topología coincide con la topología cociente inducida en $X \sqcup Y$ por la relación \sim del push out en **Set**.

Si consideramos aplicaciones punteadas $(Y, y_0) \leftarrow (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$, su push out en **Top**_{*} es el push out topológico ya definido con punto base $[(y_0, 0)] = [(z_0, 1)]$.

- Pull backs en **Top**. Dadas dos aplicaciones continuas

$$(Y, \tau_Y) \xleftarrow{f} (X, \tau_X) \xrightarrow{g} (Z, \tau_Z)$$

su pull back es el par $(Y \times_X Z, \tau)$ donde $(Y \times_X Z)$ es el pull back conjuntista con la topología generada por la base $\{\bar{f}^{-1}(A)/A \in \tau_Z\} \cup \{\bar{g}^{-1}(B)/B \in \tau_Y\}$. Nótese que la topología τ así definida coincide con la topología inducida por la topología producto de $Y \times Z$. En caso de considerarse aplicaciones punteadas, su pull back en **Top**_{*} es el pull back topológico ya definido con punto base (y_0, z_0) .

- Unión disjunta de espacios: sabemos que la unión disjunta de dos espacios topológicos se define como $(X \sqcup Y, \tau)$, donde $X \sqcup Y$ es la unión disjunta de conjuntos y $A \in \tau$ si $A \cap (X \times \{0\}) \in \tau_{X \times \{0\}}$ y $A \cap (Y \times \{1\}) \in \tau_{Y \times \{1\}}$. Sea ϕ el conjunto vacío. Entonces $X \sqcup Y = X \cup_{\phi} Y = X \coprod Y$.
- Producto wedge de espacios. Se define en **Top**_{*} el producto wedge de dos espacios $(X, x_0), (Y, y_0)$:

$$X \vee Y := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$$

con punto base (x_0, y_0) . Tomando $*$ el espacio punteado con un solo punto, se tiene que

$$(X \wedge Y, (x_0, y_0)) = (X, x_0) \cup_* (Y, y_0) = (X, x_0) \sqcup (Y, y_0)$$

- Espacios cociente: dada una pareja de espacios topológicos (X, A) , es decir, A subespacio topológico de X , el espacio cociente resultante de identificar en X los puntos de A mediante la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow x = y$ o $\{x, y\} \subset A$ se puede obtener en **Top** mediante el push out de la inclusión $A \rightarrow X$ y el morfismo $A \rightarrow *$. Es decir:

$$X/A = X \cup_A *$$

La proyección en el cociente $\pi : X \rightarrow X/A$ coincide con la inducida por el morfismo $A \rightarrow *$ en el push out.

- Producto smash: Dados dos espacios topológicos punteados (X, x_0) e (Y, y_0) , su producto smash se define como el espacio punteado $(X \wedge Y, *)$, donde $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ y $\{*\} = \pi(X \vee)$, siendo $\pi : X \times Y \rightarrow X \wedge Y$ la proyección canónica. Consecuentemente, tenemos que $X \wedge Y = (X \times Y) \cup_{(X \vee Y)} *$

A continuación se definirán los funtores y sus principales propiedades; se puede interpretar un funtor como la operación que relaciona o “pasa” de una categoría a otra. Veremos algunos ejemplos y cómo se pueden conectar entre sí a través de transformaciones naturales.

Definición 1.9. *Un funtor F de una categoría \mathbf{C} en otra \mathbf{D} , denotado por $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, consiste en:*

1. Una aplicación $F : \text{Ob}(\mathbf{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{D})$.
2. Para cada par de objetos X, Y de \mathbf{C} una aplicación

$$F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$$

que preserva las composiciones y las identidades, esto es:

- $F(gf) = F(g)F(f)$, para $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.
- $F(1_X) = 1_{F(X)}$, $\forall X$ de \mathbf{C} .

Mostramos a continuación unos ejemplos:

1. Funtor identidad.

En cualquier categoría \mathbf{C} , se puede definir el funtor identidad, $id : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, por $id(X) = X$, $id(f) = f$.

2. Funtor constante.

Dado un objeto C de una categoría \mathbf{C} , se tiene el funtor constante $\underline{C} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ dado por $\underline{C}(X) = C$ para los objetos de \mathbf{D} y $\underline{C}(f) = id_C$ para los morfismos.

3. Producto de funtores.

Dados dos funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ y $G : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$, se define el funtor $F \times G : \mathbf{C} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D} \times \mathbf{F}$ por $F(X \times Y) = FX \times FY$ y $F(f, g) = (Ff, Fg)$.

4. Funtores Hom:

- Fijado un objeto A en una categoría \mathbf{C} , el funtor $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ se define para los objetos por $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -)(X) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$, y para los morfismos $f : X \rightarrow Y$ por :

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -)(f) = f_* : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y)$$

$$g \mapsto fg$$

- Fijado un objeto A en una categoría \mathbf{C} , también se tiene el funtor $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A) : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ definido para los objetos por $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A)(X) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, A)$ y para los morfismos $f : X \rightarrow Y$ por:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A)(f) = f^* : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, A)$$

$$g \mapsto gf$$

- Combinando los dos ejemplos anteriores, dada una categoría \mathbf{C} se puede definir el funtor $Hom_{\mathbf{C}}(-, \sim) : \mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$. Para los objetos se define por $Hom_{\mathbf{C}}(-, \sim)(X, Y) = Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, y dado un morfismo $(f, g) \in Hom_{\mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{C}}((X, Y), (X', Y'))$, es decir, $(f, g) : (X', Y) \rightarrow (X, Y')$, se define

$$Hom_{\mathbf{C}}(-, \sim)(f, g) = f^*g_* : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{C}}(X', Y')$$

$$h \rightarrow ghf$$

5. Funtor grupo fundamental.

Se define como el funtor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ que asigna a cada espacio topológico punteado (X, x_0) su grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$. Para morfismos $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ se define como $\pi(f) = f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, el homomorfismo de grupos inducido por la aplicación continua f .

6. Funtor cilindro punteado.

El cilindro de un espacio topológico punteado (X, x_0) se obtiene, intuitivamente, identificando con un punto en $I(X)$ el subespacio $\{x_0\} \times I$. $I_*((X, x_0)) = (I(X)/x_0 \times I, [(x_0, 0)])$. Nótese que $[(x_0, 0)] = [(x_0, t)]$ para todo $t \in [0, 1]$. Dada $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, se define $I_*(f) = \tilde{f}$, la aplicación inducida en los cocientes. Explícitamente, $I_*(f)([x, t]) = [(f(x), t)]$.

7. Funtor cono punteado.

El cono de un espacio topológico se obtiene, intuitivamente, identificando con un punto una de las tapas del cilindro punteado del espacio dado. Se define de la siguiente forma:

$$C(X, x_0) = (I_*(X)/(X \times 1), [(x_0, 1)])$$

Dada $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, se define $C(f) = \tilde{f} : C(X) \rightarrow C(Y)$ como $C(f)([(x, t)]) = [(f(x), t)]$.

También se puede interpretar el cono punteado como $C(X, x_0) = (X, x_0) \wedge (I, *)$.

8. Funtor suspensión.

El espacio suspensión, denotado $(\Sigma X, *)$, de un espacio punteado (X, x_0) se define, de forma clásica, como $\Sigma X = (X \times I)/((X \times \{0, 1\}) \cup (\{x_0\} \times I))$, donde $\{*\} = \pi((X \times \{0, 1\}) \cup (\{x_0\} \times I))$. Además, si $f : (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0)$ es una aplicación continua punteada, entonces se induce de forma natural $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma X'$ como $\Sigma f([(x, t)]) = [(f(x), t)]$.

Definición 1.10. Una transformación natural entre dos funtores $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ consiste en una colección $\{\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)/X \in Ob(\mathbf{C})\}$ de morfismos en \mathbf{D} , tal que para todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ en \mathbf{C} el siguiente cuadrado es conmutativo en \mathbf{D} :

$$\begin{array}{ccc}
 F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\
 F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y)
 \end{array}$$

Si cada $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$ es isomorfismo, entonces se dice que α es isomorfismo natural o equivalencia natural.

A continuación se muestran algunos ejemplos de transformaciones naturales:

1. Transformación identidad.

Dado un funtor $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, siempre se puede definir la transformación natural identidad $1_F : F \rightarrow F$ por $(1_F)_X = 1_{FX} : F(X) \rightarrow F(X)$. Además es isomorfismo natural.

2. Inclusiones en los cilindros.

Sean $id : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ el funtor identidad e $I : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ el funtor cilindro; se pueden definir las transformaciones naturales $i_0 : id \rightarrow I$ e $i_1 : id \rightarrow I$ como $(i_\epsilon)_X : X \rightarrow X \times [0, 1]$, $x \mapsto (x, \epsilon)$, $\epsilon \in \{0, 1\}$.

3. Proyección desde los cilindros.

Considerando de nuevo los funtores identidad y cilindro en Top , se puede definir la transformación natural proyección desde el cilindro $p : I \rightarrow id$ por $p_X(x, t) = x$.

Para el funtor identidad y cilindro en \mathbf{Top}_* , se define la transformación natural proyección desde el cilindro punteado por $(p_*)_{(X, x_0)} : I_*X = I(X)/(\{x_0\} \times I) \rightarrow X$. Explícitamente, $(p_*)_{(X, x_0)}([(x, t)]) = x$.

Definición 1.11. Dadas dos funtores $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ y $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, se dice que (F, G) es un par adjunto de funtores cuando existe una equivalencia natural:

$$\Phi : Hom_{\mathbf{D}}(F-, \sim) \rightarrow Hom_{\mathbf{C}}(-, G\sim)$$

donde:

$$Hom_{\mathbf{D}}(F-, \sim) = Hom_{\mathbf{D}}(-, \sim) \circ (F \times 1) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}^{op} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$Hom_{\mathbf{C}}(-, G\sim) = Hom_{\mathbf{C}}(-, \sim) \circ (1 \times G) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$$

Explícitamente, el par (F, G) es adjunto si para todo par de objetos X de $Ob(\mathbf{C})$, Y de $Ob(\mathbf{D})$ existe una biyección $\Phi_{X, Y} : Hom_{\mathbf{D}}(F(X), Y) \rightarrow Hom_{\mathbf{C}}(X, G(Y))$ tal que, dadas $f : X' \rightarrow X$ en \mathbf{C} y $g : Y \rightarrow Y'$ en \mathbf{D} , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 Hom_{\mathbf{D}}(F(X), Y) & \xrightarrow{\Phi_{X, Y}} & Hom_{\mathbf{C}}(X, G(Y)) \\
 F(f)^* g_* \downarrow & & \downarrow f^* G(g)_* \\
 Hom_{\mathbf{D}}(F(X'), Y') & \xrightarrow{\Phi_{X', Y'}} & Hom_{\mathbf{C}}(X', G(Y'))
 \end{array}$$

También se dice que F es adjunto a izquierda de G , o que G es adjunto a derecha de F . Obsérvese que el concepto categórico dual de ser adjunto a izquierda es ser adjunto a derecha, y viceversa.

Proposición 1.12. Si (F, G) es un par adjunto de funtores, entonces:

- G conserva pull backs, esto es, $G(Y \times_X Z) = G(Y) \times_{G(X)} G(Z)$
- F conserva push outs, esto es, $F(Y \cup_X Z) = F(Y) \cup_{F(X)} F(Z)$

Demostración. Sea $Y \times_X Z$ el pull back de los morfismos $Y \xrightarrow{\alpha} X \xleftarrow{\beta} Z$. Veamos que $G(Y \times_X Z)$ es efectivamente el pullback en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G(Y \times_X Z) \bar{\beta} & \xrightarrow{G\bar{\alpha}} & GZ \\ G \downarrow & & \downarrow G\beta \\ GY & \xrightarrow{G\alpha} & GX \end{array}$$

El diagrama conmuta por propiedades de la definición de functor. Necesitamos comprobar que verifica la propiedad universal del pullback. Sea un objeto M y morfismos $GY \xleftarrow{f} M \xrightarrow{g} GZ$ verificando $(G\alpha)f = (G\beta)g$. Usando las biyecciones de adjunción, se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha\Phi_{M,Y}^{-1}f &= \alpha_*(\Phi_{M,Y}^{-1}f) = (\alpha_*\Phi_{M,Y}^{-1})(f) = \\ \Phi_{M,X}^{-1}(G\alpha)_*(f) &= \Phi_{M,X}^{-1}((G\alpha)f) = \Phi_{M,X}^{-1}((G\beta)g) = \\ \Phi_{M,X}^{-1}(G\beta)_*(g) &= \beta_*(\Phi_{M,Z}^{-1}g) = \beta\Phi_{M,Z}^{-1}g \end{aligned}$$

Por tanto el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} FM & \xrightarrow{\Phi_{M,Z}^{-1}g} & Z \\ \Phi_{M,Y}^{-1}f \searrow & & \downarrow \beta \\ Y \times_X Z & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & Z \\ \bar{\beta} \downarrow & & \downarrow \beta \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

y por la propiedad universal del pullback, existe un único morfismo $h : FM \rightarrow Y \times_X Z$ tal que $\bar{\beta}h = \Phi_{M,Y}^{-1}f$, $\bar{\alpha}h = \Phi_{M,Z}^{-1}g$. Tomamos el morfismo anterior h y evaluamos

$$\Phi_{M,Y \times_X Z}(h) : M \rightarrow G(Y \times_X Z)$$

y se tiene que

$$G(\bar{\beta})\Phi_{M,Y \times_X Z}(h) = \Phi_{M,Y}\bar{\beta}h = \Phi_{M,Y}\Phi_{M,Y}^{-1}f = f$$

$$G(\bar{\alpha})\Phi_{M,Y \times_X Z}(h) = \Phi_{Z,Y}\bar{\alpha}h = \Phi_{M,Z}\Phi_{M,Y}^{-1}g = g$$

Además, como $\Phi_{M,Y \times_X Z}$ es una biyección, la unicidad de h implica que $\Phi_{M,Y \times_X Z}(h)$ es la única aplicación que verifica las dos igualdades anteriores. Por tanto el diagrama X es un pullback, o en otras palabras, $G(Y \times_X Z) = GY \times_{GX} GZ$. \square

A continuación, se definirá el colímite categórico, una construcción que se utilizará en el siguiente capítulo.

Definición 1.13. Sea \mathbf{D} una categoría pequeña, es decir, aquella en que su clase de objetos es un conjunto, y \mathbf{C} una categoría cualquiera. Un \mathbf{D} – **diagrama** en la categoría \mathbf{C} es un funtor $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$. Un morfismo de \mathbf{D} – **diagramas** es una transformación natural $F \rightarrow F'$ entre \mathbf{D} – **diagramas**. Denotamos $\mathbf{D}[\mathbf{C}]$ a la categoría de \mathbf{D} – **diagramas** y morfismos de \mathbf{D} – **diagramas**. Todo objeto de \mathbf{C} determina un diagrama constante $\underline{C} : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ que viene dado por el funtor constante.

El colímite, $\text{colim } F$, de un \mathbf{D} – **diagrama** $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ es un objeto de \mathbf{C} junto con un morfismo de diagramas $\iota : F \rightarrow \underline{\text{colim } F}$ tales que si $\eta : F \rightarrow \underline{A}$ es otro morfismo de diagramas, entonces existe un único morfismo $\bar{\eta} : \text{colim } F \rightarrow A$ tal que $\bar{\eta}\iota = \eta$.

Ejemplo 1.14. El push out de dos morfismos es un caso particular de colímite:

Sea el push out $Y \cup_X Z$ inducido por los morfismos $Y \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} Z$ en una categoría \mathbf{C} . Entonces se define la categoría \mathbf{D} que tiene por objetos a X, Y y Z y por morfismos las identidades, los morfismos g, f y sus posibles composiciones. Sean $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ un funtor que es la identidad en los objetos y en los morfismos, con $Y \cup_X Z$ en la clase de objetos de \mathbf{C} , y un morfismo de diagramas $\iota : F \rightarrow \underline{Y \cup_X Z}$ que envía los objetos $F(X), F(Y), F(Z)$ a $Y \cup_X Z$, y es la identidad en los morfismos. Sea ahora otro morfismo de diagramas $\eta : F \rightarrow \underline{A}$, es decir, para los morfismos $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Z$ en \mathbf{D} se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} F(Z) = Z & \xleftarrow{F(g)=g} & F(X) = X & \xrightarrow{F(f)=f} & F(Y) = Y \\ \eta_Z \downarrow & & \eta_X \downarrow & & \eta_Y \downarrow \\ A & \xleftarrow{id} & A & \xrightarrow{id} & A \end{array}$$

Se ve claramente que $\eta_Z g = \eta_X \cdot$ y como $\iota_Z g = \iota_Y f$, entonces, por la propiedad del push out, se obtiene un único morfismo $h : Y \cup_X Z \rightarrow A$ que hace conmutar todo el diagrama. Por tanto, $\eta_Y = \tilde{h}\iota_Y$ y $\eta_Z = \tilde{h}\iota_Z$. Pero $\eta_X = \eta_Y f$ y $\iota_X = \iota_Y f$, entonces se obtiene que $\eta_X = \eta_Y f = \tilde{h}\iota_Y f = \tilde{h}\iota_X$ y se prueba que $\tilde{h}\iota = \eta$.

\square

Proposición 1.15. *Existe el colímite de cualquier diagrama en la categoría **Set***

Demostración. Sea **D** una categoría pequeña y $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ un **D**-diagrama en la categoría **Set**. Entonces, para todo objeto $i \in Ob(\mathbf{D})$ se tiene un conjunto $F_i = X_i$ en **Set**. Se define:

$$X = \bigsqcup_{i \in Ob(\mathbf{Set})} (X_i) / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por $x_i \sim x_j \Leftrightarrow \exists f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ tal que $f_{ij}(x_i) = x_j$. Se define $\iota : F \rightarrow \underline{X}$ dado por las inclusiones. Por tanto se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\iota_i} & X \\ f_{ij} \downarrow & & \downarrow id \\ X_j & \xrightarrow{\iota_j} & X \end{array}$$

y sigue que $\iota : F \rightarrow \underline{X}$ es morfismo de diagramas. Sea $\eta : F \rightarrow \underline{A}$ otro morfismo de diagramas, luego existen diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\eta_i} & A \\ f_{ij} \downarrow & & \downarrow id \\ X_j & \xrightarrow{\eta_j} & A \end{array}$$

Hay que comprobar la existencia y unicidad de un morfismo $\bar{\eta} : X \rightarrow A$ tal que $\bar{\eta}\iota_i = \eta_i \forall i \in Ob(\mathbf{set})$. Dado $x \in X$ y $x = [x_i]$ con $x_i \in X_i$, se define $\bar{\eta}(x) = \eta_i(x_i)$.

