Universidad de La Laguna

SECCIÓN DE MATEMÁTICAS | FACULTAD DE CIENCIAS

Desirée Núñez Pérez

Geometría de las esferas de Lie

Lie Sphere Geometry

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2018

Dirigido por

Francisco Martín Cabrera

Agradecimientos

A mi familia, por su apoyo incondicional.
A mi tutor, por su ayuda constante.
A mi pareja, por su confianza.

Resumen · Abstract

Resumen

Lie introdujo su geometría de las esferas en su tesis doctoral presentada en 1871. Dicha geometría fue activamente estudiada durante las primeras décadas del siglo XX. Ello culminó con la publicación en 1929 del tercer volumen de la obra de Blaschke sobre geometría diferencial. Después de esto, el ínteres por la materia decayó hasta que, en 1981, Pinkall usó la geometría de las esferas de Lie en la clasificación de las hipersuperficies de Dupin de $\mathbb{R}^4$. Desde entonces, la geometría de las esferas de Lie ha sido utilizada por algunos geómetras en el estudio de subvariedades de formas espaciales: euclídea, esférica, hiperbólica, etc.

El objetivo de este trabajo es exponer una introducción a la geometría de las esferas de Lie y mostrar como herramientas del álgebra lineal y de la geometría proyectiva demuestran su eficacia y utilidad en la descripción de dicha geometría.

Palabras clave: Esfera de Lie – Transformación de esferas de Lie – Transformación de Möbius – Cuádrica de Lie – Métrica de Lie – Métrica de Lorentz – Contacto orientado.

Abstract

Lie introduced his geometry of oriented spheres in his dissertation in the dissertation of his doctoral thesis in 1871. Such a geometry was actively pursued through the early part of the twentieth century, culminating with the publication in 1929 of the third volume on differential geometry authored by Blaschke. After this, the subject fell out of favor until 1981, when Pinkall used it as the principal tool in his classification of Dupin hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. Since that time, it has been employed by several geometers in the study of submanifolds in space forms: Euclidean, spherical, hyperbolic, etc.

The purpose of the present work is to expose an introduction to the so-called Lie sphere geometry and show how tools of linear algebra and projective geometry display their efficiency and utility in the description of such a geometry.

Keywords: Lie sphere – Lie sphere transformation – Möbius transformation – Lie quadric – Lie metric – Lorentz metric – Oriented contact.

Contenido

Introducción

Sophus Lie, en la disertación de su tesis doctoral, introdujo su geometría de las esferas. Posteriormente, dicha geometría formó parte del contenido de su artículo [6] publicado en 1872. Él usó dicha geometría en el estudio de las transformaciones de contacto [7]. La materia fue activamente estudiada durante las primeras décadas del siglo XX. Ello culminó con la publicación en 1929 del tercer volumen de la obra de Blaschke titulada *Vorlesungen über Differentialgeometrie* [2]. Dicho volumen se ocupa de la geometría de las esferas de Lie y sus subgeometrías. Después de esto, la materia cayó un poco en el olvido hasta 1981. En dicho año, Pinkall usó la geometría de las esferas de Lie en la clasificación de las hipersuperficies de Dupin de $\mathbb{R}^4$ [9]. Desde entonces, la geometría de las esferas de Lie ha sido utilizada por diversos autores en el estudio de subvariedades tensas, isoparamétricas y de Dupin. En particular, la geometría de las esferas de Lie se muestra muy adecuada para el estudio de problemas que tratan sobre subvariedades del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, de la esfera S^n y del espacio hiperbólico H^n.

El objetivo de este trabajo es exponer una introducción a la geometría de las esferas orientadas de Lie y mostrar cómo herramientas del álgebra lineal y de la geometría proyectiva demuestran su eficacia y utilidad en la descripción de dicha geometría. Por ello, este trabajo consiste principalmente en desarrollar con detalle, siguiendo principalmente la obra de Cecil [4], lo que a continuación se expone a modo de resumen:

Lie estableció una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las *esferas de Lie*, es decir, esferas orientadas, hiperplanos orientados y esferas punto en $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, y el conjunto de todos los puntos de la cuádrica Q^{n+1} en el espacio proyectivo real $\mathcal{P}^{n+2}$ dada por la ecuación $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar indefinido con signatura $(n+1, 2)$ sobre $\mathbb{R}^{n+3}$. Esta *cuádrica de Lie* Q^{n+1} contiene rectas pero no subespacios proyectivos de dimensión mayor. La familia uniparamétrica de esferas de Lie en $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, correspondientes a los puntos de una recta contenida en Q^{n+1} se denomina *haz parabólico* de esferas. Consiste en todas las esferas de Lie que son de contacto orientadas con un cierto elemento de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. De este modo, Lie también estableció una correspondencia biyectiva entre la variedad de los elementos de contacto de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ y la variedad Λ^{2n-1} de rectas contenidas en la cuádrica de Lie Q^{n+1}.

Una *transformación de esferas de Lie* es una proyectividad biyectiva de $\mathcal{P}^{n+2}$ en si misma tal que la imagen de Q^{n+1} está contenida en dicha cuádrica. En términos de la geometría de $\mathbb{R}^n$, una transformación de esferas de Lie aplica esferas de Lie en esferas de Lie. Además, puesto que una proyectividad biyectiva aplica rectas en rectas, una transformación de esferas de Lie preserva la condición de contacto orientadas entre esferas de Lie en $\mathbb{R}^n$. Lie probó el denominado *teorema fundamental de la geometría de las esferas de Lie* en el caso $n = 2$. Pinkall lo generalizó a dimensiones superiores [10]. Este teorema establece que un difeomorfismo de la cuádrica de Lie Q^{n+1} que preserve rectas, es la restricción a Q^{n+1} de una proyectividad biyectiva de $\mathcal{P}^{n+2}$ en si mismo. En otras palabras, una transformación sobre el espacio de las esferas de Lie tal que preserva la condición de contacto orientadas entre esferas es una transformación de esferas de Lie.

Uno puede mostrar que una transformación de esferas de Lie es inducida por una aplicación lineal ortogonal de $\mathbb{R}^{n+3}$ respecto de la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Así, el grupo G de las transformaciones de esferas de Lie es isomorfo al grupo cociente $O(n+1,2)/\{I,-I\}$. Por el teorema de Cartan-Dieudonné, el grupo ortogonal $O(n+1,2)$ es generado por reflexiones según hiperplanos. Como las proyectividades inducidas por dichas reflexiones resultan ser inversiones, entonces G está generado por inversiones. Cualquier transformación (conforme) de Möbius de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ induce una transformación de esferas de Lie. El grupo de Möbius es precisamente el subgrupo de transformaciones de esferas de Lie que envía esferas punto a esferas punto. Si uno estudia con detalle una transformación de Möbius inducida por una reflexión según un hiperplano, obtiene la descripción geométrica de una inversión en $\mathbb{R}^n$ en el sentido clásico (con centro un punto de $\mathbb{R}^n$ y razón una constante real positiva). Otra geometría de esferas, además de la de Möbius, es la de Laguerre. Estas, así como las usuales geometrías euclídea, esférica e hiperbólica son subgeometrías de la geometría de las esferas de Lie.

Finalmente, queremos señalar que la variedad diferenciable Λ^{2n-1} de las rectas contenidas en la cuádrica de Lie Q^{n+1} tiene una estructura de contacto. Es decir, sobre Λ^{2n-1} se puede definir una uno-forma diferencial ω tal que $\omega \wedge (d\omega)^{n-1}$ no se anula sobre Λ^{2n-1}. Condiciones utilizando la uno-forma ω se utilizan para estudiar subvariedades de $\mathbb{R}^n$.

1

Formas bilineales reales

Aquí se exponen nociones y propiedades, relativas a formas bilineales reales, que se utilizan a lo largo del trabajo. (Para más detalles sobre este material ver [1],[5]).

1.1. Definición y propiedades básicas

Definición 1.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una aplicación $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una *forma bilineal*, si satisface las siguientes condiciones:

(i) $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}', \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}', \vec{y})$,
(ii) $f(\vec{x}, \lambda\vec{y} + \mu\vec{y}') = \lambda f(\vec{x}, \vec{y}) + \mu f(\vec{x}, \vec{y}')$,

para todo $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}' \in V$ y todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

.

Las condiciones anteriores son equivalentes a que las aplicaciones parciales

$$\begin{aligned} f_{L\vec{x}_0} : V &\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \vec{x}_0 \text{ fijo;} \\ \vec{y} &\longrightarrow f(\vec{x}_0, \vec{y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{R\vec{y}_0} : V &\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \vec{y}_0 \text{ fijo;} \\ \vec{x} &\longrightarrow f(\vec{x}, \vec{y}_0), \end{aligned}$$

sean formas lineales.

El conjunto de las formas bilineales de V, denotado por $\mathcal{L}^2(V, \mathbb{R})$, tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones:

$$\begin{aligned} (f + g)(\vec{x}, \vec{y}) &= f(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{x}, \vec{y}), \\ (\lambda f)(\vec{x}, \vec{y}) &= \lambda f(\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned}$$

Es evidente que $f(\vec{x}, \vec{0}) = 0$ y que $f(\vec{0}, \vec{y}) = 0$.

- Una forma bilineal sobre V se dice que es *simétrica*, si $f(\vec{x},\vec{y}) = f(\vec{y},\vec{x})$, para todo $\vec{x},\vec{y} \in V$. En este caso, para todo vector $\vec{x}$ coinciden las aplicaciones parciales, $f_{L\vec{x}} = f_{R\vec{x}}$. El conjunto de las formas bilineales simétricas S^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V,\mathbb{R})$.
- Una forma bilineal sobre V se dice que es *antisimétrica*, si $f(\vec{x},\vec{y}) = -f(\vec{y},\vec{x})$, para todo $\vec{x},\vec{y} \in V$. En este caso, para todo vector $\vec{x}$ coinciden las aplicaciones parciales, $f_{L\vec{x}} = -f_{R\vec{x}}$. El conjunto de las formas bilineales antisimétricas Λ^2V^* es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}^2(V,\mathbb{R})$.

El espacio $\mathcal{L}^2(V,\mathbb{R})$ de la formas bilineales es suma directa del espacio S^2V^* de formas simétricas y del espacio Λ^2V^* de formas antisimétricas. Esto es,

$$\mathcal{L}^2(V,\mathbb{R}) = \mathsf{S}^2V^* \oplus \Lambda^2V^*.$$

Para $f \in \mathcal{L}^2(V,\mathbb{R})$, se tiene que $f = f_{\mathbf{s}} + f_{\mathbf{a}}$, donde

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{s}}(\vec{x},\vec{y}) &= \tfrac{1}{2}(f(\vec{x},\vec{y}) + f(\vec{y},\vec{x})),\\ f_{\mathbf{a}}(\vec{x},\vec{y}) &= \tfrac{1}{2}(f(\vec{x},\vec{y}) - f(\vec{y},\vec{x})). \end{aligned}$$

Teniéndose que $f_{\mathbf{s}} \in \mathsf{S}^2V^*$ y $f_{\mathbf{a}} \in \Lambda^2V^*$.

Matriz asociada a una forma bilineal

Supongamos que dim $V = n$, y sea $\{\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n\}$ una base de V. Si f es una forma bilineal sobre V, entonces

$$f(\vec{x},\vec{y}) = f(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i\vec{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_iy_jf(\vec{e}_i,\vec{e}_j).$$

Si consideramos la matriz $A = (a_{ij})$, donde $a_{ij} = f(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$, obtenemos, por un lado, que la expressión de la forma bilineal f está dada por

$$f(\vec{x},\vec{y}) = \textstyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j, \tag{1.1}$$

y, por otro, que matricialmente f se expresa

$$f(\vec{x},\vec{y}) = (x_1,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = X^tAY.$$

Por tanto, tenemos definida una aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^2(V,\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\\ f &\longrightarrow A = (a_{ij}), \qquad a_{ij} = f(\vec{e}_i,\vec{e}_j), \end{aligned}$$

que es un isomorfismo de espacios vectoriales.

- Una matriz A es *simétrica*, si para todo elemento a_{ij} de ella es tal que $a_{ij} = a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es simétrica si y sólo si $A^{\mathrm{t}} = A$, donde A^{t} denota la traspuesta de A. También se tiene que una forma bilineal sobre V es simétrica si y sólo si está asociada a una matriz simétrica.
- Una matriz A es *antisimétrica*, si para todo elemento a_{ij} de ella es tal que $a_{ij} = -a_{ji}$. Se tiene que una matriz A es antisimétrica si y sólo si $A^{\mathrm{t}} = -A$. También se tiene que una forma bilineal sobre V es antisimétrica si y sólo si está asociada a una matriz antisimétrica.

1.2. Formas cuadráticas reales

Definición 1.2. Dada $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Se llama *forma cuadrática* asociada a la forma bilineal f, a la aplicación

$$\begin{aligned} \omega : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longrightarrow \omega(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x}). \end{aligned}$$

La forma bilineal simétrica f se denomina *forma polar* de ω.

Como consecuencia de la definición de forma cuadrática tenemos las siguientes propiedades.

Lema 1.3. *Si ω es una forma cuadrática de V con forma polar f, entonces para todo $\vec{x}, \vec{y} \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ se satisfacen:*

(i) $\omega(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\omega(\vec{x})$; *(ii)* $\omega(\vec{0}) = 0$; *(iii)* $\omega(\vec{x} + \vec{y}) = \omega(\vec{x}) + \omega(\vec{y}) + 2f(\vec{x}, \vec{y})$.

De la propiedad (iii) del lema anterior se deduce la siguiente fórmula que permite calcular la forma polar a partir de la expresión de la forma cuadrática,

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}\left(\omega(\vec{x} + \vec{y}) - \omega(\vec{x}) - \omega(\vec{y})\right). \tag{1.2}$$

Por consiguiente, si dos formas bilineales simétricas definen la misma forma cuadrática, entonces son iguales. Por tanto, podemos afirmar que existe una correspondencia biyectiva entre formas cuadráticas y formas bilineales simétricas de modo que a cada forma cuadrática se le hace corresponder su forma polar.

El conjunto $\mathcal{Q}(V, \mathbb{R})$ de las formas cuadráticas sobre un espacio vectorial V tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con las operaciones

$$\begin{aligned} (\omega + \omega')(\vec{x}) &= \omega(\vec{x}) + \omega'(\vec{x}), \\ (\lambda\omega)(\vec{x}) &= \lambda\omega(\vec{x}). \end{aligned}$$

Un papel relevante lo juega la siguiente aplicación lineal.

Definición 1.4. Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ su forma polar. Se denomina *aplicación lineal de polaridad* de ω, a la aplicación definida en el modo siguiente

$$\begin{aligned} \hat{f} : V &\longrightarrow V^* \\ \vec{v} &\longrightarrow \hat{f}(\vec{v}), \end{aligned}$$

donde $\hat{f}(\vec{v})$ es la forma lineal dada por

$$\begin{aligned} \hat{f}(\vec{v}) : V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longrightarrow \hat{f}(\vec{v})(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{v}). \end{aligned}$$

Nótese que $\hat{f}(\vec{v}) = f_{L\vec{v}} = f_{R\vec{v}}$. Es inmediato que la aplicación $\hat{f} : V \longrightarrow V^*$ es una aplicación lineal.

Para describir el conjunto imagen de la aplicación lineal de polaridad $\hat{f}$ recordamos la siguiente noción.

Definición 1.5. Sea U un subespacio vectorial de un espacio vectorial V y V^* el espacio vectorial dual de V. Se llama *anulador* de U al subespacio vectorial U^o de V^* formado por las formas que toman el valor cero para todos los vectores de U. Esto es,

$$U^o = \{h \in V^* \,|\, h(\vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in U\} = \{h \in V^* \,|\, U \subseteq \ker h\}.$$

En general es bien conocido que cuando V es de dimensión finita se tienen las igualdades

$$\dim U + \dim U^o = \dim V \quad \text{y} \quad (U^o)^o = U.$$

Lema 1.6. *Si V es de dimensión finita, se tiene que el conjunto imagen $\operatorname{Im} \hat{f}$ de la aplicación lineal de polaridad $\hat{f}$ está formado por las formas lineales de V tales que su núcleo contienen al núcleo de $\hat{f}$. Esto es,*

$$\operatorname{Im} \hat{f} = \{h \in V^* \mid \ker \hat{f} \subseteq \ker h\} = (\ker \hat{f})^o.$$

Demostración. Si $h \in \operatorname{Im} \hat{f}$, entonces existe $\vec{x} \in V$ tal que $\hat{f}(\vec{x}) = h$. Como para todo $\vec{y} \in \ker \hat{f}$ se tiene que $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Ello implica que $\vec{y} \in \ker \hat{f}(\vec{x}) = \ker h$. Luego se tiene $\ker \hat{f} \subseteq \ker h$ y $h \in (\ker \hat{f})^o$. Por tanto, $\operatorname{Im} \hat{f} \subseteq (\ker \hat{f})^o$.

Por otro lado de las ecuaciones

$$\dim \operatorname{Im} \hat{f} + \dim \ker \hat{f} = \dim V, \qquad \dim(\ker \hat{f})^o + \dim \ker \hat{f} = \dim V,$$

se obtiene que $\dim \operatorname{Im} \hat{f} = \dim(\ker \hat{f})^o$. Por lo que $\operatorname{Im} \hat{f} = (\ker \hat{f})^o$. □

Si dim $V = n$, sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V y $\{\vec{e}_1^*, \ldots, \vec{e}_n^*\}$ su base dual. Denotemos por $A = (a_{ij})$ la matriz asociada a la aplicación lineal $\hat{f}$ con respecto a dichas bases. Es decir, la matriz tal que

$$\hat{f}(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\vec{e}_i^*.$$

Entonces se tiene que $a_{ij} = \hat{f}(\vec{e}_j)(\vec{e}_i) = f(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, por lo que la matrices de la forma polar y de la aplicación lineal de polaridad coinciden.

Definición 1.7. Se llama *rango de una forma cuadrática*, al rango de su aplicación lineal de polaridad, o lo que es lo mismo, al rango de una matriz asociada a la forma polar.

Una forma cuadrática se dice que es *ordinaria* o *no degenerada* si su rango es igual a la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Ello equivale a decir que la aplicación lineal de polaridad es un isomorfismo. También a que si $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ para todo $\vec{y} \in V$, es decir, $\vec{x} \in \ker \hat{f}$, entonces $\vec{x} = \vec{0}$. Para la forma cuadrática, es más usual utilizar el término ordinaria y, para la forma polar correspondiente, se usa más decir no degenerada para referirse a ella.

Una forma cuadrática se dice que es *degenerada*, si su rango es menor que la dimensión del espacio vectorial sobre el que está definida. Esto es, si su matriz asociada respecto de una base es singular.

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V, dim $V = n$, y sea $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ una base de V. Para todo $\vec{x} \in V$, se tiene

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = X^t A X = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j.$$

Por tanto, una forma cuadrática puede ser dada por la expresión homogénea de segundo grado

$$\omega(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_i x_j,$$

o bien, en forma matricial

$$\omega(\vec{x}) = X^t A X.$$

Cuando consideremos productos escalares haremos uso de la siguiente noción.

Definición 1.8. Si la suma de dos subespacios vectoriales U_1 y U_2 es directa y además se tiene que $f(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 0$, para todo $\vec{u}_1 \in U_1$ y $\vec{u}_2 \in U_2$, se dirá que dicha suma directa es *ortogonal respecto de* f y se denotará $U_1 \oplus_f U_2$.

Seguidamente vemos el siguiente resultado que será muy usado cuando se trabaje con productos escalares.

Proposición 1.9. *Sea ω una forma cuadrática con forma polar f sobre un espacio vectorial real V de dimensión finita, entonces se tiene:*

(i) Si U es un subespacio vectorial de V, el conjunto $U^f = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x}, \vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in U\}$ es un subespacio vectorial de V tal que $\dim U + \dim U^f = \dim V + \dim(\ker \hat{f} \cap U)$. Además, $(U^f)^f = U + \ker \hat{f}$.

(ii) Si U_1 y U_2 son subespacios vectoriales de V tales que $U_1 \subseteq U_2$, entonces $U_2^f \subseteq U_1^f$.

