

Trabajo de Fin de Grado:  
Entanglement and Decoherence in Quantum Physics

Sergio Javier Avero Rodríguez

En San Cristóbal de La Laguna, a 10 de enero de 2018

**Director:** Dr. D. Santiago Brouard Martín  
Universidad de La Laguna

## Abstract

A escala humana, nos encontramos inmersos en un mundo puramente clásico, donde las ecuaciones de movimiento y trayectorias se pueden controlar y predecir de manera determinista. Sin embargo, este mundo tangible y ordenado deriva de, a priori, el caos de la física cuántica y la estadística. ¿Cómo puede evolucionar un sistema cuántico a los sistemas clásicos que acostumbramos a ver en nuestro día a día?

Una de las explicaciones más aceptadas en la actualidad es el fenómeno conocido como decoherencia cuántica. En este trabajo nos dedicaremos a estudiar este fenómeno, deduciendo y aplicando la ecuación maestra de evolución temporal para resolver distintos sistemas cuánticos: oscilador armónico, sistema atómico de dos niveles y dos osciladores armónicos acoplados. Todos ellos inmersos en un baño que interactúa con los sistemas pequeños y que origina el fenómeno de decoherencia. Analizaremos la evolución de los elementos del operador densidad de los sistemas mencionados, es decir, se estudiará la evolución de las poblaciones (elementos diagonales) y las coherencias (elementos no diagonales). Éstas últimas son las responsables de la pérdida de las propiedades cuánticas del sistema.

*In our human scale, we are surrounded by a pure classical world, where the equation of motion and trajectories can be controlled and be predicted in a deterministic way. Although, this tidy and tangible world comes from, a priori, the chaos of quantum physics and statistics. How can a small quantum system evolve to a classical system such as we usually see in our day to day?*

*Currently, one of the most accepted explanations by scientific community is the phenom known as quantum decoherence. In this project we are going to study this process, deducing and applying the time-evolution master equation in order to solve different kind of quantum systems: harmonic oscillator, two-state atom and two coupled harmonic oscillators. All of them surrounded by a reservoir, which is responsible of the measurement process.*

*Moreover, we are going to analyse the evolution of the density operator components of the systems mentioned above, i.e. we will study the evolution of populations (diagonal elements of the density matrix) and the coherences (non-diagonal elements). These non-diagonal elements are responsible about the loss of quantum effects of the systems.*

# Índice

Capítulos	Página
<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
<b>2. Ecuación Maestra</b>	<b>5</b>
2.1. Derivación y origen de la ecuación maestra . . . . .	5
2.2. Aproximación de Börn . . . . .	6
2.3. Introducción a la aproximación de Markoff . . . . .	7
2.4. Resumen . . . . .	8
<b>3. Ecuación maestra para un modo de una cavidad dirigida por luz térmica</b>	<b>8</b>
3.1. Derivación de la ecuación maestra . . . . .	8
3.2. Aproximación Markoviana . . . . .	11
3.3. Cálculo de los estados estacionarios de las poblaciones . . . . .	14
3.4. Resolución de la ecuación maestra . . . . .	15
<b>4. Ecuación maestra de un sistema atómico de dos niveles en equilibrio térmico con un baño de radiación</b>	<b>21</b>
4.1. Derivación de la ecuación maestra . . . . .	22
4.2. Resolución de la ecuación maestra . . . . .	24
<b>5. Ecuación maestra de dos osciladores armónicos acoplados a un baño de radiación térmica</b>	<b>28</b>
5.1. Derivación de la ecuación maestra . . . . .	28
5.2. Resolución de la ecuación maestra . . . . .	31
<b>6. Resumen y conclusiones</b>	<b>38</b>
<b>7. Referencias</b>	<b>39</b>

## 1. Introducción

Hablamos de un sistema clásico cuando nos referimos a un sistema, el cual puede adoptar varios estados diferentes, que se encuentra en cada instante dado en uno de esos estados y en principio, es posible determinar en qué estado se encuentra sin alterar dicho estado ni su evolución posterior. Sin embargo, la física cuántica no tiene dicho comportamiento.

En la mecánica cuántica, los sistemas están descritos por una función de onda, la cual evoluciona conforme a la ecuación de Schrödinger donde la energía se conserva cuando el hamiltoniano  $\hat{H}$  es independiente del tiempo. Sin embargo, es de gran interés estudiar los sistemas abiertos, los cuales suponen la mayor parte de los sistemas físicos reales. En este trabajo estudiaremos la evolución temporal de la matriz densidad de un sistema cuántico pequeño en presencia de un sistema de muchos grados de libertad con ciertas propiedades que denominaremos baño (reservoir).

La mayor parte de los sistemas abiertos están sometidos a procesos disipativos, donde se pierde información. Si esta pérdida de información involucra también una disminución en el valor de los elementos no diagonales de la matriz densidad del sistema pequeño, entonces hablamos de un fenómeno de decoherencia. Hablamos por tanto de que la decoherencia implica la transición de un sistema de efectos de superposición cuánticos a un sistema sin dichos efectos, con probabilidades clásicas de encontrar dichos estados.

*When we talk about a quantum system, we talk about a system which we can not know its state without disturbing it, affecting its future motion. So the measurement changes the evolution of the system.*

*Quantum systems are not isolated and it is very difficult avoid their interaction with the surroundings. This coupling with the environment affects their dynamics and their evolution. This process can be interpretate as a measurement.*

*We can not neglect or switched off the electromagnetic field from a charge particle or system. This coupling causes the decay of excited states of the system and the subsequent emission of a photon.*

*A plenty of open systems are subject to dissipative and decoherence process. Decoherence is the process that causes a loss of information due to the reservoir coupled with the system which is found in the non-diagonal elements of the density matrix. They decay to zero over the time.*

*We will study this process calculating the time evolution of the elements of the density matrix of three concrete systems: One Harmonic oscillator, Two-level atom and Two Harmonic oscillators. Moreover, we will analyse the populations (diagonal elements) using master equations, in order to study the behaviour of the probabilities of the different states for each system.*

## 2. Ecuación Maestra

La ecuación maestra es una herramienta que describe la evolución de las componentes del operador densidad para sistemas abiertos acoplados con un baño térmico. En este capítulo vamos a describir la ecuación maestra, partiendo de su origen en su forma más general. Explicaremos la aproximación de Born y daremos unas pinceladas a la aproximación de Markoff.

### 2.1. Derivación y origen de la ecuación maestra

Trabajaremos con sistemas con un Hamiltoniano de la forma

$$H = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{SR}, \quad (2.1)$$

donde  $\hat{H}_S$  correspondería al operador que representa la energía del sistema  $S$ , el término  $\hat{H}_R$  corresponde al operador que representa la energía del baño  $R$  y el término  $\hat{H}_{SR}$  corresponde al operador que representa el término de interacción entre la energía del baño  $R$  y la del sistema  $S$ .

Este último término  $\hat{H}_{RS}$  estará formado por el producto tensorial (o suma de productos) de los operadores correspondientes a los subespacios del baño  $R$  y del sistema  $S$ . Debido a la evolución temporal de nuestro sistema, se puede producir "enredo" (del inglés, *entanglement*) o correlaciones tales que

$$|\Psi\rangle \neq |\Psi\rangle_R \otimes |\Psi\rangle_S. \quad (2.2)$$

La forma más general para tratar el sistema es mediante el operador densidad. Debido a la inmensa cantidad de grados de libertad del baño  $R$ , se nos tornaría muy difícil la utilización de la función de onda. Además, podemos recurrir a la traza parcial para solo obtener las propiedades del sistema  $S$  que es el sistema en el que estamos interesados a estudiar.

La evolución temporal del operador densidad viene dada por:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\chi} = [\hat{H}, \hat{\chi}], \quad (2.3)$$

donde hemos seguido la deducción teórica empleada en [2].

Procedemos ahora a transformar los operadores a la imagen de interacción de la siguiente forma:

$$\tilde{\chi}(t) = e^{-i(H_S+H_R)\frac{t}{\hbar}} \hat{\chi} e^{i(H_S+H_R)\frac{t}{\hbar}}, \quad (2.4)$$

por lo que la evolución temporal del operador densidad en esta imagen de interacción es:

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{SR}, \tilde{\chi}]. \quad (2.5)$$

En nuestro caso, vamos a considerar que la interacción del baño con la materia (los distintos sistemas que escogeremos) corresponde a una interacción débil. Así pues, el término  $H_{RS}$  de interacción va a ser un término lo suficientemente pequeño como para despreciar términos cúbicos y superiores en la ecuación maestra.

Como podemos ver, tenemos una ecuación diferencial que podemos integrar obteniendo:

$$\tilde{\chi} = \chi(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' [\tilde{H}_{RS}(t'), \chi(t')]. \quad (2.6)$$

Sustituimos en (2.4):

$$\dot{\tilde{\chi}} = \frac{1}{i\hbar} [\tilde{H}_{RS}(t), \chi(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [H_{SR}(t), [\tilde{H}_{RS}(t'), \chi(t')]]. \quad (2.7)$$

Antes que nada, haremos la traza parcial sobre el baño ( $Tr_R$ ) para solo centrarnos en las propiedades del sistema pequeño S y disminuir los grados de libertad del sistema:

$$Tr_R(\dot{\chi}) = \dot{\rho} = Tr_R\left(\frac{1}{i\hbar}[\tilde{H}_{RS}(t), \chi(0)]\right) - Tr_R\left(\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' [H_{SR}(t), [\tilde{H}_{RS}(t'), \chi(t')]]\right). \quad (2.8)$$

Podemos hacer que el primer sumando de la ecuación anterior sea nulo, asumiendo que el valor medio del baño (R), en el estado  $\sigma_R$  de R es cero:

$$\begin{aligned} Tr_R[\tilde{H}_{SR}(t)\rho_0 R_0] &= Tr_R[\gamma e^{iH_S t/\hbar} \hat{S} e^{-iH_S t/\hbar} e^{iH_R t/\hbar} \hat{R} e^{-iH_R t/\hbar} \rho_0 R_0] = \\ &= \gamma \hat{S}(t) \rho_0 Tr_R[e^{iH_R t/\hbar} \hat{R} e^{-iH_R t/\hbar} R_0] = \\ &= \gamma \hat{S}(t) \rho_0 Tr_R[\hat{R} e^{iH_R t/\hbar} R_0 e^{-iH_R t/\hbar}] = \\ &= \gamma \hat{S}(t) \rho_0 \langle R_0(t) \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si  $\langle R_0(t) \rangle \neq 0$ , siempre podemos redistribuir la energía para que lo sea:

$$\begin{aligned} H &= \overbrace{H_S + tr_R[H_{SR}, \rho_0 R_0] \otimes \hat{1}_R}^{H'_S} + H_R + \overbrace{H_{SR} - Tr_R[H_{SR}, \rho_0 R_0] \otimes \hat{1}_R}^{H'_R} = \\ &= H'_S + H_R + H'_R, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde

$$\begin{aligned} H'_S &= H_S + tr_R[H_{SR}, \rho_0 R_0] \otimes \hat{1}_R, \\ H'_R &= H_{SR} - Tr_R[H_{SR}, \rho_0 R_0] \otimes \hat{1}_R. \end{aligned}$$

Luego:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R[\tilde{H}_{SR}(t), [\tilde{H}_{SR}(t'), \chi(t')]]. \quad (2.11)$$

## 2.2. Aproximación de Börn

Es importante explicar el significado y consecuencias de la aproximación de Börn. Se trata de aproximar el operador de interacción  $H_{SR}$  a primer orden, es decir, de manera lineal. Ello conlleva a que a la hora de escribir la interacción del sistema, es decir, la forma en la que se transmiten los fotones o cuantos de energía entre los distintos sistemas, solo se pueda llevar a cabo con un solo fotón cada vez. Es una aproximación que se lleva a cabo en [1].

Escribimos  $\tilde{\chi} = \tilde{\rho}(t)R_0 + O(H_{SR})$  y sustituimos en (2.11). La aproximación de Börn consiste en despreciar en esta ecuación términos de orden cúbico de  $H_{SR}$  de manera que la ecuación queda

$$\dot{\tilde{\chi}}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_i \sum_j \int_0^t dt' [\tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), [\tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\chi}(t') R_0]]. \quad (2.12)$$

Pongamos un ejemplo muy sencillo que utilizaremos después:  $H_{SR} = \hbar(a\Gamma^\dagger + a^\dagger\Gamma)$ . Esto quiere decir, que la energía de intercambio entre el sistema pequeño S y el baño R se llevará a cabo de la siguiente forma:

- i) El primer término de  $H_{SR}$ ,  $a\Gamma^\dagger$  es el responsable de que el sistema pierde o emite un fotón de una cierta energía y que el baño absorbe dicho fotón.
- ii) El segundo término  $a^\dagger\Gamma$  implica que ahora es el baño el que emite un fotón al sistema pequeño S.

Sin embargo, esto no es la única forma que existe de plantear la energía de interacción  $H_{SR}$ . Es posible, mediante términos cuadráticos, permitir al baño aportar dos fotones de energía  $\frac{\hbar\omega}{2}$  a un sistema que necesite una energía  $\hbar\omega$  para conseguir cambiar de estado.

Sin embargo, nosotros aplicaremos la aproximación de Börn, argumentando que la  $H_{SR}$  es lo suficientemente pequeña para que interacciones a más de primer orden puedan no tenerse en cuenta para este cálculo.

### 2.3. Introducción a la aproximación de Markoff

Los cambios en el sistema  $S$  van a depender de un largo historial de cambios que se traducen como alteraciones en el estado del baño  $R$  a través de la interacción  $H_{SR}$ . Los estados anteriores se reflejan luego en la evolución futura de  $S$  a medida que interactúa con el baño modificado. Sin embargo, si el baño es un sistema grande mantenido en equilibrio térmico, no esperamos que preserve dichos cambios pequeños producidos por su interacción con  $S$  por mucho tiempo; no por el tiempo suficiente como para afectar significativamente la evolución de  $S$ .

Se convierte entonces en una cuestión de tiempo de correlación del baño frente a la escala de tiempo para variar significativamente el sistema  $S$ . Este pensamiento permitir introducir el comportamiento Markoviano del sistema. Para ello hagamos un poco más específico el sistema. Consideraremos un hamiltoniano de interacción tal que

$$\tilde{H}_{SR} = \hbar \sum_i \tilde{s}_i \tilde{\Gamma}_i, \quad (2.13)$$

donde los operadores  $s_i$  y  $\Gamma_i$  actúan en los subespacios  $\epsilon_S$  y  $\epsilon_R$  respectivamente.