- $\bar{\eta}$ está bien definido:
Supóngase $[x_i] = [x_j]$. Entonces existe $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ con $f_{ij}(x_i) = x_j$. Sigue que $\eta_j(x_j) = \eta_j(f_{ij}(x_i)) = \eta_i(x_i)$.
- Unicidad de $\bar{\eta}$
Sea $\bar{\bar{\eta}} : X \rightarrow A$ tal que $\bar{\bar{\eta}}\iota_i = \eta_i, \forall i \in Ob(\mathbf{D})$. Entonces dado $x \in X, x = [x_i]$ para algún $i \in Ob(\mathbf{D})$, se tiene que:

$$\bar{\bar{\eta}}(x) = \bar{\bar{\eta}}\iota_i(x_i) = \eta_i(x_i) = \bar{\eta}(x) \Rightarrow \bar{\bar{\eta}} = \bar{\eta}$$

□

Proposición 1.16. *Existe el colímite de cualquier diagrama en la categoría **Top**.*

Demostración. Sea \mathbf{D} una categoría pequeña y $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Top}$ un \mathbf{D} -diagrama en la categoría \mathbf{Top} . Entonces, para todo objeto $i \in Ob(\mathbf{D})$ se tiene un espacio topológico $X_i = F(i)$. Análogamente a la definición de colímite en \mathbf{Set} , se define el espacio topológico $X = \bigsqcup X_i / \sim$ con la misma relación de equivalencia, junto con la topología final de las aplicaciones $\gamma : X_i \rightarrow X$ dadas por $\gamma(x_i) = [x_i]$. Estas aplicaciones definen un morfismo de diagramas $\iota : F \rightarrow \underline{X}$; por tanto, para todo morfismo $f : i \rightarrow j$ en \mathbf{D} , se tienen diagramas conmutativos en \mathbf{Top}

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\iota_i} & X \\ f_{ij} \downarrow & & \downarrow id \\ X_j & \xrightarrow{\iota_j} & X \end{array}$$

Supongamos ahora que $\iota : F \rightarrow \underline{A}$ es otro morfismo de diagramas en \mathbf{Top} . La existencia y unicidad de $\bar{\eta} : X \rightarrow A$ es análoga a la de la proposición anterior. La continuidad de $\bar{\eta}$ es consecuencia de la continuidad de las aplicaciones $\eta_i : X_i \rightarrow A$. Por la propiedad universal del cociente, $\bar{\eta}$ es continua si y sólo si $\bar{\eta}\pi$ es continua, siendo π la proyección en el cociente

$$\bigsqcup_{i \in ob(\mathbf{Set})} X_i \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{\bar{\eta}} A$$

Dado un abierto $U \subset A$, $(\bar{\eta}\pi)^{-1}(U) = \bigsqcup_i \eta_i^{-1}(U)$, pero esto es abierto en $\bigsqcup_i X_i$, luego $\bar{\eta}$ es continua. □

Observación 1.17. También se puede obtener el colímite de cualquier diagrama en la categoría \mathbf{Top}_* de espacios topológicos punteados; la demostración es análoga a la anterior.

1.2. Espacios de funciones

En esta sección se definen los espacios de funciones, que dan lugar a funtores relacionados con el concepto de camino. Esto permitirá estudiar con más facilidad los grupos de homotopía, que se trabajarán en la siguiente sección. También en esta sección se prueba la ley exponencial, un resultado esencial para trabajar con espacios de funciones sin tener que recurrir directamente a las topologías compacto abiertas.

Definición 1.18. *Dados X, Y espacios topológicos, se define el espacio de funciones de Y en X por*

$$X^Y = Hom_{\mathbf{Top}}(Y, X) = \{f : Y \rightarrow X / f \text{ es continua}\}$$

Se tomará la topología compacto–abierta en X^Y , esto es, aquella que tiene como subbase todos los subconjuntos de X^Y de la forma $(K, U) = \{f \in X : f(K) \subset U\}$, donde $K \subset Y$ es compacto y $U \subset X$ es abierto. Así, un abierto genérico de la topología compacto–abierta es una unión arbitraria de intersecciones finitas de subconjuntos de la forma (K, U) .

Proposición 1.19. *Las siguientes definiciones describen funtores en la categoría de espacios topológicos:*

1. Fijado un espacio topológico X :

a) $-^X : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$, definido para objetos como $-^X(Y) = Y^X$, y para morfismos $f : Y \rightarrow Y'$ como $-^X(f) = f_* : Y^X \rightarrow (Y')^X$ con $f_*(h) = fh$.

b) $X^- : \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$, definido para objetos como $X^-(Y) = X^Y$ y para morfismos $f : Y' \rightarrow Y$ como $X^-(f) = f^* : X^Y \rightarrow X^{Y'}$, con $f^*(h) = hf$.

2. $-\sim : \mathbf{Top} \times \mathbf{Top}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Top}$, definido para objetos como $-\sim((X, Y)) = X^Y$, y para morfismos $f : X \rightarrow X'$ y $g : Y' \rightarrow Y$ como $-\sim((f, g)) = f_*g^* : X^Y \rightarrow (X')^{Y'}$, con $f_*g^*(h) = fhg$.

Demostración. Si $f : Y \rightarrow Y'$ es continua, entonces f_* será continua: Si (K, U) es abierto subbásico en $(Y')^X$, entonces

$$\begin{aligned} f_*^{-1}((K, U)) &= \{\alpha : X \rightarrow Y / \alpha \text{ continua, } f\alpha \in (K, U)\} \\ &= \{\alpha \in Y^X / f\alpha(K) \subset U\} \\ &= \{\alpha \in Y^X / \alpha(K) \subset f^{-1}(U)\} = (K, f^{-1}(U)) \end{aligned}$$

donde K es compacto en X , y $f^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser f continua. Evidentemente, $-^X$ conserva composiciones e identidades, luego es un funtor. Por otro lado, si $f : Y' \rightarrow Y$ es continua entonces $f^* : X^Y \rightarrow X^{Y'}$ es continua: Si (K, U) es abierto subbásico en $X^{Y'}$, entonces:

$$\begin{aligned} (f^*)^{-1}((K, U)) &= \{\alpha \in X^Y / \alpha f \in (K, U)\} = \{\alpha \in X^Y / (\alpha f)(K) \subset U\} \\ &= \{\alpha \in X^Y / \alpha(f(K)) \subset U\} = (f(K), U) \end{aligned}$$

Como f es continua y K compacto entonces $f(K)$ es también compacto en Y , luego $(f(K), U)$ es abierto en X . Se concluye también que X^- es un funtor. Una vez probados estos funtores, es trivial que $-\sim$ es también funtor. \square

Definición 1.20. *Denotamos $E(X; A, B)$ como el espacio de caminos que viene dado por el conjunto $\{\alpha \in PX / \alpha(0) \in A, \alpha(1) \in B\}$, donde $A, B \subset X$.*

Definición 1.21. *Se define la aplicación evaluación $e : X^Y \times Y \rightarrow X$ como $e(f, y) = f(y)$*

Proposición 1.22. *Si Y es localmente compacto, entonces la aplicación evaluación es continua.*

Demostración. Sea $(f_0, y_0) \in X^Y \times Y$. Veamos que e es continua en el punto (f_0, y_0) :

Sea V un abierto en X tal que $e(f_0, y_0) = f_0(y_0) \in V$. Como f_0 es continua e Y localmente compacto, existe un entorno compacto de y_0 , W , tal que $f_0(W) \subset V$. Por tanto (W, V) es un entorno abierto de f_0 en X^Y . Sea $U = (W, V) \times \text{Int}(W)$. Entonces U es un entorno abierto de (f_0, y_0) en X^Y , y $e(U) \subset V$. Por tanto e es continua en (f_0, y_0) . \square

Teorema 1.23. *(Ley exponencial)*

Dado un espacio Z localmente compacto, el par de funtores $(- \times Z, -^Z)$ es adjunto.

Demostración. Sean X, Y espacios, entonces:

$$E : \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X \times Z, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y^Z)$$

$$f \mapsto E(f) = f^\sharp$$

siendo $f^\sharp(x) : Z \rightarrow Y$ la aplicación continua definida por $f^\sharp(x)(z) = f(x, z)$. Veamos que E es un isomorfismo natural:

- E está bien definida: Para cada $x \in X$, f^\sharp es la composición de aplicaciones continuas $f^\sharp(x) = f j_x$

$$Z \rightarrow X \times Z \rightarrow Y$$

$$z \mapsto (x, z) \mapsto f(x, z)$$

Además $f^\sharp : X \rightarrow Y^Z$ es continua: Sea $x_0 \in X$ y sea (K, U) abierto subbásico de $f^\sharp(x_0)$ en Y^Z . Entonces sabemos que $f(\{x_0\} \times K) \subset U$. Como f es continua, para todo $z \in K$ existen entornos abiertos A_z de x_0 y B_z de z tales que $f(A_z \times B_z) \subset U$, siendo $A_z \times B_z$ entorno abierto de (x_0, z) en $X \times Z$. Entonces $K \subset \bigcup_{z \in K} B_z$, y como K es compacto, existe un subrecubrimiento finito $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_{z_i}$. Tomamos $V = \bigcap_{i=1}^n A_{z_i}$ entorno abierto de x_0 , y entonces $f(V \times K) \subset U$, luego $f^\sharp(V) \subset (K, U)$. Es decir, f^\sharp es continua en x_0 .

- Se define la inversa de E :

$$E^{-1} : \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y^Z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X \times Z, Y)$$

$$g \quad \mapsto \quad E^{-1}(g) = g^\flat$$

donde $g^\flat(x, z) = g(x)(z)$, $\forall (x, z) \in X \times Z$. Nótese que g^\flat es continua por ser composición de aplicaciones continuas: $g^\flat = e(g \times 1_Z)$.

- **Naturalidad:** Dadas las aplicaciones continuas $f : X' \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y'$, se debe comprobar la conmutatividad del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X \times Z, Y) & \xrightarrow{E_{X,Y}} & \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y^Z) \\
 (f \times 1_Z)^* g_* \downarrow & & \downarrow f^* g_* \\
 \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X' \times Z, Y') & \xrightarrow{E_{X',Y'}} & \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X', Y'^Z)
 \end{array}$$

Dada $h : X \times Z \rightarrow Y$ continua, se tiene que $f^* g_*(E_{X,Y}(h)) = f^* g_*(h^\sharp) = gh^\sharp f : X' \rightarrow Y'^Z$, que viene dada por $gh^\sharp f(x')(z) = gh_j f(x')(z) = gh(f(x'), z) \in Y' \forall z \in Z$.

Por otra parte, $E_{X',Y'}(f \times 1_Z)^* g_*(h) = E_{X',Y'}(gh(f \times 1_Z))^\sharp : X' \rightarrow Y'^Z$ viene dada por $gh(f \times 1_Z)_{j_{x'}}(z) = gh(f \times 1_Z)(x', z) = gh(f(x'), z)$, $\forall z \in Z$.

Por tanto el anterior cuadrado conmuta, y se concluye que E es un isomorfismo natural que da la adjunción entre los funtores $- \times Z$ y $-^Z$. \square

Teorema 1.24. (Ley exponencial para espacios punteados)

Dados los espacios punteados (X, x_0) , (Y, y_0) y el espacio punteado localmente compacto (Z, z_0) , la biyección E de la ley exponencial induce una biyección natural

$$E : (Y, y_0)^{(X \times Z, X \vee Z)} \rightarrow ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0})^{(X, x_0)}$$

Demostración. Basta considerar el isomorfismo de adjunción en el caso punteado:

$$E : \text{Hom}_{\mathbf{Top}^{(2)}}((X \times Z, X \vee Z), (Y, y_0)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}^{(2)}}((X, x_0), ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0}))$$

\square

Proposición 1.25. Si (X, A) es una pareja de espacios, entonces la proyección canónica $\pi : X \rightarrow X/A$ induce, para todo espacio punteado (Y, y_0) , una biyección en $\mathbf{Top}^{(2)}$ $\pi^* : (Y, y_0)^{(X/A, *)} \rightarrow (Y, y_0)^{(X, A)}$.

Demostración. Como $(Y, y_0)^- : \mathbf{Top}^{\text{op}(2)} \rightarrow \mathbf{Top}^{(2)}$ es un functor y $\pi : (X, A) \rightarrow (X/A, *)$ es continua en $\mathbf{Top}^{(2)}$, se tiene que $\pi^* = (Y, y_0)^-(\pi) : (Y, y_0)^{(X/A, *)} \rightarrow (Y, y_0)^{(X, A)}$ también es continua. Veamos ahora la inyectividad de π^* : si $\pi^*(f) = \pi^*(g)$, entonces $f\pi = g\pi$ y se deduce que $f = g$. Por otra parte, dada $g : (X, A) \rightarrow (Y, y_0)$, se induce $\hat{g} : (X/A, *) \rightarrow (Y, y_0)$ continua con $\hat{g}\pi = g$, es decir, $\pi^*(\hat{g}) = g$, y por tanto π^* es también sobreyectiva. \square

Proposición 1.26. Si en el enunciado de la proposición anterior se exige, además, que el espacio X sea compacto, y que X/A sea Hausdorff, entonces la biyección $\pi^* : (Y, y_0)^{(X/A, *)} \rightarrow (Y, y_0)^{(X, A)}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Veamos que π^* es abierta: Sea (K, U) un abierto de la subbase de la topología compacto-abierta de $(Y, y_0)^{(X/A, *)}$, es decir, K es compacto en X/A y U es abierto en Y . Entonces

$$\begin{aligned} \pi^*((K, U)) &= \{\pi^*(f)/f \in (Y, y_0)^{(X/A, *)}, f(K) \subset U\} \\ &= \{f\pi : (X, A) \rightarrow (Y, y_0)/f(K) \subset U\} \\ &= \{f\pi \in (Y, y_0)^{(X, A)}/f\pi\pi^{-1}(K) \subset (U)\} \\ &= (\pi^{-1}(K), U) \end{aligned}$$

Al ser X/A Hausdorff y X compacto, entonces $\pi^{-1}(K)$ es compacto en X . Por tanto $\pi^*((K, U))$ es abierto en $(Y, y_0)^{(X, A)}$. Finalmente, π^* es biyectiva, con lo cual preserva uniones e intersecciones. Todo abierto de $(Y, y_0)^{(X/A, *)}$ es unión arbitraria de intersecciones finitas de elementos de la forma (K, U) , luego π^* es abierta. □

Tomando $Z = I$ en los funtores inducidos de los espacios de funciones, se obtienen los siguientes casos particulares:

1. Funtor espacio de caminos:
 $-^I : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ definido por $-^I(X) = X^I$ y $-^I(f) = f_*$.
 $-^I : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ definido por $-^I(X, x_0) = (X^I, c_{x_0})$ y $-^I(f) = f_*$
2. Funtor espacio de caminos punteados:
 $P = -^{(I, 0)} : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$, con $P(X, x_0) = ((X, x_0)^{(I, 0)}, c_{x_0})$ y $P(f) = f_*$
3. Funtor espacio de lazos:
 $\Omega : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$, definido por $P(X, x_0) = ((X, x_0)^{(I, \{0, 1\})}, c_{x_0})$ y $\Omega(f) = f_*$

Teniendo en cuenta el homeomorfismo $I/\{0, 1\} \cong S^1$, donde $S^n = \{x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \mid \|(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 1\}$ es la n-esfera, y la proposición anterior, existe un homeomorfismo punteado

$$(X, x_0)^{(I, \{0, 1\})} \rightarrow (X, x_0)^{(S^1, *)}$$

y como, dada una aplicación continua, se tienen los cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc} (X, x_0)^{(I, \{0, 1\})} & \xrightarrow{\cong} & (X, x_0)^{(S^1, *)} \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ (X', x'_0)^{(I, \{0, 1\})} & \xrightarrow{\cong} & (X', x'_0)^{(S^1, *)} \end{array}$$

entonces podemos concluir que dicho homeomorfismo permite también definir, de manera naturalmente equivalente, el funtor espacio de lazos como

$$\Omega(X, x_0) = ((X, x_0)^{(S^1, *)}, c_{x_0}), \quad \Omega(f) = f_*$$

Abusando de notación, podemos omitir el punto base y considerar los caminos y lazos de un espacio punteado (X, x_0) como los espacios topológicos:

$$P(X) = \{\alpha \in X^I / \alpha(0) = x_0\}$$

$$\Omega(X) = \{\alpha \in X^I / \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

y denotamos entonces $P(X, x_0) = (PX, c_{x_0})$ y $\Omega(X, x_0) = (\Omega X, c_{x_0})$.

Teorema 1.27. *El funtor suspensión $\Sigma = - \wedge S^1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ es adjunto a izquierda del funtor espacio de lazos $\Omega = -(S^1, *) : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ y el funtor cilindro I es adjunto a izquierda del funtor $-^I$ espacio de caminos y espacio de caminos punteados en las categorías \mathbf{Top} y \mathbf{Top}_* , respectivamente.*

Demostración. Ambas pruebas se basan en la Ley exponencial 1.23. Véase, por ejemplo, [8] sección 1.6 pág. 41 para el par adjunto (Σ, Ω) , y [9] pág. 29 para el par adjunto $(I, -^I)$.

□

Corolario 1.28. *Los funtores suspensión y cilindro conservan push outs y los funtores lazos y caminos conservan pull backs en las correspondientes categorías \mathbf{Top} y \mathbf{Top}_* .*

Demostración. Basta tener en cuenta la proposición 1.12.

□

1.3. Categoría homotópica y grupos de homotopía

Presentamos ahora la categoría homotópica, en la que se definirán los grupos de homotopía.

Definición 1.29. *La categoría homotópica, denominada \mathbf{hTop}_* , es la categoría cociente de los espacios topológicos punteados con la relación de equivalencia dada por la relación de homotopía relativa al punto base. Esto es,*

- $Ob(\mathbf{hTop}_*) = Ob(\mathbf{Top}_*/ \simeq) = Ob(\mathbf{Top}_*)$
- $Hom_{\mathbf{hTop}_*}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{[f]/f \in Hom_{\mathbf{Top}_*}((X, x_0), (Y, y_0))\}$, siendo $[f]$ la clase de homotopía de f . Este conjunto se suele denotar $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ o incluso $[X, Y]$ cuando no hay posibilidad de confusión de los puntos base.

Análogamente se define la categoría \mathbf{hTop} de espacios topológicos y clases de homotopía de aplicaciones continuas no basadas.

Ahora se procede a interpretar los funtores lazo y suspensión para esta nueva categoría.

Proposición 1.30. $\Omega : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{hTop}_*$, definida para objetos como en \mathbf{Top}_* , y para morfismos como $\Omega([f]) = [f_*]$, y $\Sigma : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{hTop}_*$, definido para objetos como en \mathbf{Top}_* , y para morfismos por $\Sigma([f]) = [\Sigma f]$, son ambos funtores.