(iii) Se tienen las igualdades $\ker \hat{f}_{|U} = U \cap U^f$ y $\ker \hat{f}_{|U^f} = U \cap U^f + \ker \hat{f}$. Por tanto, si la forma f es no degenerada en U se sigue la igualdad $V = U \oplus_f U^f$. Por otro lado, si f es no degenerada en U^f, entonces f es no degenerada en U y en V.

Demostración. Veamos que U^f es un subespacio vectorial de V. En efecto, si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in U^f$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se tiene

$$f(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2, \vec{u}) = \alpha f(\vec{x}_1, \vec{u}) + \beta f(\vec{x}_2, \vec{u}) = 0,$$

para todo $\vec{u} \in U$.

Para la igualdad relativa a las dimensiones, se hace notar que $U^f = \bigcap_{\vec{u} \in U} \ker \hat{f}(\vec{u})$. Por tanto, $\dim U^f = \dim V - \dim \hat{f}(U)$. Por otro lado, $\dim(\ker \hat{f} \cap U) + \dim \hat{f}(U) = \dim U$. Finalmente, de las dos últimas identidades, se sigue la igualdad requerida. Para finalizar (i), es inmediato que $U + \ker \hat{f} \subseteq (U^f)^f$. Además, se tiene

$$\dim U^f + \dim (U^f)^f = \dim V + \dim(\ker \hat{f} \cap U^f) = \dim V + \dim \ker \hat{f}.$$

Por lo que $\dim (U^f)^f - \dim U = \dim \ker \hat{f} - \dim(\ker \hat{f} \cap U^f)$. Con lo que se concluye

$$\dim (U^f)^f = \dim U + \dim \ker \hat{f} - \dim(\ker \hat{f} \cap U^f) = \dim (U + \ker \hat{f}).$$

Para(ii), si $\vec{x} \in U_2^f$ y $U_1 \subseteq U_2$, es inmediato ver que $\vec{x} \in U_1^f$.

Veamos ahora (iii). En efecto, se puede comprobar fácilmente que

$$U \cap U^f = \ker \hat{f}_{|U}.$$

Por tanto, si f restringida a U es no degenerada, se tiene que $U \cap U^f = \{\vec{0}\}$. Ello implica que $U \cap \ker \hat{f} = \{\vec{0}\}$, pues $\ker \hat{f} \subseteq U^f$. De todo esto se sigue $V = U \oplus_f U^f$.

Por otro lado, de lo anterior también se deduce

$$\ker \hat{f}_{|U^f} = U^f \cap (U^f)^f = U^f \cap (U + \ker \hat{f}) = U^f \cap U + \ker \hat{f}.$$

Luego si f restringida a U^f es no degenerada, entonces $U \cap U^f = \{\vec{0}\}$ y $\ker \hat{f} = \{\vec{0}\}$. $\square$

1.3. Diagonalización de formas cuadráticas. Ley de inercia de Sylvester

En esta sección veremos que para toda forma cuadrática se puede buscar una base de modo que, respecto de la cual, la forma cuadrática se expresa como suma de términos cuadráticos únicamente. Ello se basa en un uso reiterado del siguiente lema.

Lema 1.10. *Sea ω una forma cuadrática con forma polar f sobre un espacio vectorial real V de dimensión finita n y $\vec{x} \in V$, se tiene:*

(i) $\vec{x} \notin \ker \hat{f}$ *si solo si* $\dim \vec{x}^f = n - 1$.
(ii) $\omega(\vec{x}) \neq 0$ *si y solo si* $V = [\vec{x}] \oplus_f \vec{x}^f$, *donde* $[\vec{x}] = \{\lambda \vec{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Observación 1.11. Nótese que $\dim \vec{x}^f = n$ es equivalente a que $\vec{x} \in \ker \hat{f}$. Si $\omega(\vec{x}) = 0$, entonces $\vec{x} \in \vec{x}^f$. Por lo que $[\vec{x}] + \vec{x}^f = \vec{x}^f$, no siendo directa la suma cuando $\vec{x}$ es no nulo.

Demostración. El hecho de que $\vec{x} \notin \ker \hat{f}$ es equivalente a que $\hat{f}(\vec{x}) \neq 0$. Lo que asimismo equivale a que $\dim \ker \hat{f}(\vec{x}) = n - 1$. Como $\vec{x}^f = \ker \hat{f}(\vec{x})$, se tiene lo afirmado.

Por otro lado, $\omega(\vec{x}) \neq 0$ si y solo si $\vec{x} \notin \vec{x}^f$ y $[\vec{x}] \cap \vec{x}^f = \{\vec{0}\}$. Lo que equivale a que la suma $[\vec{x}] + \vec{x}^f$ sea directa y ortogonal respecto de f. □

Mediante una aplicación reiterada del lema 1.10, se demuestra que para toda forma cuadrática existe una base de modo que la matriz asociada con respecto a tal base es diagonal.

Proposición 1.12. *Dada una forma cuadrática $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$, con $\dim V = n$, siempre existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.*

El resultado anterior es equivalente a la siguiente proposición relativa a matrices.

Proposición 1.13. *Dada una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, existe alguna matriz regular $P \in GL(n;\mathbb{R})$ tal que $P^T AP$ es diagonal. Es decir, para toda matriz simétrica se puede encontrar una matriz diagonal congruente con ella.*

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática de rango r y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ una base tal que la matriz asociada a ω sea diagonal. Esto es,

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_r & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Es usual ordenar la base para que primero figuren los d_i positivos, luego los d_i negativos y, finalmente, los nulos.

Definición 1.14. Se llama *signatura* de ω, al par (p, q), donde p es el número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a ω y q el número de elementos negativos.

Lo anterior tiene sentido debido al siguiente resultado dado a continuación.

Teorema 1.15 (Ley de inercia de Sylvester). *El número de elementos positivos que hay en la diagonal principal de una cualquiera de las matrices diagonales asociadas a una forma cuadrática real, es el mismo; tal número no depende, pues, de la diagonalización que se considere de ω, sino que es un número intrínsecamente ligado a la forma cuadrática.*

También el número de elementos negativos ha de coincidir, puesto que $p+q = r$.

Sea $\omega : V \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y sean r y (p, q) el rango y la signatura de ω. Sabemos existe una base de V, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, con respecto a la cual ω está dada por

$$\omega(\vec{x}) = a_1^2 x_1^2 + \cdots + a_p^2 x_p^2 - a_{p+1}^2 x_{p+1}^2 - \cdots - a_{p+q}^2 x_{p+q}^2,$$

donde $a_i \neq 0$, $i = 1, \dots, p+q$. La igualdad anterior es una *expresión diagonal* de ω.

Si tomamos la base, $\vec{u}_1 = \frac{1}{a_1}\vec{e}_1, \dots, \vec{u}_{p+q} = \frac{1}{a_{p+q}}\vec{e}_{p+q}, \vec{u}_{p+q+1} = \vec{e}_{p+q+1}, \dots,$ $\vec{u}_n = \vec{e}_n$, entonces $\omega(\vec{u}_i) = \frac{\omega(\vec{e}_i)}{a_i^2} = \pm\frac{a_i^2}{a_i^2} = \pm 1$, para $i = 1, \dots, p+q$. Por tanto, respecto de esta nueva base, se obtiene la *expresión canónica* de ω que estará dada por

$$\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

La base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ se dice que es *ortonormal respecto de la forma polar f*.

Definición 1.16. Dada una forma cuadrática ω sobre un espacio vectorial V, diremos que un vector $\vec{x}$ de V es de *isotropía* respecto de ω o de su forma polar f, si $\omega(\vec{x}) = 0$. Asimismo, un subespacio vectorial U de V es de *isotropía* respecto de ω o de f, si todos sus vectores son de isotropía.

El resultado siguiente juega una papel relevante en el presente trabajo.

Proposición 1.17. *Sea ω una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V de dimensión finita n con signatura (p, q), forma polar f y tal que el núcleo de la aplicación lineal de polaridad,* $\ker \hat{f}$*, es de dimensión s. Se tiene:*

(i) Si un subespacio de isotropía es de dimensión a, entonces $\min\{p, q\} + s \geq a$*. Además, existe al menos un subespacio de isotropía de dimensión* $\min\{p, q\} + s$ *y un tal subespacio contiene necesariamente a* $\ker \hat{f}$*.*

(ii) *Si un vector* $\vec{x}$ *es de isotropía, entonces siempre existe un subespacio de isotropía* U *de dimensión* $\min\{p,q\}+s$ *tal que* $\vec{x} \in U$ *y* $\ker \hat{f} \subseteq U$*. En particular, si* $\vec{x}$ *no pertenece a* $\ker \hat{f}$*, entonces* $\vec{x} \in U \subseteq \vec{x}^f$*.*

(iii) *Si un subespacio vectorial es de dimensión* b *y no contiene vectores de isotropía distintos de cero, entonces* $\max\{p,q\} \geq b$*. Además hay subespacios vectoriales de dimensión* $\max\{p,q\}$ *cuyo único vector de isotropía es el cero.*

Demostración. Veamos(i). Supongamos que existe un subespacio de isotropía U de dimensión a tal que $\min\{p,q\}+s<a$ y que, para una cierta base, la forma cuadrática ω viene expresada por

$$\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - y_1^2 - \cdots - y_q^2. \tag{1.3}$$

Si fuese $q \leq p$, consideramos el subespacio vectorial T determinado por la intersección de los hiperplanos vectoriales $y_1 = 0, y_2 = 0, \ldots, y_q = 0$. Dichos subespacio T es de dimensión $n-q = p+s$. Para el subespacio suma $T+U$ se tiene

$$n \geq \dim(T+U) = (p+s)+a-x > p+s+q+s-x = n+s-x,$$

donde x es la dimensión de $T \cap U$. Por tanto, $x > s \geq 0$. Luego existe un vector $\vec{x}$ no nulo perteneciente a $T \cap U$. Calculamos ahora $\omega(\vec{x})$ mediante la expresión (1.3). Al ser $\vec{x} \in T$ y $\vec{x} \in U$ se tiene que

$$\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 = 0.$$

De ahí que $\vec{x} = \vec{0}$, contradicción. Luego $q+s \geq a$.

Si fuese $p \leq q$, se consideraría el subespacio vectorial T determinado por la intersección de los hiperplanos vectoriales $x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots,\ x_p = 0$. Seguidamente desarrollaríamos un argumento similar al hecho anteriormente.

Veamos (ii). Si fuese $q \leq p$, se considera el subespacio vectorial U_o determinado por la intersección de los hiperplanos vectoriales

$$x_1 = 0, \ldots,\ x_{p-q} = 0,\ x_{p+1-q} - y_1 = 0, \ldots,\ x_p - y_q = 0.$$

Como la dimensión de U_o es $n-p = q+s$ y se puede comprobar que U_o es de isotropía, se tiene que existe al menos un subespacio de isotropía U_o de dimensión máxima posible $q+s$. Nótese que se tiene $\ker\ \hat{f} \subseteq U_o$. Pues en caso contrario la suma $U_o + \ker\ \hat{f}$ sería un subespacio de isotropía de dimensión mayor.

Sea un vector $\vec{x}$ de isotropía cualquiera. Si $\vec{x} \in \ker\ \hat{f}$ entonces, ya se tiene $\vec{x} \in \ker\ \hat{f} \subseteq U_o$. Si $\vec{x} \notin \ker\ \hat{f}$, entonces se considera el hiperplano vectorial $\vec{x}^f$. Si $\vec{x} \in U_o$, entonces ya se tendría $\vec{x} \in U_o \subseteq \vec{x}^f$. Si $\vec{x} \notin U_o$, entonces se tendría $\vec{x}^f \cap U_o$ sería de dimensión $q+s-1$. Luego tomando $[\vec{x}] + \vec{x}^f \cap U_o$, se tendría que U sería de isotropía y de dimensión $q+s$. Finalmente del hecho que $\ker\ \hat{f} \subseteq \vec{x}^f \cap U_o$ implica $\ker\ \hat{f} \subseteq U$.

En lo anterior, todo se ha hecho suponiendo $q \leq p$. Si fuese $p \leq q$, se seguiría un argumento similar para la prueba.

Veamos (iii). Sea un subespacio vectorial L de dimensión b tal que su único vector de isotropía es el cero. Si fuese $q \leq p < b$ se tendría que

$$n \geq \dim(L + U_o) = b + q + s - x > p + q + s - x = n - x,$$

donde $x = \dim(L \cap U_o)$. De lo anterior, se sigue que $x > 0$. Por tanto existe un vector no nulo $\vec{x} \in L \cap U_o$, que sería de isotropía, contradicción.

Para ver que existe un tal subespacio vectorial, consideramos una base ortonormal

$$\{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_p, \vec{u}_{p+1}, \dots, \vec{u}_{p+q}, \vec{u}_{p+q+1}, \dots, \vec{u}_n\}$$

respecto de f, de modo que $\omega(\vec{u}_i) = 1$, $i = 1, \dots, p$, $\omega(\vec{u}_j) = -1$, $j = p+1, \dots, p+q$, $\omega(\vec{u}_k) = 0$, $k = p+q+1, \dots, n$. Asumiendo como antes $q \leq p$, el subespacio vectorial resultado de la intersección de los hiperplanos vectoriales

$$x_{p+1} = 0, \ \dots, \ x_{p+q} = 0, \ x_{p+q+1} = 0, \ \dots, \ x_n = 0.$$

es de dimensión $n - (q + s) = p$ y con cero como único vector de isotropía . En el caso $p \leq q$, la prueba sería similar. $\square$

Seguidamente se estudia la restricción a un hiperplano vectorial de una forma cuadrática.

Proposición 1.18. *Sea ω una forma cuadrática sobre un espacio vectorial V de dimensión finita n con signatura (p, q), forma polar f y tal que el núcleo de la aplicación lineal de polaridad, $\ker \hat{f}$, es de dimensión s. Sea W un subespacio vectorial de dimensión $n-1$ de V, entonces con respecto a la restricción $\omega_{|W}$ de ω a W, se tiene lo siguiente:*

(i) Si $\ker \hat{f} \not\subseteq W$, entonces la signatura de $\omega_{|W}$ es (p, q) y $\ker \hat{f}_{|W} = \ker \hat{f} \cap W$.

(ii) Si $\ker \hat{f} \subseteq W$, entonces siempre existe un vector $\vec{x} \in V$ tal que $\vec{x}^f = W$ y se tienen tres posibilidades :

(a) Si $\vec{x} \in W$, entonces la signatura de $\omega_{|W}$ es $(p-1, q-1)$ y $\ker \hat{f}_{|W} = [\vec{x}] + \ker \hat{f}$.

(b) Si $\vec{x} \notin W$ y $\omega(\vec{x}) > 0$, entonces la signatura de $\omega_{|W}$ es $(p-1, q)$ y $\ker \hat{f}_{|W} = \ker \hat{f}$.

(c) Si $\vec{x} \notin W$ y $\omega(\vec{x}) < 0$, entonces la signatura de $\omega_{|W}$ es $(p, q-1)$ y $\ker \hat{f}_{|W} = \ker \hat{f}$.

Demostración. Supongamos que la signatura de $\omega_{|W}$ es (p_1, q_1), entonces existe una base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$ de W con respecto a la cual $\omega_{|W}$ se expresa en el modo siguiente

$$\omega_{|W}(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_{p_1}^2 - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2.$$

Por otro lado, por hipótesis existirá un vector $\vec{e}_n$ que pertenece al $\ker \hat{f}$ y no pertenece a W. Por tanto, el conjunto $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n\}$ constituirá una base de V para la cual la forma cuadrática ω se expresa

$$\omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_{p_1}^2 - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2.$$

Nótese que por ser $\vec{e}_n \in \ker \hat{f}$, se tiene $\omega(\vec{e}_n) = 0$. Por tanto, la signatura de ω es $(p_1, q_1) = (p, q)$.

Es evidente que $\ker \hat{f} \cap W \subseteq \ker \hat{f}_{|W}$ y que $\dim(\ker \hat{f} \cap W) = s - 1$. Por otro lado, si $\dim(\ker \hat{f}_{|W}) = s_1$, se tiene $n - 1 = p + q + s_1 = p + q + s - 1$. Luego $s_1 = s - 1$. Al ser de la misma dimensión, $\ker \hat{f} \cap W = \ker \hat{f}_{|W}$.

Veamos (ii). Sea $\ker \hat{f} \subseteq W$, si $h \in V^*$ tal que $\ker h = W$ (una tal h siempre existirá pues $\dim W = n - 1$), entonces $h \in (\ker \hat{f})^o = \operatorname{Im} \hat{f}$, por el lema 1.6. Por tanto, existe un $\vec{x} \in V$ tal que $\hat{f}(\vec{x}) = h$. Ello implica

$$W = \ker h = \ker \hat{f}(\vec{x}) = \{\vec{y} \in V \mid f(\vec{x}, \vec{y}) = 0\} = \vec{x}^f.$$

Mostremos el apartado (a). Si $\vec{x} \in W$ se puede encontrar una base $\{\vec{x}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{p_1}, \vec{e}_{p_1+1}, \ldots, \vec{e}_{p_1+q_1}, \ldots, \vec{e}_{n-2}\}$ de W, con respecto a la cual $\omega_{|W}$ se expresa

$$\omega_{|W}(\vec{w}) = x_1^2 + \cdots + x_{p_1}^2 - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2,$$

donde se supone que la signatura de $\omega_{|W}$ es (p_1, q_1).

Por otro lado, como $\dim W = n - 1$, existirá un vector no nulo $\vec{z}$ no contenido en W. Para dicho $\vec{z}$ se tiene que $f(\vec{z}, \vec{x}) \neq 0$. Considerando la base $\{\vec{z}, \vec{x}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{p_1}, \vec{e}_{p_1+1}, \ldots, \vec{e}_{p_1+q_1}, \ldots, \vec{e}_{n-2}\}$ de V, la forma cuadrática ω vendrá dada por

$$\begin{aligned}\omega(\vec{y}) = a_{11}z^2 &+ 2a_{12}zx + 2a_{13}zx_1 + \cdots + 2a_{1n}zx_{n-2} \\ &+x_1^2 + \cdots + x_{p_1} - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2.\end{aligned}$$

Nótese que esta expresión de ω no es diagonal, pues $a_{12} \neq 0$. Si también fuese $a_{11} \neq 0$, extrayendo a_{11} como factor común en todos los sumandos donde interviene z y completando el cuadrado se obtiene la expresión

$$\begin{aligned}\omega(\vec{y}) = a_{11} \Big(&z^2 + 2\tfrac{a_{12}}{a_{11}}zx + 2\tfrac{a_{13}}{a_{11}}zx_1 + \cdots + 2\tfrac{a_{1n}}{a_{11}}zx_{n-2} \\ &+(\tfrac{a_{12}}{a_{11}}x + \tfrac{a_{13}}{a_{11}}x_1 + \cdots + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_{n-2})^2\Big) \\ &-a_{11}(\tfrac{a_{12}}{a_{11}}x + \tfrac{a_{13}}{a_{11}}x_1 + \cdots + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_{n-2})^2 \\ &+x_1^2 + \cdots + x_{p_1} - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2.\end{aligned}$$

A partir de esto podemos escribir

$$\begin{aligned}\omega(\vec{y}) = a_{11}\left(z + \tfrac{a_{12}}{a_{11}}x + \tfrac{a_{13}}{a_{11}}x_1 + \cdots + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_{n-2}\right)^2 \\ -a_{11}(\tfrac{a_{12}}{a_{11}}x + \tfrac{a_{13}}{a_{11}}x_1 + \cdots + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_{n-2})^2 \\ +x_1^2 + \cdots + x_{p1} - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2.\end{aligned}$$

Llamando $z' = z + \frac{a_{12}}{a_{11}}x + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_1 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_{n-2}$, $x' = \frac{a_{12}}{a_{11}}x + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_1 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_{n-2}$, $x'_1 = x_1, \ldots, x'_{n-2} = x_{n-2}$, se obtiene la expresión diagonal

$$\omega(\vec{y}) = a_{11}z'^2 - a_{11}x'^2 + x_1'^2 + \cdots + x_{p_1}'^2 - x_{p_1+1}'^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}'^2.$$

Por tanto, para la signatura (p,q) de ω se tiene que $(p,q) = (p_1+1, q_1+1)$.