Sustituímos en la ecuación (2.12) y hacemos traza parcial

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_i \sum_j \int_0^t dt' Tr_R [\tilde{s}_i(t) \tilde{\Gamma}_i(t), [\tilde{s}_j(t') \tilde{\Gamma}_j(t'), \tilde{\rho}(t') R_0]], \quad (2.14)$$

donde hemos tenido en cuenta que  $\chi(t') = \tilde{\rho}(t') R_0$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t') &\in \epsilon_S, \\ R_0 &\in \epsilon_R. \end{aligned}$$

Si desarrollamos la ecuación anterior y tenemos en cuenta que la traza es sobre el subespacio del baño (R):

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & -\frac{1}{\hbar^2} \sum_i \sum_j \int_0^t dt' ([\tilde{s}_i(t) \tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_i(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t')] Tr_R [R_0 \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t')] + \\ & + [-\tilde{s}_j(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_i(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_j(t') \tilde{s}_i(t)] Tr_R [R_0 \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t)]). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Además sabemos que:

$$\begin{aligned} Tr_R [R_0 \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t')] &= \langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R, \\ Tr_R [R_0 \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t)] &= \langle \tilde{\Gamma}_j(t') \tilde{\Gamma}_i(t) \rangle_R. \end{aligned}$$

Aunque **lo explicaremos más adelante** en detalle con un ejemplo, se puede demostrar que si  $\tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t')$  decae rápidamente (R se mueve rápido) en la escala de tiempos de la variación de  $\tilde{\rho}(t)$  (sistema pequeño) entonces:

$$\langle \tilde{\Gamma}_i(t) \tilde{\Gamma}_j(t') \rangle_R \propto \delta(t - t').$$

Lo cual se conoce como aproximación Markoviana. Procederemos por tanto a realizar el siguiente cambio:

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt' Tr_R [H_{SR}(t), [\tilde{H}_{RS}(t'), \tilde{\rho}(t) R_0]]. \quad (2.16)$$

Esta es la **ecuación maestra** que nos permitirá acoplar un sistema material a radiación E.M. La ecuación es similar a la 2.11 salvo por la variable de  $\rho(t)$  que ya no depende de  $t'$ , sino de  $t$  debido a la aproximación Markoviana.

## 2.4. Resumen

Estamos antes una ecuación que no corresponde a la de Schrödinger. Se trata de una ecuación diferencial-integral que relaciona la probabilidad de estados de un sistema cuántico con un baño mucho más grande, en el que se ignora por completo los cambios producidos en él. Es por eso que se trata de un sistema abierto con pérdida de energía.

Para poder calcular la evolución temporal de los elementos de la matriz densidad de nuestro sistema, tendríamos que proyectar  $\hat{\rho}$  sobre los estados de nuestro sistema, obteniendo un sistema de ecuaciones diferenciales.

*In this chapter, we have described the origin of the master equation in its general form, explaining the Born and Markoff approximations. This equation provide us a tool to describe the evolution of the components of the density matrix for an open system coupled with a reservoir.*

*We have obtained a different equation than Schrödinger one. It is an integral-differential equation which gives us the relation between the probability to find the small system in some state due to the couple with the larger system. This reservoir just ignores the changes on it because of the small system (loss of energy/information).*

## 3. Ecuación maestra para un modo de una cavidad dirigida por luz térmica

En este capítulo vamos a deducir la ecuación maestra para un caso concreto: Un oscilador armónico acoplado con un baño térmico de fotones. Este sistema es muy importante porque es la base para describir el resto de sistemas que estudiaremos más adelante. Lo primero, será calcular la ecuación maestra para este sistema, explicando en profundidad las aproximaciones. Por último se procederá a calcular la evolución temporal de la matriz densidad usando la ecuación maestra para cualquier función de onda inicial.

### 3.1. Derivación de la ecuación maestra

Vamos a considerar un modelo específico: Derivaremos la ecuación maestra para un modo de una cavidad en interacción con un baño térmico de fotones. El intercambio de energía solo tendrá lugar en una sola dimensión.

Así pues, el hamiltoniano será la suma de estas tres componentes:

$$\begin{aligned} H_S &= \hbar\omega_C a^\dagger a, \\ H_R &= \sum_j \hbar\omega_j r_j^\dagger r_j, \\ H_{SR} &= \sum_j \hbar(k_j^* a r_j^\dagger + k_j a^\dagger r_j) = \hbar(a\Gamma^\dagger + a^\dagger\Gamma). \end{aligned}$$

Nótese que no ponemos la energía de punto cero porque es irrelevante en los cálculos pero los hamiltonianos la tienen como cualquier oscilador armónico.

El oscilador de  $S$  se acopla con cada uno de los osciladores de  $R$  mediante la constante  $k_j$ . Utilizamos la *rotating wave approximation* en la que despreciamos los términos que no conserven la energía.

El sistema  $S$  es un oscilador armónico de frecuencia  $\omega_C$ , mientras que el baño  $R$  es una colección de osciladores armónicos de frecuencias distintas (la condición para que el sistema  $R$  se considere un baño térmico es que su espectro en frecuencias sea muy ancho). Además, podemos ver que el hamiltoniano de interacción tiene dos términos: en el primero ( $a\Gamma^\dagger$ ) se pierde un fotón del sistema  $S$  y el baño  $R$  gana un fotón. Y en el otro término ( $a^\dagger\Gamma$ ) el sistema  $S$  gana un fotón procedente del baño  $R$ . Nunca un fotón que gane el baño  $R$  procedente del sistema  $S$  volverá a formar parte,



de nuevo, del sistema  $S$  (sistema abierto).

El baño  $R$  está a una temperatura  $T$  siendo su operador densidad:

$$\begin{aligned} R_0 &= Z^{-1} e^{-\beta H} = \prod_i (1 - \mathcal{Z} e^{-\beta H}) \\ &= \prod_j e^{-\hbar w_j r_j^\dagger r_j / k_B T} (1 - e^{-\hbar w_j / k_B T}), \end{aligned}$$

con fugacidad  $\mathcal{Z} = 0$  (efectos cuánticos fuertes).

Comparando la ecuación 2.11 con nuestro  $H_{SR}$  tenemos:

$$\begin{aligned} s_1 &= a & s_2 &= a^\dagger, \\ \Gamma_1 &= \Gamma^\dagger = \sum_i k_j^* r_j^\dagger & \Gamma_2 &= \Gamma = \sum_i k_j r_j. \end{aligned}$$

Y ahora calculamos la evolución temporal de cada operador:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(t) &= e^{iH_S t / \hbar} a e^{-iH_S t / \hbar} = e^{i w_C a^\dagger a t} a e^{-i w_C a^\dagger a t}, \\ \tilde{s}_2(t) &= e^{iH_S t / \hbar} a^\dagger e^{-iH_S t / \hbar} = e^{i w_C a^\dagger a t} a^\dagger e^{-i w_C a^\dagger a t}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1(t) &= e^{iH_R t / \hbar} \left( \sum_i k_j^* r_j^\dagger \right) e^{-iH_R t / \hbar} = e^{i \sum w_j r_j^\dagger r_j} \left( \sum_i k_j^* r_j^\dagger \right) e^{-i \sum w_j r_j^\dagger r_j}, \\ \tilde{\Gamma}_2(t) &= e^{iH_R t / \hbar} \left( \sum_i k_j r_j \right) e^{-iH_R t / \hbar} = e^{i \sum w_j r_j^\dagger r_j} \left( \sum_i k_j r_j \right) e^{-i \sum w_j r_j^\dagger r_j}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pero esto se puede simplificar para que la ecuación maestra sea más sencilla de manejar. Para ello, hacemos un desarrollo en serie de las exponenciales:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

A modo de ejemplo, desarrollaremos el operador  $\tilde{s}_1$ :

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &\simeq \left( \hat{1} + i w_C N t - \frac{1}{2} (w_C N t)^2 \right) a \left( \hat{1} - i w_C N t - \frac{1}{2} (w_C N t)^2 \right) \\ &= a + i w_C N t a - \frac{1}{2} (w_C N t)^2 a - a i w_C N t + w_C N t a w_C N t + \frac{1}{2} (w_C N t)^2 a (i w_C N t) \\ &\quad - \frac{a}{2} (w_C N t)^2 - (i w_C N t) a \frac{1}{2} (w_C N t)^2 + \frac{1}{2} (w_C N t)^2 \frac{1}{2} (w_C N t)^2 \\ &= a + \underbrace{i w_C N t a - i w_C t a N}_{i w_C t [N, a]} + w_C^2 t^2 N a N - \frac{1}{2} w_C^2 t^2 N^2 a^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} w_C^2 t^2 a N^2 + \frac{i}{2} w_C^3 t^3 N^2 a N - \frac{i}{2} w_C^3 t^3 N a N^2 + \frac{w_C^4 t^4}{4} N^2 a N^2 \\ &= a + i w_C t [N, a] - \frac{w_C^2 t^2}{2} [2 N a N - N^2 a - a N] + \frac{i}{2} w_C^3 t^3 [N^2 a N - N a N^2]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ahora desarrollamos los conmutadores:

$$\begin{aligned} [N, a] |N\rangle &= N a |N\rangle - a N |N\rangle = N \sqrt{n} |N-1\rangle - a n |N\rangle \\ &= \sqrt{n} (n-1) |N-1\rangle - n \sqrt{n} |N-1\rangle = (\sqrt{n} (n-1) - \sqrt{n} n) |N-1\rangle \\ &= \sqrt{n} |N-1\rangle = -a |N\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sabiendo esto y que:

$$\begin{aligned} aN &= Na + a \\ -N^2a &= Na - NaN \\ -aN^2 &= -NaN - aN, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} [2NaN - N^2a - aN] &= 2NaN + Na - NaN - NaN - aN = Na - aN \\ &= [N, a] = -a. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Y podemos seguir así cuanto queramos. En nuestro caso solo hemos tomado aproximación de segundo orden por lo que el corchete con  $t^3$  no nos vale para el cálculo.

Como resultado tenemos:

$$\tilde{s}_1(t) \simeq a - iw_C t a - \frac{w_C^2 t^2}{2} a = a e^{-iw_C t}. \quad (3.7)$$

De manera análoga podemos obtener la evolución temporal de todos los operadores:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1(t) &= a e^{-iw_C t}, \\ \tilde{s}_2(t) &= a^\dagger e^{iw_C t}, \\ \tilde{\Gamma}_1(t) &= \sum_j k_j^* r_j^\dagger e^{iw_j t}, \\ \tilde{\Gamma}_2(t) &= \sum_j k_j r_j e^{-iw_j t}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ahora sustituímos estos operadores en la ecuación maestra, es decir, la ecuación 2.15 desarrollada a nuestro caso particular:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= - \int_0^t dt' \{ [\tilde{s}_1(t) \tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_1(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t')] \langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t') \tilde{s}_1(t)] \langle \tilde{\Gamma}_1(t') \tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_2(t) \tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_2(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t')] \langle \tilde{\Gamma}_2(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t') \tilde{s}_2(t)] \langle \tilde{\Gamma}_1(t') \tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_1(t) \tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_1(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t')] \langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t') \tilde{s}_1(t)] \langle \tilde{\Gamma}_2(t') \tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_2(t) \tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_2(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t')] \langle \tilde{\Gamma}_2(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t') \tilde{s}_2(t)] \langle \tilde{\Gamma}_2(t') \tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De esta ecuación podemos reducir a la mitad sus términos. Ello es debido al término del valor medio de los operadores  $\Gamma$ . Vamos a estudiarlos de forma más detallada:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R &= \langle (\sum_i k_i^* r_i^\dagger e^{iw_i t'}) (\sum_j k_j^* r_j^\dagger e^{iw_j t}) \rangle_R \\ &= \sum_{i,j} \{ (k_i^* k_j^* e^{iw_i t' + iw_j t}) Tr_R [R_0 r_i^\dagger r_j^\dagger] \}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Nos fijamos en el valor de la traza solamente:

$$\sum_{i,j} Tr_R [R_0 r_i^\dagger r_j^\dagger] = \sum_{\{n_1, n_2, \dots\}} \langle n_1, n_2, \dots | R_0 r_i^\dagger r_j^\dagger | n_1, n_2, \dots \rangle. \quad (3.11)$$

Pese a que  $R_0$  es un operador, depende únicamente del operador número  $a^\dagger a$  por lo que aunque no conmute con el resto de operadores, en esencia, no va a alterar los estados del bra y del ket, a diferencia de los operadores  $r_i^\dagger r_j^\dagger$  que sí lo hacen. De hecho, podemos ver en la ecuación 3.9 que solo cuando  $i \neq j$  el valor medio de las gammas es distinto de 0.

Así pues, los valores medios dan como resultado:

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_j |k(w_j)|^2 e^{iw_j(t-t')} \langle r_j^\dagger r_j \rangle_R = \sum_j |k(w_j)|^2 e^{iw_j(t-t')} \tilde{n}(w_j, T), \\
 \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_j |k(w_j)|^2 e^{-iw_j(t-t')} \langle r_j r_j^\dagger \rangle_R = \sum_j |k(w_j)|^2 e^{iw_j(t-t')} [\tilde{n}(w_j, T) + 1], \\
 \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \sum_j (k^*(w_j))^2 e^{iw_j(t+t')} \langle r_j^\dagger r_j^\dagger \rangle_R = 0, \\
 \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R &= \sum_j (k(w_j))^2 e^{-iw_j(t+t')} \langle r_j r_j \rangle_R = 0.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Recordemos ahora que las frecuencias del baño (reservoir) son una magnitud continua y el sumatorio se puede poner en forma integral con una densidad de estados en frecuencias  $g(w)$ .

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t') \rangle_R &= \int_0^\infty dw \quad g(w) |k(w)|^2 e^{iw(t-t')} \tilde{n}(w, T), \\
 \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t') \rangle_R &= \int_0^\infty dw \quad g(w) |k(w)|^2 e^{-iw(t-t')} (\tilde{n}(w, T) + 1).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ahora sustituímos estos valores medios en la ecuación 3.9.

Haciendo el cambio de variable:  $\tau = t - t'$  nos queda la ecuación:

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} = - \int_0^{td\tau} \{ & [aa^\dagger \tilde{\rho}(t - \tau) - a^\dagger \tilde{\rho}(t - \tau)a] e^{-iw_C \tau} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R + h.c. + \\
 & + [a^\dagger a \tilde{\rho}(t - \tau) - a \tilde{\rho}(t - \tau) a^\dagger] e^{iw_C \tau} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R + h.c. \}.
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Donde se puede demostrar que los términos no nulos de los valores medios son:

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R &= \int_0^\infty dw \quad e^{iw\tau} g(w) |k(w)|^2 \tilde{n}(w, T), \\
 \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R &= \int_0^\infty dw \quad e^{-iw\tau} g(w) |k(w)|^2 [\tilde{n}(w, T) + 1].
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

### 3.2. Aproximación Markoviana

Cabe decir, que hasta ahora no hemos considerado la aproximación *Markoviana*. Sin embargo, veremos a continuación el origen de dicha aproximación.

Centrémonos en esos valores medios de antes. La aproximación Markoviana aparece solo gracias a que los dos valores medios de la ecuación 3.15 son proporcionales a una delta de Dirac.

Para verlo hay que tener en cuenta que esas dos funciones son muy anchas en el espectro de frecuencias, característico del baño térmico o reservoir (fotones de todo tipo de frecuencias).