Demostración. La única parte no trivial de la demostración es comprobar que Ω y Σ están bien definida sobre los morfismos. Se probará solamente para el functor Ω , puesto que para el functor Σ es análogo:

Si $f, f' : (X, x_0) \rightarrow (X', x'_0)$ son tales que $[f] = [f']$, se probará que $[f_*] = [f'_*]$. Como $f \simeq f'$ rel $\{x_0\}$, entonces existe aplicación continua $H : X \times I \rightarrow X'$ tal que $H_{i_0} = f, H_{i_1} = f'$ y $H(x_0, t) = x'_0$, para todo $t \in I$.

Se define

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \Omega(X, x_0) \times I \times I &\rightarrow (X', x'_0) \\ (\alpha, t, s) &\mapsto H(\alpha(s), t) \end{aligned}$$

que es continua porque es composición de las aplicaciones continuas

$$\Omega X \times I \times I \xrightarrow{1 \times T} \Omega X \times I \times I \xrightarrow{e \times 1} X \times I \xrightarrow{H} X'$$

donde $T : I \times I \rightarrow I \times I$ es el homeomorfismo dado por $T(t, s) = (s, t)$, y e es la aplicación evaluación. La ley exponencial (teorema 1.23) garantiza la existencia de una aplicación continua, adjunta de \tilde{F} , dada por $F(\alpha, t)(s) = \tilde{F}(\alpha, t, s)$. Además, $F(c_{x_0}, t)(s) = x'_0, \forall t, s \in I, F(\alpha, t)(1) = x'_0 \forall \alpha \in \Omega(X, x_0), \forall t \in I$.

Se concluye que F , definida por $F(\alpha, t)(s) = \tilde{F}(\alpha, t, s) = H(\alpha(s), t)$ es la homotopía relativa buscada entre f_* y f'_* . \square

Proposición 1.31. Si (Z, z_0) es un espacio punteado localmente compacto, entonces $- \wedge Z : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{hTop}_*$ es funtor adjunto a izquierda de $(-)^{(Z, z_0)} : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{hTop}_*$.

Demostración. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios punteados. Entonces se define

$$A : ([X \wedge Z, *], (Y, y_0)) \rightarrow [(X, x_0), ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0})]$$

como $A([f]) = [\bar{f}]$, donde $\bar{f} : (X, x_0) \rightarrow ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0})$ se define a su vez por $\bar{f}(x)(z) = f([(x, z)])$, $\forall x \in X, z \in Z$.

1. \bar{f} está bien definida:

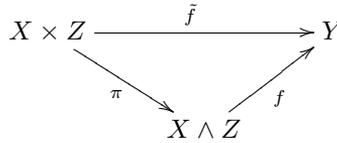
$$\bar{f}(x_0)(z) = f([(x_0, z)]) = f([*]) = y_0 \forall z \in Z, \text{ luego } \bar{f}(x_0) = c_{y_0}$$

2. \bar{f} es continua:

Con la ley exponencial (teorema 1.23) se genera el isomorfismo de adjunción

$$E : Hom_{\mathbf{Top}^{(2)}}((X \times Z, X \vee Z), (Y, y_0)) \rightarrow Hom_{\mathbf{Top}^{(2)}}((X, x_0), ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0}))$$

Si definimos $\tilde{f} : (X \times Z, X \vee Z) \rightarrow (Y, y_0)$ como $\tilde{f}(x, z) = f([(x, z)])$, tenemos que \tilde{f} hace conmutar el siguiente diagrama



Como f es continua, se concluye la continuidad de \tilde{f} y, como $E(\tilde{f}) = \bar{f}$, por adjunción se tiene la continuidad de \bar{f} .

3. A está bien definida :

Supongamos que $[f_0] = [f_1] \in [(X \wedge Z, *), (Y, y_0)]$ mediante la homotopía $H : f_0 \simeq f_1$ rel $\{*\}$. Sea $H' = H(\pi \times 1_I)(1_X \times T) : X \times I \times Z \rightarrow Y$, donde T es la aplicación continua que intercambia de posición las coordenadas debidamente. Sigue que H' continua por ser composición de aplicaciones continuas. Entonces se induce por la ley exponencial una aplicación $E(H') = (H')^\sharp : X \times I \rightarrow (Y, y_0)^{(Z, z_0)}$ continua dada por $((H')^\sharp)_2(x, t)(z) = H'(x, t, z) = H([(x, t)], t)$. Así, se obtiene la homotopía $(H')^\sharp : f_0 \simeq f_1$.

4. A es sobre:

Sea $h : (X, x_0) \rightarrow ((X, x_0) \rightarrow ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0}))$ continua punteada. Se induce, por la ley exponencial, una aplicación continua de parejas, $\tilde{h} : (X \times Z, X \vee Z) \rightarrow (Y, y_0)$ definida por $\tilde{h}(x, z) = h(x)(z)$. Por tanto \tilde{h} es compatible con la relación del cociente $X \times Z / X \vee Z$. Entonces se induce, por el

Teorema 22.2 en [2], una aplicación continua $(\tilde{h})' : (X \times Z / X \vee Z, *) \rightarrow (Y, y_0)$ haciendo conmutar el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X \times Z & \xrightarrow{\tilde{h}} & Y \\ & \searrow \pi & \nearrow (\tilde{h})' \\ & X \wedge Z & \end{array}$$

siendo π la proyección canónica. Se concluye que $A([\tilde{h})']) = [h]$.

5. A es inyectiva:

Sean $f, g : (X \wedge Z, *) \rightarrow (Y, y_0)$ tales que existe una homotopía $H : (X \times I, \{x_0\} \times I) \rightarrow ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0})$ que cumple $H : \hat{f} \simeq \hat{g} \text{ rel } \{x_0\}$. Se considera, por la ley exponencial, $\tilde{H} : X \times Z \times I \rightarrow Y$ tal que $\tilde{H} = H(x, t)(z)$, y es compatible con la relación en el cociente $X \times Z \times I / \sim$. Por tanto, se induce una aplicación continua $(\tilde{H})' : (X \times Z / X \vee Z) \times I \rightarrow Y$ tal que $(\tilde{H})'(\pi \times id_I) = \tilde{H}$. Sabemos que viene dada por $(\tilde{H})'([x, z], t) = \tilde{H}(x, z, t)$. Una simple comprobación demuestra que $(\tilde{H})' : f \simeq g \text{ rel } \{*\}$.

6. A es natural:

Sean $f : (X', x'_0) \rightarrow (X, x_0)$ y $g : (Y, y_0) \rightarrow (Y', y'_0)$. Hay que probar la conmutatividad del siguiente cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} [(X \wedge, *), (Y, y_0)] & \xrightarrow{A_{X, Y}} & [(X, x_0), ((Y, y_0)^{(Z, z_0)}, c_{y_0})] \\ g_*(f \wedge 1_Z)^* \downarrow & & \downarrow g_* f^* \\ [(X' \wedge Z, *), (Y', y'_0)] & \xrightarrow{A_{X', Y'}} & [(X', x'_0), ((Y', y'_0)^{(Z, z_0)}, c'_{y_0})] \end{array}$$

Sea $[h] \in [X \wedge Z, *; Y', y'_0]$. Entonces se tiene que $g_* f^*([\bar{f}]) = [g\bar{h}f]$. Por otra parte, $A_{X', Y'} g_*(f \wedge 1_Z)^*([h]) = A_{X', Y'} [gh(f \wedge 1_Z)] = [gh(f \wedge 1_Z)]$. Dados $x' \in X'$ y $z \in Z$, $(gh\bar{f})(x')(z) = g\bar{h}(f(x'))(z) = gh([f(x'), (z)])$. También $gh(f \wedge 1_Z)(x')(z) = gh(f \wedge 1_Z)([x', z]) = gh([f(x'), z])$. Por tanto, el diagrama es conmutativo. □

Corolario 1.32. *El functor suspensión $\Sigma : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{hTop}_*$ es adjunto izquierda del functor espacio de lazos $\Omega : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{hTop}_*$.*

Demostración. Se toma $Z = S^1$ en el lema anterior y se aplica el isomorfismo natural $\Sigma - \xrightarrow{\cong} - \wedge S^1$. □

A continuación veremos unos lemas técnicos para tratar los grupos superiores de homotopía.

Lema 1.33. $\Sigma(S^n) \cong S^{n+1}$ en \mathbf{Top}_* .

Demostración. Se define la n -bola cerrada $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$.

También podemos considerar los siguientes subespacios de \mathbb{R}^{n+2} :

$E_+^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} / \|x\| = 1, x_{n+2} \geq 0\}$, el hemisferio norte de S^{n+1} .

$E_-^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2} / \|x\| = 1, x_{n+2} \leq 0\}$, el hemisferio sur de S^{n+1} .

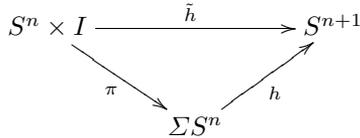
Tomando como punto base para estos espacios $*$ = $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$, e interpretando $S^n \cong S^n \times \{0\} \subset S^{n+1}$ como el ecuador de S^{n+1} , se tienen los homeomorfismos $p_+ : (E_+^{n+1}, S^n) \rightarrow (E_+^{n+1}, S^n)$ y $p_- : (E_-^{n+1}, S^n) \rightarrow (E_-^{n+1}, S^n)$ definidos por

$$p_{\pm}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, 0) = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, \pm \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2})$$

Además, como $S^n \subset E^{n+1}$ y E^{n+1} es convexo, el segmento que une cualquier punto de S^n con $*$ está contenido en E^{n+1} . Así, podemos definir la aplicación $h : \Sigma(S^n) \rightarrow S^{n+1}$, en \mathbf{Top}_* , como:

$$h([(x, t)]) = \begin{cases} p_-(2tx + (1 - 2t)*) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ p_+(2x(1 - t) + (2t - 1)*) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

- h está bien definida:
 $h([(*, t)]) = h([(x, 0)]) = h([(x, 1)]) = * \forall t \in I, \forall x \in S^n$
- h es biyectiva por la definición de p_{\pm} .
- h es continua: Se define $\tilde{h} : S^n \times I \rightarrow S^{n+1}$ como $\tilde{h}(x, t) = h([(x, t)])$. Entonces, \tilde{h} es continua por el lema 1.2 aplicado a los cerrados $S^n \times [0, 1/2]$ y $S^n \times [1/2, 1]$. La continuidad de h se deduce de la conmutatividad del siguiente diagrama:



- h es cerrada porque es continua, $\Sigma S^n = \pi(S^n \times I)$ es compacto y S^{n+1} es Hausdorff.

□

Observación 1.34. Para cada $n \geq 1$, existe un isomorfismo en \mathbf{Top}_* :

$$\phi_n : I^n / \delta I^n \rightarrow \Sigma(S^{n-1})$$

Lema 1.35. *Para todo espacio punteado (X, x_0) , se tiene una biyección:*

$$\Phi : \text{Hom}_{\mathbf{Top}^{(2)}}((I^n, \delta I^n), (X, x_0)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((I^n/\delta I^n, *), (X, x_0))$$

$$f \mapsto \tilde{f}$$

con $\tilde{f}([(t_1, \dots, t_n)]) = f(t_1, \dots, t_n)$

Demostración. Si $\pi : I^n \rightarrow I^n/\delta I^n$ es la proyección canónica, por la proposición 1.26 sabemos que $\pi^* : (X, x_0)^{(I^n/\delta I^n, *)} \rightarrow (X, x_0)^{(I^n, \delta I^n)}$ es un homeomorfismo punteado con inversa ϕ . En particular, ϕ es una biyección. □

A continuación vamos a recordar el concepto de componente conexa por caminos, que nos va a permitir definir el funtor π_0 y relacionarlo con los grupos de homotopía.

Dado un espacio topológico X , se puede definir sobre él la relación de equivalencia $x \sim y$ si y sólo si existe un camino de x a y .

El conjunto cociente X/\sim lo denotamos por $\pi_0(X)$, y el elemento $[x] \in \pi_0(X)$ se denomina *componente conexa por caminos que contiene a x* . Si $f : X \rightarrow Y$ es continua, se define $\pi_0(f) : \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ por $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$. Vemos que, así definido, $\pi_0 : \mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Set}$ es un funtor. Además es sencillo comprobar que π_0 es un invariante homotópico.

Lema 1.36. $[\Sigma S^{n-1}, Y]$ es un grupo.

Demostración. Se tiene que

$$[\Sigma S^{n-1}, X] \cong [S^n, X] \cong [I^n/\partial I^n, X] \cong [(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$$

por la observación 1.34 y el lema 1.35 y porque la siguiente operación es compatible en los dos últimos conjuntos: La composición de lazos se define de la siguiente manera:

Para $f, g : \Sigma X \rightarrow Y$, tenemos

$$(g + f)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(t_1, \dots, t_{n-1}, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se demuestra que es grupo de manera análoga a la comprobación de que el grupo fundamental es grupo. □

Definición 1.37. *Para $n \geq 1$ y un espacio basado X, x_0 , se define*

$$\pi_n(X) = \pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)]$$

como el n -ésimo grupo de homotopía del espacio X basado en el punto x_0 . Dado que $\Sigma S^{n-1} \cong S^n$, la adjunción (Σ, Ω) nos permite afirmar que

$$\pi_n(X) = [S^n, X] = [\Sigma S^{n-1}, X] = [S^{n-1}, \Omega X] = \pi_{n-1}(\Omega X) = \dots = \pi_0(\Omega^n X)$$

Definición 1.38. Definimos el n -ésimo grupo relativo de homotopía del par (X, A) como

$\pi_n(X, A) = \pi_{n-1}(E(X; A, x_0), c_{x_0})$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo $E(X; A, *)$ el espacio definido en 1.20.

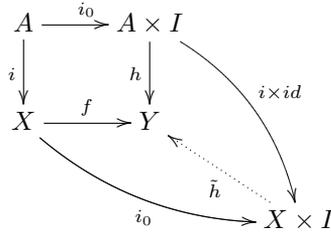
Observación 1.39. Los grupos relativos de homotopía también pueden ser interpretados como $\pi_n(X, A) = [(E^n, S^{n-1}), (X, A)]$.

Esto se debe a que se puede probar fácilmente que $E^n \cong CS^{n-1}$ y además $CS^{n-1} = S^{n-1} \wedge I$. Por el teorema 1.31 se obtiene un homeomorfismo $[S^{n-1}, E(X, A, *)] \cong [(E^n, S^{n-1}), (X, A)]$. Es sencillo comprobar que si $[x, t] \in S^{n-1} \subset CS^{n-1}$, entonces la imagen pertenece a A .

1.4. Cofibraciones y fibraciones. Sucesiones exactas

En esta sección se definen las cofibraciones y fibraciones, conceptos categóricos relacionados con las extensiones y elevaciones tradicionales, posteriormente se introducen sucesiones exactas de espacios topológicos punteados, que darán lugar, finalmente, bajo ciertas condiciones, a sucesiones exactas de grupos de homotopía. En esta sección consideramos tanto espacios topológicos como espacios topológicos punteados.

Definición 1.40. Una aplicación $i : A \mapsto X$ es una cofibración si satisface la propiedad de extensión de homotopía (PEH). Esto quiere decir que si $hi_0 = fi$ en el diagrama:



entonces existe \tilde{h} , llamada extensión, haciendo que el diagrama conmute.

Lema 1.41. Si $i : A \rightarrow X$ es una cofibración y $g : A \rightarrow B$ es una aplicación cualquiera, entonces la aplicación inducida a través del push out $\bar{i} : B \rightarrow B \cup_g X$ es una cofibración.

Demostración. Dadas las aplicaciones f y h que hacen el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{i_0} & B \times I \\
 \downarrow i & & \downarrow \bar{i} & & \downarrow h \\
 X & \xrightarrow{\bar{g}} & B \cup_g X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & & & \searrow i_0 & \swarrow \bar{i} \times id_I \\
 & & & & (B \cup_g U) \times I
 \end{array}$$

H (dotted arrow from Y to $(B \cup_g U) \times I$)

tenemos que ver si existe $H : (B \cup_g U) \times I \rightarrow Y$ de modo que $H i_0 = f, H(\bar{i} \times id_I) = h$.

Como i es cofibración existe $\bar{h} : X \times I \rightarrow Y$ con $\bar{h} i_0 = f \bar{g}, \bar{h}(i \times id_I) = h(g \times id_I)$. Al mismo tiempo, el functor cilindro conserva push outs (por el corolario 1.28); así tenemos este diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 A \times I & \xrightarrow{g \times id_I} & B \times I \\
 \downarrow i \times id_I & & \downarrow \bar{i} \times id_I \\
 X \times I & \xrightarrow{\bar{g} \times id_I} & (B \cup_g X) \times I \\
 & \searrow \bar{h} & \swarrow \bar{h} \\
 & & Y
 \end{array}$$

h (arrow from $B \times I$ to Y)

en el que se induce $\tilde{h} : (B \cup_g X) \times I \rightarrow Y$ tal que $\tilde{h}(\bar{i} \times id_I) = h$ y $(\bar{g} \times id_I) = \tilde{h}$. Por último, se tiene que $\tilde{h} i_0 \bar{i} g = \tilde{h} i_0 \bar{g} i$. Además, $\tilde{h} i_0 \bar{g} = \tilde{h}(\bar{g} \times id_I) i_0 = \bar{h} i_0 = f \bar{g}$ y $\tilde{h} i_0 \bar{i} = \tilde{h}(\bar{i} \times id_I) i_0 = h i_0 = f \bar{i}$, pero por la unicidad del push out, necesariamente $\tilde{h} i_0 = f$ y por tanto $H := \tilde{h}$ es la extensión buscada para la homotopía h . \square

Definición 1.42. Dadas $f : X \rightarrow Y$ e $i_0 : X \rightarrow X \times I$, se define el Mapping cylinder como el siguiente objeto push out:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\
 \downarrow f & & \downarrow \\
 Y & \longrightarrow & M_f
 \end{array}$$

Proposición 1.43. Sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces existen una cofibración $j : X \rightarrow M_f$ tal que $j(x) = [x, 1]$ y una equivalencia de homotopía $r : M_f \rightarrow Y$ con $r(y) = y$ y $r([x, s]) = f(x)$ de modo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y \\
 \searrow j & & \nearrow r \\
 & M_f &
 \end{array}$$

Demostración. Veamos primero que j es cofibración. Dadas $g : M_f \rightarrow Z$ y $h : X \times I \rightarrow Z$ tales que $h_{i_0} = gj$, veamos que existe $\tilde{h} : M_f \times I \rightarrow Z$ que haga conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\
 j \downarrow & & \downarrow h \\
 M_f & \xrightarrow{g} & Z \\
 & \searrow i_0 & \swarrow j \times id_I \\
 & & M_f \times I
 \end{array}$$

\tilde{h} (dotted arrow from $M_f \times I$ to Z)

Sea $S = (I \times 0) \cup (\partial I \times I) \subset I \times I$.