Finalmente, si fuese $a_{11} = 0$, consideraremos $\{\vec{z}+\vec{x}, \vec{x}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-2}\}$ como nueva base. Para dicha base el elemento a_{11} es distinto de cero. En efecto, $a_{11} = \omega(\vec{z}+\vec{x}) = 2f(\vec{z},\vec{x}) \neq 0$. Para esta segunda base procedemos de forma análoga a como se hizo anteriormente.

Es inmediato que $[\vec{x}] + \ker \hat{f} \cap W \subseteq \ker \hat{f}_{|W}$ y que $\dim[\vec{x}] + \ker \hat{f} = s+1$. Por otro lado, si $\dim(\ker \hat{f}_{|W}) = s_1$, se tiene $n-1 = p-1+q-1+s_1 = p+q+s-1$. Luego $s_1 = s+1$. Al ser de la misma dimensión, $[\vec{x}] + \ker \hat{f} = \ker \hat{f}_{|W}$.

Mostremos (b) y (c).

Si $\omega(\vec{x}) > 0$ (ó $\omega(\vec{x}) < 0$), y fijada una base $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n-1}\}$ con respecto a la cual la forma cuadrática $\omega_{|W}$, viene expresada como $\omega(\vec{w}) = x_1^2 + \cdots + x_{p_1}^2 - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2$, al añadir $\vec{x}$ a dicha base, se obtendrá una base de V, con respecto a la cual, la forma cuadrática ω está dada por

$$\omega(\vec{w}) = a_{11}x_1^2 + \cdots + x_{p_1}^2 - x_{p_1+1}^2 - \cdots - x_{p_1+q_1}^2.$$

Por lo que la signatura de ω es $(p_1+1, q_1) = (p,q)$ $((p_1, q_1+1) = (p,q))$.

Finalmente como $\ker \hat{f} \subseteq \ker \hat{f}_{|W}$ y, si $\dim(\ker \hat{f}) = s_1$, $n-1 = p-1+q+s_1 = p+q+s-1(n-1 = p+q-1+s_1) = p+q+s-1$, entonces $s_1 = s$. Al ser de la misma dimensión, $\ker \hat{f} = \ker \hat{f}_{|W}$. □

1.4. Productos escalares o métricas

En este trabajo hacemos un uso amplio de nociones y propiedades relativas a productos escalares.

Definición 1.19. Se llama *producto escalar* o *métrica* sobre un espacio vectorial V, a toda forma bilineal simétrica no degenerada.

Definición 1.20. Dados dos espacios vectoriales V_1 y V_2 dotados con productos escalares $(\,,)_1$ y $(\,,)_2$, respectivamente, diremos que son *isoformos isometricamente* o *isométricos*, si existe un isomorfismo lineal $\varphi : V_1 \to V_2$ entre ellos que preserva los productos escalares. Esto es, $(\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y}))_2 = (\vec{x}, \vec{y})_1$.

Dos espacios de la misma dimensión con métricas que tengan misma signatura son isométricos.

Normalmente trataremos con el producto escalar en el espacio $\mathbb{R}^n$ con signatura $(n-k, k)$ para $k = 0, 1, 2$. Sin embargo, a veces consideraremos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$ sobre los cuales la métrica de $\mathbb{R}^n$ restringida a ellos, constituye una forma bilineal simétrica degenerada.

Para un producto escalar dado, una *base ortonormal* lo será con respecto a la forma bilineal que él determina, en el sentido dicho en la sección 1.2.

Definición 1.21. Se llama *espacio de Lorentz* al espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ dotado con una métrica de signatura $(n-1, 1)$. Dicha métrica se denomina *métrica de Lorentz* y estará denotada por $(\cdot, \cdot)$.

Fijada una base ortonormal, la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^n$ se expresa en el siguiente modo

$$(\vec{x}, \vec{y}) = -x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

donde $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n)$ son las componentes de $\vec{x}$ e $\vec{y}$, respecto de dicha base, respectivamente.

Un vector $\vec{x}$ se dice que es *espacial*, *temporal* o *luminoso*, si $(\vec{x}, \vec{x})$ es positivo, negativo o cero, respectivamente. Usaremos esta terminología incluso cuando estemos usando una métrica de distinta signatura. En el espacio de Lorentz, el conjunto de todos los vectores luminosos, dados por la ecuación

$$-x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0,$$

forman un cono, llamado *cono de luz*. Del mismo modo a como se hizo en una sección anterior, en la literatura, los vectores luminosos son frecuentemente llamados isotrópicos y el cono de luz es denominado *cono isotrópico*. Los vectores temporales están"dentro del cono", y los espaciales están "fuera del cono". Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\vec{x}^\perp$ denota el conjunto de vectores que son ortogonales a $\vec{x}$ con respecto de la métrica de Lorentz.

A partir de la proposición 1.18, se tiene:

- Si $\vec{x}$ es temporal, entonces la métrica restringida a $\vec{x}^\perp$ es definida positiva con signatura $(n-1, 0)$ y $\vec{x}^\perp$ interseca al cono de luz únicamente en el origen.
- Si $\vec{x}$ es espacial, entonces la métrica tiene signatura $(n-2, 1)$ sobre $\vec{x}^\perp$ y $\vec{x}^\perp$ interseca al cono en un cono de una dimensión menor.

- Si $\vec{x}$ es luminoso, entonces la métrica restringida al hiperplano $\vec{x}^{\perp}$ es una forma bilineal degenerada con signatura $(n-2, 0)$. Por tanto, $\vec{x}^{\perp}$ es tangente al cono de luz a lo largo de la recta $[\vec{x}]$ que pasa por su vértice, el origen $\vec{0}$. En efecto, es evidente que el subespacio generado por $\vec{x}$, $[\vec{x}]$, está contenido en la intersección de $\vec{x}^{\perp}$ con el cono. Recíprocamente, si existiese un vector $\vec{y}$ contenido en dicha intersección y no contenido en $[\vec{x}]$, se obtendría que el subespacio vectorial de dimensión 2 generado por $\vec{x}$ e $\vec{y}$, también estaría contenido en dicha intersección. Esto se contradice con lo afirmado en la proposición 1.17.

A continuación, debido a que se utilizará más adelante vemos el siguiente resultado.

Teorema 1.22. *Sea f un isomorfismo lineal del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ en si mismo y se considera que $\mathbb{R}^n$ está dotado con un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de signatura $(n-k, k)$ con $1 \leq k \leq n-1$. Si f es tal que lleva vectores luminosos a vectores luminosos, entonces :*

(i) Hay una constante λ distinta de cero tal que $\langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle = \lambda \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, para todo $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
(ii) Además, si $k \neq n-k$, entonces λ es positivo.

Demostración. Dado que $k \geq 1$ y $n-k \geq 1$, existen vectores temporales y vectores espaciales en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que $\vec{v}$ es un vector temporal unitario y que $\vec{w}$ es un vector espacial unitario de tal manera que $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Luego $\vec{v}+\vec{w}$ y $\vec{v}-\vec{w}$ son vectores luminosos. Por la hipótesis del teorema, se tiene que $f(\vec{v}+\vec{w})$ y $f(\vec{v}-\vec{w})$ son ambos vectores luminosos. Así

$$\langle f(\vec{v}+\vec{w}), f(\vec{v}+\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{v}), f(\vec{v}) \rangle + 2\langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle + \langle f(\vec{w}), f(\vec{w}) \rangle = 0,$$

$$\langle f(\vec{v}-\vec{w}), f(\vec{v}-\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{v}), f(\vec{v}) \rangle - 2\langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle + \langle f(\vec{w}), f(\vec{w}) \rangle = 0.$$

Ahora, si restamos a la segunda ecuación la primera, nos queda que $\langle f(\vec{v}), f(\vec{w}) \rangle = 0$. Considerando esto en las ecuaciones anteriores, se obtiene

$$-\langle f(\vec{v}), f(\vec{v}) \rangle = \langle f(\vec{w}), f(\vec{w}) \rangle = \lambda, \tag{1.4}$$

para un cierto número real λ.

Ahora supongamos que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ con $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ vectores temporales y $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}$ vectores espaciales. Nosotros ya hemos demostrado que $\langle f(\vec{v}_i), f(\vec{w}_j) \rangle = 0$, para todo $i = 1, \ldots, k$ y $j = 1, \ldots, n-k$. De la ecuación (1.4) obtenemos que $-\langle f(\vec{v}_i), f(\vec{v}_i) \rangle = \langle f(\vec{w}_j), f(\vec{w}_j) \rangle = \lambda$, para todos los i y los j, puesto que podemos mantener fijo $\vec{v}_i$ y variar $\vec{w}_j$ y viceversa.

Resta probar que $\langle f(\vec{v}_i), f(\vec{v}_j) \rangle = 0$ y $\langle f(\vec{w}_i), f(\vec{w}_j) \rangle = 0$, para $i \neq j$. Para ello, se considera el vector $\frac{\vec{w}_i+\vec{w}_j}{\sqrt{2}}$. Nótese que dicho vector es espacial, unitario y ortogonal a $\vec{v}_1$. Por tanto,

$$-\langle f(\vec{v}_1), f(\vec{v}_1)\rangle = \langle f\left(\tfrac{\vec{w}_i+\vec{w}_j}{\sqrt{2}}\right), f\left(\tfrac{\vec{w}_i+\vec{w}_j}{\sqrt{2}}\right)\rangle = \lambda.$$

Desarrollando esta identidad mediante la bilinealidad, se sigue que

$$2\lambda = \langle f(\vec{w}_i), f(\vec{w}_i)\rangle + 2\langle f(\vec{w}_i), f(\vec{w}_j)\rangle + \langle f(\vec{w}_j), f(\vec{w}_j)\rangle.$$

Como $\lambda = \langle f(\vec{w}_i), f(\vec{w}_i)\rangle = \langle f(\vec{w}_j), f(\vec{w}_j)\rangle$, se tiene que $\langle f(\vec{w}_i), f(\vec{w}_j)\rangle = 0$. Del mismo modo se probaría que $\langle f(\vec{v}_i), f(\vec{v}_j)\rangle = 0$, para $i \neq j$.

Finalmente, se puede demostrar usando lo anterior que $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \lambda\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$, para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. En efecto, usando la base ortonormal anterior $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_{n-k}\}$, se tienen las expresiones

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i\vec{v}_i + \sum_{j=1}^{n-k} x'_j\vec{w}_j, \qquad \vec{y} = \sum_{i=1}^{k} y_i\vec{v}_i + \sum_{j=1}^{n-k} y'_j\vec{w}_j.$$

De ahí que $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = -\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{j=1}^{n-k} x'_j y'_j$. Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned}\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle &= \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \langle f(\vec{v}_i), f(\vec{v}_i)\rangle + \sum_{j=1}^{n-k} x'_j y'_j \langle f(\vec{w}_j), f(\vec{w}_j)\rangle.\\ &= \sum_{i=1}^{k} x_i y_i(-\lambda) + \sum_{j=1}^{n-k} x'_j y'_j \lambda = \lambda\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle.\end{aligned}$$

Con lo queda probado el apartado (i).

Para ver (ii), procedemos por reducción al absurdo. Supongamos $\lambda < 0$. Como f es un isomorfismo lineal se tiene que, $\{f(\vec{v}_1), \ldots, f(\vec{v}_k), f(\vec{w}_1), \ldots, f(\vec{w}_{n-k})\}$ es también una base de $\mathbb{R}^n$ constituida por vectores ortogonales entre sí por lo que se ha visto en la demostración del apartado (i). Al ser λ negativo se tendría que los $f(\vec{v}_i)$ serían espaciales y los $f(\vec{w}_j)$ temporales. Por lo que la signatura de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sería $(k, n-k)$. Como en el enunciado del teorema se dice que la signatura es $(n-k, k)$. Ello implica que $k = n-k$, contradicción.

Se observa que, cuando $n - k \neq k$, para todo isomorfismo con las condiciones del teorema, los vectores espaciales se transforman en vectores espaciales y los vectores temporales en temporales.

1.5. Espacios Proyectivos. Variedades cuadráticas

En el estudio de la geometría de las esferas de Lie abordado en el presente trabajo, nos vamos a mover en el ámbito de la geometría proyectiva. Es por eso que resulta necesario repasar algunos conceptos de dicha geometría.

Definición 1.23. Dado un espacio vectorial real V de dimensión $n+1$. Se llama *espacio proyectivo* asociado al espacio vectorial V, al conjunto de subespacios vectoriales de dimensión 1 de V. Se denota $\mathcal{P}(V)$ y sus elementos los denotaremos por $[\vec{v}] = \{\lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R},\ \vec{v} \neq \vec{0}\}$. Es decir,

$$\mathcal{P}(V) = \{[\vec{v}] \ / \ \vec{v} \neq \vec{0}, \vec{v} \in V\}.$$

Los elementos de un espacio proyectivo se llamarán *puntos* del mismo. Si $P = [\vec{v}]$ se dice que el vector $\vec{v}$ *define* el punto P.

Definición 1.24. Si $\mathcal{P}(V)$ es un espacio proyectivo asociado al espacio vectorial V, la *dimensión* de $\mathcal{P}(V)$ se define igual a $\dim\ V - 1$.

1.5.1. Subespacios proyectivos

Definición 1.25. Para un espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$, se dice que $\mathcal{P}(W)$ es un *subespacio proyectivo* de $\mathcal{P}(V)$, si W es un subespacio vectorial de V.

En particular:

Si $\dim W = 2$, a $\mathcal{P}(W)$ se le denomina *recta*. La dimensión de una recta es 1.

Si $\dim W = 3$, a $\mathcal{P}(W)$ se le denomina *plano*. La dimensión de un plano es 2.

Si $\dim W = n$, a $\mathcal{P}(W)$ se le denomina *hiperplano*. La dimensión de un hiperplano es $n - 1$.

Un punto $X = [\vec{x}]$ es un subespacio proyectivo, $\{X\} = \mathcal{P}([\vec{x}])$. Su dimensión es cero.

Si $\dim W = 0$, $\mathcal{P}(\{\vec{0}\}) = \phi$ es un subespacio proyectivo sin ningún punto (vacío). Su dimensión es -1.

1.5.2. Variedades cuadráticas

Recordamos ahora algunas nociones y propiedades relevantes desde el punto de vista proyectivo relativas a variedades cuadráticas. Sólo introduciremos aquello que nos va a ser necesario más adelante (para más detalles ver ([3], [8]).

Definición 1.26. Sean V un espacio vectorial real de dimensión mayor que 1, $\mathcal{Q}(V, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las formas cuadráticas sobre V y, para $\vec{x} \in V$ no nulo, $[\vec{x}]$ el subespacio vectorial de V generado por $\vec{x}$. Una *variedad cuadrática* en el espacio proyectivo $\mathcal{P}(V)$ es todo punto $[\omega]$ del espacio proyectivo $\mathcal{P}(\mathcal{Q}(V, \mathbb{R}))$. Los *ceros* de $[\omega]$ es el subconjunto de $\mathcal{P}(V)$ dado por $\mathcal{C}(\omega) = \{[\vec{x}] \in \mathcal{P}(V) / \omega(\vec{x}) = 0\}$.

Si dim $\mathcal{P}(V) = 2$, la variedad cuadrática $[\omega]$ se llama *cónica*.
Si dim $\mathcal{P}(V) = 3$, la variedad cuadrática $[\omega]$ se llama *cuádrica*.
Si dim $\mathcal{P}(V) > 3$, la variedad cuadrática $[\omega]$ se llama *hipercuádrica*.

Observación 1.27. En la definición anterior, hemos establecido que es diferente hablar de una variedad cuadrática $[\omega]$ que considerar sus ceros $\mathcal{C}(\omega)$. Sin embargo, por razones de usar un lenguaje más simple e intuitivo, en lo sucesivo escribiremos $\mathcal{C}(\omega)$ en lugar de $[\omega]$, para referirnos a una variedad cuadrática.

El conjunto de los puntos $X = [\vec{x}]$ que están en una variedad cuadrática en $\mathcal{C}(\omega)$ están determinados por vectores $\vec{x}$ no nulos que son de isotropía respecto de ω. Por otro lado, si un subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ está contenido en $\mathcal{C}(\omega)$, entonces el subespacio vectorial W es de isotropía repecto de la forma polar f.

La siguiente proyectividad juega un papel esencial en el estudio de variedades cuadráticas.

Definición 1.28. La *polaridad* de una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$ es la proyectividad $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$ que se deduce de la aplicación lineal de polaridad $\hat{f} : V \to V^*$ de ω. Para un punto $Y = [\vec{y}] \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f})$, se dice que $\widetilde{f}(Y) = [\hat{f}(\vec{y})] = \mathcal{P}(\vec{y}^{f})$ es el *hiperplano polar* de Y y que Y es un *polo* del hiperplano $\widetilde{f}(Y)$.

Asimismo, son relevantes las nociones contenidas en lo siguiente.

Definición 1.29. Sea la polaridad $\widetilde{f} : \mathcal{P}(V) - \mathcal{P}(\ker \hat{f}) \to \mathcal{P}(V^*)$, definida a partir de una forma cuadrática no nula ω con forma polar f. Dos puntos $[\vec{x}] = X$ e $[\vec{y}] = Y$ de $\mathcal{P}(V)$ se dice que son *conjugados* respecto de la variedad cuadrática $\mathcal{C}(W)$, si $f(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. Un punto $[\vec{x}] = X \in \mathcal{P}(V)$ se dice que es *singular*, si es conjugado a todos los puntos de $\mathcal{P}(V)$ o lo que es lo mismo, si está determinado por un vector $\vec{x}$ que está en el núcleo de $\hat{f}$. El conjunto de los puntos singulares es $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\ker \hat{f})$.

Para $[\vec{y}] = Y \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{S}$, se tiene $\widetilde{f}(Y) = \{[\vec{x}] \in \mathcal{P}(V) \,|\, 0 = \hat{f}(\vec{y})(\vec{x}) = f(\vec{y}, \vec{x})\}$. Esto es, el hiperplano polar $\widetilde{f}(Y)$ está formado por los puntos que son conjugados a Y.

Fijamos ahora una referencia proyectiva $\mathcal{R} = \{U_0, \ldots, U_n; U\}$ en $\mathcal{P}(V)$ y la correspondiente referencia dual $\mathcal{R}^* = \{U_0^*, \ldots, U_n^*; U^*\}$ en el espacio proyectivo dual $\mathcal{P}(V^*)$. Seguidamente, tomamos bases normalizadas de dichas referencias $\{\vec{e}_0, \ldots, \vec{e}_n\}$ y su dual $\{\vec{e}_0^*, \ldots, \vec{e}_n^*\}$ (ver [3],[8]). Dada una variedad cuadrática $\mathcal{C}(\omega)$, sea $A = (a_{ij})$ una matriz asociada a ω respecto de una base normalizada de $\mathcal{R}$. Pues bien, para $X \in \mathcal{P}(V) - \mathcal{S}$ con coordenadas homogéneas $(x_0, \ldots, x_n)$, si $\widetilde{f}(X)$ tiene coordenadas homogéneas $(u_0, \ldots, u_n)$, entonces la ecuación matricial de la polaridad $\widetilde{f}$ viene dada por

$$\rho \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

donde ρ es un número real distinto de 0.

Nótese que si dim $\mathcal{P}(V) = n$ y el rango de ω es r, entonces $\dim(\ker \hat{f}) + r = n + 1$. Por lo que dim $\mathcal{S} = n - r$.

Seguidamente se describe el conjunto imagen de la polaridad.