Dicho esto, vamos a hacer un pequeño análisis sobre cómo varía la exponencial y cómo varía esa función  $f(w)$  (aunque sea en el dominio real y los valores del eje x no sean precisos, podemos dar buena cuenta de la aproximación de manera más intuitiva):

Hemos hecho una gráfica (Figura 1) con dos funciones  $f(w)$  y  $e^{iw\tau}$  para verlo de forma más intuitiva.

Lo importante de esta gráfica, es que el tiempo  $\tau$  actúa como frecuencia para la onda/función  $e^{-iw\tau}$ . A tiempos  $\tau$  muy altos, la función exponencial oscila muy rápido, de tal forma que el valor de la integral se hace nula.

Así pues, solo para cuando la  $\tau \rightarrow 0$  el valor de la integral será diferente de cero.

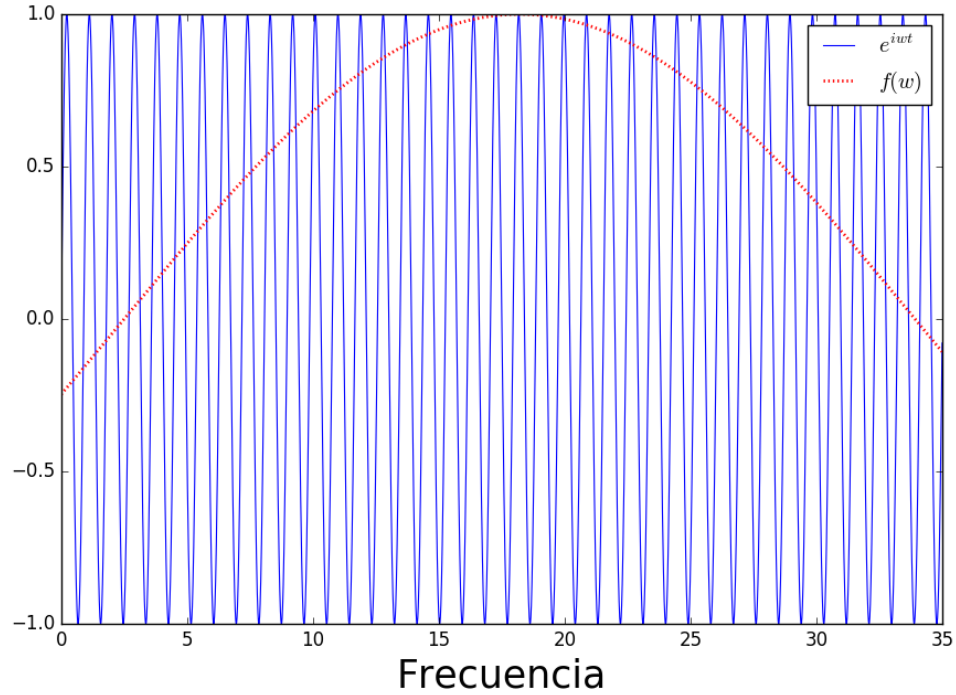


Figura 1: Gráfica que representa en el espectro de frecuencias las funciones que intervienen en el valor medio en  $R$  de la ecuación maestra

Como consecuencia, si solo la integral posee un valor distinto de cero, que es justo cuando la  $\tau \rightarrow 0$ , entonces dicha integral se convierte automáticamente en una especie de delta de Dirac y lo más importante, hace que las funciones dejen de depender de  $\tau$ .

Matemáticamente lo podemos ver de la siguiente forma. Si expandimos los valores medios del baño en forma integral, nos damos cuenta que deberemos resolver lo siguiente:

$$- \int_0^\infty dt' \int_0^\infty e^{-i\omega_C(t-t')} g(\omega) |k(\omega)|^2 e^{i\omega(t-t')} \tilde{n}(\omega, T) d\omega. \quad (3.16)$$

Primero integramos en tiempo:

$$- \int_0^\infty dt' e^{-i\omega_C(t-t')} e^{i\omega(t-t')}. \quad (3.17)$$

Hacemos un cambio de variables:

$$\begin{aligned} t - t' &= \tau, \\ -dt' &= d\tau. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los límites cambian:

$$\begin{aligned} t' = t &\Rightarrow \tau = 0, \\ t' = 0 &\Rightarrow \tau = t. \end{aligned}$$

Entonces ahora:

$$- \int_t^0 (-d\tau) e^{-i\omega_C\tau} e^{i\omega\tau} = - \int_0^t d\tau e^{-i\omega_C\tau} e^{i\omega\tau}. \quad (3.18)$$

Expandimos el límite temporal ( $t \rightarrow \infty$ ):

$$-\int_0^\infty d\tau e^{-iw_C\tau} e^{iw\tau} = -[\pi\delta(w_C - w) + i\frac{P}{(w - w_C)}]. \quad (3.19)$$

Donde P es el número principal de Cauchy.

Si ahora volvemos a nuestra ecuación maestra, por ejemplo, a la ecuación 3.10:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} = & -\int_0^t d\tau \{ [aa^\dagger \tilde{\rho}(t-\tau) - a^\dagger \tilde{\rho}(t-\tau)a] e^{-iw_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t-\tau) \rangle_R + h.c. + \\ & + [a^\dagger a \tilde{\rho}(t-\tau) - a \tilde{\rho}(t-\tau) a^\dagger] e^{iw_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t-\tau) \rangle_R + h.c. \}. \end{aligned}$$

Nos damos cuenta de que el valor de dicha ecuación es cero si la  $\tau \neq 0$ , por lo que realizamos el cálculo para  $\tau \rightarrow 0$ . Así eliminamos la dependencia de  $\rho \neq \rho(\tau)$  y queda solo dependiendo de  $\rho = \rho(t)$  gracias a que la integral se hace no nula.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\rho}} = & -\int_0^t d\tau \{ [aa^\dagger \tilde{\rho}(t) - a^\dagger \tilde{\rho}(t)a] e^{-iw_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \tilde{\Gamma}(t) \rangle_R + h.c. + \\ & + [a^\dagger a \tilde{\rho}(t) - a \tilde{\rho}(t) a^\dagger] e^{iw_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}(t) \tilde{\Gamma}^\dagger(t) \rangle_R + h.c. \}. \end{aligned}$$

Si sustituímos el resultado de las integrales, dejándolas indicadas en función de  $\alpha$  y  $\beta$  tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pi g(w_C) |k(w_C)|^2 + i\Delta, \\ \beta &= \pi g(w_C) |k(w_C)|^2 \tilde{n}(w_C) + i\Delta, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde:

$$\begin{aligned} \Delta &= P \int_0^\infty dw \frac{g(w_C) |k(w_C)|^2}{w_C - w}, \\ \Delta' &= P \int_0^\infty dw \frac{g(w_C) |k(w_C)|^2 \tilde{n}(w_C)}{w_C - w}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Por último haciendo:

$$\begin{aligned} k &= \pi g(w_C) |k(w_C)|^2, \\ \tilde{n} &= \tilde{n}(w_C). \end{aligned} \quad (3.22)$$

A partir de aquí vamos a explicar el cálculo teórico:

(\*nótese que en la siguiente explicación,  $\rho$  no tiene tilde, pero las siguientes cuatro ecuaciones, hasta la ecuación 3.27, han de entenderse con  $\tilde{\rho}$ ).

$$\begin{aligned} -\dot{\tilde{\rho}} &= (a^\dagger a \rho - a \rho a^\dagger) \alpha + (a^\dagger a \rho - a \rho a^\dagger + \rho a a^\dagger - a^\dagger \rho a) \beta + h.c. \\ &= \alpha (a^\dagger a \rho - a \rho a^\dagger) + \beta (a^\dagger a \rho - a \rho a^\dagger + \rho a a^\dagger - a^\dagger \rho a) \\ &\quad + \alpha^* (\rho a^\dagger a - a \rho a^\dagger) + \beta^* (\rho a^\dagger a - a \rho a^\dagger + a a^\dagger \rho - a^\dagger \rho a), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\dot{\tilde{\rho}} = \underbrace{a \rho a^\dagger (\alpha + \alpha^*)}_{(1)} + \underbrace{(a \rho a^\dagger + a^\dagger \rho a) (\beta + \beta^*)}_{(2)} - \underbrace{a^\dagger a \rho (\alpha + \beta)}_{(3)} - \underbrace{\rho a^\dagger a (\alpha^* + \beta^*)}_{(4)} - \underbrace{\beta (\rho a a^\dagger)}_{(5)} - \underbrace{\beta^* (a a^\dagger \rho)}_{(6)}. \quad (3.24)$$

Vamos a analizar cada término por separado

$$\begin{aligned} (1) &= a \rho a^\dagger 2\pi g(w_C) |k(w)|^2, \\ (2) &= (a \rho a^\dagger + a^\dagger \rho a) 2\pi g(w_C) |k(w_C)|^2 \tilde{n}(w_C, T), \\ (3) + (4) &= (-a^\dagger a \rho - \rho a^\dagger a) \pi g(w_C) |k(w_C)|^2 \tilde{n}((w_C, T) + 1) + i\Delta [\rho, a^\dagger a] + i\Delta' [\rho, a^\dagger a], \\ (5) + (6) &= (-\rho a a^\dagger - a a^\dagger \rho) \pi g(w_C) |k(w_C)|^2 \tilde{n}(w_C, T) - i\Delta' [\rho, a^\dagger a]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Haciendo el cambio de variable de 3.22 y agrupamos términos queda:

$$\begin{aligned}
 \dot{\rho} &= 2k(a\rho a^\dagger) + 2kn(a\rho a^\dagger + a^\dagger\rho a) - k(n+1)(a^\dagger a\rho + \rho a^\dagger a) \\
 &+ i\Delta[\rho, a^\dagger a] + i\Delta'[\rho, a^\dagger a] - i\Delta'[\rho, a^\dagger a] - (\rho a a^\dagger + a a^\dagger \rho)kn \\
 &= k(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + kn(2a\rho a^\dagger + 2a^\dagger\rho a - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a - \rho a a^\dagger - a a^\dagger \rho) + i\Delta[\rho, a^\dagger a] \\
 &= -i\Delta[a^\dagger a, \rho] + k(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + 2kn(a\rho a^\dagger + a^\dagger\rho a - a^\dagger a\rho - \rho a a^\dagger).
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Llegamos entonces a la ecuación maestra en imagen de interacción:

(\*\*Nótese que ahora  $\rho$  si lleva tilde)

$$\dot{\rho} = -i\Delta[a^\dagger a\tilde{\rho}] + k(2a\tilde{\rho}a^\dagger - a^\dagger a\tilde{\rho} - \tilde{\rho}a^\dagger a) + 2k\tilde{n}(a\tilde{\rho}a^\dagger + a^\dagger\tilde{\rho}a - a^\dagger a\tilde{\rho} - a\tilde{\rho}a a^\dagger). \tag{3.27}$$

Volvemos de nuevo a la imagen de Schrödinger:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[H_S, \rho] + e^{(-\frac{i}{\hbar}H_S t)}\dot{\rho}e^{(\frac{i}{\hbar}H_S t)}. \tag{3.28}$$

Por lo que finalmente obtenemos:

$$\boxed{\dot{\rho} = -i(w_C + \Delta)[a^\dagger a, \rho] + k(2a\rho a^\dagger - a^\dagger a\rho - \rho a^\dagger a) + 2k\tilde{n}(a\rho a^\dagger + a^\dagger\rho a - a^\dagger a\rho - \rho a a^\dagger)}. \tag{3.29}$$

### 3.3. Cálculo de los estados estacionarios de las poblaciones

La condición para tener un estado estacionario es  $\dot{\rho}(\infty) = 0$ . Por tanto, cogemos nuestra ecuación, proyectamos a izquierdas y derechas sobre un mismo estado cualquiera  $|n\rangle$  e igualamos a 0:

$$\begin{aligned}
 \langle n|\dot{\rho}|n\rangle = \dot{\rho}_{nn} = 0 &= [-2kn - 2k\tilde{n}(2n+1)]\rho_{(nn)} + [2k(n+1) + 2k\tilde{n}(n+1)]\rho_{(n+1n+1)} + [2kn\tilde{n}]\rho_{(n-1n-1)} \\
 &= 2k[(-n - \tilde{n} - 2n\tilde{n})\rho_{(nn)} + [(n+1)(\tilde{n}+1)]\rho_{(n+1n+1)} + n\tilde{n}\rho_{(n-1n-1)}].
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

A partir de aquí, despejamos  $\rho_{(n+1n+1)}$ :

$$\rho_{(n+1n+1)} = \frac{1}{(1+n)(1+\tilde{n})}[(2n\tilde{n} + n + \tilde{n})\rho_{(nn)} - n\tilde{n}\rho_{(n-1n-1)}]. \tag{3.31}$$

Ahora procederemos a encontrar una regla según vayamos calculando  $n = 1, 2, \dots$

**n=0**

$$\rho_{11} = \frac{1}{1+\tilde{n}}[\tilde{n}\rho_{00}] = \frac{\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\rho_{00}, \tag{3.32}$$

**n=1**

$$\begin{aligned}
 \rho_{22} &= \frac{1}{2(1+\tilde{n})}[(2\tilde{n}+1+\tilde{n})\rho_{11} - \tilde{n}\rho_{00}] \\
 &= \frac{1}{2(1+\tilde{n})}\left[\frac{(2\tilde{n}+1+\tilde{n})\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\rho_{00} - \tilde{n}\rho_{00}\right] \\
 &= \left(\frac{\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\right)^2\rho_{00},
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

**n=2**

$$\begin{aligned}
 \rho_{22} &= \frac{1}{2(1+\tilde{n})}[(2\tilde{n}+1+\tilde{n})\rho_{11} - \tilde{n}\rho_{00}] \\
 &= \frac{1}{2(1+\tilde{n})}\left[\frac{(2\tilde{n}+1+\tilde{n})\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\rho_{00} - \tilde{n}\rho_{00}\right] \\
 &= \frac{\rho_{00}}{2(1+\tilde{n})}\left(\frac{2\tilde{n}^2 + \tilde{n} + \tilde{n}^2 - \tilde{n} - \tilde{n}^2}{1+\tilde{n}}\right) \\
 &= \left(\frac{\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\right)^2\rho_{00}.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$n=3$

$$\rho_{33} = [\dots] = \left(\frac{\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\right)^3 \rho_{00}, \quad (3.35)$$

Por lo que podemos deducir que:

$$\rho_{nn} = \left(\frac{\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\right)^n \rho_{00}, \quad (3.36)$$

Ahora añadimos la condición de normalización:  $\sum_n \rho_{nn} = 1$  y obtenemos:

$$\sum_0^{\infty} \left(\frac{\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\right)^n \rho_{00} = 1 \quad (3.37)$$

$$\rho_{00} = \frac{1}{1+\tilde{n}},$$

Por lo que finalmente queda que:

$$\boxed{\rho_{nn} = \frac{\tilde{n}^n}{(1+\tilde{n})^{n+1}}}. \quad (3.38)$$

### 3.4. Resolución de la ecuación maestra

Para resolver la ecuación maestra, lo primero que hay que hacer es proyectar a izquierdas y derechas sobre los estados número, cada término de  $\dot{\rho}$ . Así, obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas que podemos resolverlo con python diagonalizando la matriz  $\hat{A}$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho}_{00} \\ \dot{\rho}_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{\rho}_{nn} \end{pmatrix} = \hat{A} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_{00} \\ \tilde{\rho}_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{\rho}_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Una vez que se ha proyectado la ecuación en los estados  $\langle n|, |m \rangle$  cualquiera se puede escribir en función de tres posibles componentes de  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \langle n|\dot{\rho}|m \rangle &= [-iw'_C(n-m) - (n+m)k - 2k\tilde{n}(n+m+1)]\langle n|\rho|m \rangle \\ &+ [2k\sqrt{n+1}\sqrt{m+1} + 2k\tilde{n}\sqrt{n+1}\sqrt{m+1}]\langle n+1|\rho|m+1 \rangle \\ &+ [-2k\tilde{n}\sqrt{n}\sqrt{m}]\langle n-1|\rho|m-1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Mediante el lenguaje de programación **Python** hemos sido capaz de crear un programa que en base a dos parámetros (función de onda y número de niveles del oscilador) es capaz de resolver la ecuación maestra. Para ello se basa lo siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= \hat{A}\rho(t) \\ \hat{A} &= \hat{S}\hat{D}\hat{A}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.41)$$

(\* $\hat{D}$  es una matriz diagonal)  
luego:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t+\Delta t) - \rho(t) &= A\rho(t)\Delta t \\ &= \hat{S}\hat{D}\hat{A}^\dagger\rho(t)\Delta t. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Multiplicando a izquierda por  $\hat{S}^\dagger$  y a derecha por  $\hat{S}$

$$\hat{S}^\dagger\tilde{\rho}(t+\Delta t)\hat{S} = \hat{S}^\dagger\rho(t)\hat{S} + \hat{D}\hat{S}^\dagger\rho(t)\hat{S}\Delta t. \quad (3.43)$$

Podemos ver que hemos hecho un cambio de base, donde  $\hat{S}^\dagger\rho(t)\hat{S}$  es básicamente  $\rho$  en la base de vectores propios de  $\hat{A}$ .