Se define la retracción $r : I \times I \rightarrow S$ como la proyección desde el punto $(1/2, 2)$:

$$r(t, s) = \begin{cases} (0, \frac{4t-s}{2t-1}) & \text{si } s \geq 4t \\ (\frac{s-4t}{2(s-2)}, 0) & \text{si } s \leq 4t \leq 4-s \\ (1, \frac{s+4t-4}{2t-1}) & \text{si } 4t \geq 4-s \end{cases}$$

Sea $H'' : X \times S \rightarrow Z$ definida mediante $H''(x, t, 0) = g([x, t])$, $H''(x, 0, s) = g([f(x)])$ y $H''(x, 1, s) = h(x, s)$, $\forall x \in X, \forall t, s \in I$.

H está bien definida por el lema de continuidad (lema 1.2) aplicado a los cerrados

$$C_1 = X \times I \times \{0\}, C_2 = X \times \{0\} \times I, C_3 = X \times \{1\} \times I$$

Se define $H' : X \times I \times I \rightarrow Z$ como $H'(x, t, s) = H''(x, r(t, s))$ y finalmente se define $\tilde{h} : M_f \times I \rightarrow Z$ como:

$$\tilde{h}([x, t], s) = H'(x, t, s), \forall [x, t] = \bar{f}(x, t) \in M_f$$

$$\tilde{h}([y], s) = g([y]), \forall [y] = \bar{i}_0(y) \in M_f$$

Se concluye que \tilde{h} es la extensión buscada para que conmute el diagrama original, y por tanto j es cofibración. Para ver que r es equivalencia de homotopía, debemos encontrar una aplicación l de modo que se cumpla que $id_{M_f} \simeq lr$ y $rl \simeq id_Y$.

Se define $l : Y \rightarrow M_f$ por $l(y) = [y]$. Entonces $rl(y) = r[y] = y$. Se concluye que $rl = id_Y$, y por tanto r es retracción.

Por otro lado, $lr(x, t) = lf(x) = [f(x)]$ y $lr[y] = l(y) = [y]$. Definiendo la homotopía $F : MF \times I$ por $F([x, t], s) = [x, t(1-s)]$ y $F([y], s) = [y]$, se concluye que $id_{M_f} \simeq_F lr$.

□

Definición 1.44. Una aplicación $p : E \rightarrow B$ se dice que es fibración si satisface la propiedad de elevación de homotopía (PEH), es decir, dado el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 E^I & \xrightarrow{p_0} & E \\
 p^I \downarrow & \tilde{h} \nearrow & \uparrow f \\
 & Y & \\
 & h \searrow & \downarrow p \\
 B^I & \xrightarrow{p_0} & B
 \end{array}$$

debe existir $\tilde{h} : Y \rightarrow E^I$ haciendo conmutar todo el diagrama.

Observación 1.45. Gracias a la ley exponencial, existe la siguiente definición equivalente a la anterior: p es fibración si, dada la conmutatividad $hi_0 = pf$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{f} & E \\
 i_0 \downarrow & \tilde{h} \nearrow & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

entonces existe \tilde{h} haciendo conmutar el diagrama.

Proposición 1.46. Si $p : E \rightarrow B$ es una fibración, entonces la aplicación inducida a través del pull back $\bar{p} : A \times_g E \rightarrow A$ es también una fibración.

Demostración. Análoga a la demostración de la proposición 1.41. □

Hemos definido las fibraciones en **Top**, es decir, sin tener en cuenta puntos base. Sin embargo, las fibraciones van a tener trascendencia en la categoría **hTop***, y se definen de forma análoga considerando los espacios de caminos punteados PE y PB en lugar de E^I y B^I .

Definición 1.47. Una sucesión $(A, a_0) \xrightarrow{f} (B, b_0) \xrightarrow{g} (C, c_0)$ en **Set*** se dice exacta cuando $Im(f) = Ker(g)$, donde $Ker(g) = g^{-1}(\{c_0\})$. Generalizando, se dice que una sucesión larga

$$\cdots \rightarrow (A_{k-1}, a_{k-1}) \xrightarrow{f_{k-1}} (A_k, a_k) \xrightarrow{f_k} (A_{k+1}, a_{k+1}) \rightarrow \cdots$$

en **Set*** es exacta cuando $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$ para todo i .

Definición 1.48. Una sucesión $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ en \mathbf{Top}_* se dice exacta si la sucesión de conjuntos punteados

$$[(W, w_0), (X, x_0)] \xrightarrow{f_*} [(W, w_0), (Y, y_0)] \xrightarrow{g_*} [(W, w_0), (Z, z_0)]$$

es exacta para todo espacio punteado (W, w_0) .

Proposición 1.49. Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es continua entonces f es nul-homotopa si y sólo si existe una aplicación continua $F : (X, x_0) \rightarrow (PY, c_{y_0})$ tal que $e_1 F = f$.

Demostración. Si $f \simeq 0$, existe una homotopía $H : X \times I$ verificando $H i_0 = c_{y_0}, H i_1 = f$ y $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in I$. Como el funtor caminos $-^I : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ y el funtor cilindro $I : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ forman un par adjunto, usando el isomorfismo de adjunción (Ley exponencial, teorema 1.2) se obtiene una aplicación continua $F : X \rightarrow Y^I$, definida por $(F(x))(t) = H(x, t)$, para todos $x \in X, t \in I$. Además, $e_1 F = f$, pues $e_1 F(x) = F(x)(1) = H(x, 1) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Recíprocamente, si existe una aplicación continua punteada $F : (X, x_0) \rightarrow (PY, c_{y_0})$ tal que $e_1 F = f$, se puede considerar $F : X \rightarrow Y^I$ y usando de nuevo el isomorfismo de adjunción, se obtiene $H : X \times I$ continua definida por $H(x, t) = (F(x))(t)$, que es la homotopía que estábamos buscando. \square

Definición 1.50. Dada $f : X \rightarrow Y$, llamamos fibra homotópica F_f al pullback:

$$F_f = X \times_f PY = \{(x, \alpha) / f(x) = \alpha(1)\} \subset X \times PY$$

inducido del diagrama

$$\begin{array}{ccc} F_f & \longrightarrow & PY \\ \pi \downarrow & & \downarrow p_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

donde p_1 es la evaluación del camino en el punto $1 \in I$ y π es la proyección $\pi(x, \alpha) = x$.

Proposición 1.51. Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una aplicación continua. Si $g : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ es otra aplicación continua entonces $fg \simeq 0$ si y sólo si existe $F : (Z, z_0) \rightarrow (P_f, *)$ en \mathbf{Top}_* tal que $f_1 F = g$.

Demostración. Supongamos que $fg \simeq 0$. Entonces, por la proposición anterior, existe $H : (Z, z_0) \rightarrow (PY, c_{y_0})$ tal que $fg = e_1 H$. Definimos $F : (Z, z_0) \rightarrow (P_f, *)$, que viene dado por $F(z) = (g(z), H(z))$. Evidentemente, $f_1 F = g$.

Recíprocamente, sea $F : (Z, z_0) \rightarrow (P_f, *)$ tal que $f_1 F = g$. Se define $H :$

$\rho F : Z \rightarrow Y$, siendo ρ la proyección de la fibra homotópica en PY . Entonces $e_1 H = e_1 \rho F = f f_1 = f g$, siendo f_1 la proyección de la fibra homotópica en X . Entonces, por la proposición anterior, tenemos que $f g \simeq 0$. □

Proposición 1.52. *Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ en \mathbf{Top}_* , entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$(P_f, *) \xrightarrow{f_1} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

Demostración. Veamos que la sucesión

$$[(W, w_0), (P_f, *)] \xrightarrow{(f_1)_*} [(W, w_0), (X, x_0)] \xrightarrow{f_*} [(W, w_0), (Y, y_0)]$$

es exactamente punteada para cualquier espacio punteado (W, w_0) .

1. $im(f_1)_* = \{[f_1 \alpha \in [(W, w_0), (X, x_0)] : [\alpha \in [(P_f, *), (X, x_0)]]\} \subset ker(f_*) = \{[f] \in [(W, w_0), (X, x_0)] : f h \simeq 0\}$

Como $f f_1 = e_1 \rho$, por el pull back, entonces, por la proposición 1.49 se tiene que $f f_1 \simeq 0$. Sigue que $f_*([f_1 \alpha] = [f f_1 \alpha] = [c_* \alpha] = [c_*]$

2. $ker(f_*) \subset im(f_1)_*$

Si $[h] \in ker(f_*)$ entonces $f h \simeq 0$. Por la proposición 1.51, existe $F : (W, w_0) \rightarrow (P_f, *)$ tal que $f_1 F = h$. Así, $[F] \in [(W, w_0), (P_f, *)]$ y $(f_1)_*([F]) = [f_1 F] = [h]$ □

La fibra homotópica puede iterarse, como vemos en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 P f_2 & \longrightarrow & P P_f & & \\
 f_3 \downarrow & & e_1 \downarrow & & \\
 P f_1 & \longrightarrow & P_f & \longrightarrow & P Y \\
 \downarrow & f_2 & \downarrow & & e_1 \downarrow \\
 P X & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & e_1 & & &
 \end{array}$$

Nótese que $P_{f_1} = \{(x, \beta, \alpha) \in X \times P Y \times P X / f(x) = \beta(1), x = \alpha(1)\}$,
 $P_{f_2} = \{(x, \beta, \alpha, \omega) \in X \times P Y \times P X \times P P_f / \beta(1) = f(x), \alpha(1) = x, \omega(1) = (x, \beta)\}$

Corolario 1.53. *Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es continua, la siguiente sucesión es exacta en \mathbf{Top}_* :*

$$\dots \longrightarrow (P_{f_2}, *) \xrightarrow{f_3} (P_{f_1}, *) \xrightarrow{f_2} (P_f, *) \xrightarrow{f_1} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

Lema 1.54. *Sea $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ en \mathbf{Top}_* . Entonces la aplicación $v : (\Omega Y, c_{y_0}) \rightarrow (P_{f_1}, *)$, definida como $v(\beta) = (x_0, \beta, c_{x_0})$, es una equivalencia de homotopía.*

Demostración. Se da a continuación un esbozo de la demostración. Se definen $m : (P_{f_1}, *) \rightarrow (\Omega Y, c_{y_0})$ por $m(x, \beta, \alpha) = (f\bar{\alpha})\beta$, y $H : \Omega Y \times I \rightarrow \Omega Y$ como

$$H(\beta, t)(s) = \begin{cases} \beta(\frac{2s}{t+1}) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ y_0 & \text{si } \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $H : mv \simeq id$ rel $\{c_{y_0}\}$. Finalmente, se define $K : P_{f_1} \times I \rightarrow P_{f_1}$ como $K(x, \beta, \alpha, t) = (\alpha(t), \gamma(\beta, \alpha, t), \alpha_t)$, donde $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$ y

$$\gamma(\beta, \alpha, t)(s) = \begin{cases} \beta(s(2-t)) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2-t} \\ f(\alpha(s(t-2)+2)) & \text{si } \frac{1}{2-t} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Por el lema de continuidad y la ley exponencial, γ es continua, y se comprueba que $K : vm \simeq id$ rel $*$

□

Observación 1.55. Si en el lema anterior se sustituye la aplicación f por $f_1 : P_f \rightarrow X$, se obtiene una equivalencia de homotopía punteada $(\Omega X, x_{x_0}) \rightarrow (P_{f_2}, *)$.

Proposición 1.56. *Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una aplicación en \mathbf{Top}_* , entonces la siguiente sucesión es exacta en \mathbf{Top}_* :*

$$(\Omega X, c_{x_0}) \xrightarrow{\Omega f} (\Omega Y, c_{y_0}) \xrightarrow{\rho} (P_f, *) \xrightarrow{f_1} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

donde $\rho = f_2 v : (\Omega Y, c_{y_0}) \rightarrow (P_f, *)$ y v se ha definido en la proposición anterior.

Demostración. Nótese que $\rho(\beta) = (x_0, \beta) \forall \beta \in \Omega Y$.

El siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía punteada:

$$\begin{array}{ccccc} (Pf_2, *) & \xrightarrow{f_3} & (Pf_1, *) & \xrightarrow{f_2} & (P_f, *) \\ \simeq \uparrow v'u & & \simeq \uparrow v & & \uparrow id \\ (\Omega X, c_{x_0}) & \xrightarrow{\Omega f} & (\Omega Y, c_{y_0}) & \xrightarrow{\rho} & (P_f, *) \end{array}$$

donde $u(\omega) = \bar{\omega}$. El cuadrado de la derecha del diagrama conmuta trivialmente. Además $v\Omega f \simeq_F f_3 v'u$ rel $\{c_{x_0}\}$, donde $F : \Omega \times I \rightarrow P_f$ definido por $F(\alpha, t) = (\alpha(1-t), f\alpha_{1-t}, (\bar{\alpha})_t)$, con $\alpha_t(s) = \alpha(st)$

Finalmente, la exactitud en la fila inferior es deducida de la exactitud de la fila superior, que era exacta por el corolario 1.53.

□

Lema 1.57. *Si la sucesión $(X, x_0) \xrightarrow{g} (Y, y_0) \xrightarrow{h} (Z, z_0)$ es exacta, entonces también lo es*

$$(\Omega X, c_{x_0}) \xrightarrow{\Omega g} (\Omega Y, c_{y_0}) \xrightarrow{\Omega h} (\Omega Z, c_{z_0})$$

Demostración. Si (W, w_0) es un espacio punteado y teniendo en cuenta los isomorfismos de adjunción, existe un diagrama conmutativo en \mathbf{Set}_* :

$$\begin{array}{ccccc} [(\Sigma W, *), (X, x_0)] & \xrightarrow{g_*} & [(\Sigma W, *), (Y, y_0)] & \xrightarrow{h_*} & [(\Sigma W, *), (Z, z_0)] \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ [(W, w_0), (\Omega X, c_{x_0})] & \xrightarrow{(\Omega g)_*} & [(W, w_0), (\Omega Y, c_{y_0})] & \xrightarrow{(\Omega h)_*} & [(W, w_0), (\Omega Z, c_{z_0})] \end{array}$$

Puesto que la fila superior es exacta, también lo es la fila inferior. □

Teorema 1.58. *(Sucesión exacta de Puppe)*

Si $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es continua, entonces la siguiente sucesión es exacta en \mathbf{Top}_ :*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\Omega^2 f} & (\Omega^2 Y, *) & \xrightarrow{\Omega \gamma} & (\Omega P_f, *) & \xrightarrow{\Omega f_1} & (\Omega X, c_{x_0}) \xrightarrow{\Omega f} \dots \\ & & & & & & \\ & & (\Omega Y, y_0) & \xrightarrow{\gamma} & (P_f, *) & \xrightarrow{f_1} & (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \end{array}$$

Demostración. El resultado se obtiene teniendo en cuenta la sucesión exacta de la proposición 1.56 y del lema 1.57 anteriores. □

Lema 1.59. *Si $p : (E, e_0) \rightarrow (B, b_0)$ es una fibración, entonces la fibra $F = p^{-1}(\{b_0\})$ y la fibra homotópica $P_p = \{(x, \omega) \in E \times PB/p(x) = \omega(1)\}$ tienen el mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Observamos que $F = p^{-1}(\{b_0\}) \subset E$. Considerando las aplicaciones $i : F \rightarrow E$ la inclusión y $\omega_0 : F \rightarrow PB$ el camino constante en b_0 en el pull back de la fibra homotópica P_p , se obtiene la aplicación continua y punteada $\lambda : F \rightarrow P_p$ definida por $\lambda(x) = (x, \omega_0)$. Vamos a buscar un inverso homotópico para λ . Definimos $G : P_p \times I \rightarrow B$ por $G(x, \omega, t) = \omega(1 - t)$, que es continua. Consideramos el cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} P_p & \xrightarrow{p_1} & E \\ \downarrow i_0 & \tilde{G} \nearrow & \downarrow p \\ P_p \times I & \xrightarrow{G} & B \end{array}$$

Como p es fibración, existe una elevación $\tilde{G} : P_p \times I \rightarrow E$. En particular, $p\tilde{G}(x, \omega, 1) = G(x, \omega, 1) = w(0) = b_0$, por tanto $\tilde{G} : P_p \times I \rightarrow F$. Se define la inversa homotópica $\gamma = \tilde{G}i_1$. Se tiene que $\tilde{G}(\lambda \times id) : 1 \simeq \gamma\lambda$, y además se define la aplicación $H' : P_p \times I \rightarrow P_p$ como $H'(x, \omega, t) = (\tilde{G}(x, \omega, t), J(x, \omega, t))$, donde $J(x, \omega, t)(s) = \omega(s(1-t))$. Finalmente, $H' : id \simeq \lambda\gamma$. □

Teorema 1.60. *Para toda fibración $p : E \rightarrow B$ con fibra F existe una sucesión exacta:*

$$\dots \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0)$$

donde $i : F \rightarrow E$ es la inclusión.

Demostración. Como $\lambda : F \rightarrow P_p$, definida en la demostración del lema 1.59 anterior, es una equivalencia de homotopía, se tiene que

$$\lambda_* : \pi_n(F, e_0) = [(S^n, s_0), (F, e_0)] \rightarrow \pi_n(P_p, *) = [(S^n, s_0), (P_p, *)]$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 0$. Consideramos ahora la sucesión exacta de Puppe (Teorema 1.58) asociada a la fibración p :

$$\dots \xrightarrow{\Omega\rho} \Omega P_p \xrightarrow{\Omega p_1} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\rho} P_p \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} B$$

Aplicamos el funtor $[(S^0, s_0), -] : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Set}$, generando grupos de homotopía, y como la fibra F y la fibra homotópica P_p tienen el mismo tipo de homotopía, se obtiene la sucesión del enunciado del teorema, con $\delta = (\lambda_*)^{-1}\rho_*A$, siendo A el isomorfismo de adjunción del par de funtores (Σ, Ω) .