Lema 1.30. *Para $\mathcal{P}(V)$ de dimensión finita, el conjunto imagen $\operatorname{Im} \widetilde{f}$ de la polaridad $\widetilde{f}$ es igual al conjunto de hiperplanos que contienen a el conjunto de puntos singulares $\mathcal{S}$. Es decir, si $(\ker \hat{f})^o$ es el anulador de $\ker \hat{f}$, entonces $\operatorname{Im} \widetilde{f} = \mathcal{P}((\ker \hat{f})^o)$.*

A lo largo del texto, denotamos por $\mathcal{P}^n$ el espacio proyectivo asociado a $\mathbb{R}^{n+1}$. Las coordenadas rectangulares $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ son llamadas *coordenadas homogéneas* del punto $[\vec{x}]$. Están únivocamente determinadas salvo un múltiplo escalar no nulo. La referencia fijada para dichas coordenadas está dada por $\{U_1, \ldots, U_{n+1}; U\}$, donde $U_i = [(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)]$, el 1 situado en el lugar i, y $U = [(1, \ldots, 1)]$

El espacio afín $\mathbb{R}^n$ se incluye en $\mathcal{P}^n$ como el complementario del hiperplano del infinito H_∞, ($H_\infty \equiv x_1 = 0$), por la aplicación $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}^n$ dada por $\phi(y_1, \ldots, y_n) = [(1, y_1, \ldots, y_n)]$.

Un producto escalar en $\mathbb{R}^{n+1}$, tal como la métrica de Lorentz, tiene su aplicación lineal de polaridad, $\widehat{\perp} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1*}$, de modo que para todo $\vec{x}$ se tiene que $\ker \widehat{\perp}(\vec{x}) = \vec{x}^\perp$. Dicha aplicación lineal de polaridad define la proyectividad, denominada *polaridad*, entre $\mathcal{P}^n$ y su espacio proyectivo dual $\mathcal{P}^{n*}$ dada por $\widetilde{\perp}([\vec{x}]) = [\widehat{\perp}(\vec{x})]$. Este punto del espacio proyectivo dual se identifica con el hiperplano proyectivo $\mathcal{P}(\ker \widehat{\perp}(\vec{x})) = \mathcal{P}(\vec{x}^\perp)$, denominándose hiperplano polar del punto $[\vec{x}]$. También se dice que $[\vec{x}]$ es el *polo* del hiperplano $\mathcal{P}(\vec{x}^\perp)$.

Si $\vec{x}$ es un vector luminoso no nulo en $\mathbb{R}^{n+1}$, entonces necesariamente $x_1 \neq 0$ y el punto $[\vec{x}]$ puede ser representado como un vector de la forma $(1, \vec{u})$, para $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. La ecuación para el cono de luz $(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ es $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$($\cdot$ denota el producto euclídeo en $\mathbb{R}^n$) que es la esfera unidad S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, el conjunto de puntos de $\mathcal{P}^n$ determinados por vectores luminosos no nulos en $\mathbb{R}^{n+1}$ es difeomorfo con S^{n-1}.

2

Geometría de las esferas de Lie

2.1. La Geometría de Möbius de las esferas no orientadas

Como primer paso hacia la geometría de las esferas de Lie, recordemos la geometría de las esferas no orientadas en $\mathbb{R}^n$ conocida como *geometría de Möbius* o *geometría conforme*. Siempre asumiremos que $n \geq 2$.

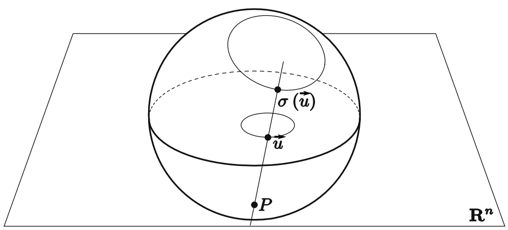


Figura 2.1. Proyección estereográfica de $\mathbb{R}^n$ en S^n

Denotamos el producto euclídeo de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^n$ por $\vec{u} \cdot \vec{v}$. En primer lugar consideramos la proyección estereográfica.

$$\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n - \{P\},$$

donde S^n es la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por la ecuación $\vec{y} \cdot \vec{y} = 1$ y $P = (-1, 0, \ldots, 0)$ es el polo sur de S^n. La imagen $\sigma(\vec{u})$ de un punto $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ se determina del modo siguiente: se considera la recta que une el polo sur P con $\vec{u}$, el punto $\sigma(\vec{u})$ resulta de la intersección de dicha recta con S^n. La fórmula para $\sigma(\vec{u})$ viene dada por

$$\sigma(\vec{u}) = \left(\frac{1 - \vec{u} \cdot \vec{u}}{1 + \vec{u} \cdot \vec{u}}, \frac{2\vec{u}}{1 + \vec{u} \cdot \vec{u}} \right).$$

En efecto, la recta que pasa por P y el punto $(0, \vec{u})$, tiene vector director $(1, \vec{u})$, entonces:

$$\vec{x} = (-1, \vec{0}) + \lambda(1, \vec{u}).$$

Por tanto,

$$\vec{x} = (-1 + \lambda, \lambda\vec{u}).$$

Ahora se halla la intersección de la recta con la esfera. Esto es, se considera la expresión

$$(-1 + \lambda, \lambda\vec{u}),$$

entonces

$$(-1 + \lambda)^2 + \lambda\vec{u} \cdot \lambda\vec{u} = 1.$$

Desarrollando el binomio y simplificando, nos queda

$$\lambda(\lambda - 2 + \lambda\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0.$$

Por lo que $\lambda = 0$ ó $\lambda(1 + \vec{u} \cdot \vec{u}) = 2$. Es decir, $\lambda = 0$ ó $\lambda = \frac{2}{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}$.

Así, cuando $\lambda = 0$ se obtiene P y cuando $\lambda = \frac{2}{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}$ se obtiene la expresión requerida para $\sigma(\vec{u})$.

Si determinamos la métrica g sobre $\mathbb{R}^n$ tal que la aplicación σ sea una isometría se obtiene

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \tfrac{4}{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{x} \cdot \vec{y},$$

para todo $\vec{x}, \vec{y} \in T_{\vec{u}}\mathbb{R}^n$, siendo $T_{\vec{u}}\mathbb{R}^n$ el espacio tangente a $\mathbb{R}^n$ en el punto $\vec{u}$.

A continuación procedemos a incluir $\mathbb{R}^{n+1}$en $\mathbb{P}^{n+1}$ por la aplicación ϕ mencionada en la sección 1.5.2. Así se tiene

$$\phi\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}^{n+1},$$

dada por

$$\phi\sigma(\vec{u}) = \left[\left(1, \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}, \tfrac{2\vec{u}}{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}\right)\right] = \left[\left(\tfrac{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \vec{u}\right)\right].$$

Sea el punto $[(z_1, \ldots, z_{n+2})]$ de $\mathcal{P}^{n+1}$ y $(\cdot, \cdot)$ la métrica de Lorentz en el espacio $\mathbb{R}^{n+2}$. Luego $\phi\sigma(\mathbb{R}^n)$ es exactamente el conjunto de puntos en $\mathcal{P}^{n+1}$ sobre la esfera Σ dada por la ecuación $(\vec{z}, \vec{z}) = 0$, con excepción del punto impropio $[(1, -1, \vec{0})]$ correspondiente al polo sur P. Nos referiremos a los puntos en Σ distintos del polo sur P como *puntos propios*, el polo sur será el *punto impropio* y llamaremos *esfera de Möbius* o *espacio de Móbius* a

$$\Sigma = \{[\vec{z}] \in \mathcal{P}^{n+1} \,|\, (\vec{z}, \vec{z}) = 0\}.$$

Un hecho que debe ser tenido en cuenta en lo que sigue es que todo punto $[\vec{z}]$ de Σ necesariamente tiene su primera coordenada no nula, $z_1 \neq 0$. Esto es, dicho punto es imagen mediante ϕ de algún punto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

A menudo, es más sencillo comenzar en S^n en lugar de en $\mathbb{R}^n$. Así podemos evitar la aplicación σ y el punto especial P. Sin embargo, hay ciertas ventajas, de índole intuitivo, si comenzamos desde $\mathbb{R}^n$.

El marco de referencia básico de la geometría de Möbius de las esferas no orientadas es el siguiente. Supongamos que $\vec{\xi}$ es un vector espacial en $\mathbb{R}^{n+2}$, es decir, $(\vec{\xi}, \vec{\xi}) > 0$. Usando la proposición 1.18, la intersección del hiperplano polar $\mathcal{P}(\vec{\xi}^{\perp})$ de $[\vec{\xi}]$ en $\mathcal{P}^{n+1}$ con la esfera Σ, es una variedad cuadrática $\Sigma \cap \mathcal{P}(\vec{\xi}^{\perp})$ en $\mathcal{P}(\vec{\xi}^{\perp})$ con signatura $(n, 1)$. Dicha variedad cuadrática se corresponde con la intersección de la esfera S^n con el hiperplano afín H_a de $\mathbb{R}^{n+1}$ dada por la ecuación

$$H_a \equiv -\xi_1 + \xi_2 y_1 + \cdots + \xi_{n+2} y_{n+1} = 0,$$

donde $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2})$ son coordenadas homogéneas del punto $[\vec{\xi}]$. Por tanto, $S^n \cap H_a$ es una esfera de dimensión $n-1$ en H_a. Que a su vez es la imagen mediante $\phi\sigma$ de una esfera de dimensión $n-1$ de $\mathbb{R}^n$ a no ser que $\Sigma \cap \mathcal{P}(\vec{\xi}^{\perp})$ contenga el punto impropio $[(1, -1, \vec{0})]$. En este último caso, el polo sur $(-1, \vec{0})$ estará en $S^n \cap H_a$, por lo que $S^n \cap H_a$ será la imagen mediante la proyección esterográfica σ de un hiperplano de $\mathbb{R}^n$. Por tanto, hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todos los puntos espaciales en $\mathcal{P}^{n+1}$ y el conjunto de todas las esferas e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$.

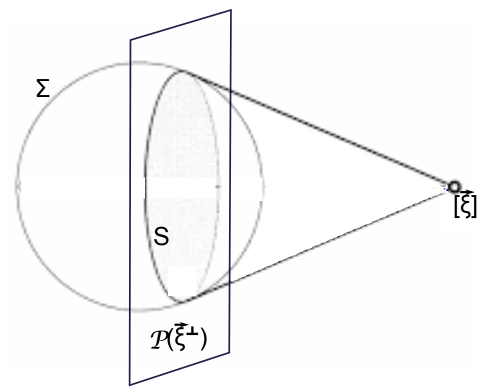


Figura 2.2. El punto espacial $[\vec{\xi}]$ y su esfera correspondiente S en Σ

Veamos ahora fórmulas específicas para esta correspondencia.

Lema 2.1. *Sea la esfera* $S^{n-1}_{\vec{p}}(r)$ *en* $\mathbb{R}^n$ *con centro* $\vec{p}$ *y radio* $r > 0$ *dada por la ecuación*

$$(\vec{u} - \vec{p}) \cdot (\vec{u} - \vec{p}) = r^2.$$

Entonces $\vec{u} \in S^{n-1}_{\vec{p}}(r)$ *si y solo si* $\vec{u}$ *satisface la ecuación* $(\vec{\xi}, \phi\sigma(\vec{u})) = 0$*, donde* $[\vec{\xi}]$ *es el punto espacial con* $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$ *tal que*

$$[\vec{\xi}] = [\Big(\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p}\Big)]. \tag{2.1}$$

Nótese que si $\xi_1 + \xi_2 = 1$*, entonces* $(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = r^2$ *y* $(\xi_3, \ldots, \xi_{n+2}) = \vec{p}$*. Luego la esfera* $S^{n-1}_{\vec{p}}(r)$ *se corresponde con el punto* $[\vec{\xi}]$*.*

Demostración. Dada la esfera $S^{n-1}_{\vec{p}}(r)$ en $\mathbb{R}^n$ con centro $\vec{p}$ y radio $r > 0$ se quiere determinar el punto espacial que $[\vec{\xi}] = [(\xi_1, \ldots, \xi_{n+2})] = [(\xi_1, \xi_2, \vec{\xi_o})]$ que le corresponde. Para ello, si se tiene un vector $\vec{u}$ de la esfera, se satisface la ecuación $(\vec{u} - \vec{p}) \cdot (\vec{u} - \vec{p}) = r^2$ que es equivalente a $\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{p} \cdot \vec{u} + \vec{p} \cdot \vec{p} = r^2$.

Por otro lado, a partir de que

$$\phi\sigma(\vec{u}) = \big[\big(\tfrac{1+\vec{u}.\vec{u}}{2}, \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \vec{u}\big)\big] \in \Sigma \cap \mathcal{P}(\vec{\xi}^{\perp}),$$

se obtiene que

$$0 = (\vec{\xi}, \phi\sigma(\vec{u})) = -\xi_1 \tfrac{1+\vec{u}.\vec{u}}{2} + \xi_2 \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2} + \vec{\xi_o} \cdot \vec{u}.$$

Necesariamente $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$. Si fuese $\xi_1 + \xi_2 = 0$, se obtiene la igualdad

$$\tfrac{\xi_2 - \xi_1}{2} + \vec{\xi_o} \cdot \vec{u} = 0.$$

Por lo que el punto $\vec{u}$ estaría en el hiperplano afín de $\mathbb{R}^n$ representado por la ecuación anterior. Esto es, la esfera de centro $\vec{p}$ y radio r estaría contenida en un hiperplano, contradicción.

Por tanto, podemos elegir un representante $(\xi_1, \xi_2, \vec{\xi_o})$ del punto $[\vec{\xi}]$ de modo que $\xi_1 + \xi_2 = 1$. La ecuación anterior se transforma en la igualdad

$$\tfrac{\xi_2 - \xi_1}{2} - \tfrac{1}{2}\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{\xi_o} \cdot \vec{u} = 0.$$

A continuación, sustituyendo $\vec{u} \cdot \vec{u} = r^2 - \vec{p} \cdot \vec{p} + 2\vec{p} \cdot \vec{u}$, se obtiene

$$\tfrac{\xi_2 - \xi_1}{2} - \tfrac{r^2 - \vec{p}\cdot\vec{p}}{2} - \vec{p} \cdot \vec{u} + \vec{\xi_o} \cdot \vec{u} = 0.$$

Poniendo ahora $\vec{\xi_o} = \vec{p}$ y $\xi_2 - \xi_1 = r^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}$ junto con la condición $\xi_1 + \xi_2 = 1$, resulta

$$\xi_1 = \tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \qquad \xi_2 = \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}.$$

Además, se comprueba que $(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = r^2 > 0$ y su hiperplano polar $\mathcal{P}(\vec{\xi}^{\perp})$ viene dado por

$$-\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2} z_1 + \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2} z_2 + \vec{p} \cdot \vec{z_o} = 0.$$

Recíprocamente, dado un punto $[\vec{\xi}] = [(\xi_1, \xi_2, \vec{\xi_o})]$ espacial con $\xi_1 + \xi_2 \neq 0$, se quiere determinar la esfera de $\mathbb{R}^n$ que le corresponde. Siempre se puede encontrar un representante del mismo punto con $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Entonces, considerando un tal representante llamamos $r^2 = (\vec{\xi}, \vec{\xi})$ y $\vec{p} = \vec{\xi_o}$. Se puede comprobar que la esfera de $\mathbb{R}^n$ de centro $\vec{p}$ y radio r se corresponde con nuestro punto espacial de partida. En efecto, ya se tiene $\vec{\xi_o} = \vec{p}$ y, además, se obtiene

$$\begin{aligned} \tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2} &= \tfrac{1+\vec{\xi_o}\cdot\vec{\xi_o}-(\vec{\xi},\vec{\xi})}{2} = \tfrac{1+\xi_1^2-\xi_2^2}{2} = \tfrac{1+\xi_1-\xi_2}{2} = \xi_1, \\ \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2} &= \tfrac{1-\vec{\xi_o}\cdot\vec{\xi_o}+(\vec{\xi},\vec{\xi})}{2} = \tfrac{1-\xi_1^2+\xi_2^2}{2} = \tfrac{1-\xi_1+\xi_2}{2} = \xi_2. \end{aligned}$$

□

Veamos ahora de forma explícita la correspondencia entre hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ y puntos espaciales $[(\xi_1, \xi_2, \vec{\xi_o})]$ en $\mathcal{P}^{n+1}$ tales que $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Lema 2.2. *Sea H_a un hiperplano afín de $\mathbb{R}^n$ dado por la ecuación $a + \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, donde $\vec{n} \neq \vec{0}$ es un vector normal a H_a. Entonces $\vec{u} \in H_a$ si y solo si $\vec{u}$ satisface la ecuación $((-a, a, \vec{n}), \phi\sigma(\vec{u})) = 0$. Nótese que $((-a, a, \vec{n}), (-a, a, \vec{n})) = \vec{n}\cdot\vec{n} > 0$. Esto es, el hiperplano $H_a \equiv a + \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ se corresponde con el punto espacial $[(-a, a, \vec{n})]$.*

Demostración. Sea $\vec{u} \in H_a$, entonces se tiene que

$$((-a, a, \vec{n}), \phi\sigma(\vec{u})) = -(-a)\frac{1 + \vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + a\frac{1 - \vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + \vec{n} \cdot \vec{u} = a + \vec{n}\vec{u} = 0.$$

Recíprocamente, si se tiene el punto espacial $[(-a, a, \vec{n})]$ y $\vec{u}$ que satisface $((-a, a, \vec{n}), \phi\sigma(\vec{u})) = 0$, entonces

$$0 = ((-a, a, \vec{n}), \phi\sigma(\vec{u})) = a + \vec{n} \cdot \vec{u}.$$

Por tanto, $\vec{u} \in H_a$. □

Finalmente, observemos que una circunferencia de centro $\vec{p}$ y radio 0, es decir, un punto $\vec{p}$, se corresponde con el punto luminoso (de Σ) $\phi\sigma(\vec{p}) = [(\frac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}}{2}, \frac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}}{2}, \vec{p})]$.

2.2. Ángulos

El invariante fundamental de la geometría de Möbius es el ángulo. El estudio de los ángulos resulta bastante natural en el contexto de dicha geometría. Veremos que los ángulos entre esferas y planos en $\mathbb{R}^n$ pueden ser expresados en términos de la métrica de Lorentz.

Definición 2.3. Sean dos esferas S_1 y S_2 de $\mathbb{R}^n$ con intersección no vacía, para determinar el *ángulo* entre las esferas S_1 y S_2, se considera un punto $\vec{p}$ de la intersección $S_1 \cap S_2$ y los hiperplanos H_1 y H_2 tangentes a S_1 y S_2 en el punto común $\vec{p}$, respectivamente, el ángulo entre S_1 y S_2 es el ángulo entre dichos hiperplanos. Dicho ángulo se calcula mediante los vectores $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ ortogonales a dichos hiperplanos tangentes y vendrá dado por

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|_e \|\vec{n}_2\|_e},$$

donde $\|\vec{u}\|_e = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

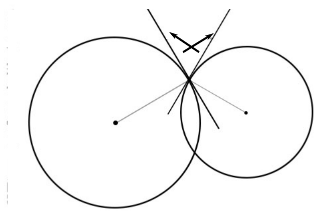


Figura 2.3. Ángulo entre dos esferas

Proposición 2.4. *Dadas dos esferas con intersección no vacía, S_1 con centro $\vec{p}_1$ y radio $r_1 > 0$ y, S_2 con centro $\vec{p}_2$ y radio $r_2 > 0$, entonces el ángulo θ entre S_1 y S_2 viene dado por:*

$$|\cos\,\theta| = \left|\frac{r_1^2 + r_2^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)}{2 r_1 r_2}\right|.$$

Además, si los puntos espaciales $[\vec{\xi}_1]$ y $[\vec{\xi}_2]$ son los correspondientes a S_1 y S_2 respectivamente, entonces

$$|\cos\,\theta| = \frac{|(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)|}{\|\vec{\xi}_1\|_l \|\vec{\xi}_2\|_l}, \tag{2.2}$$

donde $\|\vec{\xi}\|_l = \sqrt{(\vec{\xi}, \vec{\xi})}$.