La solución final de  $\rho(t)$  será proporcional a una combinación lineal de autovectores de la matriz  $\hat{A}$  multiplicadas por exponenciales que dependerán de los autovalores de la matriz:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_1(t) \\ \rho_2(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_n(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix} e^{\lambda_n t} \quad (3.44)$$

(\*)Las constantes  $c_n$  se calculan mediante las condiciones iniciales. Los vectores columna  $\hat{a}, \hat{b}, \dots, \hat{d}$  son los autovectores de la matriz  $\hat{A}$ .

A continuación, procederemos a calcular un caso concreto de condición inicial y la estudiaremos en función de los parámetros del baño y el sistema  $S$ .

### Cálculo de la evolución temporal de las poblaciones

Todos los cálculos que requieren elegir una base de tamaño finito para realizar los cálculos hemos comprobado que la convergencia es correcta, de manera que el resultado no varía significativamente cuando aumenta el tamaño de la base.

Así pues, vamos a estudiar las poblaciones a modo de ilustración para los valores:

$$w_C = 1 \quad k = 1 \quad \tilde{n} = 1 \quad (3.45)$$

Estas cifras de arriba se mantendrán constantes en el estudio de las poblaciones de la ecuación maestra para este sistema.

Cogiendo 5 niveles para una función de onda inicial  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|2\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|3\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|4\rangle$  tenemos:

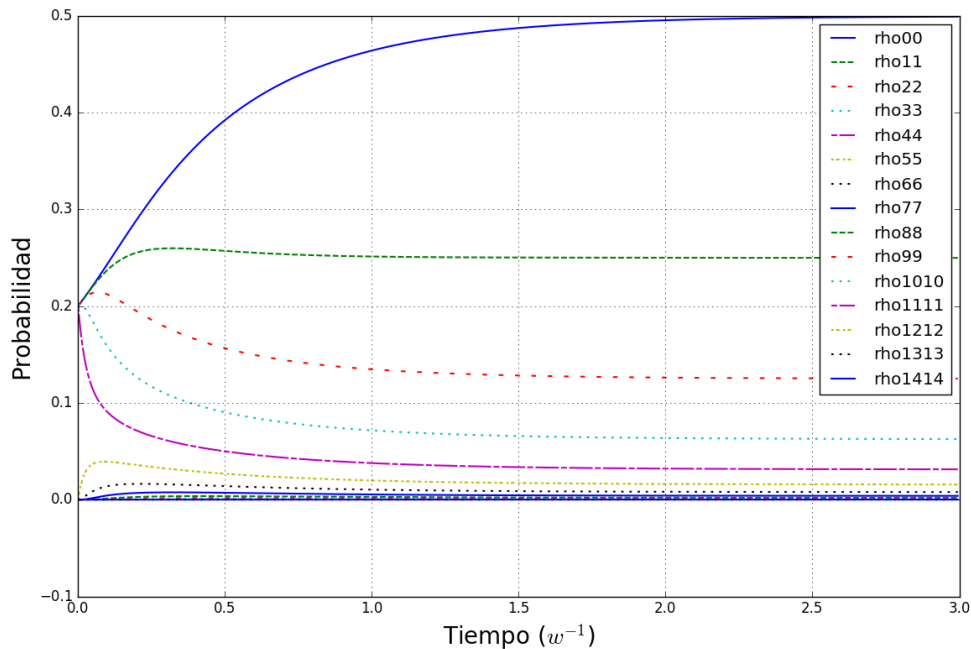


Figura 2: Poblaciones del oscilador (5 estados) armónico inmerso en un baño térmico  $\tilde{n} = 1$



Es muy importante recalcar que cuando indicamos  $w_C = 1$ , nos referimos a que el gap entre niveles de la energía de los estados del oscilador armónico es una unidad arbitraria. En este trabajo no nos vamos a centrar en dar cuenta de la magnitud exacta de los tiempos de decaimiento sino en la forma con la que evolucionan la probabilidad de cada estado. Además esta frecuencia  $w_C$  es concretamente la unidad que aparece en el eje x de las gráficas (que aparece como  $w$ ).

En la figura 2, podemos ver las poblaciones, es decir, la evolución temporal de los elementos diagonales de la matriz densidad. Además sus probabilidades tienden a los estados estacionarios calculados anteriormente en la sección 3.3,

Probabilidad teórica	Probabilidad Calculada
0.5000	0.4952
0.2500	0.2499
0.1250	0.1260
0.0626	0.0636
0.0313	0.0320
0.0156	0.0161
0.0078	0.0081
0.0039	0.0041
0.0019	0.0020
9.76e-4	0.0010
4.88e-4	4.9e-4
2.44e-4	2.40e-4
1.22e-4	1.11e-4
6.10e-05	4.69e-05
3.05e-05	1.53e-05

Cuadro 1: Probabilidad de los estados asintóticos de las poblaciones  $\tilde{n} = 1$ .

Vamos a estudiar a continuación, el comportamiento del sistema cuando fijamos  $\tilde{n} = 0$ , es decir, el número de ocupación del baño tiende a cero, lo que equivaldría a tener un baño a temperatura de 0K.

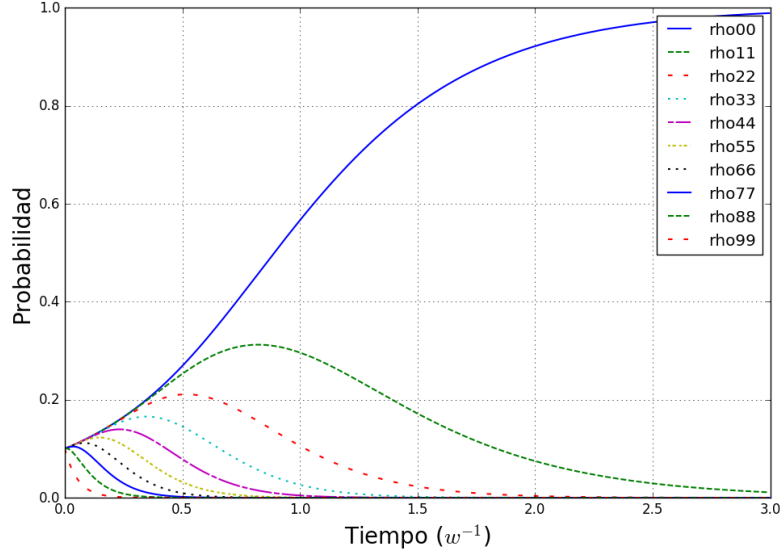


Figura 3: Poblaciones del oscilador armónico (10 estados) para  $\tilde{n} = 0$

Podemos ver que las poblaciones de la figura 3 decaen al estado fundamental (línea azul marina y/o sólida en la gráfica), por lo que el estado  $|0\rangle$  es el que alcanza la máxima probabilidad (1 = 100 %).

Además podemos observar que el resto de estados excepto el estado más alto de nuestra función de onda (el estado  $|4\rangle$ ) tienen un valor de probabilidad que aumenta en un cierto tiempo justo después de empezar a contar el reloj y luego vuelven a decaer hasta tener una probabilidad nula o casi nula de encontrar energía en esos estados.

Este comportamiento es debido a que la ecuación maestra es un mecanismo que entre otras cosas, adquiere energía de un nivel más alto y la transmite al nivel inferior. De tal manera que el estado  $|4\rangle$  transfiere su energía inicial al estado  $|3\rangle$  y por ello se encuentra que en el estado  $|3\rangle$  existe más probabilidad de encontrar energía en él. Sin embargo, este estado también transfiere energía al estado inferior, es decir al estado  $|2\rangle$ , de tal manera que cuando el estado  $|4\rangle$  se vacía por completo, el estado  $|3\rangle$  empieza a vaciarse y por ende, empieza a bajar la probabilidad de obtener energía en él a medida que avanzamos en el tiempo. Esto ocurre con todos los estados hasta llegar al fundamental, el cual es siempre el más probable de encontrar energía en él.

Como solo tenemos poblaciones iniciales hasta el estado  $|4\rangle$ , cabe preguntarse cómo es posible que exista probabilidad de encontrar a nuestro sistema en estados superiores atendiendo al mecanismo explicado anteriormente. Ello es debido a que existe otra operación que efectúa la ecuación maestra. La absorción inducida, es el mecanismo por el cual los estados absorben energía del baño y es por ello que los estados más altos tienen una probabilidad no nula después de  $t=0$ . Conforme nos vamos alejando de los estados inicialmente poblados, este proceso se atenúa.

Desde un punto de vista más teórico, podemos estudiar la ecuación maestra para explicar este fenómeno para las poblaciones:

Partimos de la ecuación 3.30, la cual, para el caso concreto de las poblaciones ( $n=m$ ), luego tenemos:

$$\dot{\rho} = 2k[(n+1)(\tilde{n}+1)\rho_{(n+1n+1)} + n\tilde{n}\rho_{(n-1n-1)} - \tilde{n}(n+1)\rho_{(nn)} - n(\tilde{n}+1)\rho_{(nn)}]. \quad (3.46)$$

(\*)Nótese que las poblaciones representan un subespacio del O.A.:  $\{|n-1\rangle, |n\rangle, |n+1\rangle\}$

Una posible explicación de la ecuación es:

- 1) El nivel  $|n\rangle$  gana población procedente del estado  $|n+1\rangle$  con un ritmo de  $2k(n+1)(\tilde{n}+1)$ .
- 2) El nivel  $|n\rangle$  gana población procedente del estado  $|n-1\rangle$  con un ritmo de  $2kn\tilde{n}$ .
- 3) El nivel  $|n\rangle$  cede población al estado  $|n+1\rangle$  con un ritmo de  $2k\tilde{n}(n+1)$ .
- 4) El nivel  $|n\rangle$  cede población al estado  $|n-1\rangle$  con un ritmo de  $2kn(\tilde{n}+1)$ .

En base a estos procesos, somos capaces de distinguir 3 procesos en la transferencia de población en el sistema:

- i) Pérdida de población de  $|n\rangle$  debida al efecto del baño, proceso conocido como emisión inducida
- ii) Obtención de población de  $|n\rangle$  debida al efecto del baño, proceso conocido como absorción inducida
- iii) Pérdida de población de  $|n\rangle$  debida al acoplamiento con el campo EM, proceso conocido como emisión espontánea.

Finalmente, nos gustaría analizar el sistema para una función de onda  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  con la condición de  $\tilde{n} = 0$ , es decir, teniendo un baño térmico sin fotones:

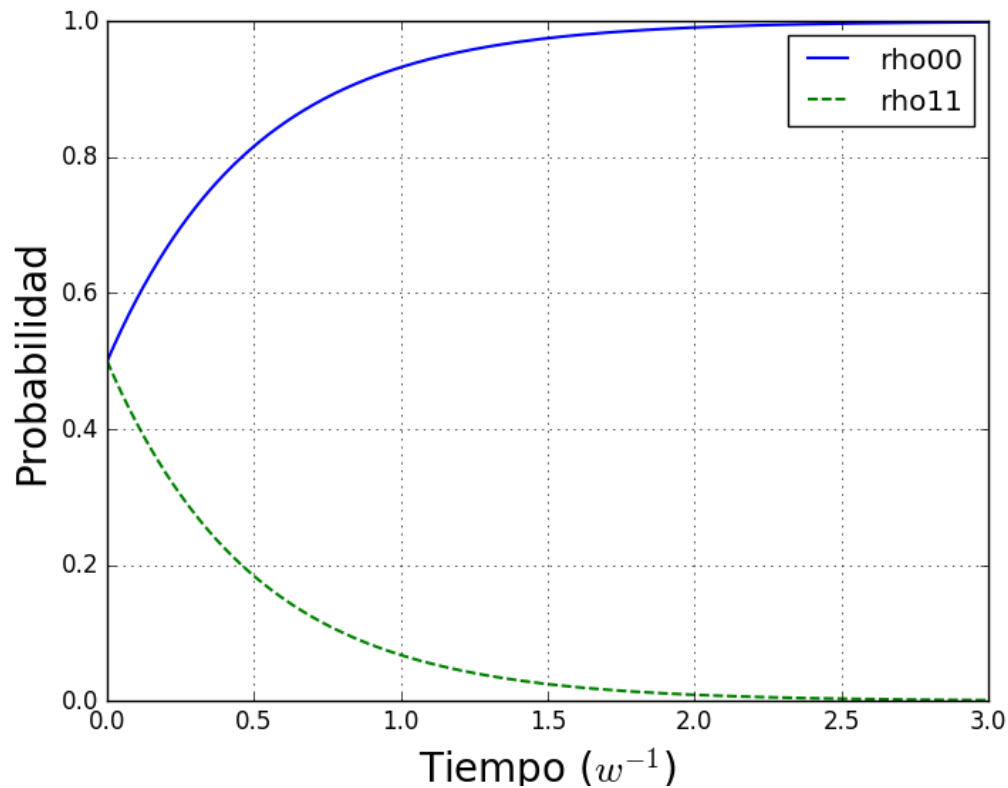


Figura 4: Poblaciones del oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 0$

Podemos ver en la figura 4 que la población cae al estado fundamental desde el nivel superior. La norma siempre se conserva.