La exactitud se prueba teniendo en cuenta el siguiente diagrama, en el que se han omitido los puntos base para simplificar la notación:

$$\begin{array}{ccccccccc} [S^0, \Omega^n P_p] & \xrightarrow{(\Omega^n p_1)_*} & [S^0, \Omega^n E] & \xrightarrow{(\Omega^n p)_*} & [S^0, \Omega^n B] & \xrightarrow{(\Omega^{n-1} \rho)} & [S^0, \Omega^{n-1} P_p] & \xrightarrow{(\Omega^{n-1} p_1)} & [S^0, \Omega^{n-1} E] \\ \cong \uparrow A^{n-1} & & \cong \uparrow A^{n-1} \\ [S^{n-1}, \Omega P_p] & \xrightarrow{(\Omega p_1)_*} & [S^{n-1}, \Omega E] & \xrightarrow{(\Omega p)_*} & [S^{n-1}, \Omega B] & \xrightarrow{\rho_*} & [S^{n-1}, P_p] & \xrightarrow{(p_1)_*} & [S^{n-1}, E] \\ \cong \uparrow \lambda_* & & \cong \uparrow A & & \cong \uparrow A & & \cong \uparrow \lambda_* & & \cong \uparrow A \\ [S^n, F] & \xrightarrow{i_*} & [S^n, E] & \xrightarrow{p_*} & [S^n, B] & \xrightarrow{\delta} & [S^{n-1}, F] & \xrightarrow{i_*} & [S^{n-1}, E] \end{array}$$

□

Proposición 1.61. *Para dos espacios cualesquiera $A, B \subseteq X$, se tiene que $p : E(X; A, B) \rightarrow A \times B$ definida por $p(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$ es una fibración.*

Demostración. Dadas las aplicaciones $f_0 p = i_0 g$ en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 W & \xrightarrow{f_0} & E(X; A, B) \\
 i_0 \downarrow & \nearrow f & \downarrow p \\
 W \times I & \xrightarrow{g=(g',g'')} & A \times B
 \end{array}$$

donde $g' : W \times I \rightarrow A$ y $g'' : W \times I \rightarrow B$, tenemos que encontrar que existe una diagonal f que mantenga la conmutatividad. Tomamos la adjunta por ley exponencial (teorema 1.23) $\hat{f}_0 = h : W \times I \rightarrow X$ definida por $h(w, t) = f_0(w)(t)$, para $w \in W$ y $t \in I$. Se toma el conjunto $S = (I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$ y se define la aplicación $H' : W \times S \rightarrow X$ como

$$H'(w, t, s)(s) = \begin{cases} h(w, t) & \text{si } s = 0 \\ g'(w) & \text{si } t = 0 \\ g''(w) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

También se define $H : W \times I \times I \rightarrow X$ como $H'(w, r(t, s))$, siendo r la retracción $r : I \times I \rightarrow S$ que consiste en proyectar desde el punto $(1/2, 2)$ a lo largo del codominio. Esta retracción también fue usada en la proposición 1.43. Se define $f(w, s) : W \times I \rightarrow E(X; A, B)$ como $f(w, s)(t) = H(w, t, s) = H'(w, r(t, s))$. Esta aplicación se prueba que es continua a través de la ley exponencial. Finalmente, tenemos que ver que $f i_0 = f_0$, $p f = (g', g'')$:

$$\begin{aligned}
 p f(w, s) &= (f(w, s)(0), f(w, s)(1)) = (H'(w, r(0, s)), \\
 &H'(w, r(1, s))) = (H'(w, 0, s), H'(w, 1, s)) = \\
 &= (g'(w, s), g''(w, s)) = g(w, s) \forall (w, s) \in W \times I
 \end{aligned}$$

□

Corolario 1.62. *La aplicación $p : E(X; A, *) \rightarrow A$ es fibración.*

Demostración. Basta tomar $B = \{*\}$ en la proposición anterior. □

Por tanto, por el teorema 1.60, se tiene el corolario:

Corolario 1.63. *La siguiente sucesión de grupos es exacta*

$$\dots \pi_2(X, A) \longrightarrow \pi_1(A) \longrightarrow \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(X, A) \longrightarrow \pi_0(A) \longrightarrow \pi_0(X)$$

Esta sucesión y el siguiente lema serán necesarios para tratar el siguiente capítulo. Finalizamos así la sección y el primer capítulo de la memoria.

Lema 1.64. *Sea (Y, B) una pareja de espacios y $f : (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, B)$ representa un elemento en $\alpha \in \pi_n(Y, B)$. Entonces $\alpha = 0$ si y sólo si existe una aplicación $g : (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, B)$ con $f \simeq g$ rel S^{n-1} , y $g(E^n) \subseteq B$.*

Demostración. Supongamos que $\alpha = 0$. Se define la aplicación $F : E^n \times I \rightarrow E^n \times I$

$$F(x, t) = \begin{cases} (\frac{x}{(1-t/2)}, t) & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1 - t/2 \\ (\frac{x}{|x|}, 2 - 2|x|) & \text{si } 1 - t/2 \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

para todo $x \in E^n$ y $t \in I$.

Si E_t^n denota $E^n \times \{t\} \subseteq E^n \times I$, entonces se tiene que $F|_{E_0^n} = id$ y F envía $\{x \in E_1^n / |x| \leq 1/2\}$ a E_1^n y $\{x \in E_1^n / |x| \geq 1/2\}$ a $S^{n-1} \times I$.

Si $f \simeq_G * : (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, B)$, entonces tómesese $g(x) = GF(x, 1)$

Por tanto, se obtiene que $f \simeq_{GF} g$. También vemos que si $x \in S^{n-1}$, entonces $|x| = 1$, por lo que $G(x/|x|, 2 - 2|x|) = G(x, 0) = f(x)$; por tanto $f \simeq g$ rel S^{n-1} . Además, $g(E^n) = GF(E^n \times 1) \subset G((E^n \times 1) \cup (S^{n-1} \times I)) = G(E^n \times 1) \cup G(S^{n-1} \times I) \subset B$.

Recíprocamente, supongamos que $f \simeq_H g$ rel S^{n-1} y $g(E^n) \subseteq B$. Definiendo la homotopía $G : E^n \times I \rightarrow Y$ por:

$$G(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G((2 - 2tx), (2t - 1)*) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se tiene que $f \simeq_G * : (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (Y, B)$

□

CW complejos y Teoremas de aproximación

En esta sección se introducen una clase de espacios denominados CW complejos, y se muestran sus propiedades homotópicas.

El concepto de CW complejo fue definido en los artículos “Combinatorial homotopy I” y “Combinatorial homotopy II” (véase [10] [11]) publicados por J.H.C. Whitehead en 1949. Surge como una generalización natural del poliedro: En vez de utilizar las condiciones de linealidad de los complejos simpliciales, se adjuntan celdas a un conjunto discreto de puntos. Operaciones usuales en topología tales como los productos y los cocientes de espacios no son compatibles con la estructura de los complejos simpliciales, sin embargo, tienen un mejor comportamiento con la estructura celular de los CW complejos. Un CW complejo es un espacio Hausdorff construido pegando celdas sucesivamente en distintas dimensiones. Todo poliedro es un caso particular de CW complejo; además, en la mayoría de los casos, se puede obtener el CW complejo con un número menor de celdas que de simplices. Los CW complejos constituyen una extensa clase de espacios topológicos y verifican los teoremas clásicos que constituyen la segunda sección de este capítulo: los teoremas de Whitehead, de aproximación celular y de aproximación por CW complejos.

2.1. CW complejos

En esta sección nos centraremos principalmente en definir los CW complejos y se enunciarán sus propiedades básicas. Se tomarán espacios no basados y aplicaciones no punteadas, a menos que se indique lo contrario.

Definición 2.1. *Un CW complejo X es un espacio Hausdorff junto con una sucesión de subespacios de X , llamados esqueletos, cuya unión es X :*

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots \subseteq X^n \subseteq X^{n-1} \subseteq \dots$$

verificando dos condiciones

1. El n -esqueleto X^n se define inductivamente de la siguiente manera:
 Sea X^0 una unión discreta de puntos no vacía, llamados vértices. Supuesta la existencia de X^{n-1} , se obtendrá el espacio X^n de la siguiente forma:

Sean las aplicaciones $i : \coprod_{\beta \in B} S_\beta^{n-1} \rightarrow \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n$ la inclusión de la unión disjunta de esferas en la unión disjunta de discos y $\phi_\beta : S_\beta^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$, donde B es un conjunto de índices, y donde $S_\beta^{n-1} = S^{n-1}$ y $E_\beta^n = E^n$. Entonces queda determinada la aplicación pegamiento $\phi : \coprod_{\beta \in B} S_\beta^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Se obtiene el diagrama push out:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\beta \in B} S_\beta^{n-1} & \xrightarrow{\phi} & X^{n-1} \\ \downarrow i & & \downarrow j_{n-1} \\ \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n & \xrightarrow{\bar{\phi}} & X^{n-1} \cup_\phi \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n \end{array}$$

y se define $X^n = X^{n-1} \cup_\phi \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n$. También se denota la aplicación de pares $\Phi_\beta^n : (E_\beta^n, S_\beta^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$, llamada aplicación característica, que es la composición de la inclusión $E_\beta^n \rightarrow \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n$ y la aplicación cociente

$\coprod_{\beta \in B} E_\beta^n \rightarrow X^{n-1} \cup_\phi \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n$. El subconjunto $\Phi_\beta^n(E_\beta^n) \subseteq X^n \subseteq X$ se denomina n -celda cerrada o n -celda y se denota por \bar{e}_β^n , y a la imagen $\Phi_\beta^n(E_\beta^n - S_\beta^{n-1})$, denotada por e_β^n , se llama n -celda abierta.

Nótese que $j : X^{n-1} \rightarrow j(X^{n-1})$ es un homeomorfismo, es decir, $X^{n-1} \cong j(X^{n-1}) \subset X^n$, de este modo se puede interpretar que $X^{n-1} \subset X^n$.

2. El CW complejo $X = \bigcup_i X^i$ se le dota de la topología débil con respecto a la familia $\{\bar{e}_\beta^n\}$ de todas las n -celdas. Por tanto, $U \subseteq X$ es abierto (respectivamente, cerrado) si y sólo si $U \cap \bar{e}_\beta^n$ es abierto (respectivamente, cerrado) en \bar{e}_β^n , para cada celda cerrada \bar{e}_β^n .

Una vez vista la definición, se precisan algunos conceptos. Vemos que $\Phi|_{S_\beta^{n-1}} = \phi_\beta : S_\beta^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Las celdas abiertas e_β^n son abiertos en X^n (aunque no tienen por qué ser abiertos en X), esto se debe a que $j_{n-1}^{-1}(e_\beta^n) = \emptyset$ y que $\bar{\phi}^{-1}(e_\beta^n) = E_\beta^n - S_\beta^{n-1}$, que es abierto en la unión disjunta de los discos. También se deduce que la clausura de e_β^n es la n -celda $\Phi_\beta^n(E_\beta^n)$. Entonces $\Phi_\beta : (E_\beta^n, S_\beta^{n-1}) \rightarrow (\bar{e}_\beta^n, \partial e_\beta^n)$ es una aplicación continua de pares. Podemos escribir

$$X^n = X^{n-1} \bigcup_{\beta \in B} \bar{e}_\beta^n$$

Se dice que el CW complejo es *finito* si tiene un número finito de celdas, y que tiene dimensión finita n si para algún n , existe n -esqueleto $X^n = X$. En ese caso, se dice que $\dim X = n$. También se pueden obtener CW complejos basados; basta tomar como punto base un vértice en la construcción del CW complejo. A continuación se muestran algunos ejemplos:

Ejemplo 2.2. Un CW complejo 1-dimensional es un grafo. En X^0 se tienen los vértices, y a través de $\phi : \bigsqcup_{\beta \in B} S_\beta^0 \rightarrow X^0$ se consigue trazar segmentos entre los vértices como uno desee.

Ejemplo 2.3. La esfera S^n es un CW complejo donde se toma un vértice y una única n -celda, es decir, S^n es el push out de los morfismos $E^n \longleftarrow S^{n-1} \longrightarrow \{*\}$

Ejemplo 2.4. Sea $X^0 = \{*\}$ y se toman dos 1-celdas, de forma que X^1 será el Wedge de dos circunferencias; se denota \vec{a} y \vec{b} a cada uno de sus dos giros, que se entienden como caminos, con punto base donde coinciden. Entonces se considera la aplicación pegamiento $\phi(S^1) \rightarrow X^1$ definida de la siguiente manera: se divide S^1 en los cuatro cuadrantes separados por los valores $0, \pi/2, \pi, (3\pi)/2$ y se rellena X^1 en el orden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}^{-1}, \vec{b}^{-1}$. El resultado es el toro $X^2 \cong S^1 \times S^1$.

Ejemplo 2.5. El espacio real proyectivo $\mathbb{R}P^n$ también puede ser construido como un CW complejo. Usualmente se toma $\mathbb{R}P^n = S^n / \sim$, donde \sim es la relación de equivalencia que viene dada por $x = \pm y$, con $x, y \in S^n$. Entonces, $\mathbb{R}P^0$ es una única 0-celda. Cada n -esqueleto tiene una única n -celda, que viene dada por la el push out:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow i & & \downarrow \\ E^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

donde la aplicación pegamiento $\phi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ es la proyección en el cociente. Entonces $\mathbb{R}P^n$ es homeomorfo a $\mathbb{R}P^{n-1} \cup_\phi E^n$. En primer lugar se prueba que E^n es homeomorfo al hemisferio norte de S^n , $E_+^n = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in S^n / x_{n+1} \geq 0\}$. Sea $\Psi : E^n \rightarrow E_+^n$ el homeomorfismo usado en el lema 1.33 dado por $\Psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n (x_i)^2})$.

Se define entonces $\theta : \mathbb{R}P^{n-1} \cup_\phi E^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ como

$$\begin{cases} (\theta([x_1, \dots, x_n]) = [x_1, \dots, x_n, 0] \text{ si } \bar{x} \in \mathbb{R}P^{n-1} \\ (\theta(x_1, \dots, x_n) = [\Psi(x_1, \dots, x_n)] = [x_1, \dots, x_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n (x_i)^2}] \text{ si } \bar{x} \in E^n \end{cases}$$

Y se deduce que θ es homeomorfismo.

Definición 2.6. Sea X un CW complejo y $A \subseteq X$. Entonces A es un subcomplejo de X si A es una unión de celdas abiertas de X tal que si $e^n \subseteq A$ es una celda abierta, entonces $\bar{e}^n \subseteq A$. Diremos que el par (X, A) es un par CW.

Definición 2.7. Un par de espacios (X, A) siendo X Hausdorff y A un subespacio cerrado de X se llama CW complejo relativo si existe una sucesión de subespacios de X , llamada esqueleto relativo

$$(X, A)^0 \subseteq (X, A)^1 \subseteq \dots \subseteq (X, A)^n \subseteq (X, A)^{n+1} \subseteq \dots$$

cuya unión es X . Estos subespacios se definen de la siguiente manera:

1. $(X, A)^0$ es la unión de A y un conjunto discreto de puntos disjunto de A . Tanto A , como el conjunto discreto de puntos, pueden ser el conjunto vacío. Se denominan vértices relativos o 0-celdas relativas a los elementos del conjunto discreto.
2. Se supone que $(X, A)^{n-1}$ ha sido definido para $n \geq 1$ y que existen aplicaciones no basadas $\phi_\beta : S_\beta^{n-1} \rightarrow (X, A)^{n-1}$ para $\beta \in B$, donde $S_\beta^{n-1} = S^{n-1}$. Dado el diagrama push out:

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\beta \in B} S_\beta^{n-1} & \xrightarrow{\phi} & (X, A)^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n & \longrightarrow & (X, A)^{n-1} \cup_\phi \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n \end{array}$$

se define $(X, A)^n = (X, A)^{n-1} \cup_\phi \coprod_{\beta \in B} E_\beta^n$.

Como en la definición 2.1, se obtienen aplicaciones característica $\Phi_\beta^n : E_\beta^n \rightarrow (X, A)^n$, n -celdas relativas $\bar{e}_\beta^n = \Phi_\beta^n(E_\beta^n)$ y n -celdas abiertas relativas $e_\beta^n = \Phi_\beta^n(E_\beta^n - S_\beta^{n-1})$.

Al igual que en la definición 2.1, se toma la topología débil, esta vez respecto a A y las n -celdas relativas \bar{e}_β^n .

Si $(X, A)^n = (X, A)$ para algún n , entonces se dice que (X, A) tiene dimensión finita. La dimensión de (X, A) es el entero más pequeño tal que $(X, A)^n = X$ y se denota $\dim X = n$.

Observación 2.8. Si (X, A) es un par CW, entonces (X, A) es un CW complejo relativo cuyos n -esqueletos son de la forma $(X, A)^n = X^n \cup A$.

Definición 2.9. Sea (X, A) un CW complejo relativo. Entonces se dice que (X', A) es un CW subcomplejo relativo si se cumple que:

1. $X' \subseteq X$.
2. X' es unión de A y celdas abiertas relativas de X .
3. Si e^k es una celda abierta relativa de X contenida en X' , entonces \bar{e}^k está contenido en X' .

Ejemplo 2.10. Si (X, A) es un CW complejo relativo, entonces el espacio X/A es un CW complejo basado. Las celdas de X/A son las celdas de $X - A$ proyectadas sobre X/A y un vértice adicional donde quedan identificados todos los puntos de A , que se toma como punto base.

Ejemplo 2.11. De la misma manera, dados los CW complejos $X_\beta, \beta \in B$, su producto wedge $\bigvee_{\beta \in B} X_\beta$ es un CW complejo. Esto se debe a que $\bigsqcup_{\beta \in B} X_\beta$ es un CW complejo, y el producto Wedge se puede interpretar como dicha unión disjunta cociente con el conjunto de puntos base $S = \{*\beta/\beta \in B\}$, que es un subespacio de la unión disjunta, es decir, $(\bigsqcup_{\beta \in B} X_\beta, S)$ es un CW complejo relativo.

Definición 2.12. Sean X e Y CW complejos y sea $g : X \rightarrow Y$ una aplicación no basada. Entonces se dirá que g es celular si envía el n -esqueleto de X dentro del n -esqueleto de Y , esto es, $g(X^n) \subseteq Y^n, \forall n$. Si (X, A) e (Y, B) son CW-complejos relativos, entonces la aplicación de pares $g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ será celular si $g((X, A)^n) \subseteq (Y, B)^n, \forall n$.

Proposición 2.13. Sea X un CW complejo. Entonces X es unión disjunta de todas sus celdas abiertas.

Demostración. Primero se verá que un elemento x de X no puede estar en dos celdas abiertas a la vez, y posteriormente se probará que X es unión de todas sus celdas abiertas.

Sea $x \in e_\alpha^m \cap e_\beta^n$. Si $m = n$, es imposible que x esté en ambas celdas. Supóngase $m < n$. Entonces $x \in \Phi_\alpha^m(E_\alpha^m - S_\alpha^{m-1}) \cap \Phi_\beta^n(E_\beta^n - S_\beta^{n-1})$. Por tanto $x \in X^m$ y $x \in X^n$, y por las inclusiones entre n -esqueletos, $x \in X^{m+1} \cap X^{m+2} \cap \dots \cap X^{n-1}$. Pero X^n se define como el push out:

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & \xrightarrow{\phi} & X^{n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow j_{n-1} \\
 E^n & \xrightarrow{\bar{\phi}} & X^n
 \end{array}$$

donde j_{n-1} se puede considerar como una inclusión. Se puede apreciar que como $x \in X^{n-1}$, x no ha sido generado desde ningún E_α^n , puesto que los puntos del interior de cualquier E_α^n sólo están identificados en X^n con ellos mismos. Por tanto $x \notin \Phi_\beta^n(E_\beta^n - S_\beta^{n-1})$. Se ha llegado a una contradicción.