Demostración. Nótese que, si $\vec{p}$ es un punto de $S_1 \cap S_2$, los vectores $\vec{p} - \vec{p}_1$ y $\vec{p} - \vec{p}_2$ son respectivamente ortogonales a los hiperplanos tangentes a S_1 y S_2 en $\vec{p}$. Por tanto,

$$|\cos\,\theta| = \left|\frac{(\vec{p}-\vec{p}_1)\cdot(\vec{p}-\vec{p}_2)}{r_1r_2}\right| = \left|\frac{\vec{p}\cdot\vec{p}-\vec{p}\cdot\vec{p}_1-\vec{p}\cdot\vec{p}_2+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{r_1r_2}\right|. \tag{2.3}$$

Por otro lado, se tiene las igualdades

$$\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{p}_1+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1=r_1^2, \qquad \vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{p}_2+\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2=r_2^2,$$

Sumando miembro a miembro las dos identidades se obtiene

$$2\vec{p}\cdot\vec{p}-2\vec{p}\cdot\vec{p}_1-2\vec{p}\cdot\vec{p}_2+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1+\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2=r_1^2+r_2^2.$$

Lo que equivale a la igualdad

$$2(\vec{p}\cdot\vec{p}-\vec{p}\cdot\vec{p}_1-\vec{p}\cdot\vec{p}_2+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)=r_1^2+r_2^2-(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot(\vec{p}_1-\vec{p}_2).$$

Utilizando esta igualdad en la expresión 2.3, obtenida arriba, se deduce la fórmula requerida en la proposición. Dicha fórmula también la podemos obtener mediante la utilización del teorema del coseno en el triángulo de vértices $\vec{p}_1$, $\vec{p}$ y $\vec{p}_2$. Teniendo en cuenta que el ángulo del triángulo en el vértice $\vec{p}$ es igual a θ.

Finalmente, el punto espacial $[\vec{\xi}_1]$ que se corresponde con S_1 viene dado por $[(\frac{1+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1-r_1^2}{2}, \frac{1-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1+r_1^2}{2}, \vec{p}_1)]$. Del mismo modo para S_2 se tiene el punto $[\vec{\xi}_2]$ dado por $[(\frac{1+\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2-r_2^2}{2}, \frac{1-\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2+r_2^2}{2}, \vec{p}_2)]$. Efectuando ahora el producto de Lorentz

$$\begin{aligned}(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2) &= \lambda_1\lambda_2((\tfrac{1+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1-r_1^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1+r_1^2}{2}, \vec{p}_1), (\tfrac{1+\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2-r_2^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2+r_2^2}{2}, \vec{p}_2))\\ &= \lambda_1\lambda_2\frac{r_1^2+r_2^2-(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\cdot(\vec{p}_1-\vec{p}_2)}{2}.\end{aligned}$$

Como además $\|\vec{\xi}_1\|_l = |\lambda_1|r_1$ y $\|\vec{\xi}_2\|_l = |\lambda_2|r_2$, se sigue la expresión requerida para $|\cos\theta|$ en términos de la métrica de Lorentz. □

Definición 2.5. El *ángulo* θ entre dos hiperplanos afines H_1 y H_2 de $\mathbb{R}^n$ es el formado por dos vectores normales a H_1 y H_2, respectivamente. Se determina mediante la expresión

$$|\cos\theta| = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|_e\|\vec{n}_2\|_e},$$

donde $H_1 \equiv a_1+\vec{n}_1\cdot\vec{u}=0$ y $H_2 \equiv a_2+\vec{n}_2\cdot\vec{u}=0$ son las ecuaciones de los hiperplanos dados.

Proposición 2.6. *Dados dos hiperplanos afines H_1 y H_2 de $\mathbb{R}^n$, si $[\vec{\eta}_1]$ y $[\vec{\eta}_2]$ son los dos puntos espaciales que se corresponden con H_1 y H_2, entonces*

$$|\cos\theta| = \frac{|(\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2)|}{\|\vec{\eta}_1\|_l\|\vec{\eta}_2\|_l}.$$

Demostración. Si $H_1 \equiv a_1 + \vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 0$ y $H_2 \equiv a_2 + \vec{n}_2 \cdot \vec{u} = 0$ son las ecuaciones de los hiperplanos dados, entonces $\vec{\eta}_1 = \mu_1(-a_1, a_1, \vec{n}_1)$ y $\vec{\eta}_2 = \mu_2(-a_2, a_2, \vec{n}_2)$. Es inmediato comprobar que

$$\frac{|(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)|}{\|\vec{\eta}_1\|_l \|\vec{\eta}_2\|_l} = \frac{|\mu_1\mu_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\mu_1\mu_2| \|\vec{n}_1\|_e \|\vec{n}_2\|_e} = |\cos\theta|.$$

□

Definición 2.7. Sean una esfera S y un hiperplano afín H de $\mathbb{R}^n$ con intersección no vacía, para determinar el *ángulo* entre S y H, se considera un punto $\vec{p}_o$ de $S \cap H$ y el hiperplano H_o tangente a S en el punto $\vec{p}_o$, el ángulo entre S y H es el ángulo entre los hiperplanos H_o y H.

Proposición 2.8. *Dados la esfera S y el hiperplano afín H de $\mathbb{R}^n$ con intersección no vacía, si $[\vec{\xi}]$ y $[\vec{\eta}]$ son los dos puntos espaciales que se corresponden con S y H, entonces*

$$|\cos\theta| = \frac{|(\vec{\xi}, \vec{\eta})|}{\|\vec{\xi}\|_l \|\vec{\eta}\|_l}.$$

Demostración. Si S es de centro $\vec{p}$ y radio $r > 0$ y $H \equiv a + \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ es la ecuación del hiperplano dado, entonces $\vec{\xi} = \lambda \left(\frac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \frac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p} \right)$ y $\vec{\eta} = \mu(-a, a, \vec{n})$. Es inmediato comprobar que

$$\frac{|(\vec{\xi}, \vec{\eta})|}{\|\vec{\xi}\|_l \|\vec{\eta}\|_l} = \frac{|\lambda\mu(a + \vec{p} \cdot \vec{n})|}{|\lambda\mu| r \|\vec{n}\|_e}.$$

Por otro lado, sabemos que si $\vec{p}_o$ es un punto de $S \cap H$, entonces

$$|\cos\theta| = \frac{|(\vec{p}_o - \vec{p}) \cdot \vec{n}|}{r\|\vec{n}\|_e} = \frac{|\vec{p}_o \cdot \vec{n} - \vec{p} \cdot \vec{n}|}{r\|\vec{n}\|_e} = \frac{|a + \vec{p} \cdot \vec{n}|}{r\|\vec{n}\|_e}.$$

□

Consideramos ahora las transformaciones que conservan las propiedades y nociones que son propios de la geometría de Möbius.

Definición 2.9. Una *transformación de Möbius* es toda proyectividad biyectiva de $\mathcal{P}^{n+1}$ en si mismo que preserva la condición de punto luminoso. Esto es, una proyectividad $\widetilde{f}$, inducida por el isomorfismo lineal f, será transformación de Möbius, si para todo $[\vec{\eta}]$ tal que $(\vec{\eta}, \vec{\eta}) = 0$, se tiene que $\widetilde{f}([\vec{\eta}]) = [f(\vec{\eta})]$ es tal que $(f(\vec{\eta}), f(\vec{\eta})) = 0$.

.

Teniendo en cuenta el teorema 1.22, se deduce que toda transformación de Möbius $\widetilde{f}$ conserva los ángulos. En efecto, si se tiene dos puntos espaciales

$[\vec{\xi}_1]$ y $[\vec{\xi}_2]$, el ángulo entre ellos viene dado por la expresión (2.2). Por otro lado, calculamos el ángulo entre los puntos espaciales $\widetilde{f}([\vec{\xi}_1]) = [f(\vec{\xi}_1)]$ y $\widetilde{f}([\vec{\xi}_2]) = [f(\vec{\xi}_2)]$ está dado por

$$\frac{(f(\xi_1), f(\xi_2))}{\|f(\vec{\xi}_1)\|_l \|f(\vec{\xi}_2)\|_l} = \frac{\lambda(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)}{\sqrt{\lambda}\|\vec{\xi}_1\|_l \sqrt{\lambda}\|\vec{\xi}_2\|_l} = \frac{(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2)}{\|\vec{\xi}_1\|_l \|\vec{\xi}_2\|_l}.$$

Debido a esto, se justifica el uso de la palabra conforme para también denominar la geometría de Möbius.

Proposición 2.10. *El conjunto de las transformaciones de Möbius es un grupo, denominado grupo de Möbius. Dicho grupo es isomorfo al grupo cociente $O(n+1,1)/\{I,-I\}$.*

Demostración. La composición de dos transformaciones de Möbius resulta que también es una transformación de Möbius. La composición de aplicaciones siempre es asociativa. La identidad es una transformación de Möbius. Finalmente, para toda transformación de Möbius $\widetilde{f}$ se tiene que su inversa es una proyectividad $\widetilde{f}^{-1}$ inducida por la aplicación lineal f^{-1} inversa de la aplicación lineal f que induce $\widetilde{f}$. Es inmediato comprobar que $\widetilde{f}^{-1}$ también preserva los puntos luminosos. Por tanto, el conjunto H de las transformaciones de Möbius es un grupo con la composición.

Sea la aplicación $\pi : O(n+1,1) \to H$, dada por $\pi(f) = \widetilde{f}$. Es inmediato ver que si f es una aplicación lineal ortogonal, entonces $\widetilde{f}$ es de Möbius. Se tiene que π es un homomorfismo de grupos con núcleo $\{I,-I\}$.

Sea la transformación de Möbius $\widetilde{f}$ inducida por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$. Como f transforma vectores luminosos con respecto a la métrica de Lorentz en vectores luminosos, por el teorema 1.22, se tiene que $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \lambda^2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$, $\lambda \neq 0$. Por tanto, $\frac{1}{\lambda}f \in O(n+1,1)$ y $-\frac{1}{\lambda}f \in O(n+1,1)$. De ahí que, $\pi(\frac{1}{\lambda}f) = \widetilde{f}$ con lo que se concluye que π es sobreyectiva y se tiene el isomorfismo $O(n+1,2)/\{I,-I\} \cong H$. □

2.3. Geometría de las esferas orientadas de Lie

Dirigimos ahora nuestra atención a la construcción de la geometría de Lie de las esferas e hiperplanos orientados en $\mathbb{R}^n$. Sea W^{n+1} el conjunto de vectores $\vec{\zeta}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ tales que $(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}) = 1$. Es un hiperboloide de una hoja en el espacio afín $\mathbb{R}^{n+2}$. Si X es un punto espacial de $\mathcal{P}^{n+1}$, entonces hay dos vectores $+\vec{\zeta}, -\vec{\zeta}$ en W^{n+1} tales que $X = [\vec{\zeta}]$. Dichos dos vectores se van a utilizar para fijar orientaciones sobre la esfera o el hiperplano correspondiente al punto X. Para hacer esto, se necesita introducir una coordenada más. Primero, metemos $\mathbb{R}^{n+2}$ en $\mathcal{P}^{n+2}$ mediante la inclusión $\vec{z} \to [(\vec{z}, 1)]$. Si $\vec{\zeta} \in W^{n+1}$ entonces

$$-\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_{n+2}^2 = 1.$$

Así el punto $[(\vec{\zeta}, 1)]$ de $\mathcal{P}^{n+2}$ está sobre la variedad cuadrática Q^{n+1} en $\mathcal{P}^{n+2}$ dada por la ecuación

$$-x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+2}^2 - x_{n+3}^2 = 0, \tag{2.4}$$

donde $(x_1, x_2 \ldots, x_{n+2}, x_{n+3})$ son las coordenadas homogéneas, según la inclusión anterior, de un punto cualquiera X de $\mathcal{P}^{n+2}$. La variedad cuadrática Q^{n+1} se llama *cuádrica de Lie* y el producto escalar determinado por la forma cuadrática expresada en (2.4) se denomina *métrica de Lie* o *producto escalar de Lie*, que será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Cuando consideremos una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{n+3}\}$, los vectores temporales serán $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_{n+3}$ y el resto serán los espaciales.

A continuación mostraremos cómo los puntos de la cuádrica de Lie Q^{n+1} están en correspondencia biyectiva con el conjunto de esferas orientadas, hiperplanos orientados y esferas puntos de $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, donde ∞ es el punto impropio que se corresponde con el polo sur en la proyección estereográfica. Supongamos que $[(\vec{x}, x_{n+3})]$ es un punto de Q^{n+1} con coordenada homogénea $x_{n+3} \neq 0$. Haciendo la oportuna división por x_{n+3}, se obtiene que $[(\vec{x}, x_{n+3})] = [(\vec{\zeta}, 1)]$ y $(\vec{\zeta}, \vec{\zeta}) = 1$. En esta situación, se consideran dos alternativas: $x_1 + x_2 \neq 0$ ó $x_1 + x_2 = 0$.

Si $x_1 + x_2 \neq 0$ (o lo que es lo mismo, $\zeta_1 + \zeta_2 \neq 0$), entonces en geometría de Möbius $[\vec{\zeta}]$ representa una esfera en $\mathbb{R}^n$. Para determinar el radio y el centro, consideramos $\vec{\xi} = \frac{1}{\zeta_1+\zeta_2}\vec{\zeta} = \frac{1}{x_1+x_2}\vec{x}$. Ahora la suma de las dos primeras coordenadas de $\vec{\xi}$ es 1, $\xi_1 + \xi_2 = 1$. Pues bien, haciendo ahora el producto de Lorenz $(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = r^2$, se obtiene el radio r. El centro es $\vec{p} = (\xi_3, \ldots, \xi_{n+2})$. En resumen, se puede comprobar que

$$\vec{\xi} = \left(\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p} \right),$$

como en (2.1). Como hemos partido de $\vec{\xi} = \frac{1}{\zeta_1+\zeta_2}\vec{\zeta}$, entonces, $r^2 = \frac{1}{(\zeta_1+\zeta_2)^2} = \frac{x_{n+3}^2}{(x_1+x_2)^2}$. Por lo que se tienen dos posibilidades.

(a) $r = \frac{1}{\zeta_1+\zeta_2} = \frac{x_{n+3}}{x_1+x_2}$. En este caso $\vec{\zeta} = \frac{1}{r}\vec{\xi}$ y se tiene que el punto de la cuádrica de Lie tomado al principio es $[(\vec{x}, x_{n+3})] = [(\frac{1}{r}\vec{\xi}, 1)] = [(\vec{\xi}, r)]$.

(b) $r = -\frac{1}{\zeta_1+\zeta_2} = -\frac{x_{n+3}}{x_1+x_2}$. En este caso $\vec{\zeta} = -\frac{1}{r}\vec{\xi}$ y se tiene que el punto de la cuádrica de Lie tomado al principio es $[(\vec{x}, x_{n+3})] = [(-\frac{1}{r}\vec{\xi}, 1)] = [(\vec{\xi}, -r)]$.

Se interpreta la última coordenada como un radio con signo positivo o negativo de la esfera con centro p y radio $r > 0$. Con el fin de interpretar esto geométricamente, se adopta el convenio de que un radio con signo positivo corresponde a la orientación de la esfera representada por un campo de vectores normales y unitarios hacia dentro y un radio con signo negativo corresponde a la orientación de la esfera representada por un campo de vectores normales y unitarios hacia fuera. Por tanto, las dos orientaciones de la esfera en $\mathbb{R}^n$ con centro $\vec{p}$ y radio $r > 0$ se representa mediante dos puntos en la cuadrica de Lie Q^{n+1}.

$$\left[\left(\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p}, r\right)\right] \quad \text{ó} \quad \left[\left(\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p}, -r\right)\right]$$

Si $x_1 + x_2 = 0$, entonces $[(\vec{x}, x_{n+3})] = [(x_1, x_2, \vec{x}_o, x_{n+3})]$ representa un hiperplano en $\mathbb{R}^n$. En efecto, denotando $a = x_2 = -x_1$ y $\vec{n} = \vec{x}_o$, se tiene que el hiperplano correspondiente es de ecuación $a + \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$. Nótese que del hecho de que el punto $[(x_1, x_2, \vec{x}_o, x_{n+3})]$ pertenece a la cuádrica de Lie Q^{n+1}, se obtiene la condición $\vec{n} \cdot \vec{n} = \vec{x}_o \cdot \vec{x}_o = x_{n+3}^2$. Por lo que $x_{n+3} = \|\vec{n}\|_e$ ó $x_{n+3} = -\|\vec{n}\|_e$. Por tanto, se tiene que nuestro punto de partida de la cuádrica es $[(x_1, x_2, \vec{x}_o, x_{n+3})] = [(-a, a, \vec{n}, \|\vec{n}\|_e)]$ ó $[(x_1, x_2, \vec{x}_o, x_{n+3})] = [(-a, a, \vec{n}, -\|\vec{n}\|_e)]$, que representa el mismo hiperplano mencionado anteriormente pero con distinta orientación, determinada por $\frac{1}{\|\vec{n}\|_e}\vec{n}$ ó $-\frac{1}{\|\vec{n}\|_e}\vec{n}$.

Supongamos ahora que partimos de un punto $[(\vec{x}, 0)] = [(x_1, x_2, \vec{x}_o, 0)]$ de Q^{n+1} tal que $x_{n+3} = 0$. Como anteriormente consideramos las posibilidades $x_1 + x_2 \neq 0$ y $x_1 + x_2 = 0$.

Si fuese $x_1 + x_2 \neq 0$, entonces $[(\zeta_1, \zeta_2, \vec{\zeta}_o, 0)] = [(x_1, x_2, \vec{x}_o, 0)]$, donde $(\zeta_1, \zeta_2, \vec{\zeta}_o, 0) = \frac{1}{x_1+x_2}(x_1, x_2, \vec{x}_o, 0)$. Se tiene que el punto de partida se corresponde con el punto $\vec{u} = \vec{\zeta}_o$ de $\mathbb{R}^n$. En efecto, se puede comprobar que

$$\left(\zeta_1, \zeta_2, \vec{\zeta}_o, 0\right) = \left(\tfrac{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \vec{u}, 0\right).$$

Finalmente, si $x_1 + x_2 = 0$, entonces tenemos el punto $[(x_1, x_2, \vec{x}_0, 0)] = [(-a, a, \vec{n}, 0)]$. Del hecho de que el punto está en la cuádrica de Lie, se obtiene la condición $\vec{n} \cdot \vec{n} = 0$. De ahí que $\vec{n} = \vec{0}$. Por consiguiente, el punto es necesariamente $[(-a, a, \vec{0}, 0)] = [(-1, 1, \vec{0}, 0)]$ que se corresponde con el polo sur de Σ.

Observación 2.11. Antes de continuar queremos señalar que la intersección de Q^{n+1} con el hiperplano proyectivo $x_{n+3} = 0$ es el espacio de Möbius Σ. Mientras que la intersección de Q^{n+1} con el complementario de dicho hiperplano es el conjunto W^{n+1}. Esto es, $Q^{n+1} = \Sigma \cup W^{n+1}$.

En la geometría de las esferas de Lie, los puntos se consideran como esferas de radio cero, o esferas puntos. A partir de ahora, usaremos el término *esfera de Lie* para denotar una esfera orientada, un hiperplano orientado, o una esfera punto en $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$. Las coordenadas de la columna derecha en la tabla 2.1 se denominan *coordenadas de Lie* de la correspondiente esfera de Lie: punto, esfera o hiperplano.

Euclideo	**Lie**
puntos: $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$	$\left(\frac{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \frac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \vec{u}, 0\right)$
∞	$[(-1, 1, \vec{0}, 0)]$
esfera de centro $\vec{p}$ y radio r	$\left[\left(\frac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \frac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p}, r\right)\right]$
con signo según orientación	
hiperplanos: $a + \vec{n}\cdot\vec{u} = 0$	$[(-a, a, \vec{n}, \|\vec{n}\|)]$

Tabla 2.1. Correspondencia entre esferas de Lie y puntos de la cuadrica de Lie

2.4. Esferas de Lie en la geometría esférica

En cierto modo es más simple usar la esfera S^n en lugar de $\mathbb{R}^n$ como el espacio de partida para estudiar la geometría de Möbius o la de las esferas de Lie. Esto evita el uso de la proyección estereográfica y la necesidad de referirnos a puntos impropios o distinguir entre esferas y planos. Además la correspondencia en la tabla 2.1 puede ser reducida a una sola fórmula

$$S \longleftrightarrow [(\cos\rho, \vec{p}, \sin\rho)].$$

En la sección 2.1, considerábamos S^n como la esfera unidad en $\mathbb{R}^{n+1}$ y luego incluíamos $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathcal{P}^{n+1}$, usando la aplicación ϕ. Luego $\phi(S^n) = \Sigma$ es la esfera de Möbius, dada por la ecuación $(\vec{z}, \vec{z}) = 0$ en coordenadas homogéneas.