Esto ocurre porque al hacer  $\tilde{n} = 0$ , estamos evitando los términos inducidos descritos anteriormente y nos quedamos solo con el término de emisión espontánea debido al campo EM.

Si en cambio ahora queremos aumentar la temperatura del baño (reservoir) de tal manera que ya los números de ocupación sean distinto de cero (en concreto  $\tilde{n} = 1$ , obtendremos:

Nótese que cuando indicamos que las unidades del eje x de las gráficas son  $w^{-1}$  nos referimos concretamente a la frecuencia característica del sistema  $S$  (en este caso  $w_C$ ).

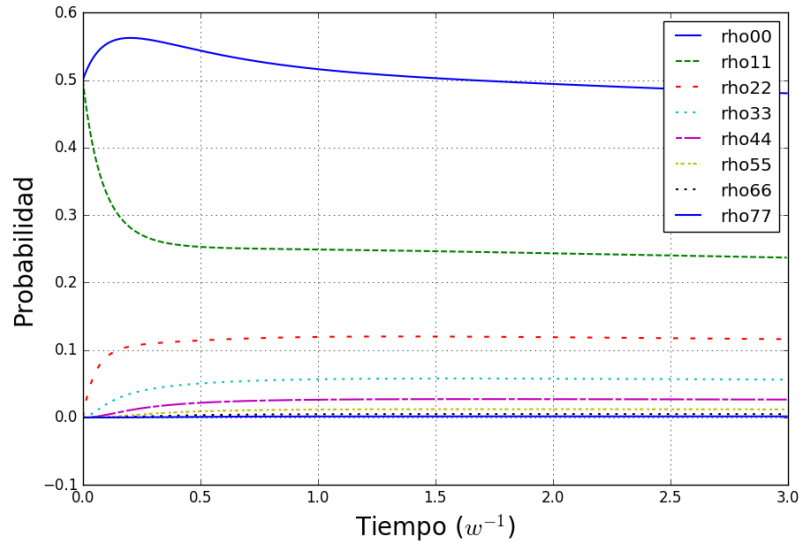


Figura 5: Poblaciones del oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 1$

En este sistema de la figura 5 las poblaciones más próximas al estado más alto poblado ( $|11\rangle$ ) de la función de onda inicial se van poblando de energía gracias al mecanismo de la absorción inducida. Sin embargo, otros dos mecanismos van a hacer transmitir esa población al resto de estados inferior como si de una cascada se tratase, amortiguando el efecto de decaimiento de la probabilidad y haciendo tender al sistema a un estado asintótico como el calculado y explicado antes.

Y aprovechando este último ejemplo vamos a hacer un estudio de las coherencias del sistema.

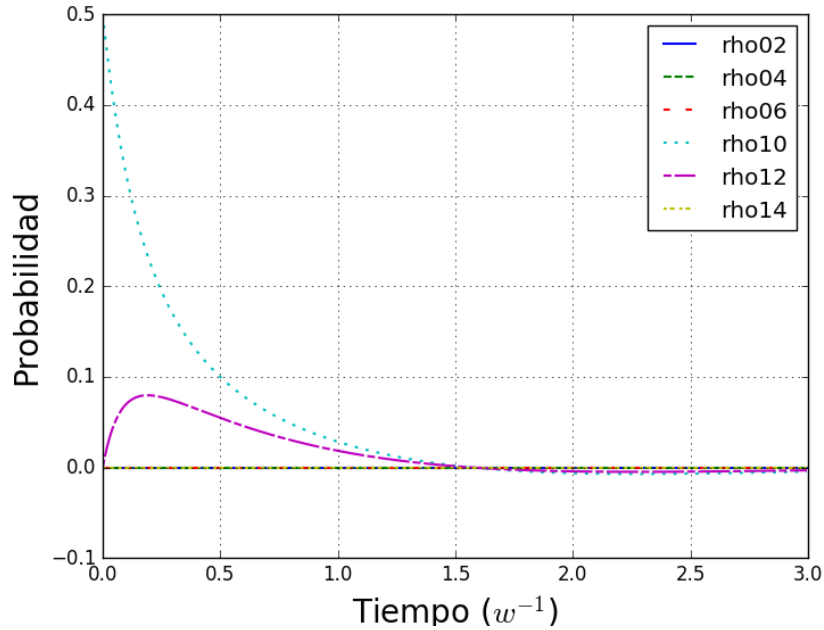


Figura 6: Coherencias del oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 1$

En la figura 6 podemos apreciar que para la función de onda  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  obtenemos todas las coherencias del sistema (son tantas que solo procedemos a graficar seis de ellas pero se asegura que todas tienden a cero). Podemos ver que todas ellas decaen a cero conforme pasa el tiempo.

Ello implica un tránsito entre un sistema  $S$  inicial con propiedades de superposición de estados (propiedades cuánticas), a un estado final con probabilidades clásicas de encontrar a dichos estados.

### Summary

*We have analysed the first concrete system: One Harmonic oscillator. This system is very important because, as the reservoir does not change everytime we choose another small system, the steps which guide us to reach a final equation are almost the same in all cases.*

*At first, we have calculated the master equation for this system, explaining the origin of all the approximations. Moreover we have worked out the time evolution of the density matrix using the master equation for some particular cases of initial wavefunctions.*

*As a result, we have obtained that  $k$  is the parameter responsible to connect the reservoir with our system  $S$ ,  $\tilde{n}$  is the coefficient which gives us the number of photons in the reservoir which is related with the temperature of the bath and the responsible of the measurement process. Finally the  $w_C$  is the parameter which define the energy gap between the harmonic oscillator states.*

## 4. Ecuación maestra de un sistema atómico de dos niveles en equilibrio térmico con un baño de radiación

En este capítulo se analizará y estudiará un sistema atómico de dos niveles inmerso en un baño térmico. Calcularemos la ecuación maestra para dicho sistema físico así como la evolución temporal del operador densidad para distintas funciones de onda iniciales. Cabe decir, que este sistema es más sencillo que el anterior debido a que solo tenemos dos niveles de energía y por tanto nuestra matriz densidad solo va a tener 4 componentes, a diferencia del oscilador armónico anterior que podíamos coger los niveles que quisiéramos.

#### 4.1. Derivación de la ecuación maestra

En esta ocasión, consideraremos un átomo de dos niveles en presencia de un baño térmico de fotones. Los estados energéticos del átomo son  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  con energías respectivas  $E_1$  y  $E_2$  siendo  $E_1 < E_2$ .

Nuestro objetivo es describir la energía disipada y la transición de estados  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  con el campo de radiación de vacío (osciladores armónicos del baño).

Podemos describir este sistema atómico de dos niveles con las matrices de Pauli. Si partimos de la base de que cualquier operador puede ser expandido como sigue utilizando la relación de cierre:

$$\hat{O} = \sum_{n,m} \langle n|\hat{O}|m\rangle |n\rangle\langle m|. \quad (4.1)$$

Si tomamos los autovectores de la energía  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  como base de nuestro sistema atómico de dos niveles, podemos escribir entonces:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_{int}, \quad (4.2)$$

$$\hat{H}_0 = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)\hat{1} + \frac{1}{2}(E_2 - E_1)\hat{\sigma}_z, \quad (4.3)$$

donde  $\hat{\sigma} = |2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$ .

El primer término de  $H_0$  lo podemos omitir si establecemos nuestro sistema de referencia de la energía en el medio de la energía de los estados  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ .

Entonces cogiendo ese origen, podemos escribir la energía  $\hat{H}_0$  en términos de la matriz  $\hat{\sigma}_z$ ,

$$\hat{H}_A = \frac{1}{2}\hbar w_A \hat{\sigma}_z, \quad (4.4)$$

donde  $w_A = (E_2 - E_1)/\hbar$ .

El momento dipolar eléctrico se define como:  $e\hat{q}$ :

$$\begin{aligned} e\hat{q} &= e \sum_{n,m=1}^2 \langle n|\hat{q}|m\rangle |n\rangle\langle m| \\ &= e(n, m \langle 1|\hat{q}|2\rangle |1\rangle\langle 2| + \langle 2|\hat{q}|1\rangle |2\rangle\langle 1|) \\ &= d_{12}\hat{\sigma}_- + d_{21}\hat{\sigma}_+. \end{aligned} \quad (4.5)$$

debido a que  $\langle 1|\hat{q}|1\rangle = \langle 2|\hat{q}|2\rangle = 0$  debido a que  $\hat{q}$  es un operador impar y solo conecta estados con distinta paridad.

Además tenemos que:

$$\begin{aligned} d_{12} &= e\langle 1|\hat{q}|2\rangle, \\ d_{21} &= e\langle 2|\hat{q}|1\rangle, \\ \hat{\sigma}_- &= |1\rangle\langle 2|, \\ \hat{\sigma}_+ &= |2\rangle\langle 1|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Las representaciones matriciales de los operadores que necesitamos para nuestro hamiltoniano son:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Las relaciones de conmutación que necesitamos saber son:

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z \quad [\hat{\sigma}_\pm, \hat{\sigma}_z] = \mp 2\hat{\sigma}_\pm. \quad (4.8)$$

Los operadores anterior actúan sobre los estados de nuestro átomo de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_z|1\rangle &= -|1\rangle & \hat{\sigma}_z|2\rangle &= |2\rangle, \\ \hat{\sigma}_-|1\rangle &= 0 & \hat{\sigma}_-|2\rangle &= |1\rangle, \\ \hat{\sigma}_+|1\rangle &= |2\rangle & \hat{\sigma}_+|2\rangle &= 0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Visto todo esto, ya por último solo nos queda calcular estos valores medios que necesitaremos cuando resolvamos este sistema en particular:

$$\begin{aligned}\langle \hat{\sigma}_z \rangle &= \text{tr}(\hat{\rho}\hat{\sigma}_z) = \langle 2|\hat{\rho}|2\rangle - \langle 1|\hat{\rho}|1\rangle = \rho_{22} - \rho_{11}, \\ \langle e\hat{q} \rangle &= d_{12}\rho_{21} + d_{21}\rho_{12}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Ahora vamos a considerar un sistema atómico, en presencia de un baño térmico. El hamiltoniano de nuestro sistema será:

$$\begin{aligned}\hat{H}_S &= \frac{1}{2}\hbar\omega_A\hat{\sigma}_z, \\ \hat{H}_R &= \sum_{k,\lambda}\hbar\omega_k r_{k,\lambda}^\dagger, \\ \hat{H}_{SR} &= \sum_{k,\lambda}\hbar(k_{k,\lambda}^* r_{k,\lambda}^\dagger \hat{\sigma}_- + k_{k,\lambda} r_{k,\lambda} \hat{\sigma}_+).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Recordemos de la ecuación 2.12 sacamos los operadores de la energía de interacción:

$$\begin{aligned}s_1 &= \hat{\sigma}_-, \\ s_2 &= \hat{\sigma}_+, \\ \Gamma_1 &= \sum_{k,\lambda}(k_{k,\lambda}^* r_{k,\lambda}^\dagger), \\ \Gamma_2 &= \sum_{k,\lambda}(k_{k,\lambda} r_{k,\lambda}).\end{aligned}\tag{4.12}$$

Ahora calculamos la evolución temporal en imagen de interacción de manera análoga a como lo hicimos para el caso del oscilador armónico:

(\*)A partir de ahora, por comodidad, se sobreentiende que  $\sigma$  es un operador aunque no lleve el sombrero.

Los operadores del baño (reservoir) son los mismos que en el caso anterior

$$\begin{aligned}s_1 &= e^{i(\frac{\omega_A\sigma_z}{2})t}\sigma_-e^{-i(\frac{\omega_A\sigma_z}{2})t} = \sigma_-e^{-i\omega_A t}, \\ s_2 &= e^{i(\frac{\omega_A\sigma_z}{2})t}\sigma_+e^{-i(\frac{\omega_A\sigma_z}{2})t} = \sigma_+e^{i\omega_A t}.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Esta última ecuación 4.13, salvo por las diferencias en la notación, es igual a la ecuación 3.1, con la sustitución  $a \rightarrow \sigma_-$  y  $a^\dagger \rightarrow \sigma_+$ .

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \sum_{k,\lambda}(k_{k,\lambda}^* r_{k,\lambda}^\dagger)e^{i\omega_k t}, \\ \Gamma_2 &= \sum_{k,\lambda}(k_{k,\lambda} r_{k,\lambda})e^{-i\omega_k t}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

Ahora debemos sustituir estos operadores en la ecuación maestra exactamente igual a como lo hicimos anteriormente en la ecuación 3.9:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & - \int_0^t dt' \{ [\tilde{s}_1(t)\tilde{s}_1(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_1(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t')] \langle \tilde{\Gamma}_1(t)\tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ & + [-\tilde{s}_1(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t')\tilde{s}_1(t)] \langle \tilde{\Gamma}_1(t')\tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \\ & + [\tilde{s}_2(t)\tilde{s}_1(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_2(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t')] \langle \tilde{\Gamma}_2(t)\tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ & + [-\tilde{s}_1(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t')\tilde{s}_2(t)] \langle \tilde{\Gamma}_1(t')\tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \\ & + [\tilde{s}_1(t)\tilde{s}_2(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_1(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t')] \langle \tilde{\Gamma}_1(t)\tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R \\ & + [-\tilde{s}_2(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t')\tilde{s}_1(t)] \langle \tilde{\Gamma}_2(t')\tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \\ & + [\tilde{s}_2(t)\tilde{s}_2(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_2(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t')] \langle \tilde{\Gamma}_2(t)\tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R \\ & + [-\tilde{s}_2(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t')\tilde{s}_2(t)] \langle \tilde{\Gamma}_2(t')\tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \}. \end{aligned}$$

Como el baño es el mismo (el único sistema que cambiamos es el sistema pequeño  $S$ ) se nos van la mitad de los términos quedando:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & - \int_0^t dt' \{ [\sigma_+\sigma_-\tilde{\rho}(t') - \sigma_+\tilde{\rho}(t')\sigma_-] e^{iw_A(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_1(t)\tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ & + [-\sigma_-\tilde{\rho}(t')\sigma_+ + \tilde{\rho}(t')\sigma_-\sigma_+] e^{iw_A(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_1(t')\tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \\ & [\sigma_-\sigma_+\tilde{\rho}(t') - \sigma_-\tilde{\rho}(t')\sigma_+] e^{-iw_A(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_1(t)\tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R \\ & + [-\sigma_+\tilde{\rho}(t')\sigma_- + \tilde{\rho}(t')\sigma_+\sigma_-] e^{-iw_A(t-t')} \langle \tilde{\Gamma}_2(t')\tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

La derivación de la ecuación maestra para el sistema atómico de dos niveles es completamente análoga a la resolución de la ecuación maestra del modo de una cavidad (oscilador armónico). Hay ciertas diferencias como las relaciones de conmutación o los grados de libertad.