Sea $x \in X$, entonces $\exists n : x \in X^n$. Supóngase que x no pertenece a ninguna celda abierta de X^n . Entonces $x \in X^{n-1}$. De la misma manera que en X^n , x puede estar en una celda abierta o, en caso contrario, $x \in X^{n-2}$. Si se procede así sucesivamente, x estará en alguna celda abierta o bien $x \in X^0$, donde todos los puntos son celdas abiertas y cerradas. \square

Lema 2.14. *Sea X un CW complejo. Entonces:*

1. X tiene la topología débil respecto el conjunto $\{X^n\}$ de esqueletos.
2. Si C es un subconjunto compacto de X , entonces C está contenido en una unión finita de celdas abiertas.

Demostración.

1. Supongamos que $F \subseteq X$ y que $F \cap X^n$ es cerrado en $X^n \forall n$. Como los cerrados en \bar{e}_β^n son cerrados de X^n intersecados con \bar{e}_β^n , se tiene que $F \cap \bar{e}_\beta^n$ es cerrado en \bar{e}_β^n para todo n y β . Por tanto F es cerrado en X .

Ahora supongamos que F es cerrado en X . Tenemos que ver que $F \cap X^n$ es cerrado en $X^n \forall n$. Procederemos por inducción.

Como X^0 es un conjunto discreto de puntos, $F \cap X^0$ es cerrado en X^0 . A continuación supongamos que $F \cap X^{n-1}$ es cerrado en X^{n-1} . Como la topología de cada n - esqueleto es una topología cociente de un push out, tenemos que ver que la antiimagen de $F \cap X^n$ es cerrada, o lo que es lo mismo, si $i : X^{n-1} \rightarrow X^n$ es la inclusión en el n - esqueleto y $\pi : \bigsqcup_{\beta \in B} E_\beta^n \rightarrow X^n$

la proyección en el cociente, se tiene que:

- $i^{-1}(F \cap X^n) = F \cap X^{n-1}$ es cerrado por hipótesis de inducción.
- $\pi^{-1}(F \cap X^n) = \bigsqcup_\alpha (\Phi_\alpha^n)^{-1}(F \cap X^n) = \bigsqcup_\alpha (\Phi_\alpha^n)^{-1}(F \cap \bar{e}_\alpha^n)$, que es cerrado en $\bigsqcup_\alpha E_\alpha^n$

2. Suponemos que C tiene intersección no vacía con infinitas celdas abiertas y escogemos un conjunto infinito $S = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq C$ tal que cada elemento de S está en una celda distinta. Para cualquier subconjunto $A \subseteq S$, mostraremos que A es cerrado en X .

Por (a), basta probar por inducción sobre n que $A \cap X^n$ es cerrado en $X^n \forall n$. $A \cap X^0$ es cerrado trivialmente. Se supone ahora que $A \cap X^{n-1}$ es cerrado en X^{n-1} y sea \bar{e}_α^n una n -celda cualquiera con aplicación característica $\Phi_\alpha : E_\alpha^n \rightarrow \bar{e}_\alpha^n$ e inclusión en el n -esqueleto $i : X^{n-1} \rightarrow X^n$. Tenemos que $i^{-1}(X^n \cap A) = X^{n-1} \cap A$, que es cerrado. Vemos que $\Phi^{-1}(A \cap X^n) = \bigsqcup_\alpha \Phi_\alpha^{-1}(A \cap X^n) = \bigsqcup_\alpha \Phi_\alpha^{-1}(A \cap \bar{e}_\alpha^n)$, pero estas intersecciones son un solo punto

para cada α , es decir, son cerrados, y la unión disjunta de las antiimágenes vuelve a ser un cerrado y por consiguiente $A \cap X^n$ es cerrado en X^n . Se concluye que A es cerrado en X . Como cada subconjunto de S es cerrado, S es un espacio discreto. S además es cerrado y está contenido en el espacio compacto C , así que S también es compacto. Pero si un conjunto es compacto y discreto, necesariamente debe ser finito. Por tanto, por reducción al absurdo, C interseca a un número finito de celdas abiertas. □

Se probará a continuación que todo espacio CW complejo puede ser interpretado como el colímite de un diagrama.

Proposición 2.15. *Sea X un CW complejo. Tómesese la categoría pequeña \mathbf{H} formada con objetos los esqueletos $\{X^0, X^1, \dots, X^n, \dots\}$ y morfismos las identidades, las inclusiones $i_q : X^q \rightarrow X^{q+1}$ y las composiciones que se generan. Se define el funtor $F : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{Top}$ como la identidad en los objetos y en los morfismos. Entonces $\text{colim } F = X$.*

Demostración. Por la proposición 1.16, se sabe de la existencia del colímite $\text{colim } F$. Bastará ver que las topologías coinciden. La topología asociada al colímite es la topología final relativa a las inclusiones $\tau_F = \{V \subset X / \iota_i^{-1}(V) \in \tau_{X^i} \forall i\}$. Hay que demostrar que esta topología es la misma que la topología débil del CW complejo:

$V \subset X$ cerrado $\Leftrightarrow V \cap X^n$ cerrado en $X^n \Leftrightarrow \iota_n^{-1}(V)$ cerrado en $X^{n-1} \forall n \Leftrightarrow V$ cerrado en $\text{colim } F$. Nótese que $\iota_n^{-1}(V) = V \cap X^n \forall n$. □

Observación 2.16. Para considerar un CW complejo como espacio basado, basta con tomar uno de sus vértices como punto base.

Lema 2.17. *Sea X un CW complejo y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación. Entonces f es continua $\Leftrightarrow f|_{\bar{e}_\beta^n} : \bar{e}_\beta^n \rightarrow Y$ es continua para cada celda cerrada $\bar{e}_\beta^n \Leftrightarrow f\Phi_\beta^n : E_\beta^n \rightarrow Y$ es continua para cada aplicación característica $\Phi_\beta^n \Leftrightarrow f|_{X^n} : X^n \rightarrow Y$ es continua para cada n .*

Demostración. Las primeras equivalencias son consecuencia directa de la topología débil de los CW complejos y del hecho de que Φ_β^n es una identificación; y la última afirmación proviene del lema 2.14, primer apartado. □

Lema 2.18. *Si X e Y son CW complejos, entonces $X \times Y$ es CW complejo.*

Demostración. Si \bar{e}^m y \bar{e}^n son celdas de X e Y respectivamente, entonces $X \times Y$ tiene una estructura celular en la que $\bar{e}^m \times \bar{e}^n$ son celdas cerradas. Dadas las aplicaciones características Φ y Ψ de las celdas \bar{e}^m y \bar{e}^n , se tiene la aplicación

$$E^{m+n} \cong E^m \times E^n \xrightarrow{\Phi \times \Psi} \bar{e}^m \times \bar{e}^n$$

y teniendo en cuenta que $S^{m+n-1} \cong E^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times E^n$, esta aplicación cumple que $(\Phi \times \Psi)(E^{n+m} - S^{n+m-1}) = \bar{e}^m \times \bar{e}^n - (\bar{e}^m \times \partial \bar{e}^n \cup \partial \bar{e}^m \times \bar{e}^n) = e^m \times e^n$. Por tanto, la aplicación $\Phi \times \Psi$ es característica. El esqueleto del CW complejo $X \times Y$ viene dado por $(X \times Y)^k = \bigcup_{i+j=k} (X^i \times Y^j)$. Basta tomar la topología débil sobre estos n -esqueletos para afirmar que $X \times Y$ es efectivamente CW complejo. \square

Observación 2.19. Nótese que el producto $X \times Y$ de CW complejos no tiene por qué tener la topología producto. Sí coinciden en ciertos casos, por ejemplo si X o Y es localmente compacto, o si ambos tienen un número contable de celdas. Un caso particular de interés es si $Y = I$ el intervalo unidad. Como I es un CW complejo compacto, entonces $X \times I$ es un CW complejo con la topología producto.

Proposición 2.20. *Si $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ es un retracto no basado de $X \times I$ y A es un subespacio cerrado de X , entonces el par (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía.*

Demostración. Sea $r : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ una retracción no basada y asumimos que existe $f : X \rightarrow Y$ y $G : A \times I \rightarrow Y$ tal que $G(x, 0) = f|_A$. Como A es cerrado, por el lema de continuidad f y G determinan una aplicación no punteada $H : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \rightarrow Y$ tal que $H(x, 0) = f(x)$, $H(a, t) = G(a, t)$. Entonces Hr es la homotopía que buscamos. \square

Este resultado nos será de utilidad a continuación.

Proposición 2.21. *Si (X, A) es un CW complejo relativo, entonces (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía.*

Demostración. Por la proposición anterior, nos basta con encontrar una retracción $q : (X \times I) \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. Definimos inductivamente las retracciones $q_n : (X \times \{0\}) \cup ((X, A)^n \times I) \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ de modo que $q_n|_{(X \times \{0\}) \cup ((X, A)^{n-1} \times I)} = q_{n-1}$. Para $n = 0$, definimos $q_0(x, t) = (x, 0)$, donde x es un vértice, y $q_0(a, t) = (a, 0) \forall a \in A$. Ahora asumimos que r_{n-1} ha sido definida y sea \bar{e}_β^n una celda relativa en $(X, A)^n$, $\beta \in B$, con aplicación característica: $\Phi_\beta : (E^n, S^{n-1}) \rightarrow (\bar{e}_\beta^n, \partial \bar{e}_\beta^n) \subseteq (X, (X, A)^{n-1})$. Tomamos la aplicación $r : E^n \times I \rightarrow (E^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$ definida por:

$$r(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{x}{|x|}, & 2 - \frac{2-t}{|x|} \right) \text{ si } |x| \geq 1 - t/2 \\ \left(\frac{2x}{2-t}, & 0 \right) \text{ si } |x| \leq 1 - t/2 \end{cases}$$

Geoméricamente, r deforma $E^n \times I$ en $(S^{n-1} \times I) \cup (E^n \times \{0\})$ a través de la proyección de cada punto desde el punto $(0, 0, \dots, 2)$. Entonces, podemos definir

la composición de aplicaciones $t_\beta^n : E_\beta^n \times I \rightarrow (X \times 0) \cup (A \times I)$ como $t_\beta^n = q_{n-1}(\Phi_\beta^n \times id_I)s$, para cada $n, \beta \in B$. De este modo, se obtiene el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_{\beta} S_\beta^{n-1} \times I & \xrightarrow{\phi \times id_I} & (X, A)^{n-1} \times I \\
 \downarrow i \times id_I & & \downarrow \\
 \bigsqcup_{\beta} E_\beta^n \times I & \xrightarrow{\Phi \times id_I} & (X, A)^n \times I \\
 & \searrow & \downarrow q_{n-1} \\
 & & \bigsqcup_{\beta} t_\beta^n \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)
 \end{array}$$

que es un diagrama push out porque (X, A) es un CW complejo y el cilindro de un push out es de nuevo un push out (corolario 1.28). Además se verifica:

$$t_\beta^n(i \times id_I) = q_{n-1}(\Phi_\beta \times id_I)r(i \times id_I) = q_{n-1}(\Phi_\beta \times id_I)|_{S_\beta^{n-1} \times I} = q_{n-1}(\phi_\beta \times id_I)$$

Entonces existe única $q_n : ((X, A)^n \times I) \rightarrow X \times \{0\} \cup A \times I$ y además $q_n|_{(X, A)^{n-1} \times I} = q_{n-1}$. Definimos $q : X \times I \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ por $q(x, t) = q_n(x, t)$ si $(x, t) \in (X, A)^n \times I$.

□

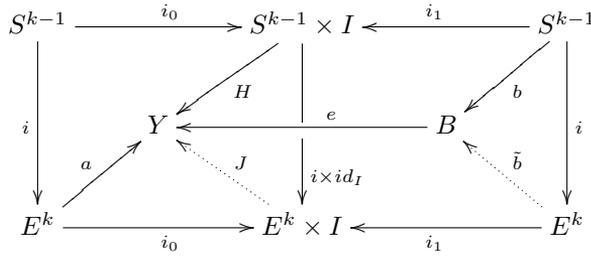
Observación 2.22. De igual manera, se puede afirmar que si (X, A) es un CW complejo relativo basado, entonces (X, A) tiene la propiedad de extensión de homotopía basada, definiendo $r(*, t) = (*, t), t \in I$.

Observación 2.23. La retracción r dada en la demostración anterior prueba que, en particular, el par de espacios (E^n, S^{n-1}) tiene la propiedad de extensión de homotopía, para todo entero n .

2.2. Teorema de Whitehead y aproximación por CW complejos

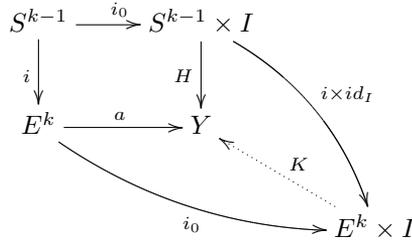
En esta última sección se prueban los resultados principales de esta memoria: los teoremas 2.29, 2.33 y 2.35, que ponen de manifiesto la relevancia de los CW complejos como modelo para los espacios topológicos. La herramienta fundamental para probar estos resultados es el lema HELP (lema 2.25)

Lema 2.24. *Sea $e : B \rightarrow Y$ con $e_* : \pi_{k-1}(B) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$ monomorfismo y $e_* : \pi_k(B) \rightarrow \pi_k(Y)$ epimorfismo par algún k . Sea $i : S^{k-1} \rightarrow E^k$ la inclusión y $a : E^k \rightarrow Y$ y $b : S^{k-1} \rightarrow B$ aplicaciones con $ai \simeq_H eb$ para una homotopía $H : S^{k-1} \times I \rightarrow Y$,*

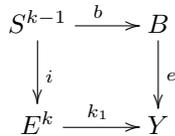


Entonces existen la aplicación $\tilde{b} : E^k \rightarrow B$ y una homotopía $J : E^k \times I \rightarrow Y$ tales que $\tilde{b}i = b$, $a \simeq_J e\tilde{b}$, y $J|_{S^{k-1} \times I} = H$

Demostración. Por la proposición 1.43 podemos reemplazar e por la inclusión a través del mapping cylinder M_e , y por tanto asumimos que e es una inclusión. Sean $\alpha : \pi_k(Y, B) \rightarrow \pi_{k-1}(B)$ y $\beta : \pi_k(Y) \rightarrow \pi_k(Y, B)$ aplicaciones de la sucesión exacta de grupos asociada a la pareja de espacios (Y, B) . En el nivel k , tenemos que e_* sobreyectiva, $Im e_* = ker \beta$, luego $\pi_k(Y) = ker \beta$. Por tanto $\beta(\pi_k(Y)) = 0$. En el nivel $k - 1$, e_* es monomorfismo, entonces $ker e_* = \{0\}$. Como $Im \alpha = ker e_*$, entonces $ker \alpha = \pi_k(Y, B)$. Pero $ker \alpha = Im \beta$. Entonces $\pi_k(Y, B) = 0$. Por la proposición 2.20, i es cofibración y se tiene el diagrama



Entonces existe la homotopía $k_t : E^k \rightarrow Y$ tal que $k_0 = a$, $k_t i = h_t$, con $h_t(x) := H(x, t)$. Tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo:



Definimos la aplicación de pares $k'_1 : (E^k, S^{k-1}) \rightarrow (Y, B)$ determinada por k_1 . Está bien definida porque $k_{1|S^{k-1}} = eb$, y como e es la inclusión en el mapping cylinder, $k_{1|S^{k-1}} \subset B$. Además, $[k'_1] \in \pi_k(Y, B)$, entonces $[k'_1] = 0$. Por el lema anterior, existe una aplicación $\tilde{b} : E^k \rightarrow B$ tal que $\tilde{b}i = b$ y $k_1 \simeq e\tilde{b}$ rel S^{k-1} , para una homotopía $G : E^k \times I \rightarrow Y$. Sigue que $a = k_0 \simeq_K k_1 \simeq_G e\tilde{b}$. Se define entonces la concatenación de homotopías

$$J'(x, t) = (K + G)(x, t) = \begin{cases} K(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, $a \simeq_{J'} \tilde{e}b$. Sea $F_{eb} : S^{k-1} \times I \rightarrow Y$ la homotopía constante en eb . Definimos la concatenación de homotopías $H + F_{eb}$. Como $K|_{S^{k-1} \times I} = H$, y $eb = k_1 \simeq_G \tilde{e}b$ rel S^{k-1} , se deduce que $J'|_{S^{k-1} \times I} = H + F_{eb}$. Sigue que $H + F_{eb} \simeq H$ rel $S^{k-1} \times \{0, 1\}$ trivialmente.