A partir de ahora trabajaremos en el contexto de la geometría esférica de S^n. Primero consideraremos una esfera geodésica S en S^n de centro $\vec{p}_1 \in S^n$ y radio geodésico ρ con $0 < \rho < \pi$. Esto es,

$$S = \{\vec{x} \in S^n \mid d_{S^n}(\vec{p}_1, \vec{x}) = \rho\},$$

donde d_{S^n} indica la distancia geodésica en el espacio S^n. Recordamos que una geodésica con punto inicial $\vec{p}_1$ y con dirección inicial el vector unitario $\vec{e}$ tangente a S^n en $\vec{p}_1$ viene dada por

$$\gamma(t) = \cos t\, \vec{p}_1 + \operatorname{sen} t\, \vec{e}.$$

Nótese que $\gamma(t)$ está parametrizada por la longitud de arco. Por tanto, si $\vec{y} \in S$, se tendrá $\vec{y} = \gamma(\rho) = \cos\rho\, \vec{p}_1 + \operatorname{sen}\rho\, \vec{e}$. Por lo que

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{y} = \cos\rho, \qquad 0 < \rho < \pi.$$

Luego el punto $\vec{y}$ pertenece al hiperplano afín $H_a \equiv -\cos\rho + \vec{p}_1 \cdot \vec{x} = 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Es decir, la esfera geodésica S es tal que $S \subseteq S^n \cap H_a$. Recíprocamente, si

$\vec{y} \in S^n \cap H_a$, entonces $\vec{y} = \gamma(t) = \cos t\, \vec{p}_1 + \operatorname{sen} t\, \vec{e}$ y $\vec{p}_1 \cdot \vec{y} = cos\rho$, con $0 < t < \pi$ y $0 < \rho < \pi$. De ahí que $\cos t = \cos\rho$, siendo $0 < t < \pi$ y $0 < \rho < \pi$. Por lo que $t = \rho$ e $\vec{y} \in S$.

Se considera ahora la inclusión ϕ de $\mathbb{R}^{n+1}$ en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^{n+1}$. Al punto $\vec{y}$ le corresponde el punto $[(1, \vec{y})]$ y al hiperplano afín $H_a \equiv -\cos\rho + \vec{p}_1 \cdot \vec{x} = 0$ le corresponde el hiperplano proyectivo $H \equiv -\cos\rho\, z_1 + \vec{p}_1 \cdot \vec{z}_o = 0$. Como H es el hiperplano polar del punto $[\vec{\xi}] = [(\cos\rho, \vec{p}_1)]$, $\mathcal{P}(\vec{\xi})^\perp = H$, se tiene que la esfera no orientada S se corresponde con el punto espacial $[\vec{\xi}]$, donde $\vec{\xi} = (\cos\rho, \vec{p}_1)$. Dicho punto es espacial puesto que $(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = ((\cos\rho, \vec{p}_1), (\cos\rho, \vec{p}_1)) = -\cos\rho^2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1 = \operatorname{sen}^2\rho > 0$.

Ahora hacemos corresponder la esfera orientada S con un punto $[(\vec{x}, x_{n+3})]$ de la cuádrica de Lie Q^{n+1}. Necesariamente $x_1^2 + x_{n+3}^2 \neq 0$ y se considera el vector $(\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}\vec{x}, \frac{x_{n+3}}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}})$ representante del punto $[(\vec{x}, x_{n+3})]$. Así, se obtiene el vector

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}, \ldots, \frac{x_{n+2}}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}, \frac{x_{n+3}}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}\right)$$

Multiplicaremos por -1 si es preciso para que x_1 se mayor o igual que cero y $\cos\rho = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}} \geq 0$. Tomando $\frac{x_{n+3}^2}{(x_1^2+x_{n+3}^2)} = \operatorname{sen}^2\rho$ y $\vec{\xi} = (\cos\rho, \vec{p}_1) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}\vec{x}$, se tienen dos posibilidades:

(i) Si $\operatorname{sen}\rho = \frac{x_{n+3}}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}$, entonces el punto correspondiente a la esfera orientada S es $[(\vec{x}, x_{n+3})] = [(\cos\rho, \vec{p}_1, \operatorname{sen}\rho)]$

(ii) Si $\operatorname{sen}\rho = -\frac{x_{n+3}}{\sqrt{x_1^2+x_{n+3}^2}}$, entonces el punto correspondiente a la esfera orientada S es $[(\vec{x}, x_{n+3})] = [(\cos\rho, \vec{p}_1, -\operatorname{sen}\rho)]$

Si se considera que ρ puede variar entre π y $-\pi$, $-\pi < \rho < \pi$, las dos posibilidades anteriores se sintetizan en una sola:

$$S \longleftrightarrow [(\cos\rho, \vec{p}_1, \operatorname{sen}\rho)] \tag{2.5}$$

La fórmula sigue teniendo sentido si $\rho = 0$, en cuyo caso se obtiene el punto esfera $[(1, \vec{p}, 0)]$. Esta única fórmula juega el papel de todas las fórmulas dadas en la tabla 2.1 dada en la sección anterior para el caso euclídeo.

Como en el caso euclídeo, la orientación de la esfera S en S^n está determinado por la elección de un vector normal a S en S^n. Geométricamente, tomaremos $\operatorname{sen}\rho$ positivo en (2.5) que corresponden al campo de vectores normales y unitarios que son vectores tangentes a la geodésica desde $\vec{p}_1$ a $-\vec{p}_1$. Cada esfera orientada puede ser considerada de dos maneras, con centro $\vec{p}_1$ y radio con signo ρ $-\pi < \rho < \pi$, ó con centro $-\vec{p}_1$ y el radio con signo apropiado $\rho \pm \pi$.

2.5. Esferas de Lie en el espacio hiperbólico

Para estudiar las esferas en el espacio hiperbólico H^n, consideramos el subespacio vectorial $\mathbb{R}^{n+1}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ generado por $\{\vec{e}_1, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n+2}\}$, donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_{n+2}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$ con respecto a la métrica de Lorentz, siendo $\vec{e}_1$ vector temporal. Entonces H^n es la hipersuperficie

$$H^n = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\vec{y}, \vec{y}) = -1, \ y_1 > 1\}.$$

La restricción de la métrica de Lorentz a H^n da lugar a una métrica euclídea. En efecto, para $\vec{y} \in H^n$, el espacio tangente $T_{\vec{y}}H^n$ a H^n en $\vec{y}$ está generado por $\{\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n+1}\}$ donde $\{\vec{y}, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n+1}\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ con respecto a la métrica de Lorentz. Puesto que $\vec{y}$ es temporal, entonces los restantes $\vec{u}_i$ son espaciales. Como la base $\{\vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_{n+1}\}$ de $T_{\vec{y}}H^n$ está constituida por vectores espaciales, ello implica que la métrica de $T_{\vec{y}}H^n$ es de signatura $(n, 0)$.

Para analizar la distancia entre dos puntos $\vec{p}$ y $\vec{q}$ del espacio hiperbólico H^n, consideramos las geodésicas en dicho espacio. Una geodésica en H^n con punto inicial $\vec{p}$ y dirección inicial el vector tangente unitario $\vec{e}$ viene dada por

$$\gamma(t) = \cosh t\, \vec{p} + \operatorname{senh} t\, \vec{e}.$$

Como $\gamma'(t) = \operatorname{senh} t\, \vec{p} + \cosh t\, \vec{e}$ es de longitud uno, entonces $\gamma(t)$ está parametrizada por la longitud de arco. Por tanto, t es la distancia entre los puntos $\vec{p}$ y $\vec{q} = \gamma(t)$.

Sea ahora, la esfera S en H^n de centro $\vec{p}$ y radio $\rho > 0$. Esto es,

$$S = \{\vec{y} \in H^n \mid d_{H^n}(\vec{p}, \vec{y}) = \rho\},$$

donde d_{H^n} denota la distancia hiperbólica. Si $\vec{y} \in S$, entonces $\vec{y}$ se expresa como $\vec{y} = \gamma(\rho) = \cosh \rho\, \vec{p} + \operatorname{senh} \rho\, \vec{e}$. Haciendo el producto de Lorentz siguiente

$$(\vec{p}, \vec{y}) = (\vec{p}, \cosh \rho\, \vec{p} + \operatorname{senh} \rho\, \vec{e}) = -\cosh \rho.$$

Luego $\vec{y}$ pertenece al hiperplano afín H_a de $\mathbb{R}^{n+1}$ de ecuación

$$H_a \equiv \cosh \rho + (\vec{p}, \vec{y}) = 0.$$

Por tanto, $S \subseteq H_a \cap H^n$. Recíprocamente, si $\vec{y} \in H_a \cap H^n$ y la distancia hiperbólica entre $\vec{p}$ e $\vec{y}$ es t, entonces $-\cosh \rho = (\vec{p}, \vec{y}) = (\vec{p}, \gamma(t)) = -\cosh t$. Por lo que $\rho = t$ e $\vec{y} \in S$.

De forma análoga a como se hizo cuando estudiamos S^n, incluimos $\mathbb{R}^{n+1}$ en $\mathcal{P}^{n+1}$, mediante la aplicación $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}^{n+1}$, dada por

$$\psi(\vec{y}) = \psi(y_1, y_3, \ldots, y_{n+2}) = [(y_1, 1, y_3, \ldots, y_{n+2})] = [\vec{y} + \vec{e}_2].$$

Para la esfera no orientada S se transforma en $\psi(S) = \psi(H^n) \cap H$, donde H es el hiperplano proyectivo que corresponde a H_a. Nótese que $\psi(H^n) = \Sigma$ y que $H = \mathcal{P}(\xi^{\perp})$, donde $\vec{\xi} = \vec{p} + \cosh\,\rho\,\vec{e}_2$. Luego el punto que corresponde a S es $[\vec{\xi}]$ y $(\vec{\xi},\vec{\xi}) = (\vec{p},\vec{p}) + \cosh^2\rho = -1 + \cosh^2\rho = \mathrm{senh}^2\rho$. Por lo que el punto $[\xi]$ es espacial.

Recíprocamente, si tomamos un punto espacial $[\vec{z}]$, donde $\vec{z} = \vec{z}_1 + z_2\vec{e}_2$ y tal que $\vec{z}_1$ sea temporal. Multiplicamos ahora $\vec{z}$ por -1 si fuese necesario para conseguir un representante del punto con $z_2 > 0$. Seguidamente consideramos

$$\vec{\xi} = \frac{1}{\sqrt{-(\vec{z}_1,\vec{z}_1)}}\vec{z} = \vec{p} + \cosh\rho\,\vec{e}_2.$$

Como $(\vec{p},\vec{p}) = -1$, se tiene que $\vec{p} \in H^n$ y será el centro de la esfera S correspondiente al punto $[\vec{z}]$. El radio ρ de S es $\rho = \operatorname{arccosh} \frac{z_2}{\sqrt{-(\vec{z}_1,\vec{z}_1)}}$ y se obtiene que $(\vec{\xi},\vec{\xi}) = \mathrm{senh}^2\rho$.

Ahora hacemos corresponder la esfera orientada o esfera de Lie S de H^n con un punto $[\vec{x}]$ de la cuádrica de Lie Q^{n+1}, donde $\vec{x} = \vec{x}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_{n+3}\vec{e}_{n+3}$ con $\vec{x}_1$ temporal. Necesariamente $x_2 \neq 0$, multiplicando $\vec{x}$ por -1 si fuese necesario, podemos suponer que $x_2 > 0$. Considerando el vector representante del punto $[\vec{x}]$ dado por

$$\vec{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{-(\vec{x}_1,\vec{x}_1)}}\vec{x} = \vec{p} + \cosh\,\rho\,\vec{e}_2 + \frac{x_{n+3}}{\sqrt{-(\vec{x}_1,\vec{x}_1)}}\vec{e}_{n+3}.$$

Se tienen dos posibilidades:

(i) Si $\mathrm{senh}\rho = \frac{x_{n+3}}{\sqrt{-(\vec{x}_1,\vec{x}_1)}}$, entonces el punto correspondiente a la esfera de Lie S es $[\vec{p} + \cosh\rho\,\vec{e}_2 + \mathrm{senh}\,\rho\,\vec{e}_{n+3}]$.

(ii) Si $\mathrm{senh}\rho = -\frac{x_{n+3}}{\sqrt{-(\vec{x}_1,\vec{x}_1)}}$, entonces el punto correspondiente a la esfera de Lie S es $[\vec{p} + \cosh\rho\,\vec{e}_2 - \mathrm{senh}\,\rho\,\vec{e}_{n+3}]$.

Siguiendo exactamente el mismo proceso como en el caso esférico, encontramos que la esfera orientada S en H^n con centro $\vec{p}$ y radio con signo ρ corresponde a un punto de en la cuádrica de Lie Q^{n+1} como sigue:

$$S \longleftrightarrow [\vec{p} + \cosh\rho\,\vec{e}_2 + \mathrm{senh}\,\rho\,\vec{e}_{n+3}]. \tag{2.6}$$

La fórmula sigue teniendo sentido si $\rho = 0$, en cuyo caso se obtiene el punto esfera $[\vec{p} + \vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_{n+3}]$. Esta única fórmula juega el papel de todas las fórmulas dadas en la tabla 2.1 dada anteriormente para el caso euclídeo.

Hay también una proyección estereográfica $\tau : D^n \to H^n$, con polo sur $-e_1$, desde el disco unidad $D^n = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^n \,|\, \vec{u}\cdot\vec{u} < 1\}$ de $\mathbb{R}^n$ en el espacio hiperbólico H^n dada por

$$\tau(\vec{u}) = \left(\tfrac{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}, \tfrac{2\vec{u}}{1-\vec{u}\cdot\vec{u}} \right).$$

Nótese que $-e_1$ está en el hiperboloide, pero no en H^n. La métrica inducida sobre D^n para hacer que τ sea una isometría es la métrica de Poincaré, dada por

$$(\vec{x}, \vec{y})_{D^n} = \frac{4}{(1 - \vec{u}\cdot\vec{u})^2} \vec{x}\cdot\vec{y},$$

para $\vec{x}, \vec{y} \in T_{\vec{u}} D^n$.

2.6. Esferas de contacto orientadas y haz parabólico de esferas

En la geometría de Möbius, el concepto geométrico principal es el ángulo. En la geometría de las esferas de Lie, el concepto central son las esferas de contacto orientadas.

Definición 2.12. Dos esferas orientadas S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^n$ son *de contacto orientadas*, si son tangentes y tienen la misma orientación en el punto de contacto.

Una esfera orientada S con centro $\vec{p}$ y radio con signo r y un hiperplano orientado H con vector normal n y ecuación $a + \vec{n}\cdot\vec{u} = 0$, se dice que son *de contacto orientados*, si H es tangente a S y sus orientaciones coinciden en el punto de contacto.

Dos hiperplanos orientados H_1 y H_2 cuyas ecuaciones respectivas son $a_1 + \vec{n}_1\cdot\vec{u} = 0$ y $a_2 + \vec{n}_2\cdot\vec{u} = 0$ se dicen que son *de contacto orientados*, si $\frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} = \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|}$. Se considera que su punto de contacto es el punto impropio.

Un punto $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ es de contacto orientado con la esfera orientada S o con el hiperplano orientado H, si $\vec{u} \in S$ o $\vec{u} \in H$.

Dos puntos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ se dice que son *de contacto orientados* si son coincidentes.

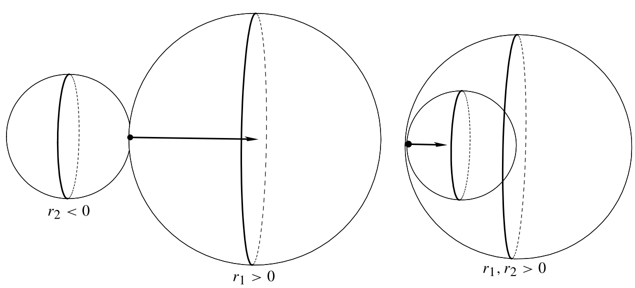


Figura 2.4. Dos posibilidades para un par de esferas de contacto orientadas

Si $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ son los respectivos centros de S_1 y S_2 y r_1 y r_2 son sus radios con signo respectivo entonces, la condición analítica para ser orientadas de contacto es

$$\|\vec{p}_1 - \vec{p}_2\| = |r_1 - r_2|. \tag{2.7}$$

Asimismo, la condición analítica para una esfera y un hiperplano que sean de contacto orientados es

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = -a + r\|\vec{n}\|. \tag{2.8}$$

Seguidamente se expresa la noción de contacto orientado en términos de la métrica de Lie.

Proposición 2.13. *Sean dos esferas de Lie representadas por los puntos $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$ pertenecientes a la cuádrica de Lie Q^{n+1}. Entonces $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$ son de contacto orientados si y solo si $\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = 0$.*

Demostración. Si $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$ son dos esferas de contacto orientadas S_1 y S_2, entonces los puntos $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$ admitirán como representantes respectivos a

$$\vec{k}_1 = \lambda_1 \left(\tfrac{1+\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1 - r_1^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}_1\cdot\vec{p}_1 + r_1^2}{2}, \vec{p}_1, r_1 \right),$$
$$\vec{k}_2 = \lambda_2 \left(\tfrac{1+\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2 - r_2^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}_2\cdot\vec{p}_2 + r_2^2}{2}, \vec{p}_2, r_2 \right).$$

Haciendo el producto de Lie de estos dos vectores resulta

$$\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = \lambda_1\lambda_2 \left(\tfrac{(r_1-r_2)^2}{2} - \tfrac{\|\vec{p}_1-\vec{p}_2\|^2}{2} \right) = 0.$$

Lo que equivale a la condición (2.7).

Sean ahora, $[\vec{k}_1]$ la esfera orientada S y $[\vec{k}_2]$ el hiperplano de ecuación $a + \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ orientados de contacto, entonces los puntos $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$ admitirán representantes respectivos a

$$\vec{k}_1 = \lambda_1 \left(\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p}, r \right), \qquad \vec{k}_2 = \lambda_2(-a, a, \vec{n}, \|\vec{n}\|).$$

Haciendo el producto de Lie de estos vectores resulta

$$\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = \lambda_1\lambda_2(a + \vec{n}\cdot\vec{p} - r\|\vec{n}\|) = 0.$$

Lo que equivale a la condición (2.8).

En el caso de que sean dos hiperplanos orientados H_1 y H_2, se tendrán los representantes

$$\vec{k}_1 = (-a_1, a_1, \vec{n}_1, \|\vec{n}_1\|), \qquad \vec{k}_2 = (-a_2, a_2, \vec{n}_2, \|\vec{n}_2\|).$$

Haciendo el producto de Lie de estos vectores resulta $\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 - \|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\| = 0$. Esto equivale a que $\frac{\vec{n}_1}{\|\vec{n}_1\|} = \frac{\vec{n}_2}{\|\vec{n}_2\|}$.

En el caso de una esfera orientada S con centro $\vec{p}$ y radio con signo r y un punto $\vec{u}$, los respectivos representantes serán

$$\vec{k}_1 = \lambda_1 \left(\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p}, r \right), \qquad \vec{k}_2 = \lambda_2 \left(\tfrac{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \vec{u}, 0 \right).$$

El producto de Lie de estos vectores resulta $\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2}(r^2 - \|\vec{p}-\vec{u}\|^2) = 0$. Esto equivale a que $\vec{u} \in S$.

En el caso de un hiperplano orientado H y un punto $\vec{u}$, los respectivos representantes serán

$$\vec{k}_1 = (-a, a, \vec{n}, \|\vec{n}\|) \qquad \vec{k}_2 = \lambda \left(\tfrac{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \vec{u}, 0 \right)$$

El producto de Lie de estos vectores resulta $\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = \lambda(a + \vec{n}\cdot\vec{u}) = 0$. Esto equivale a que $\vec{u} \in H$.