Resolviendo exactamente las mismas integrales que en el caso anterior llegamos a

$$\dot{\rho} = \frac{-i}{2} w'_A [\sigma_z, \rho] + \frac{\rho}{2} (\tilde{n} + 1) (2\sigma_-\rho\sigma_+ - \sigma_+ + \sigma_-\rho - \rho\sigma_+\sigma_-) + \frac{\gamma}{2} \tilde{n} (2\sigma_+\rho\sigma_- - \sigma_-\sigma_+\rho - \rho\sigma_-\sigma_+), \quad (4.16)$$

que es la ecuación maestra para un sistema atómico de dos niveles en presencia de un baño térmico, donde

$$\begin{aligned} \gamma & \equiv 2\pi \sum_{\lambda} \int d^3k g(\mathbf{k}) |k(\mathbf{k}, \lambda)|^2 \delta(k_c - w_A), \\ \Delta & \equiv \sum_{\lambda} P \int d^3k \frac{g(\mathbf{k}) |k(\mathbf{k}, \lambda)|^2}{w_A - k_c}, \\ \Delta' & \equiv \sum_{\lambda} P \int d^3k \frac{g(\mathbf{k}) |k(\mathbf{k}, \lambda)|^2}{w_A - k_c} \tilde{n}(k_c, T). \end{aligned} \quad (4.17)$$

## 4.2. Resolución de la ecuación maestra

Para resolver la ecuación maestra debemos resolver un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Para ello diagonalizaremos la siguiente matriz de manera análoga a como lo hicimos en la *cavity mode*:

	$\rho_{11}$	$\rho_{12}$	$\rho_{21}$	$\rho_{22}$
$\dot{\rho}_{11}$	$-\gamma\tilde{n}$	0	0	$\gamma(\tilde{n} + 1)$
$\dot{\rho}_{12}$	0	$iw'_A - \gamma(\tilde{n} + \frac{1}{2})$	0	0
$\dot{\rho}_{21}$	0	0	$-iw'_A - \gamma(\tilde{n} + \frac{1}{2})$	0
$\dot{\rho}_{22}$	$\gamma\tilde{n}$	0	0	$-\gamma(\tilde{n} + 1)$



Vamos a analizar los términos del operador densidad (poblaciones y coherencias) para distintos valores de las variables de la ecuación maestra.

A modo de ilustración, para el caso de tener los valores:  $\gamma = 0,5$   $\tilde{n} = 3$   $w'_A = 1$

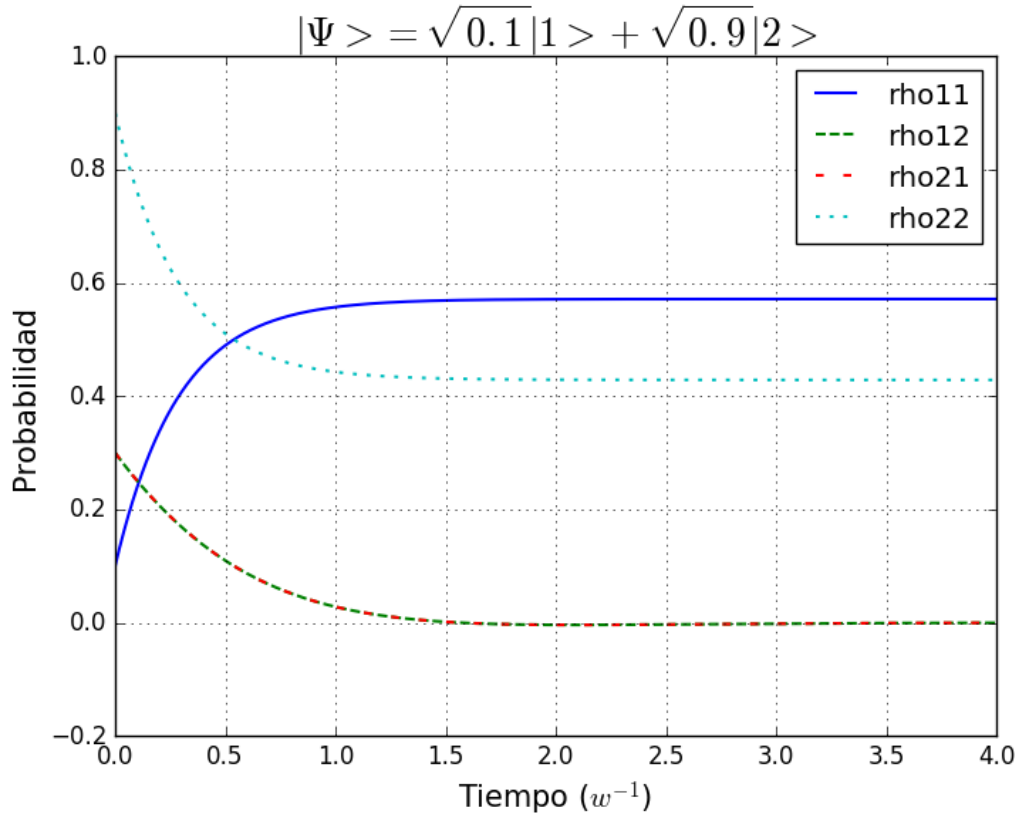


Figura 7: Poblaciones del sistema atómico para  $\tilde{n} = 3$

Esta gráfica trata de un sistema atómico de dos niveles en un reservorio con un número de ocupación  $\tilde{n} = 3$ . Podemos ver en ella la evolución de las poblaciones  $\rho_{11}$  y  $\rho_{22}$  y de las coherencias  $\rho_{12}$  y  $\rho_{21}$ .

Las poblaciones parten de la función de onda inicial descrita en el título. Al principio, existe una probabilidad de un 10% de encontrar al sistema en el estado fundamental  $\rho_{11}$  y un 90% de encontrar al sistema en el estado  $\rho_{22}$ . Sin embargo, según avance el tiempo y debido a los fotones del baño, las probabilidades hacen que el estado fundamental sea el más probable, conforme a la distribución de temperaturas del baño, conservándose en todo momento la norma de  $\rho$  o probabilidad total.

Además, nos damos cuenta de que estas dos poblaciones alcanzan estados asintóticos conforme transcurre el tiempo como vimos en el caso anterior.

Con respecto a las coherencias  $\rho_{12}$  y  $\rho_{21}$ , vemos que a medida que avanza el tiempo decaen a 0, se hacen nulas, por lo que al final obtendremos un sistema con probabilidades clásicas de encontrar dos estados.

Para el caso de tener los valores:  $\gamma = 0,5$   $\tilde{n} = 0$   $w'_A = 1$

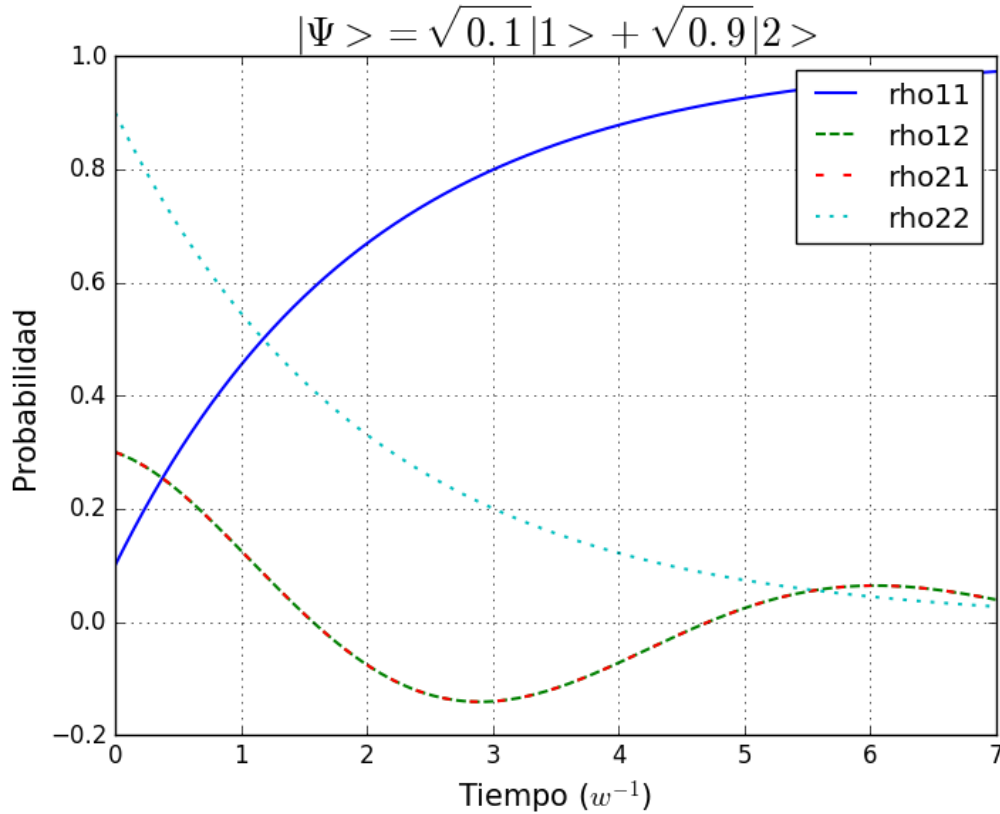


Figura 8: Poblaciones del sistema atómico para  $\tilde{n} = 0$

En este otro caso tenemos esta vez un número de ocupación  $\tilde{n} = 0$ . Ello implicaría una temperatura de  $0K$ , es decir, no tener fotones en el baño que provoquen una absorción inducida y por tanto provoquen un aumento en las poblaciones más altas.

Lo que observamos de la gráfica es que el estado  $\rho_{22}$  va cediendo toda su población al estado fundamental, hasta haber probabilidad nula de encontrar energía en él. A diferencia de cuando la  $\tilde{n} \neq 0$ , nunca obtendremos que los estados avanzan a una probabilidad no nula estacionaria o asintótica.

Para el caso de tener los valores a modo de ilustración:  $\gamma = 0$   $\tilde{n} = 0$   $w'_A = 1$

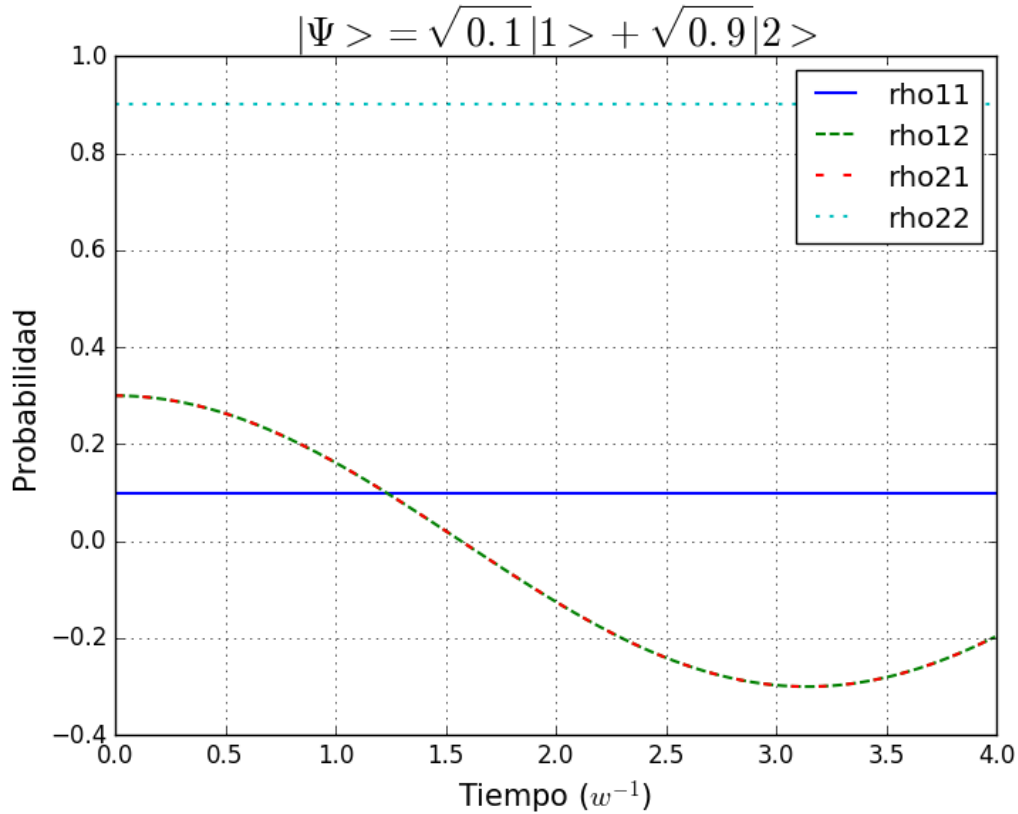


Figura 9: Poblaciones del sistema atómico para  $\tilde{n} = 0$  y  $\gamma = 0$

Esta última gráfica nos sirve de ejemplo perfecto para explicar el término  $\gamma$ . Cuando hacemos tender a cero dicho término, logramos desacoplar los dos niveles de nuestro sistema atómico del baño, de manera análoga al parámetro  $k$  del oscilador armónico del capítulo anterior, logrando dos estados estacionarios (independientemente del valor de  $\tilde{n}$ ).

Con respecto a las coherencias, no hay problema porque sus probabilidades sean menores a cero debido a que son números imaginarios dependientes del término  $w_c$ . Lo importante es que tienden a cero a medida que avanza  $t$ .

### Summary

*We have analysed the second system: Two-state atom. At first, we have calculated the master equation for this system. Then we have calculated the time evolution of the density matrix using the master equation for some particular cases of initial wavefunctions as we did in the previous case. This is an easier system than the harmonic oscillator because the problem to solve the master equation is fixed to calculate a matrix  $4 \times 4$ . Also, we have obtained some interesting results. For instance, there are some parameters which define some properties of the system. In this time  $\gamma$  is the object which couple the reservoir with the system  $S$ . As the previous case, the parameter  $\tilde{n}$  is the responsible of the measurement process, it means the decayment of the coherences and the reach to the asymptotic states.*

## 5. Ecuación maestra de dos osciladores armónicos acoplados a un baño de radiación térmica

En este capítulo deduciremos la ecuación maestra para un sistema formado por dos osciladores armónicos acoplados entre sí e inmersos en un baño térmico (mismo baño que en los dos sistemas anteriores). Estudiaremos la evolución temporal de los elementos de la matriz densidad en función de distintas funciones de onda iniciales.

Este sistema es un poco más complicado de resolver debido a la gran cantidad de elementos que se obtienen en el sistema de ecuaciones diferenciales a resolver. Ello es debido a que los estados son el producto tensorial de las funciones de onda de ambos osciladores armónicos.

### 5.1. Derivación de la ecuación maestra

En este sistema particular vamos a realizar las siguientes condiciones:

Tendremos dos osciladores armónicos con la misma frecuencia ( $w_C$ ) (como podemos ver este punto es mejorable, dando como desafío a un futuro alumno de TFG la posibilidad de realizar el cálculo para dos osciladores armónicos de frecuencias distintas).