Denotamos esta homotopía por $\Lambda_t : S^{k-1} \times I \rightarrow Y$. A su vez, definimos la homotopía $\Gamma_t : (S^{k-1} \times I) \cup (E^k \times \{0, 1\}) \rightarrow Y$ como $\Gamma_t(x, s) = \Lambda_t(x, s)$, $\Gamma_t(y, 0) = a(y)$ y $\Gamma_t(y, 1) = eb(y)$, $\forall x \in S^{k-1}$ y $\forall y \in E^k$. Esta homotopía está bien definida y es continua porque Γ_t, a y $\tilde{e}b$ ya están definidas y son continuas en $S^{k-1} \times I$, y en $E^k \times \{0\}$ y en $E^k \times \{1\}$, respectivamente; por el lema 1.2, faltaría comprobar la continuidad en los dominios:

Sea $x \in S^{k-1}$. Sigue que $\Gamma_t(x, 0) = \Lambda_t(x, 0) = H + F_{eb}(x, 0) = ai(x) = a(x)$, al ser i la inclusión de la $k - 1$ esfera en el k disco. También se tiene $\Gamma_t(x, 1) = \Lambda_t(x, 1) = H(x, 1) = eb(x) = \tilde{e}b(x)$. Entonces, se obtiene el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (S^{k-1} \times I) \cup (E^k \times \{0, 1\}) & & \\ \downarrow j & \searrow \Gamma_t & \\ E^k \times I & \xrightarrow{J'} & Y \end{array}$$

donde j es la inclusión. Sean $x \in S^{k-1}$ e $y \in E^k$. Entonces $J'(x, s) = H + F_{eb}(x, s) = \Lambda_0(x, s) = \Gamma_0(x, s)$, $J'(y, 0) = k_0(y) = a(y) = \Gamma_t(y, 0) = \Gamma_0(y, 0)$ y $J'(y, 1) = \tilde{e}b(y) = \Gamma_t(y, 1) = \Gamma_0(y, 1)$. Por tanto, se ha comprobado que $J'j = \Gamma_0$. Además, j es una cofibración (por el lema 2.18 y la proposición 2.21), lo que nos permite obtener una extensión M para la homotopía Γ en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} (S^{k-1} \times I) \cup (E^k \times \{0, 1\}) & \xrightarrow{i_0} & ((S^{k-1} \times I) \cup (E^k \times \{0, 1\})) \times I \\ \downarrow j & & \downarrow j \times id \\ E^k \times I & \xrightarrow{i_0} & (E^k \times I) \times I \\ & \searrow J' & \swarrow M \\ & & Y \end{array}$$

Γ

Definimos $J := M(x, 1) = Mi_1$. Sea $x \in E^k$, entonces:
 $Ji_0 = Mi_1i_0(x) = M(j(x, 0), 1) = M(j \times id_I)((x, 0), 1) = \Gamma_1(x, 0) = a(x)$
 $Ji_1 = Mi_1i_1 = M(x, 1, 1) = M(j \times id_I)((x, 1), 1) = \Gamma_1(x, 1) = eb(x)$

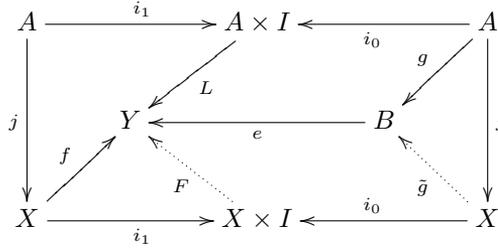
Ahora, sea $x \in S^{k-1}$, sigue que:

$$Mi_1(x, s) = M(x, s, 1) = \Gamma((x, s), 1) = \Gamma_1(x, s) = \Lambda_1(x, s) = H(x, s)$$

Finalmente, hemos encontrado una homotopía $J : E^k \times I \rightarrow Y$ tal que $a \simeq e\tilde{b}$ y $J|_{S^{k-1} \times I} = H$. \square

A continuación se enuncia un lema de suma importancia para simplificar diversas demostraciones. Se suele denotar HELP por sus siglas en inglés: homotopy extension and lifting property (propiedad de extensión y elevación de homotopía).

Lema 2.25. (Lema HELP) Sea (X, A) un CW complejo relativo y $e : B \rightarrow Y$ una aplicación. Suponemos que para cada k tal que existan una o más k -celdas relativas de (X, A) , se tiene que el homomorfismo $e_* : \pi_{k-1}(B) \rightarrow \pi_{k-1}(Y)$ es inyectivo y el homomorfismo $e_* : \pi_k(B) \rightarrow \pi_k(Y)$ es sobreyectivo. Sea $j : A \rightarrow X$ la inclusión y suponemos que existen las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : A \rightarrow B$ que hacen conmutar el diagrama



de modo que $L : A \times I \rightarrow Y$ sea la homotopía tal que $eg \simeq_L fj$. Entonces existen una aplicación $\tilde{g} : X \rightarrow B$ y una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $\tilde{g}j = g$ y $e\tilde{g} \simeq_F f$, donde $F|_{A \times I} = L$.

Demostración. Consideremos el conjunto \mathbf{S} de los triples $((X', A), \tilde{g}', F')$, donde:

- (X', A) es un CW subcomplejo relativo de (X, A) .
- $\tilde{g}' : X' \rightarrow B$ es una aplicación tal que $\tilde{g}'j = g$.
- $F' : X' \times I \rightarrow Y$ es una homotopía tal que $e\tilde{g}' \simeq_{F'} f|_{X'}$ y $F'|_{A \times I} = L$.

Notamos que $\mathbf{S} \neq \emptyset$ porque $((A, A), g, L) \in \mathbf{S}$ trivialmente. Definimos la relación de orden parcial en \mathbf{S} de la siguiente manera:

$((X_1, A), \tilde{g}_1, F_1) \leq ((X_2, A), \tilde{g}_2, F_2)$ si $X_1 \subseteq X_2$, \tilde{g}_2 es una extensión de \tilde{g}_1 , y F_2 es una extensión de F_1 .

Supongamos que tenemos una cadena (subconjuntos en que el orden es total) \mathbf{C} no vacía en \mathbf{S}

$$((X_1, A), \tilde{g}_1, F_1) \leq ((X_2, A), \tilde{g}_2, F_2) \leq \dots \leq ((X_n, A), \tilde{g}_n, F_n) \leq \dots$$

Buscaremos una cota superior de la cadena. Tomemos el triple $((\bigcup_i X_i, A), \bigcup_i \tilde{g}, \bigcup_i F_i)$.

Se define $\bigcup_i \tilde{g}_i(x) = \tilde{g}_k(x)$ si $x \in X_k$. Esta aplicación está bien definida porque si $x \in X_k \cap X_{k'}$, tenemos que $X_k \subset X_{k'}$ o $X_{k'} \subset X_k$ y \tilde{g}_k extiende a $\tilde{g}_{k'}$ o viceversa. Como en $\bigcup_i X_i$ tenemos la topología débil respecto a los esqueletos, por el lema de continuidad sabemos que $\bigcup_i \tilde{g}_i(x)$ es continua. Se define también $\bigcup_i F_i(x, t) = F_k(x, t)$ si $x \in X_k$. De manera análoga al caso anterior, vemos que la aplicación está bien definida. Como $(\bigcup_i X_i, A)$ sigue siendo un subcomplejo relativo de (X, A) , entonces se obtiene que $((\bigcup_i X_i, A), \bigcup_i \tilde{g}_i, \bigcup_i F_i)$ es cota superior de la cadena.

Se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn, por tanto existe $((X_m, A), \tilde{g}_m, F_m) \in \mathbf{S}$ elemento maximal de \mathbf{S} , es decir, si $((X_m, A), \tilde{g}_m, F_m) \leq ((X', A), \tilde{g}', F')$ para algún triple $((X', A), \tilde{g}', F')$, entonces $((X', A), \tilde{g}', F') = ((X_m, A), \tilde{g}_m, F_m)$. Demostraremos que ese elemento es el total.

Supongamos que X_m es un subconjunto propio de X . Entonces hay al menos una celda relativa de (X, A) que no está contenida en X_m ; tomamos una celda e^k de ese tipo y de menor dimensión posible.

Si $\Phi : E^k \rightarrow X$ es la aplicación característica extendida hasta X de esta celda con $\Phi|_{S^{k-1}} = \phi$, entonces obtenemos el diagrama

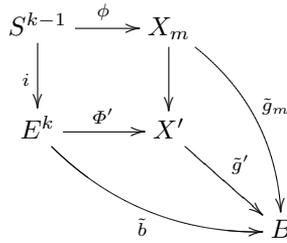
$$\begin{array}{ccccc} S^{k-1} & \xrightarrow{\phi} & X_m & \xrightarrow{\tilde{g}_m} & B \\ \downarrow i & & \downarrow & & \downarrow e \\ E^k & \xrightarrow{\Phi} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Sabemos que $e\tilde{g}_m \simeq f|_{X_m}$. Entonces $F_m(\phi \times id_I)i_0(x) = F_m(\phi \times id_I)(x, 0) = F_m(\phi(x), 0) = e\tilde{g}_m\phi(x)$ y $F_m(\phi \times id_I)i_1(x) = F_m(\phi \times id_I)(x, 1) = F_m(\phi(x), 1) = f|_{X_m}\phi(x) = f|_{X_m}\Phi|_{S^{k-1}}(x) = f\Phi i(x)$.

Hemos comprobado que $e\tilde{g}\phi \simeq_{F_m(\phi \times id)} f\Phi i$. Aplicando el lema 2.24, existen las aplicaciones $\tilde{b} : E^k \rightarrow B$ tal que $\tilde{b}i = \tilde{g}_m\phi$ y $J : E^k \times I \rightarrow Y$ tal que $e\tilde{b} \simeq_J f\Phi$ y $J|_{S^{k-1} \times I} = F_m(\phi \times id)$, por tanto tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^{k-1} & \xrightarrow{\tilde{g}_m\phi} & B \\ \downarrow i & \nearrow \tilde{b} & \downarrow e \\ E^k & \xrightarrow{f\Phi} & Y \end{array}$$

Denotamos $X' \subseteq X$ como el espacio push out donde está contenida la celda e^k , con Φ' la aplicación característica:



en el que \tilde{g}' queda determinada por \tilde{b} y \tilde{g}_m . Sabemos que el cilindro de un push out es un push out (corolario 1.28). Como $F_m(\phi \times id_I) = J(i \times id_I)$, se induce $F' : X \times I \rightarrow I$ y se comprueba que $F' : \tilde{g}' \simeq f|_{X'}$. Entonces el triple $((X', A), \tilde{g}', F')$ está en \mathbf{S} y no es menor o igual que (X_m, g_m, F_m) . Por tanto se contradice que el elemento maximal sea (X_m, g_m, F_m) , es decir, X_m no puede ser un subconjunto propio de X y, por tanto, $X = X_m$. Finalmente se toma $\tilde{g} = g_m$ y $F = F_m$.

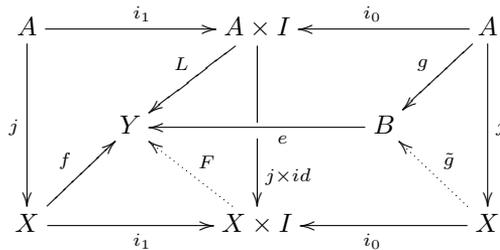
□

Definición 2.26. Una aplicación $e : Y \rightarrow Z$ es una n -equivalencia si, para todo $y \in Y$, la aplicación inducida

$$e_* : \pi_q(Y, y) \rightarrow \pi_q(Z, e(y))$$

es inyectiva para $q < n$ y sobreyectiva para $q \leq n$; a e se le llama equivalencia débil si es una n -equivalencia para todo n .

Lema 2.27. Sea (X, A) CW complejo relativo y basado con $\dim(X, A) \leq n$. Sea $e : B \rightarrow Y$ n -equivalencia entre espacios arbitrarios, $n \leq \infty$. Sea $j : A \rightarrow X$ la inclusión y supongamos que existen $f : X \rightarrow Y$, $g : A \rightarrow B$ y $L : A \times I \rightarrow Y$ tales que el siguiente diagrama es conmutativo:



entonces existen F y \tilde{g} que extienden el diagrama conmutativamente.

Demostración. Como e es n -equivalencia, $\forall n \leq \infty$, entonces $e_* : \pi_n(B) \rightarrow \pi_n(Y)$ es isomorfismo. Aplicando el lema 2.25 obtenemos el resultado. □

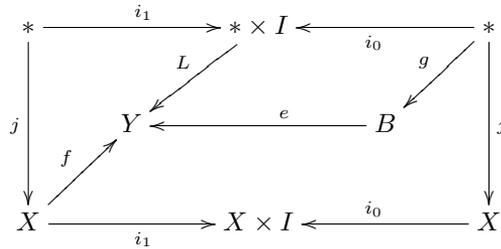
Proposición 2.28. *Sea X CW complejo basado, $e : B \rightarrow Y$ una n -equivalencia ($n < \infty$). Entonces $e_* : [X, B] \rightarrow [X, Y]$ es inyectiva si $\dim X < n$ y sobreyectiva si $\dim X \leq n$.*

Demostración. Diferenciamos los casos $\dim X < n$ y $\dim X \leq n$:

- $\dim X \leq n$

Sea $[f] \in [X, Y]$. Tomamos $A = *$ y definimos $g : A \rightarrow B$ como la aplicación constante en $*$.

Tomamos $L : A \times I \rightarrow Y$ como $L(*, t) = y_0, \forall t \in I$, con y_0 el punto base de Y . Entonces se tiene el diagrama conmutativo:

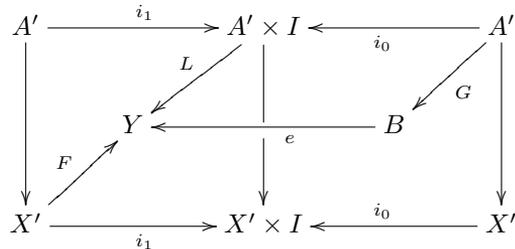


Entonces por el lema 2.27 existe $\tilde{g} : X \rightarrow B$ tal que $e\tilde{g} \simeq f$, esto es, $e_*[\tilde{g}] = [f]$ y por tanto e_* es sobreyectiva.

- $\dim X < n$

Sean $[g_0], [g_1] \in [X, B]$ tales que $e_*[g_0] = e_*[g_1]$. Entonces existe $F : X \times I \rightarrow B$ tal que $F : eg_0 \simeq eg_1$ rel $\{x_0\}$ y $F(x_0, t) = b_0$, siendo b_0 el punto base de B . Tomamos $X' = X \times I$, por tanto $\dim X' \leq n$, y sea $A' = (X \times \partial I) \cup (\{x_0\} \times I) \subset X$. Definimos $G : A' \rightarrow B$ como $G(x, i) = g_i(x)$ y $G(x_0, t) = b_0, \forall t \in I, \forall i \in \{0, 1\}$. Está bien definido por el lema 1.2.

Tomamos la homotopía constante $L : A' \times I$ como $L(a', t) = F|_{A'}(a')$ para todo $a' \in A'$. Entonces tenemos que $Li_0(a') = L(a', 0) = F(a') = eG(a')$, y consecuentemente este diagrama es conmutativo



Por el lema anterior, $\exists H : X' = X \times I \rightarrow B$ tal que $H|_{A'} = G$. Se concluye que $H : g_0 \simeq g_1$ rel $\{x_0\}$.

□

Teorema 2.29. (de Whitehead)

Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre CW complejos. Entonces:

f es equivalencia débil si y solo si f es equivalencia de homotopía

Demostración. Supongamos que f es equivalencia débil. Por la proposición anterior, obtenemos dos biyecciones distintas:

$$f_* : [Y, X] \rightarrow [Y, Y]$$

$$f_* : [X, X] \rightarrow [X, Y]$$

Tomamos $[id_Y] \in [Y, Y]$. Usando la primera biyección, sabemos que existe $[g] \in [Y, X]$ tal que $f_*[g] = [id_Y]$, por tanto $fg \simeq id_Y$.

Sigue que $fgf \simeq id_Y f = f = fid_X \Rightarrow f_*[gf] = f_*[id_X] \Rightarrow gf \simeq id_X$. Por ello, f es equivalencia de homotopía.

La implicación recíproca es evidente. □

Definición 2.30. Un espacio (X, A) es n -conexo si la inclusión $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$ es sobreyectiva y $\pi_q(X, A) = 0$ para $1 \leq q \leq n$. Es equivalente a decir que la inclusión $A \rightarrow X$ es una n -equivalencia.

Proposición 2.31. Sea $X \cup e^{n+1}$ el resultado de adjuntar al espacio topológico X una $n+1$ -celda. Entonces $X \subset X \cup e^{n+1}$ y el par $(X \cup e^{n+1}, X)$ es n -conexo.

Demostración. Partimos del diagrama push out

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{\phi} & X \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 E^{n+1} & \longrightarrow & X \cup_{\phi} E^{n+1} = X \cup e^{n+1}
 \end{array}$$

donde e^{n+1} es una celda abierta, por tanto es abierto en $X \cup e^{n+1}$. Veamos que $\pi_q(X \cup e^{n+1}) = 0 \forall q \leq n$.

Sea $\alpha = [\tau] \in \pi_q(X \cup e^{n+1}, X)$. Entonces podemos considerar $\tau : (E^q, S^{q-1}) \rightarrow (X \cup e^{n+1}, X)$. Se tiene que $\tau^{-1}(e^{n+1})$ es abierto.

Por el “smooth deformation theorem” y el teorema de Sard-Brown (ver [5], Theorem 2, pág. xxviii; también [6] Theorem II.11.8, pág. 97), existe una aplicación $\psi : \overline{\tau^{-1}(e^{n+1})} \rightarrow X \cup e^{n+1}$ con las condiciones:

- $\psi|_{\tau^{-1}(e^{n+1})} : \tau^{-1}(e^{n+1}) \rightarrow e^{n+1}$ es continua, donde e^{n+1} es una celda contenida estrictamente en e^{n+1} .
- $\psi \simeq \tau$ rel $\partial\tau^{-1}(e^{n+1})$
- $\exists y \in e^{n+1}$ tal que $\tau^{-1}(y) = \emptyset$.

Se define la aplicación de pares $\tilde{\tau} : (E^q, S^{q-1}) \rightarrow (X \cup e^{n+1}, X)$ como

$$\tilde{\tau}(x) = \begin{cases} \tau(x) & \text{si } x \in E^q - \tau^{-1}(e^{n+1}) \\ \psi(x) & \text{si } x \in \tau^{-1}(\bar{e}^{n+1}) \end{cases}$$

Está bien definida y es continua por la segunda condición que se acaba de mencionar y el lema 1.2.

Sea $H : \tau^{-1}(e^{n+1}) \times I \rightarrow X \cup e^{n+1}$ la homotopía que cumple que $H : \tau \simeq \psi$ rel $\partial\tau^{-1}(e^{n+1})$. Se define $\tilde{H} : E^q \times I \rightarrow X \cup e^{n+1}$ como la homotopía

$$\tilde{H}(x, t) = \begin{cases} \tau(x) & \text{si } (x, t) \in (E^q - \tau^{-1}(e^{n+1})) \times I \\ H(x, t) & \text{si } (x, t) \in (\tau^{-1}(\bar{e}^{n+1})) \times I \end{cases}$$

\tilde{H} es continua porque la homotopía H es relativa a $\partial^{-1}(e^{n+1})$. Se tiene:

1. $\tilde{H}(x, 0) = \tau(x)$
2. $\tilde{H}(x, 1) = \tilde{\tau}(x)$
3. $\tilde{H}(x, t) = \tau(x) = \tilde{\tau}(x) \forall x \in S^{q-1}$, ya que $S^{q-1} \subset (E^q - \tau^{-1}(e^{n+1}))$

Por tanto $\tilde{H} : \tau \simeq \tilde{\tau}$ rel S^{q-1} . Como $\tilde{\tau}$ no recubre todos los puntos de e^{n+1} , entonces $\tilde{\tau}$ es deformable a una aplicación con imagen en X . se tiene $\tilde{\tau} \simeq 0$ y entonces $\tau \simeq 0$. Se concluye que $\pi_q(X \cup e^{n+1}, X) = 0$. \square

Corolario 2.32. (X, X^n) es n -conexo para cualquier CW complejo X .