Finalmente, en el caso de tener dos puntos $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ de $\mathbb{R}^n$, los respectivos representantes serán

$$\vec{k}_1 = \lambda_1 \left(\tfrac{1+\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}{2}, \tfrac{1-\vec{u}_1\cdot\vec{u}_1}{2}, \vec{u}_1, 0 \right), \qquad \vec{k}_2 = \lambda_2 \left(\tfrac{1+\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}{2}, \tfrac{1-\vec{u}_2\cdot\vec{u}_2}{2}, \vec{u}_2, 0 \right).$$

El producto de Lie de estos vectores resulta $\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{2}\|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2 = 0$. Esto equivale a que $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$. □

Usando la proposición vista en los preliminares de este trabajo, podemos afirmar lo siguiente relativo a subespacios proyectivos contenidos en una cuádrica de Lie.

Proposición 2.14. *La cuádrica de Lie Q^{n+1} contiene rectas proyectivas, pero no subespacios proyectivos de dimensión mayor que uno.*

Demostración. Si el subespacio proyectivo $\mathcal{P}(W)$ está contenido en Q^{n+1}, entonces W es de isotropía respecto de la forma polar correspondiente. Como la signatura de Q^{n+1} es $(n+1, 2)$, entonces $\dim W \leq \min(n+1, 2) + 0 = 2$, por la proposición 1.17. Por tanto, la dimensión de $\mathcal{P}(W)$ es uno a lo sumo. También por la proposición 1.17, Q^{n+1} está formada por rectas. □

Seguidamente vamos a ver que el conjunto de esferas de Lie en $\mathbb{R}^n$ correspondiente a puntos sobre una recta contenida en Q^{n+1} forman lo que se llama un *haz parabólico* de esferas de Lie. Además también mostramos que cada haz parabólico contiene exactamente una esfera punto $\vec{p}$. Si este punto es un punto propio de $\mathbb{R}^n$, entonces el haz contiene exactamente un hiperplano H. Dicho haz consistirá en todas las esferas de contacto orientadas que son que contacto orientadas con H en el punto $\vec{p}$.

Para mostrar lo dicho en el párrafo anterior, haremos uso de lo siguiente.

Lema 2.15. *Sea $\ell = \mathcal{P}(W)$ una recta contenida en la cuádrica de Lie Q^{n+1}, entonces:*

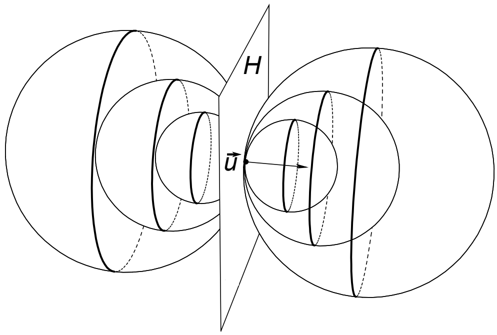


Figura 2.5. Haz parabólico de esferas

(i) Si $[\vec{x}] \in \ell^{\perp} = \mathcal{P}(W^{\perp})$ *y* $[\vec{x}]$ *es luminoso, entonces* $[\vec{x}] \in \ell$.
(ii) Si $[\vec{x}] \in \ell^{\perp} = \mathcal{P}(W^{\perp})$ *y* $[\vec{x}]$ *no está en* ℓ*, entonces* $[\vec{x}]$ *es espacial.*

Demostración. Si $[\vec{x}] \in \ell^{\perp}$, entonces $W \subseteq \vec{x}^{\perp}$. Como $[\vec{x}]$ es luminoso, entonces $\vec{x} \in \vec{x}^{\perp}$. En estas condiciones, denotando por ω la forma cuadrática que define Q^{n+1}, se tiene que la signatura de ω restringida a $\vec{x}^{\perp}$, $\omega_{|\vec{x}^{\perp}}$, es $(n+1-1, 2-1) = (n, 1)$, por la proposición 1.18. Por lo que un subespacio de isotropía de $\omega_{|\vec{x}^{\perp}}$ es a lo sumo de dimensión $\text{mín}\{n, 1\} + 1 = 2$, por la proposición 1.17. Si $[\vec{x}] \notin \ell$, entonces el subespacio $[\vec{x}] + W$ sería de isotropía respecto de $\omega_{|\vec{x}^{\perp}}$ y de dimensión 3, contradicción. Luego $[\vec{x}] \in \ell$.

Veamos (ii). Por el apartado (i), $[\vec{x}]$ no puede ser luminoso porque en tal caso estaría en ℓ. Además si $[\vec{x}]$ fuese temporal la signatura de $\omega_{|\vec{x}^{\perp}}$ sería $(n+1, 1)$, por la proposición 1.18. Por lo que $\omega_{|\vec{x}^{\perp}}$ admite subespacios de isotropía de dimensión a lo sumo 1, por la proposición 1.17. Pero de la hipótesis se deduce que W es de isotropía para $\omega_{|\vec{x}^{\perp}}$ y es de dimensión 2, contradicción. Por tanto, $[\vec{x}]$ es espacial. □

Teorema 2.16. *(i) La recta en* $\mathcal{P}^{n+2}$ *determinada por dos puntos* $[\vec{k}_1]$ *y* $[\vec{k}_2]$ *de la cuádrica de Lie* Q^{n+1}*, está contenida en dicha cuádrica si y solo si las esferas correspondientes a* $[\vec{k}_1]$ *y* $[\vec{k}_2]$ *son de contacto orientadas, es decir, si* $\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle = 0$.
(ii) Si la recta que une $[\vec{k}_1]$ *y* $[\vec{k}_2]$ *está contenida en* Q^{n+1}*, entonces el haz parabólico de esferas en* $\mathbb{R}^n$ *correspondiente a los puntos de dicha recta es precisamente el conjunto de todas las esferas de contacto orientadas con* $[\vec{k}_1]$ *y* $[\vec{k}_2]$.

Demostración. Supongamos que la recta que une los puntos $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$ está contenida en Q^{n+1}. Sea $[\vec{x}]$ un punto de la recta, entonces $\vec{x} = \alpha\vec{k}_1 + \beta\vec{k}_2$, para α y β reales, $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Además, como $[\vec{x}]$ pertenece a Q^{n+1}, se tiene que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$. Por tanto, se satisface la expresión

$$\langle \alpha\vec{k}_1 + \beta\vec{k}_2, \alpha\vec{k}_1 + \beta\vec{k}_2\rangle = 0.$$

Usando la bilinealidad, se llega a que $2\alpha\beta\langle\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = 0$. Tomando $\alpha = \beta = 1$, resulta $\langle\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = 0$.

Recíprocamente, si $\langle\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = 0$ y $[\vec{x}]$ está en la recta, entonces $\vec{x} = \alpha\vec{k}_1 + \beta\vec{k}_2$, para α y β reales con $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Como $\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle = \langle\alpha\vec{k}_1+\beta\vec{k}_2, \alpha\vec{k}_1+\beta\vec{k}_2\rangle = 2\alpha\beta\langle\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle = 0$, $[\vec{x}] \in Q^{n+1}$. Por tanto, la recta está contenida en Q^{n+1}.

Veamos ahora (ii). Si $[\vec{x}]$ es un punto de la recta, entonces $\vec{x} = \alpha\vec{k}_1 + \beta\vec{k}_2$. Por lo que se tiene que $\langle\vec{x}, \vec{k}_1\rangle = 0$ y $\langle\vec{x}, \vec{k}_2\rangle = 0$. Esto implica que la esfera de Lie en $\mathbb{R}^n$ correspondiente a $[\vec{x}]$, es de contacto orientada con las esferas de Lie correspondientes a los puntos $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$.

Recíprocamente, si se tiene una esfera de Lie en $\mathbb{R}^n$ que es de contacto orientada con las de $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$, por la proposición 2.13, se tiene que $\langle\vec{x}, \vec{k}_1\rangle = 0$ y $\langle\vec{x}, \vec{k}_2\rangle = 0$. Luego $[\vec{x}] \in \ell^\perp$, donde ℓ es la recta que une $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$, como además $\langle\vec{x}, \vec{x}\rangle = 0$, por el lema 2.15, se tiene $[\vec{x}] \in \ell$. □

En lo siguiente se estudia como son los haces parabólicos de esferas de Lie.

Lema 2.17. *Sea $[\vec{x}]$ un punto temporal de $\mathcal{P}^{n+2}$ y ℓ es una recta contenida en la cuádrica de Lie Q^{n+1}. Entonces ℓ interseca al hiperplano polar $\mathcal{P}(\vec{x}^\perp)$ de $[\vec{x}]$ en exactamente un punto.*

Demostración. Para la recta ℓ y el hiperplano $\mathcal{P}(\vec{x}^\perp)$ caben dos posibilidades:

(i) $\ell \cap \mathcal{P}(\vec{x}^\perp)$ es un único punto;
(ii) o $\ell \subseteq \mathcal{P}(\vec{x}^\perp)$. En este segundo caso, se tiene que $[\vec{x}] \in \ell^\perp$. Si $[\vec{x}] \in \ell \subseteq Q^{n+1}$, $[\vec{x}]$ sería luminoso. Si $[\vec{x}] \notin \ell$, entonces $[\vec{x}]$ sería espacial, por el lema 2.15. Contradicción, luego la segunda posibilidad no se da. □

Seguidamente se analizan los haces parabólicos.

Proposición 2.18. *Cada haz parabólico contiene exactamente una esfera punto. Además, si la esfera punto es un punto propio, entonces el haz contiene exactamente un hiperplano.*

Demostración. Sea la base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+3}\}$ de $\mathbb{R}^{n+3}$ con respecto a la métrica de Lie. El hiperplano polar $\mathcal{P}(\vec{e}_{n+3}^{\perp})$ de $[\vec{e}_{n+3}]$ tiene por ecuación $x_{n+3} = 0$. Por tanto, las esferas puntos constituyen el conjunto $Q^{n+1} \cap \mathcal{P}(\vec{e}_{n+3}^{\perp})$. Al haz parabólico de esferas le corresponde una recta ℓ contenida en la cuádrica de Lie y el punto $[\vec{e}_{n+3}]$ es temporal, por el lemma 2.17, se tiene que $\ell \cap \mathcal{P}(\vec{e}_{n+3}^{\perp})$ es exactamente el punto esfera buscado.

Para mostrar la parte final del enunciado de la proposición, se hace notar que los hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ corresponden a puntos de Q^{n+1} que están en la intersección de Q^{n+1} con el hiperplano polar $x_1 + x_2 = 0$ del punto $[\vec{e}_1 - \vec{e}_2]$.

La recta ℓ que corresponde al haz parabólico de esferas interseca el hiperplano $x_1 + x_2 = 0$ en un único punto o está totalmente contenida en dicho hiperplano. Si ℓ estuviese totalmente contenida en el hiperplano, entonces $\ell \subseteq \mathcal{P}((\vec{e}_1 - \vec{e}_2)^\perp)$. Es decir, $[\vec{e}_1 - \vec{e}_2] \in \ell^\perp$ y como $[\vec{e}_1 - \vec{e}_2]$ es luminoso, por el lema 2.15, $[\vec{e}_1 - \vec{e}_2] \in \ell$. Nótese que $[\vec{e}_1 - \vec{e}_2]$ es el punto impropio. Por tanto, si el único punto esfera de ℓ es propio, ℓ no puede estar contenida en el hiperplano $\mathcal{P}((\vec{e}_1 - \vec{e}_2)^\perp)$. Con lo que se concluye que la intersección $\ell \cap \mathcal{P}((\vec{e}_1 - \vec{e}_2)^\perp)$ es un único punto que se corresponde con un hiperplano de $\mathbb{R}^n$. □

Tras todo lo visto, uno puede identificar cada haz parabólico de esferas de Lie con un par $(\vec{p}, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|})$ formado por un punto $\vec{p}$ de $\mathbb{R}^n$ y un vector unitario de $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ también de $\mathbb{R}^n$. Dicho punto es la única esfera punto del haz y, si es propio, el vector unitario indica la orientación del único hiperplano del haz. En cambio, si tal punto fuese el impropio, ∞, ello significa que es el haz está formado por hiperplanos paralelos. Todos orientados con el mismo vector unitario $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. En tal caso, el haz se identifica con el par $(\infty, \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|})$. En resumen,

$$\{\text{Haces parabólicos de esferas de Lie}\} = (\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}) \times S^{n-1} \cong S^n \times S^{n-1}.$$

También es interesante, establecer una correspondencia de este tipo en términos de la métrica esférica de S^n. Para ello recordamos que si se tiene una esfera de Lie S en S^n con centro esférico $\vec{p}$ y radio esférico con signo ρ, dicha esfera de Lie se corresponde con el punto $[(\cos\rho, \vec{p}, \operatorname{sen}\rho)]$ de Q^{n+1}. Además, $\rho = \pm\frac{\pi}{2}$ si y sólo si S es una esfera orientada máxima. Pero, esto es equivalente a que S se corresponda con el punto $[(0, \vec{p}, \pm 1)$. Este último punto está en el hiperplano $\mathcal{P}(\vec{e}_1^{\perp}) \equiv x_1 = 0$ que es el hiperplano polar de $[\vec{e}_1]$ en $\mathcal{P}^{n+2}$. Recíprocamente, si se tiene un punto $[\vec{x}]$ de la intersección $\{x_1 = 0\} \cap Q^{n+1}$, entonces necesariamente $x_{n+3} \neq 0$. Dividiendo por x_{n+3}, se obtiene un representante de $[\vec{x}]$ dado por $(0, \vec{p}, 1)$, que se corresponde con una esfera de Lie de centro esférico $\vec{p}$ y radio esférico $\frac{\pi}{2}$. Una tal esfera orientada es máxima.

Sea un haz parabólico de esferas de Lie que se corresponde con recta ℓ contenida en Q^{n+1}. Como $[\vec{e}_1]$ es temporal, la intersección $\ell \cap \mathcal{P}(\vec{e}_1^{\perp})$ es un único punto, por el lema 2.15. Por tanto, el haz contiene una única esfera de Lie máxima $[\vec{k}_2]$. Además, ya sabemos que el haz contiene una única esfera punto $[\vec{k}_1]$, dada por la intersección $\ell \cap \mathcal{P}(\vec{e}_{n+3}^{\perp})$. Sean dichos puntos dados por

$$[\vec{k}_1] = [(1, \vec{p}, 0)], \qquad [\vec{k}_2] = [(0, \vec{\xi}, 1)].$$

Como están sobre la recta ℓ, son esferas de Lie de contacto orientadas y $0 = \langle (1, \vec{p}, 0), (0, \vec{\xi}, 1) \rangle = \vec{p} \cdot \vec{\xi}$. El vector unitario $\vec{\xi}$ es tangente en el punto $\vec{p}$ a la esfera S^n. Estos puntos, $[\vec{k}_1]$ y $[\vec{k}_2]$, determinan la recta ℓ. Si $[\vec{x}] \in \ell$, entonces

$$\vec{x} = \alpha(1, \vec{p}, 0) + \beta(0, \vec{\xi}, 1) = (\alpha, \alpha\vec{p} + \beta\vec{\xi}, \beta), \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0).$$

Dividiendo por $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ y poniendo $\cos t = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ y $\operatorname{sen} t = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$, se obtiene un representante del punto $[\vec{x}]$ dado por

$$[\vec{x}] = [(\cos t, \cos t\,\vec{p} + \operatorname{sen} t\,\vec{\xi}, \operatorname{sen} t)].$$

Por tanto, la esfera de Lie S del haz que corresponde al punto $[\vec{x}]$ es de radio esférico t y su centro $\vec{p}_t$ está situado sobre la geódesica de S^n con punto inicial $\vec{p}$ y dirección inicial $\vec{\xi}$ a una distancia esférica t del punto $\vec{p}$. Nótese que $\vec{p} \in S$ y que su orientación en $\vec{p}$ está determinada por $\vec{\xi}$.

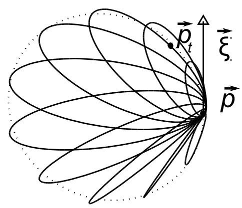


Figura 2.6. Haz parabólico de esferas en S^n

2.7. Transformaciones de esferas Lie

En esta sección se describen las trasformaciones propias de la geometría de las esferas de Lie.

Definición 2.19. Una *transformación de esferas de Lie* es una proyectividad biyectiva de $\mathcal{P}^{n+2}$ en si mismo que lleva la cuádrica de Lie Q^{n+1} en ella misma.

Obsérvese que como una proyectividad biyectiva lleva rectas en rectas, toda transformación de esferas de Lie hace que la imagen de un haz parabólico de esferas de Lie sea también un haz parabólico de esferas de Lie.

Proposición 2.20. *El conjunto de las transformaciones de esferas de Lie es un grupo isomorfo al grupo cociente $O(n+1,2)/\{I,-I\}$.*

Demostración. La composición de dos transformaciones de esferas de Lie resulta que también es una transformación de esferas de Lie. La composición de aplicaciones siempre es asociativa. La identidad es una transformación de esferas de Lie. Finalmente, para toda transformación de esferas de Lie $\widetilde{f}$ se tiene que su inversa es una proyectividad $\widetilde{f}^{-1}$ inducida por la aplicación lineal inversa f^{-1}

de la aplicación lineal f que induce $\widetilde{f}$. Es inmediato comprobar que $\widetilde{f}^{-1}$ también preserva Q^{n+1}. Por tanto, el conjunto G de las transformaciones de las esferas de Lie es un grupo con la composición.

Sea la aplicación $\pi : O(n+1,2) \to G$, dada por $\pi(f) = \widetilde{f}$. Es inmediato ver que si f es una aplicación lineal ortogonal, entonces $\widetilde{f}$ es una trasformación de esferas de Lie. Se tiene que π es un homomorfismo de grupos con núcleo $\{I, -I\}$.

Sea la transformación de esferas de Lie $\widetilde{f}$ inducida por la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^{n+3} \to \mathbb{R}^{n+3}$. Como f transforma vectores luminosos con respecto a la métrica de Lie en vectores luminosos, por el teorema 1.22, se tiene que $\langle f(\vec{x}), f(\vec{y})\rangle = \lambda^2 \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$, $\lambda \neq 0$. Por tanto, $\frac{1}{\lambda} f \in O(n+1,2)$ y $-\frac{1}{\lambda} f \in O(n+1,2)$. Por tanto, $\pi(\frac{1}{\lambda} f) = \widetilde{f}$, con lo que se concluye que π es sobreyectiva. De ahí el isomorfismo $O(n+1,2)/\{I, -I\} \cong G$. □

Una transformación de Möbius es una transformación sobre el espacio de las esferas no orientadas, es decir, el espacio de los puntos espaciales o luminosos de $\mathcal{P}^{n+1}$. Cada transformación de Möbius $\widetilde{f}$ está inducida por una aplicación ortogonal $f \in O(n+1,1)$ y se puede asociar a dos trasformaciones de esferas de Lie: la primera, la transformación denotada por $\widetilde{f_1}$ inducida por la aplicación lineal ortogonal $f_1 : \mathbb{R}^{n+3} \to \mathbb{R}^{n+3}$ tal que $f_1(\vec{e}_{n+3}) = \vec{e}_{n+3}$ y coincidente con la anterior f sobre $\mathbb{R}^{n+2}$. En términos de matrices, si A es la matriz asociada a f, entonces la matriz asociada a f_1 es

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La segunda transformación, denotada por $\widetilde{f_2}$ es inducida por la aplicación lineal ortogonal $f_2 : \mathbb{R}^{n+3} \to \mathbb{R}^{n+3}$ tal que $f_2(\vec{e}_{n+3}) = -\vec{e}_{n+3}$ y coincidente con la anterior f sobre $\mathbb{R}^{n+2}$. En términos de matrices, la matriz asociada a f_2 es

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como las matrices asociadas a f_1 y a f_2 no son proporcionales, se tiene que $\widetilde{f_1} \neq \widetilde{f_2}$. Sin embargo, $\widetilde{f_1} = \widetilde{\Gamma} \circ \widetilde{f_2}$, donde $\widetilde{\Gamma}$ es la trasformación de Lie inducida por la aplicación ortogonal γ cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las transformaciones de esferas de Lie $\widetilde{f_1}$ y $\widetilde{f_2}$ son distintas pero están asociadas a la misma trasformación de Möbius $\widetilde{f}$. Únicamente difieren en un factor $\widetilde{\gamma}$, denominado *trasformación de cambio de orientación*.