Conectaremos cada oscilador armónico con un baño ( $H_R$ ) independiente, de tal manera que simularemos que ambos osciladores armónicos se encuentran inmersos en el mismo baño pero no contemplaremos la capacidad de que un oscilador armónico intercambie energía con un baño y que luego ese fotón pueda ser usado para intercambiar energía con el otro baño.

Teniendo esto en cuenta, nuestro operador hamiltoniano (por comodidad evitaremos el uso del sombrero  $\hat{H}$ ) tendrá la siguiente forma:

$$H = H_S + H_R + H_{RS} = \underbrace{H_1 + H_2 + H_{12}}_{H_S} + H_R + \underbrace{H_{1R} + H_{2R}}_{H_{RS}}, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} H_S &= \hbar w_C a_x^\dagger a_x + \hbar w_C a_y^\dagger a_y + \gamma(a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y), \\ H_R &= \sum_j \hbar w_j r_j^\dagger, \\ H_{1R} &= \sum_j \hbar(k_j^* a_x r_j^\dagger + k_j a_x^\dagger r_j) = \hbar(s_1 \Gamma_1 + s_2 \Gamma_2), \\ H_{2R} &= \sum_j \hbar(k_j'^* a_y r_j'^\dagger + k_j' a_y^\dagger r_j') = \hbar(s_3 \Gamma_3 + s_4 \Gamma_4), \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= a_x & S_2 &= a_x^\dagger, \\ S_3 &= a_y & S_4 &= a_y^\dagger, \\ \Gamma_1 &= \sum_j (k_j^* r_j^\dagger) & \Gamma_2 &= \sum_j (k_j r_j), \\ \Gamma_3 &= \sum_j (k_j'^* r_j'^\dagger) & \Gamma_4 &= \sum_j (k_j' r_j'). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Por lo que este sería el hamiltoniano de nuestro sistema de dos osciladores armónicos. Ahora viene la parte más difícil, calcular la propagación temporal de los 8 operadores anteriores.

Podemos ver que los operadores del baño son iguales a los casos anteriores, debido a que el baño fotónico es el mismo. Sin embargo, los operadores de los osciladores (son análogos y por tanto solo

hay que calcular dos de ellos) son distintos debido a que la energía  $H_0$  ha cambiado:

$$\tilde{S}_1(t) = \exp\left(\frac{iH_0t}{\hbar}\right) \hat{S}_1 \exp\left(-\frac{iH_0t}{\hbar}\right), \quad (5.4)$$

donde

$$H_0 = \hbar\omega_C(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y) + \gamma(a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y). \quad (5.5)$$

Es decir, aparte de la energía de cada oscilador por separado, tenemos un término que relaciona el intercambio de energía entre los dos osciladores armónicos  $x$  e  $y$  de manera que conserve la energía (rotation-wave approximation).

Se puede comprobar que los dos sumandos de  $H_0$  conmutan:

$$[(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y), (a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y)] = 0. \quad (5.6)$$

Luego podemos factorizar la exponencial gracias a la propiedad

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(t) &= e^{i\omega_C t(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)} e^{\frac{i\gamma t}{\hbar}(a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y)} S_1 e^{-i\omega_C t(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)} e^{-\frac{i\gamma t}{\hbar}(a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y)} \\ &= e^{\frac{i\gamma t}{\hbar}(a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y)} \underbrace{e^{i\omega_C t(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)} S_1 e^{-i\omega_C t(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)}}_{S_1 e^{-i\omega_C t}} e^{-\frac{i\gamma t}{\hbar}(a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y)}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Por lo que podemos factorizar la solución de la evolución temporal del operador  $S_1$ :

$$\tilde{S}_1(t) = [e^{i\omega_C t(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)} S_1 e^{-i\omega_C t(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)}] e^{-i\omega_C t} = \bar{S}_1 e^{-i\omega_C t}. \quad (5.9)$$

Podemos hacer esto para cada uno de los operadores de los osciladores armónicos:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(t) &= \bar{S}_1 e^{-i\omega_C t} & \tilde{S}_2(t) &= \bar{S}_2 e^{i\omega_C t} \\ \tilde{S}_3(t) &= \bar{S}_3 e^{-i\omega_C t} & \tilde{S}_4(t) &= \bar{S}_4 e^{i\omega_C t}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Ahora habría que sustituir nuestros operadores que ahora ya dependen del tiempo en la ecuación análoga a la 3.9 pero ya tenemos en cuenta que los términos  $\langle \Gamma_i(t) \Gamma_i(t) \rangle = 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) &= - \int_0^t dt' \{ [\tilde{s}_1(t) \tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_2(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t')] \langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R + \\ &\quad + [-\tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t') \tilde{s}_1(t)] \langle \tilde{\Gamma}_2(t') \tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_1(t) \tilde{s}_4(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_4(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t')] \langle \tilde{\Gamma}_1(t) \tilde{\Gamma}_4(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_4(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_4(t') \tilde{s}_1(t)] \langle \tilde{\Gamma}_4(t') \tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_2(t) \tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_1(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t')] \langle \tilde{\Gamma}_2(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t') \tilde{s}_2(t)] \langle \tilde{\Gamma}_1(t') \tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_2(t) \tilde{s}_3(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_3(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t')] \langle \tilde{\Gamma}_2(t) \tilde{\Gamma}_3(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_3(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_3(t') \tilde{s}_2(t)] \langle \tilde{\Gamma}_3(t') \tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_3(t) \tilde{s}_2(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_2(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_3(t')] \langle \tilde{\Gamma}_3(t) \tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_3(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_2(t') \tilde{s}_3(t)] \langle \tilde{\Gamma}_2(t') \tilde{\Gamma}_3(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_3(t) \tilde{s}_4(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_4(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_3(t')] \langle \tilde{\Gamma}_3(t) \tilde{\Gamma}_4(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_3(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_4(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_4(t') \tilde{s}_3(t)] \langle \tilde{\Gamma}_4(t') \tilde{\Gamma}_3(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_4(t) \tilde{s}_3(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_3(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_4(t')] \langle \tilde{\Gamma}_4(t) \tilde{\Gamma}_3(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_4(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_3(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_3(t') \tilde{s}_4(t)] \langle \tilde{\Gamma}_3(t') \tilde{\Gamma}_4(t) \rangle_R \\ &\quad + [\tilde{s}_4(t) \tilde{s}_1(t') \tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_1(t) \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_4(t')] \langle \tilde{\Gamma}_4(t) \tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ &\quad + [-\tilde{s}_4(t') \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t) + \tilde{\rho}(t') \tilde{s}_1(t') \tilde{s}_4(t)] \langle \tilde{\Gamma}_1(t') \tilde{\Gamma}_4(t) \rangle_R \}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Además de haber quitado los términos nulos debidos al valor medio de los operadores del baño, debemos ahora tener en cuenta que no todos los operadores del baño conectan entre sí. Ello es debido a que los fotones que emiten los osciladores armónicos a un baño no pueden ser reabsorbidos por el otro oscilador armónico, sino que se pierden. De otro modo estaríamos añadiendo interacciones extra entre el baño y los osciladores armónicos.

Así pues, vamos a conectar el baño 1 ( $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ ) con el oscilador armónico 1 ( $S_1$  y  $S_2$ ) e independientemente conectaremos el baño 2 ( $\Gamma_2$  y  $\Gamma_2$ ) con el oscilador armónico 2 ( $S_3$  y  $S_4$ ). Podemos considerar después que los baños sean iguales o no, pero la condición para tratar de manera correcta nuestro problema es considerar que los operadores del primer baño no conectan con el segundo y viceversa.

El recurso matemático que nos permite hacer esto es desacoplar los baños, es decir,  $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$  y  $\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4$  únicamente. Dicho de otra forma, estaríamos haciendo que ambos osciladores armónicos estuvieran acoplados a baños independientes.

Por tanto, se nos cancelan la mitad de los términos de la ecuación anterior ya que no nos valen términos que mezclen operadores del oscilador armónico 1 ( $S_1$  y  $S_2$ ) con operadores del oscilador 2 ( $S_3$  y  $S_4$ ). Así, queda la ecuación anterior como:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(t) = & - \int_0^t dt' \{ [\tilde{s}_1(t)\tilde{s}_2(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_2(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t')] \langle \tilde{\Gamma}_1(t)\tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R + \\ & + [-\tilde{s}_1(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t')\tilde{s}_1(t)] \langle \tilde{\Gamma}_2(t')\tilde{\Gamma}_1(t) \rangle_R \\ & + [\tilde{s}_2(t)\tilde{s}_1(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_1(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_2(t')] \langle \tilde{\Gamma}_2(t)\tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R \\ & + [-\tilde{s}_2(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_1(t')\tilde{s}_2(t)] \langle \tilde{\Gamma}_1(t')\tilde{\Gamma}_2(t) \rangle_R \\ & + [\tilde{s}_3(t)\tilde{s}_4(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_4(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_3(t')] \langle \tilde{\Gamma}_3(t)\tilde{\Gamma}_4(t') \rangle_R \\ & + [-\tilde{s}_3(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_4(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_4(t')\tilde{s}_3(t)] \langle \tilde{\Gamma}_4(t')\tilde{\Gamma}_3(t) \rangle_R \\ & + [\tilde{s}_4(t)\tilde{s}_3(t')\tilde{\rho}(t') - \tilde{s}_3(t)\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_4(t')] \langle \tilde{\Gamma}_4(t)\tilde{\Gamma}_3(t') \rangle_R \\ & + [-\tilde{s}_4(t')\tilde{\rho}(t')\tilde{s}_3(t) + \tilde{\rho}(t')\tilde{s}_3(t')\tilde{s}_4(t)] \langle \tilde{\Gamma}_3(t')\tilde{\Gamma}_4(t) \rangle_R \}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Podemos observar que lo que realmente aparece en la ecuación anterior es casi la misma ecuación maestra del caso de un oscilador armónico pero repetida dos veces y con los operadores todavía dependientes del tiempo debido al hamiltoniano de interacción entre los osciladores.

El siguiente paso consiste como ya hemos visto en resolver las integrales (aproximación Markoviana):

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & - \int_0^{t\tau} \{ [\bar{S}_1(t)\bar{S}_2(t')\bar{\rho}(t') - \bar{S}_2(t')\bar{\rho}(t')\bar{S}_1(t)] e^{-i\omega_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}_1(t)\tilde{\Gamma}_2(t') \rangle_R + h.c. \\ & + [\bar{S}_2(t')\bar{S}_1(t)\bar{\rho}(t') - \bar{S}_1(t)\bar{\rho}(t')\bar{S}_2(t')] e^{i\omega_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}_2(t)\tilde{\Gamma}_1(t') \rangle_R + h.c. \\ & + [\bar{S}_3(t)\bar{S}_4(t')\bar{\rho}(t') - \bar{S}_4(t')\bar{\rho}(t')\bar{S}_3(t)] e^{-i\omega_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}_3(t)\tilde{\Gamma}_4(t') \rangle_R + h.c. \\ & + [\bar{S}_4(t')\bar{S}_3(t)\bar{\rho}(t') - \bar{S}_3(t)\bar{\rho}(t')\bar{S}_4(t')] e^{i\omega_C\tau} \langle \tilde{\Gamma}_4(t)\tilde{\Gamma}_3(t') \rangle_R + h.c. \}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

A partir de aquí, las integrales a resolver son las mismas que las del caso de la *cavity mode*:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i\Delta[\bar{S}_2\bar{S}_1, \bar{\rho}] + k(2\bar{S}_1\bar{\rho}\bar{S}_2 - \bar{S}_2\bar{S}_1\bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{S}_2\bar{S}_1) + 2k\tilde{n}(\bar{S}_1\bar{\rho}\bar{S}_2 + \bar{S}_2\bar{\rho}\bar{S}_1 - \bar{S}_2\bar{S}_1\bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{S}_1\bar{S}_2) \\ & -i\Delta[\bar{S}_4\bar{S}_3, \bar{\rho}] + k(2\bar{S}_3\bar{\rho}\bar{S}_4 - \bar{S}_4\bar{S}_3\bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{S}_4\bar{S}_3) + 2k\tilde{n}(\bar{S}_3\bar{\rho}\bar{S}_4 + \bar{S}_4\bar{\rho}\bar{S}_3 - \bar{S}_4\bar{S}_3\bar{\rho} - \bar{\rho}\bar{S}_3\bar{S}_4). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Tenemos la ecuación maestra de dos osciladores armónicos. Ahora pasamos de imagen de interacción a imagen de Schrödinger:

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} [H_S, \rho] + e^{(-\frac{i}{\hbar}H_S t)} \dot{\rho} e^{(\frac{i}{\hbar}H_S t)},$$

donde recordemos que esta vez la  $H_S$  es:

$$H_S = \hbar w_C \underbrace{(a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y)}_a + \gamma \underbrace{(a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y)}_b.$$

$$[a, b] = 0$$

Y finalmente llegamos a la ecuación maestra:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -i(\Delta + w_C)[S_2 S_1, \rho] + k(2S_1 \rho S_2 - S_2 S_1 \rho - \rho S_2 S_1) + 2k\tilde{n}(S_1 \rho S_2 + S_2 \rho S_1 - S_2 S_1 \rho - \rho S_1 S_2) - \\ & -i(\Delta + w_C)[S_4 S_3, \rho] + k(2S_3 \rho S_4 - S_4 S_3 \rho - \rho S_4 S_3) + 2k\tilde{n}(S_3 \rho S_4 + S_4 \rho S_3 - S_4 S_3 \rho - \rho S_3 S_4) - \\ & \underbrace{-i\gamma'[a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y, \rho]}_{extra}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Donde podemos ver que la nueva ecuación maestra tiene los mismos términos que el modo de una cavidad (dos veces, debido a los dos osciladores armónicos) más un nuevo término que es el conmutador de la energía de interacción entre los osciladores armónicos con la función densidad  $\rho$ .

Por último cabe señalar que dicha ecuación correspondería también a un sistema de un oscilador armónico bidimensional isótropo, donde ahora el término "extra" relaciona los grados de libertad en cada uno de los ejes de oscilación.

## 5.2. Resolución de la ecuación maestra

Para resolver la ecuación maestra, procedemos a proyectar la ecuación sobre los estados de los osciladores armónicos  $|n, m\rangle$  y  $|n', m'\rangle$ . Así obtendremos un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. En concreto obtendremos  $(n+1)^2(m+1)^2$  ecuaciones diferenciales.