Demostración. Sea $\alpha : (E^q, S^{q-1}) \rightarrow (X, X^n)$ un elemento representativo de $\pi_q(X, X^n)$. Como $\alpha(E^q) \subset X$ es compacto, por el lema 2.14 sólo interseca un número finito de celdas de X , esto es, $\alpha(E^q) \subset X^n \cup e_1^{m_1} \cup \dots \cup e_k^{m_k}$, $n < m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_k$. Entonces, si $q \leq n$, una aplicación iterada de la proposición anterior un número finito de veces prueba que $\alpha : (E^q, S^{q-1}) \rightarrow (X^n \cup e_1^{m_1} \cup \dots \cup e_k^{m_k}, X^n) \hookrightarrow (X, X^n)$ es nulhomótopa. Esto muestra que $\pi_q(X, X^n) = 0$ si $q \leq n$. \square

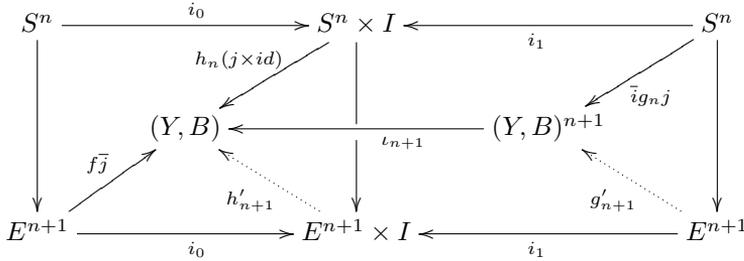
Observación 2.33. El anterior resultado también se puede obtener usando aproximación simplicial en vez de “smooth deformation”. Véase por ejemplo [14], [8].

Teorema 2.34. (*Aproximación celular*)

Cualquier aplicación $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ entre CW complejos relativos es homótopa relativamente a A a una aplicación celular.

Demostración. Se procede por inducción sobre el esqueleto. Para cualquier punto $y \in (Y, B)$, existe un camino α que lo conecta a un punto de $(Y, B)^0$. Definiendo la homotopía $H : (X, A)^0 \times I \rightarrow (Y, B)^0$ como $H(x, t) = \alpha_{f(x)}(t)$, se obtiene una

aplicación celular en $(X, A)^0$ homótopa relativamente a A a f .
 Se supone entonces que se tienen las aplicaciones $g_n : (X, A)^n \rightarrow (Y, B)^n$ y $h_n : (X, A)^n \times I \rightarrow (Y, B)$ tales que $h_n : f|(X, A)^n \simeq \iota_n \circ g_n$ rel A , donde $\iota_n : (Y, B)^n \rightarrow (Y, B)$ es la inclusión. Dadas la aplicación pegamiento $j : S^n \rightarrow X^n$ y su inducida \bar{j} en el push out de X^{n+1} , $\bar{j} : E^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$, se tiene el diagrama (de flechas sólidas) conmutativo siguiente:



donde $\bar{j} : (Y, B)^n \rightarrow (Y, B)^{n+1}$ es la inclusión en el $(n+1)$ -esqueleto.
 Por la proposición anterior, ι_{n+1} es una $(n+1)$ -equivalencia, por tanto, aplicando el lema 2.25 existen h'_{n+1} y g'_{n+1} que conmutan con el resto del diagrama. Uniendo todas las aplicaciones de pegamiento en dimensión $n+1$ se inducen $h_{n+1} : (X, A)^{n+1} \times I \rightarrow (Y, B)$ y $g_{n+1} : (X, A)^{n+1} \rightarrow (Y, B)^{n+1}$ en los correspondientes diagramas push out, completando así el proceso de inducción. \square

Definición 2.35. Para cualquier espacio topológico X , una CW-aproximación de X es un CW-complejo K junto con una equivalencia débil $K \rightarrow X$.

Teorema 2.36. (Aproximación por CW complejos)
 Para cualquier espacio topológico X , existe una CW-aproximación $\Gamma X \rightarrow X$.

Demostración. El procedimiento que se va a describir se realiza en cada componente conexa por caminos de X . Por tanto, se supone X conexo por caminos y también que todos los espacios y aplicaciones son punteadas. Construiremos ΓX como el colímite de un diagrama con inclusiones celulares $X_q \hookrightarrow X_{q+1}$, como se puede ver en el diagrama del final de la demostración.

- $q = 0$
 Tómesese $X^0 = \{x_0\}$, y se define $\gamma_0 : X^0 \rightarrow X$ por $\gamma_0(x_0) = x_0$. Entonces, evidentemente, $(\gamma_0)_* : \pi_0(X^0) \rightarrow \pi_0(X)$ es sobreyectiva.
- $q = 1$
 Se define $X^1 = x_0 \vee \bigvee_{[\alpha] \in A} S^1_\alpha \cong \bigvee_{[\alpha] \in A} S^1_\alpha$, siendo A un conjunto de generadores del grupo $\pi_1(X)$, y se define $\gamma_1 : X^1 \rightarrow X$ como $\gamma_1(x_0) = x_0$, si $x_0 \in X^0$ y $\gamma_1(x) = \alpha(x)$, si $x \in S^1_\alpha \subset X^1$. Es decir, X^1 es el push out de los morfismos $\bigvee_{[\alpha] \in A} S^1_\alpha \longleftarrow \{x_0\} \xrightarrow{i_0} X^0 = \{*\}$ y $(\gamma_1)_* : \pi_1(X^1) \rightarrow \pi_1(X)$

es sobreyectiva porque todos los generadores de $\pi_1(X)$ están representados en $\bigvee_{[\alpha] \in A} S_\alpha^1$. Además, $(\gamma_1)_* : \pi_0(X^1) \rightarrow \pi_0(X)$ es inyectiva porque X^1 tiene una única componente conexa por caminos.

Supongamos ahora, como hipótesis de inducción, que $\forall q \leq n$ hemos definido CW-complejos X^q añadiendo q -celdas a partir de X^{q-1} , y aplicaciones continuas $\gamma_q : X^q \rightarrow X$ verificando que $\gamma_q \circ i_{q-1} = \gamma_{q-1}$, tales que $(\gamma_q)_* : \pi_q(X^q) \rightarrow \pi_q(X)$ es sobreyectiva, y $(\gamma_q)_* : \pi_{q-1}(X^q) \rightarrow \pi_{q-1}(X)$ es inyectiva.

En primer lugar, obtendremos un espacio X'_{n+1} auxiliar:

Para cada generador $[f] \in \pi_n(X^n)$ que esté en el núcleo de la aplicación $(\gamma_n)_* : \pi_n(X^n) \rightarrow \pi_n(X)$ adjuntamos un disco E_f^{n+1} a lo largo de f , esto es, obtenemos X'_{n+1} como el siguiente push out:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigvee_{[f] \in \ker(\gamma_n)_*} S_f^n & \xrightarrow{[f] \in \ker(\gamma_n)_*} & X^n \\
 \downarrow i & & \downarrow \\
 \bigvee_{[f] \in \ker(\gamma_n)_*} E_f^{n+1} & \longrightarrow & X'_{n+1}
 \end{array} \tag{2.1}$$

Llamemos $h_f : S_f^n \times I \rightarrow X$ a la homotopía que cumple que $\gamma_n f \simeq c_{x_0}$. Como $(S^n \times I)/(S^n \times \{1\}) \cup (\{s_0\} \times I) = CS^n$ y $CS^n \cong E_f^{n+1}$, siendo s_0 el punto base de las esferas, entonces podemos definir $H_f([s, t]) = h_f(s, t)$. H_f está bien definida porque el cono CS^n es punteado y h_f también. Como $\gamma_n(\bigvee_{[f] \in \ker(\gamma_n)_*} f) = (\bigvee_{[f] \in \ker(\gamma_n)_*} H_f)i$ se puede extender γ_n a $\gamma'_{n+1} : X'_{n+1} \rightarrow X$ a través del diagrama push out anterior.

A continuación tomamos el conjunto de generadores $B = \{[\alpha] \in \pi_{n+1}(X)/[\alpha] \text{ es generador}\}$ y definimos $X^{n+1} = X'_{n+1} \vee (\bigvee_{[\alpha] \in B} S_\alpha^{n+1})$. Ahora se define

$\gamma_{n+1} : X^{n+1} \rightarrow X$ como

$$\gamma_{n+1}(x) = \begin{cases} \gamma'_{n+1}(x) & \text{si } x \in X'_{n+1} \\ \alpha(x) & \text{si } x \in S_\alpha^{n+1} \end{cases}$$

siendo α un representante de $[\alpha]$. Dadas las aplicaciones $\bigvee_{[\alpha] \in A} \alpha : \bigvee_{[\alpha] \in A} S_\alpha^{n+1} \rightarrow X$ y $\gamma'_{n+1} : X'_{n+1} \rightarrow X$ en el push out generado por los morfismos

$$X'_{n+1} \longleftarrow \{x_0\} \longrightarrow \bigvee_{[\alpha] \in A} S_\alpha^{n+1},$$

la inducida que se obtiene es γ_{n+1} y por tanto es continua. Además, X^{n+1} es un CW complejo porque es el push out de la inclusión de $\{x_0\}$, que es una aplicación celular, en dos CW complejos. Por tanto,

$\pi_{n+1}(X^{n+1})$ contiene una “preimagen” de cada generador de $\pi_{n+1}(X)$; podemos afirmar que $(\gamma_{n+1})_*$ es sobreyectiva: para cada $[\alpha]$ de $\pi_{n+1}(X)$ podemos asegurar que existe $\bar{i}_{|S_\alpha^{n+1}} : S_\alpha^{n+1} \rightarrow X^{n+1}$ tal que $[\gamma_{n+1}\bar{i}_{|S_\alpha^{n+1}}] = [\alpha]$.

Veamos ahora que $(\gamma_{n+1})_* : \pi_q(X^{n+1}) \rightarrow \pi_q(X)$ es inyectiva $\forall q < n + 1$. Sea $[f] \in \ker(\gamma_{n+1})_*$ con $[f] \in \pi_q(X^{n+1})$ y $q \leq n$. Como S_q es también un CW complejo, por el teorema de aproximación celular existe $f' : S^q \rightarrow X^{n+1}$ aplicación celular tal que $[f'] = [f]$. Como $f'(S^q) \subseteq X^q$, podemos escribir la factorización $f' = i_n i_{n-1} \dots i_q f''$, con $f'' : S^q \rightarrow X^q$ y las inclusiones de los n -esqueletos. Distinguiamos dos casos:

- $q < n$
 Tenemos que $(\gamma_n)_* : \pi_q(X^n) \rightarrow \pi_q(X)$ es inyectiva por hipótesis de inducción. Entonces $[f'] \in (\gamma_{n+1})_* \Rightarrow [\gamma_{n+1}f'] = [c_{x_0}] \Rightarrow [\gamma_{n+1}i_n i_{n-1} \dots i_q f''] = [\gamma_n i_{n-1} \dots i_q f''] \Rightarrow i_{n-1} \dots i_q f'' \simeq c_{x_0}$. Por tanto, por el lema 1.6, se tiene que $f' = i_n i_{n-1} \dots i_q f'' \Rightarrow f' \simeq c_{x_0} \Rightarrow (\gamma_{n-1})_*$ es inyectiva.
- $q = n$
 Nos queda el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 S^n & \xrightarrow{f''} & X^n & \xrightarrow{i_n} & X^{n+1} \\
 & & & \searrow \gamma_n & \downarrow \gamma_{n+1} \\
 & & & & X
 \end{array}$$

Como $[f] \in \ker(\gamma_{n+1})_*$, tenemos también que $[f''] \in \ker(\gamma_n)_*$. Por tanto es combinación lineal de los generadores descritos en la construcción del diagrama 2.1, que son nulhomótopos en X^{n+1} por ser factorizados a través del cono en la construcción de X'_{n+1} . Entonces $f' = i_n f'' \simeq c_* \Rightarrow f \simeq f' \simeq c_* \Rightarrow (\gamma_{n+1})_*$ es inyectiva.

Para finalizar la demostración, se define ΓX como el colímite del diagrama de CW-complejos construido

$$\begin{array}{ccccccc}
 X^0 & \xrightarrow{i_0} & X^1 & \xrightarrow{i_1} & \dots & X^n & \xrightarrow{i_n} & X^{n+1} & \xrightarrow{i_{n+1}} & \dots \\
 & & & & & & & \searrow \gamma_{n+1} \dots & & \\
 & & & & & & & \dots \gamma_n & & \\
 & & & & & & & \searrow \gamma_1 & & \\
 & & & & & & & \searrow \gamma_0 & & \\
 & & & & & & & & & X
 \end{array}$$

y $\gamma : \Gamma X \rightarrow X$ como la aplicación inducida por las aplicaciones $\gamma_q : X^q \rightarrow X$. □

Bibliografía

- [1] J.P. MAY *A Concise Course in Algebraic Topology* Chicago Lectures in Mathematics (1999)
- [2] J.R. MUNKRES *Topología* Prentice Hall 2ª edición (2002)
- [3] J.R. MUNKRES *Topology: A First Course* Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ (1975)
- [4] MARTIN ARKOWITZ *Introduction to Homotopy Theory* Springer (2011)
- [5] M. AGUILAR, S. GITLER, C. PRIETO *Algebraic Topology from a Homotopical viewpoint* Springer-Verlag (2002)
- [6] G.E. BREDON *Topology and Geometry* Springer-Verlag (1993)
- [7] P. J. HILTON *Homotopy Theory and Duality* Gordon and Breach Science, New York (1965)
- [8] E.H. SPANIER *Algebraic Topology* Springer (1966)
- [9] H. J. BAUES *Algebraic Topology* Cambridge (1989)
- [10] J.H.C WHITEHEAD *Combinatorial homotopy I* Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), no. 3, 213-245 (1949)
- [11] J.H.C. WHITEHEAD *Combinatorial homotopy II* Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), no. 5, 453-496 (1949)
- [12] S. WILLARD *General Topology* Addison Wesley (1968)
- [13] C. KOSNIOWSKI *Topología algebraica* Reverté S.A. (1986)
- [14] A. HATCHER *Algebraic Topology* Cambridge University Press, Cambridge (2002)

Abstract

In this memory we study some classical theorems of homotopy theory which have been developed from the notion of CW complexes. This special class of topological spaces, constructed by adjoining cells inductively, were defined by J.H.C. Whitehead in 1949, and quickly took some importance in homotopy theory. CW complexes have some better properties than polyhedrons, for example, if a function between CW complexes induces isomorphisms between their homotopy groups, then this function is also a homotopy equivalence (Whitehead theorem). We outline the content of this memory in the next two sections.

1. Homotopy and category theory

Definition

Assume $g\tilde{f} = g\tilde{f}$ in the next diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ Y & \xrightarrow{\tilde{g}} & Y \cup_X Z \end{array}$$

Then the object $Y \cup_X Z$ is called push out if for all morphisms $Y \xrightarrow{r} T \xrightarrow{s} Z$ such that $rf = sg$, there exists a unique function $h: Y \cup_X Z \rightarrow T$ verifying $h\tilde{g} = r$ and $hf = s$.

Exponential Law

Given a locally compact space Z , the pair of functors $(-\times Z, -^Z)$ in the category of topological spaces **Top** is an adjoint pair.

Definition A function $p: E \rightarrow B$ is a fibration if it satisfies the homotopy lifting property (HLP), this means that if $hi_0 = pf$ in the diagram

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow i_0 & \searrow \tilde{h} & \downarrow p \\ Y \times I & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

then there exists $\tilde{h}: Y \times I \rightarrow E$ which makes the entire diagram commute.

Proposition

For any two subsets $A, B \subset X$, the function $p: E(X; A, B) \rightarrow A \times B$ defined by $p(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$ is a fibration.

Corollary

The next sequence of groups is exact:

$$\dots \rightarrow \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(X, A) \rightarrow \pi_0(A) \rightarrow \pi_0(X)$$

2. CW complexes and approximation theorems

Definition

A CW complex is a topological space which is the union of n -skeletons that are constructed inductively as follows

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\beta \in B} S^{\beta-1} & \xrightarrow{\phi} & X^{n-1} \\ \downarrow i & & \downarrow j_{n-1} \\ \coprod_{\beta \in B} E^{\beta} & \xrightarrow{\phi} & X^{n-1} \cup_{\phi} \coprod_{\beta \in B} E^{\beta} \end{array}$$

where $X^n = X^{n-1} \cup_{\phi} \coprod_{\beta \in B} E^{\beta}$. The CW complex X has the weak topology with respect to the set of all X^n skeletons, that is, $A \subset X$ is closed in X if and only if $A \cap X^n$ is closed in X^n .

Definition

An open n -cell is the subset $e^n = \tilde{\phi}(E^{\beta}_n - S^{\beta-1}_n) \subset X^n$ and a closed n -cell is the subset $\tilde{e}^n = \tilde{\phi}(E^{\beta}_n) \subset X^n$, for some $\beta \in B$.

Definition

A function $e: Y \rightarrow Z$ is a weak equivalence if $e_*: \pi_q(Y, y) \rightarrow \pi_q(Z, e(y))$ is an isomorphism for all $y \in Y$ and for all $q \in \mathbb{N}$.

Definition

A function $f: X \rightarrow Y$ between CW complexes is said to be cellular if it carries the X^n skeleton to the Y^n skeleton: $f(X^n) \subset Y^n \forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Let X be a CW complex. Then X is a disjoint union of all its open cells.

Proposition

Let X be a CW complex and C a compact

subset of X , then C is contained in a finite union of open cells.

Corollary

Any closed cell is contained in a finite union of open cells.

Whitehead theorem

Let f be a function between CW complexes. Then f is a weak equivalence if and only if is a homotopy equivalence.

Cellular approximation theorem

Let f be a function between CW complexes. Then f is homotopic to a cellular function f' between the same CW complexes.

Definition

For any topological space X , a CW approximation of X is a CW complex ΓX with a weak equivalence $\Gamma X \rightarrow X$.

Approximation by CW complexes theorem

For any topological space X , there exists a CW-approximation $\Gamma X \rightarrow X$.

References

- [1] J.R. MUNKRES *Topología* Prentice Hall, Segunda edición (2002)
- [2] MARTIN ARKOWITZ *Introduction to Homotopy Theory* Springer (2011)
- [3] M. AGUILAR, S. GITLER, C. PRIETO *Algebraic Topology from a Homotopical viewpoint* Springer-Verlag (2002)
- [4] G.E. BREDON *Topology and Geometry* Springer-Verlag (1993)
- [5] E.H. SPANIER *Algebraic Topology* Springer (1966)
- [6] J.H.C WHITEHEAD *Combinatorial homotopy I* Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 213–245 (1949)
- [7] J.H.C. WHITEHEAD *Combinatorial homotopy II* Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), no. 5, 453–496 (1949)
- [8] A. HATCHER *Algebraic Topology* Cambridge University Press, Cambridge (2002)