Enunciamos ahora el teorema fundamental de la geometría de las esferas de Lie. Sophus Lie probó este teorema para $n = 2$ en su tesis doctoral [6]. Una demostración para n en general fue dada por Pinkall en [9]. Aquí no incluimos dicha demostración porque ello está fuera del alcance de la magnitud de este trabajo.

Teorema 2.21. *Todo difeomorfismo de Q^{n+1} que preserve rectas es la restricción a Q^{n+1} de una trasformación de esferas de Lie.*

2.8. Generación por inversiones del grupo de transformaciones de esferas de Lie

Aquí se muestra que el grupo G de transformaciones de esferas de Lie y el grupo H de transformaciones de Möbius está generado por inversiones. Esto se sigue del hecho que los correspondientes grupos ortogonales están generados por reflexiones según hiperplanos.

Definición 2.22. Un hiperplano H en $\mathbb{R}^n$ se denomina *no degenerado* con respecto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, si la métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ restringida a H es no degenerada.

Por la proposición 1.18, sabemos que un hiperplano H es no degenerado si y sólo si $H = \vec{\xi}^{\perp}$, siendo $\vec{\xi}$ temporal o espacial.

Definición 2.23. Sea un vector $\vec{\xi}$ temporal o espacial, la *reflexión Ω_H* según el hiperplano $H = \vec{\xi}^{\perp}$ es la definida por

$$\Omega_H(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{2\langle\vec{x},\vec{\xi}\rangle}{\langle\vec{\xi},\vec{\xi}\rangle}\vec{\xi}.$$

Para hiperplanos H degenerados, $H = \vec{\xi}^{\perp}$ siendo $\vec{\xi}$ luminoso, no se definen reflexiones. También se puede comprobar que toda reflexión es aplicación lineal ortogonal. Esto es un elemento de $O(n-k,k)$.

El papel jugado por las reflexiones se pone de manifiesto en el teorema cuyo enunciado damos a continuación.

Teorema 2.24 (de Cartan-Dieudonné (ver capítulo 3 de [1])). *Toda aplicación lineal ortogonal, con respecto a una métrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de signatura $(n-k,k)$, de $\mathbb{R}^n$ en si mismo es un producto de a lo sumo n reflexiones.*

Dirigiendo ahora nuestra atención de nuevo al contexto de la geometría de las esferas de Lie se tiene la siguiente noción.

Definición 2.25. Una *inversión de Lie* es toda transformación de esferas de Lie inducida por una reflexión según un hiperplano. Esto es, si se tiene una reflexión $\Omega_H \in O(n+1,2)$, $\widetilde{\Omega}_H$ será una inversión de Lie. Similarmente, una *inversión de Möbius* es toda transformación Möbius inducida por una reflexión según un hiperplano. Esto es, si se tiene una reflexión $\Omega_H \in O(n+1,1)$, $\widetilde{\Omega}_H$ será una inversión de Möbius.

Como consecuencia del teorema de Cartan-Dieudonné se tiene lo siguiente.

Teorema 2.26. *(i) Toda transformación de esferas de Lie es el producto de un número finito de inversiones de Lie.*
(ii) Toda transformación de Möbius es el producto de un número finito de inversiones de Möbius.

Si se tiene una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+2}\}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ con respecto a la métrica de Lorentz, donde $\vec{e}_1$ es el vector temporal, se observa que para $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_{n+2}\vec{e}_{n+2}$ y $H_i = \vec{e}_i^{\perp}$ se obtiene

$$\Omega_{H_i}(\vec{x}) = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_{i-1}\vec{e}_{i-1} - x_i\vec{e}_i + \cdots + x_{n+2}\vec{e}_{n+2}.$$

Por tanto, para la composición $\Omega_{H_2} \circ \Omega_{H_3} \circ \cdots \circ \Omega_{H_{n+2}}$ y para la reflexión Ω_{H_1} se tiene

$$\begin{aligned} \Omega_{H_2} \circ \Omega_{H_3} \circ \cdots \circ \Omega_{H_{n+2}}(\vec{x}) &= x_1\vec{e}_1 - x_2\vec{e}_2 - \cdots - x_{n+2}\vec{e}_{n+2}, \\ \Omega_{H_1}(\vec{x}) &= -x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_{n+2}\vec{e}_{n+2}. \end{aligned}$$

Evidentemente $\Omega_{H_2} \circ \Omega_{H_3} \circ \cdots \circ \Omega_{H_{n+2}} \neq \Omega_{H_1}$, pero $\widetilde{\Omega}_{H_2} \circ \widetilde{\Omega}_{H_3} \circ \cdots \circ \widetilde{\Omega}_{H_{n+2}} = \widetilde{\Omega}_{H_1}$. Debido a esto, se sigue el siguiente refinamiento, relativo a la geometría de Möbius, del teorema anterior.

Teorema 2.27. *Toda transformación de Möbius es el producto de un número finito de inversiones de Möbius que son inducidas por reflexiones según hiperplanos $H = \vec{\xi}^{\perp}$ tales que $\vec{\xi}$ es un vector espacial.*

Describimos ahora geométricamente como es una inversión de Möbius $\widetilde{\Omega}_H$ inducida por una reflexión según un hiperplano $H = \vec{\xi}^{\perp}$ tal que $\vec{\xi}$ es espacial. Si $[\vec{\xi}]$ se corresponde con una esfera S de $\mathbb{R}^n$ de centro $\vec{p}$ y radio r, entonces un representante del punto $[\vec{\xi}]$ está dado por

$$\left(\tfrac{1+\vec{p}\cdot\vec{p}-r^2}{2}, \tfrac{1-\vec{p}\cdot\vec{p}+r^2}{2}, \vec{p}\right).$$

Calculando la imagen de un vector representante de una esfera punto mediante Ω_H, se obtiene

$$\Omega_H\left(\tfrac{1+\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \tfrac{1-\vec{u}\cdot\vec{u}}{2}, \vec{u}\right) = \left(\eta_1, \eta_2, \vec{u} - \vec{p} + \tfrac{\|\vec{u}-\vec{p}\|^2}{r^2}\vec{p}\right),$$

donde $\eta_1 + \eta_2 = \frac{\|\vec{u}-\vec{p}\|^2}{r^2}$. Dividiendo por $\frac{\|\vec{u}-\vec{p}\|^2}{r^2}$, se obtiene

$$\widetilde{\Omega}_H(\phi(\sigma(\vec{u})) = \left[\left(\tfrac{1+\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}, \tfrac{1-\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}, \vec{v}\right)\right], \qquad \text{con } \vec{v} = \tfrac{r^2}{\|\vec{u}-\vec{p}\|^2}(\vec{u}-\vec{p}) + \vec{p}.$$

Por tanto,la transformación $I_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que induce $\widetilde{\Omega}_H$ en $\mathbb{R}^n$, está dada por $I_S(\vec{u}) = \vec{v}$, donde $\vec{v}$ es el punto de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\vec{v} - \vec{p} = \frac{r^2}{\|\vec{u} - \vec{p}\|^2} (\vec{u} - \vec{p}).$$

Esto es, el punto $\vec{v}$ es un punto de la recta que une $\vec{p}$ con $\vec{u}$ satisfaciendo

$$\|\vec{u} - \vec{p}\| \, \|\vec{v} - \vec{p}\| = r^2.$$

En conclusión, I_S es lo que clásicamente se conoce como *inversión* de centro $\vec{p}$ y razón r^2. Para todo punto $\vec{u}$ de S, se tiene $I_S(\vec{u}) = \vec{u}$. La esfera S está constituida por puntos dobles de I_S. Se suele decir también que I_S es la inversión determinada por la esfera S.

Si $[\vec{x}]$ se corresponde con un hiperplano $H \equiv a + \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ de $\mathbb{R}^n$, entonces un representante del punto $[\vec{x}]$ es $(-a, a, \vec{n}) = \vec{\eta}$. La inversión de Möbius $\widetilde{\Omega}_{\eta^\perp}$ inducida por la reflexión $\Omega_{\eta^\perp}$ en $\mathbb{R}^{n+2}$ se corresponde con la reflexión afín en $\mathbb{R}^n$ según el hiperplano afín H que está dada por

$$\Omega_H(\vec{u}) = \vec{u} - \tfrac{2(a+\vec{n}\cdot\vec{u})}{\vec{n}\cdot\vec{n}} \vec{n}.$$

Esta transformación es un tipo particular de inversión. Se considera como la inversión según la “esfera” H de centro el punto impropio y radio infinito.

En este punto, se finaliza el presente trabajo. Sin embargo, se podría continuar el mismo analizando las transformaciones de las esferas de Lie que no sean inducidas por inversiones de Möbius. Esto significaría una tarea ardua adicional fuera ya de nuestro alcance. Además, también se podrían analizar diversas geometrías, como la euclídea, la esférica, la hiperbólica, la de Laguerre y la de Möbius, desde el punto de vista del Programa Erlangen de Klein. Tras dicho análisis se concluye que dichas geometrías se pueden considerar como subgeometrías de la geometría de las esferas de Lie.

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos descrito y presentado una introducción a la geometría de las esferas de Lie. En primera instancia, hemos expuesto unas herramientas preliminares de álgebra lineal relativa a formas bilineales y productos escalares. Así, se hace un repaso de nociones básicas y se muestran con mas detalle resultados que a nuestro juicio no son usualmente conocidos. En segundo lugar, hemos recordado brevemente algunas nociones y propiedades relativas a espacios proyectivos y variedades cuádráticas. El desarrollo de estas materias preliminares contribuye a que el alumno refuerce su conocimiento del álgebra lineal y de la geometría proyectiva.

Seguidamente, entrando en la materia principal del trabajo, se ha establecido a través de la proyección estereográfica la correspondencia entre puntos, esferas e hiperplanos de $\mathbb{R}^n$ con ciertos puntos del espacio proyectivo $\mathcal{P}^{n+1}$. Posteriormente, dicha correspondencia se establece entre puntos, esferas orientadas e hiperplanos orientados de $\mathbb{R}^n$ con puntos de la cuádrica de Lie Q^{n+1} en el espacio proyectivo $\mathcal{P}^{n+2}$. Se estudian propiedades y nociones preservadas por dichas correspondencias, como el ángulo y la condición de contacto orientado.

Como en los contenidos de las asignaturas del Grado de Matemáticas, la presencia de la geometría proyectiva es escasa, el material manejado en el presente trabajo ayuda a completar la formación matemática del alumno. En particular, se subraya la contribución en dicho aspecto en lo relativo a conocer la relación existente entre las diversas geometrías básicas: euclídea, afín, proyectiva. Algunos aspectos de las geometrías esféricas e hiperbólica también se han manejado.

Un estudio que se podría realizar y que entraría en el marco de lo estudiado en este trabajo sería un análisis mas completo de las transformaciones de las esferas de Lie y un estudio de otras geometría como la de Laguerre. Asímismo, ver como las geometrías euclídea, esférica, hipérbolica, de Möbius y de Laguerre, desde el punto de vista del Programa Erlangen de Klein, son subgeometrías de la geometría de las esferas de Lie. Desafortunadamente, esto extendería excesivamente la presente memoria, pudiendo ser materia para un estudio posterior.

Bibliografía

[1] ARTIN, E., *Geometric Algebra*, Wiley-Interscience (1957).

[2] BLASCHKE, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*, Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1929.

[3] CASAS-ALVERO, E., *Analytic Projective Geometry*, EMS Textbooks in Mathematics (2014).

[4] CECIL, T. E., *Lie Sphere Geometry*, Universitext, Springer (2007).

[5] DONEDDU, A.,*Compléments de Géométrie Algébrique*, Dunod (1968).

[6] LIE, S., *Über Komplexe, ibensondere Linien und Kugelkomplexe, mit anwendung auf der Theorie der partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann., **5** (1872), 145–208, 209–256 (Ges. Abh. 2, 1–121).

[7] LIE, S., SCHEFFERS, G., *Geometrie der Berührungstransformationen*, Teubner, Leipzig, 1896; reprinted by Chelsea, New York, 1977.

[8] MARTÍN CABRERA, F., *Variedades cuadráticas*, Proyecto Open Course Ware en la ULL (2013):
https://campusvirtual.ull.es/ocw/course/view.php?id=87

[9] PINKALL, U., *Dupin'sche Hyperflächen*, Dissertation, Universität Freiburg, Freiburg, Germany (1981).

[10] PINKALL, U., *Dupin hypersurfaces*, Math.Ann., **270** (1985), 427–440.

Lie Sphere Geometry

Desirée Núñez Pérez
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
`alu0100495638@ull.edu.es`

1. Introduction

Lie introduced his geometry of spheres in the dissertation of his doctoral thesis in 1871. Such a geometry was actively pursued through the early part of the twentieth century, culminating with the publication in 1929 of the third volume on differential geometry authored by Blaschke. After this, in 1981, Pinkall used it as the principal tool in his classification of Dupin hypersurfaces in $\mathbb{R}^4$. Since that time, it has used in the study of submanifolds in space forms: Euclidean, spherical, hyperbolic, etc.
The main purpose this work is to describe an introduction to Lie sphere geometry. Additionally, it is showed how tools of linear algebra and projective geometry prove their efficiency and utility in the study of such a geometry. In order to do this, mainly following Cecil's book [3], this work consists in a detailed exposition of basic notions and properties of Lie sphere geometry.

2. Real bilinear forms

In this first chapter it is included some material relative to bilinear forms, quadratic forms and scalar products. All of this will be necessary later. The following results are specially relevant.

Proposition.- *Let ω be a quadratic form with polar form f on a real vector space V of finite dimension, then:*

(i) if U is a vector subspace of V, the set $U^f = \{\vec{x} \in V \mid f(\vec{x},\vec{u}) = 0, \forall \vec{u} \in U\}$ is also a vector subspace of V such that $\dim U + \dim U^f = \dim V + \dim(\ker \hat{f} \cap U)$. Moreover, $(U^f)^f = U + \ker \hat{f}$.

(ii) If U_1 and U_2 are vector subspaces of V such that $U_1 \subseteq U_2$, then $U_2^f \subseteq U_1^f$.

(iii) It is satisfied the identities $\ker \hat{f}_{|U} = U \cap U^f$ and $\ker \hat{f}_{|U^f} = U \cap U^f + \ker \hat{f}$. Hence if the form f is not degenerated on U, it is obtained $V = U \oplus_f U^f$. On the other hand, if f is not degenerated on U^f, then f is not degenerated on U and on V.

Proposition.- *Let ω be a quadratic form on a vector space V of finite dimension n with signature (p,q), polar form f and such that the kernel , $\ker \hat{f}$, of polarity linear map is of dimension s. Then:*

(i) If an isotropy subspace is of dimension a, then $\min\{p,q\} + s \geq a$. Furthermore, there exists at least an isotropy subspace of dimension $\min\{p,q\} + s$ and such a subspace contains $\ker \hat{f}$.

(ii) If a vector $\vec{x}$ is isotropic, then there exists a istropy subspace U of dimension $\min\{p,q\} + s$ such that $\vec{x} \in U$ y $\ker \hat{f} \subseteq U$. In particular, if $\vec{x}$ is not in $\ker \hat{f}$, then $\vec{x} \in U \subseteq \vec{x}^f$.

Proposition.- *Let ω be a quadratic form on a vector space V of finite dimension n with signature (p,q), polar form f and such that the kernel, $\ker \hat{f}$, of polarity linear map is of de dimension s. Let W be a vector subspace of dimension $n-1$ of V, then, with respect to the restriction $\omega_{|W}$ of ω to W, it follows:*

(i) If $\ker \hat{f} \not\subseteq W$, then the signature of $\omega_{|W}$ is (p,q) and $\ker \hat{f}_{|W} = \ker \hat{f} \cap W$.

(ii) If $\ker \hat{f} \subseteq W$, then there exists a vector $\vec{x} \in V$ such that $\vec{x}^f = W$ and there are three posibilities :

(a) If $\vec{x} \in W$, then the signature of $\omega_{|W}$ is $(p-1, q-1)$ and $\ker \hat{f}_{|W} = [\vec{x}] + \ker \hat{f}$.

(b) If $\vec{x} \notin W$ and $\omega(\vec{x}) > 0$, then the signature of $\omega_{|W}$ is $(p-1, q)$ and $\ker \hat{f}_{|W} = \ker \hat{f}$.

(c) If $\vec{x} \notin W$ y $\omega(\vec{x}) < 0$, then the signature of $\omega_{|W}$ is $(p, q-1)$ and $\ker \hat{f}_{|W} = \ker \hat{f}$.

3. Lie sphere geometry

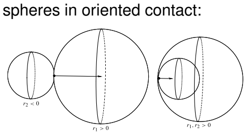
Lie stablished a bijective correspondence between the set of all *Lie spheres*, i.e., oriented spheres, oriented hyperplanes and point spheres in $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$, and the set of all points of the *Lie quadric* Q^{n+1}

$$\{\text{Lie spheres in } \mathbb{R}^n\} \leftrightarrows Q^{n+1}$$

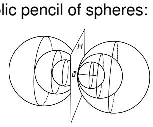
$$Q^{n+1} = \{[\vec{x}] \in \mathcal{P}^{n+2} \mid \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0\}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the scalar product on $\mathbb{R}^{n+3}$ with signature $(n+1, 2)$

The one-parameter family of Lie spheres in $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ corresponding to the points on a line in Q^{n+1} is called *parabolic pencil* of spheres. It consists of all Lie spheres in *oriented contact* at a certain element on $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.
Lie spheres in oriented contact:



Parabolic pencil of spheres:



There is a bijective map between the set of parabolic pencils on $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ and the manifold of lines included in Q^{n+1}.

$$\{\text{Parabolic pencils in } \mathbb{R}^n\} \rightleftarrows \{\text{lines in } Q^{n+1}\}$$

A *Lie sphere transformation* is a projective transformation of $\mathcal{P}^{n+2}$ which maps Q^{n+1} to itself. In terms of geometry of $\mathbb{R}^n$, a Lie sphere transformation maps Lie spheres to Lie spheres.
Any Lie sphere transformation preserves the condition of oriented contact of Lie spheres on $\mathbb{R}^n$.

Fundamental theorem of Lie sphere geometry.- *A line-preserving difeomofphism of the Lie quadric Q^{n+1} is the restriction to Q^{n+1} of a projective transformation of $\mathcal{P}^{n+2}$.*
In other words, a transformation on the space of Lie spheres that preserves oriented contact of spheres is a Lie sphere transformation.

The group G of shpere Lie transformations is isomorphic to the quotient group $O(n+1,2)/\{I,-I\}$. By the theorem of Cartan-Dieudonné, the orthogonal group $O(n+1,2)$ is generated by reflections in hyperplanes . Since the induced projective transformations by reflections are inversions, then G is generated by inversions.

Any Möbius (conformal) transformation of $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ induces a Lie sphere transformation . The group of Möbius is presicely the subgroup of Lie sphere transformations that map point spheres to point spheres. A Möbius transformation induced by a reflection in a hyperplane on $\mathbb{R}^{n+1}$ is corresponding with a inversion on $\mathbb{R}^n$ in classic sense (with center a point in $\mathbb{R}^n$ and radius a positive real number).

References

[1] Artin, E., *Geometric Algebra*, Wiley-Interscience (1957).

[2] Blaschke, W., *Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie*, Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1929.

[3] Cecil, T. E., *Lie Sphere Geometry*, Universitext, Springer (2007).

[4] Lie, S., *Über Komplexe, ibensondere Linien und Kugelkomplexe, mit anwendung auf der Theorie der partieller Differentialgleichungen*, Math. Ann., **5** (1872), 145–208, 209–256 (Ges. Abh. 2, 1–121).

[5] Pinkall, U., *Dupin'sche Hyperflächen*, Dissertation, Universität Freiburg, Freiburg, Germany (1981).