Como resultado de la proyección de estados obtendremos nueve términos diferentes que expon-dremos a continuación:

$$(1) = \langle n, m | \rho | n', m' \rangle [-i(\Delta + w_C)(n - n') - nk - n'k - 2k\tilde{n}n - 2k\tilde{n}(n+1) - i(\Delta + w_C)(m - m') - mk - m'k - 2k\tilde{n}m - 2k\tilde{n}(m+1)] \quad (5.16)$$

$$(2) = \langle n+1, m-1 | \rho | n', m' \rangle (-i\gamma' \sqrt{n+1} \sqrt{m}) \quad (5.17)$$

$$(3) = \langle n-1, m+1 | \rho | n', m' \rangle (-i\gamma' \sqrt{n} \sqrt{m+1}) \quad (5.18)$$

$$(4) = \langle n, m | \rho | n'-1, m'+1 \rangle (i\gamma' \sqrt{n'} \sqrt{m'+1}) \quad (5.19)$$

$$(5) = \langle n, m | \rho | n'+1, m'-1 \rangle (i\gamma' \sqrt{n'+1} \sqrt{m'}) \quad (5.20)$$

$$(6) = \langle n+1, m | \rho | n'+1, m' \rangle (2k\sqrt{n+1}\sqrt{n'+1} + 2k\tilde{n}\sqrt{n+1}\sqrt{n'+1}) \quad (5.21)$$

$$(7) = \langle n-1, m | \rho | n'-1, m' \rangle (2k\tilde{n}\sqrt{n}\sqrt{n'}) \quad (5.22)$$

$$(8) = \langle n, m + 1 | \rho | n', m' + 1 \rangle (2k\sqrt{m+1}\sqrt{m'+1} + 2k\tilde{n}\sqrt{m+1}\sqrt{m'+1}) \quad (5.23)$$

$$(9) = \langle n, m - 1 | \rho | n', m' - 1 \rangle (2k\tilde{n}\sqrt{m}\sqrt{m'}) \quad (5.24)$$

Con estos términos ya podemos resolver el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Utilizaremos el lenguaje de programación **python** para calcularlos de manera similar a como lo resolvimos en el primer caso de todos.

Así pues, estudiaremos varios casos para explicar lo más detalladamente posible la ecuación maestra obtenida.

$$\text{Caso 1: } |\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$

El sistema consiste en dos osciladores armónicos acoplados entre ellos gracias al término de interacción  $\gamma'$  y acoplados a su vez al baño gracias al término  $k$ .

### Poblaciones

Para los siguientes valores, vamos a analizar el estudio de las poblaciones del sistema:

$$k = 1 \quad w_C = 5 \quad \gamma' = 1 \quad \tilde{n} = 0 \quad \Delta = 5$$

En primer lugar, estudiaremos como interactúa el sistema con un baño sin fotones, a temperatura  $0^\circ\text{C}$ .

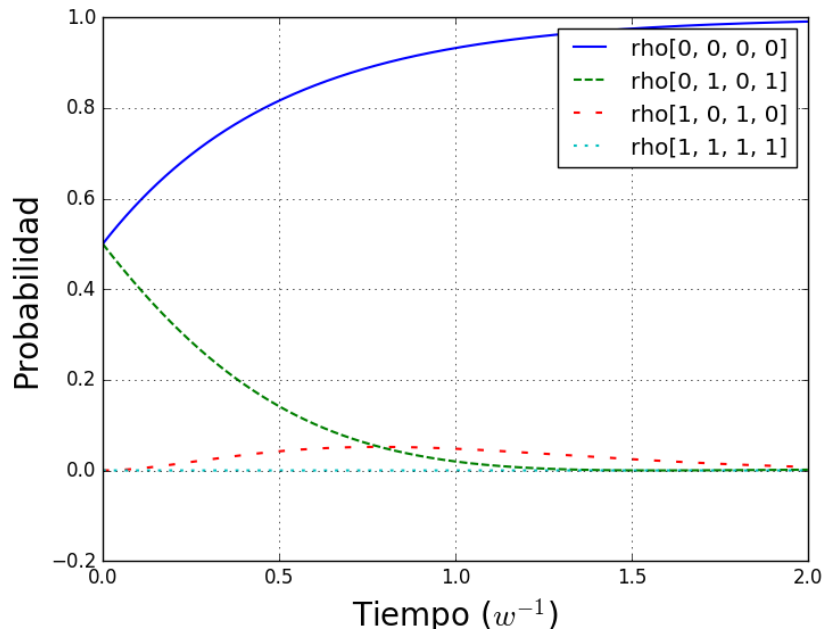


Figura 10: Poblaciones del doble oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 0$  y  $\gamma = 1$



Podemos ver en la figura 10 que:

1) El baño no aporta energía ( $\tilde{n} = 0$ ) al sistema, por lo que los estados no poblados inicialmente no aumentan su probabilidad debido al baño térmico. Se puede ver claramente como el estado  $|10\rangle$  pese a que su población inicial era nula, aumenta levemente su probabilidad de encontrar población en él. Esto es debido a que el estado  $01$  le transmite energía gracias al término  $\gamma'$  que conecta el estado  $\langle n, m | \rho | n', m' \rangle$  con cuatro estados distintos:  $\langle n + 1, m - 1 | \rho | n', m' \rangle$ ,  $\langle n - 1, m + 1 | \rho | n', m' \rangle$ ,  $\langle n, m | \rho | n' + 1, m' - 1 \rangle$  y  $\langle n, m | \rho | n' - 1, m' + 1 \rangle$ .

Gráficamente, se puede ver mejor si aumentamos el valor de  $\gamma'$ , por ejemplo  $\gamma' = 20$ :

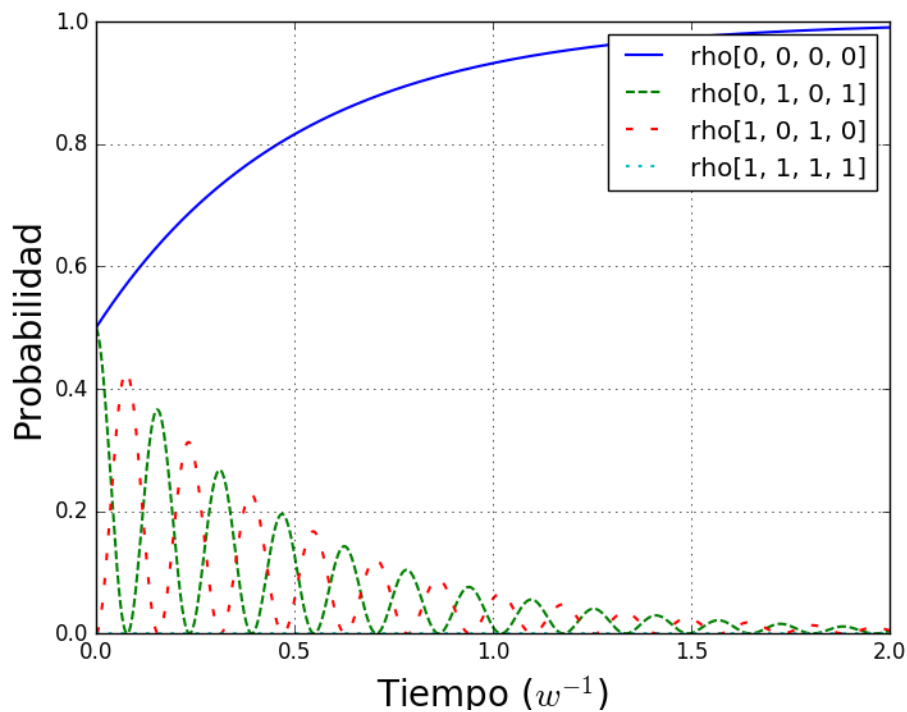


Figura 11: Poblaciones del doble oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 0$  y  $\gamma = 20$

Podemos ver claramente en la figura 11 como hay una oscilación entre los dos posibles estados que conecta  $\gamma'$  y debido a la emisión espontánea, ambos van decayendo al estado fundamental, es decir, al estado  $|00\rangle$ .

Por último, vamos a ver qué términos relaciona  $\gamma'$  en concreto para un sistema un poco más grande:

$$\text{Caso 2: } |\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |20\rangle + |21\rangle)$$

$$k = 1 \quad w_C = 5 \quad \gamma' = 200 \quad \tilde{n} = 0 \quad \Delta = 5$$

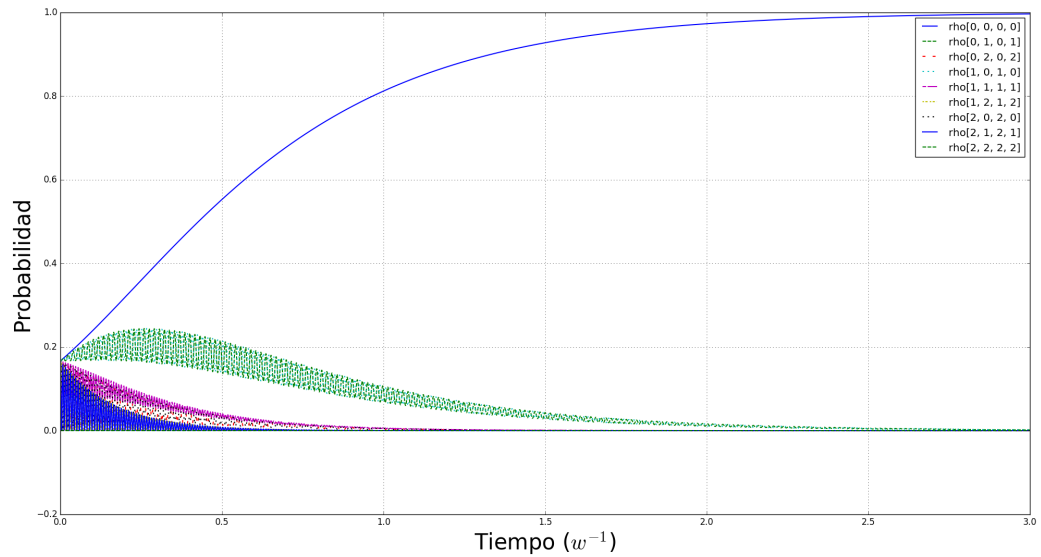


Figura 12: Poblaciones del doble oscilador armónico (6 estados) para  $\tilde{n} = 0$  y  $\gamma = 200$

Podemos ver en la figura 12, que el término de acoplamiento  $\gamma$  sólo conecta estados que posean el mismo nivel de energía  $H_S$ : los estados  $|12\rangle$  y  $|21\rangle$ , los estados  $|11\rangle$ ,  $|02\rangle$  y  $|20\rangle$ , etc.

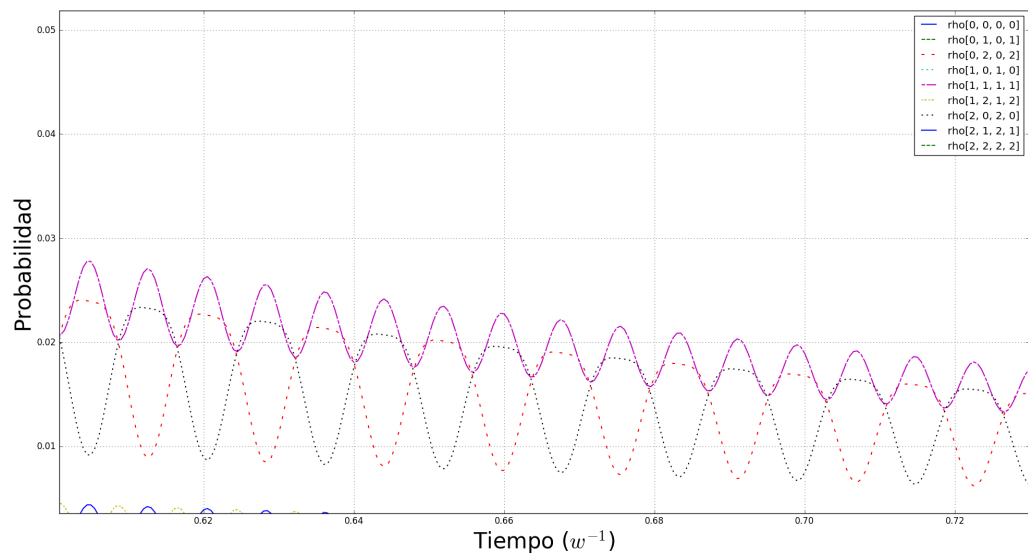


Figura 13: Poblaciones del doble oscilador armónico (6 estados) para  $\tilde{n} = 0$  y  $\gamma = 200$  (zoom)

En la figura 13, la cual es un zoom de la anterior (figura 12), podemos apreciar mucho mejor la oscilación de los niveles  $|11\rangle$ ,  $|02\rangle$  y  $|20\rangle$  debido al término  $\gamma$ .

Ahora vamos a estudiar la evolución de las poblaciones para cuando tenemos un cierto valor de los números de ocupación  $\tilde{n} \neq 0$ .

Para resolver este tipo de sistemas, se ha de coger un amplio rango de niveles de energía ya que dependiendo del número de ocupación del baño, la ecuación maestra puede transferir energía a estados más altos que los de la función de onda inicial, por lo que para alcanzar una buena normalización de la matriz densidad se ha de coger una base finita con un tamaño adecuado. En esta ocasión cogeremos  $N=5$ , por lo que el número de poblaciones será de  $6^4 = 1296$  estados. Por este motivo no se procederá a representar todas las coherencias en las gráficas.

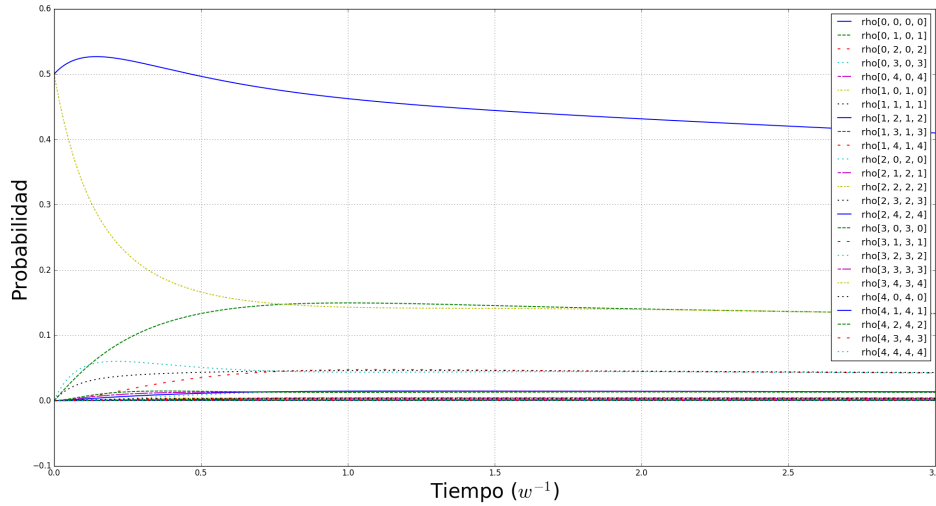


Figura 14: Poblaciones del doble oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 0,5$  y  $\gamma = 1$

Traza total de  $\rho=0.971$

Podemos ver en la figura 14 que al igual que ocurría cuando teníamos un oscilador armónico, aquí también perdemos población al baño a un ritmo proporcional a  $\tilde{n}$ . Así pues, el estado fundamental, el estado  $|00\rangle$  (azul marino o trazo sólido en la gráfica) aunque al principio gane población procedente del estado  $|10\rangle$ , empieza a emitir fotones al baño térmico por lo que su población baja. Así pues, como hemos dicho arriba, las poblaciones más altas cercanas a los estados de la función de onda inicial se empiezan a llenar según avanza el tiempo (absorción inducida). Entran en juego los procesos de emisión espontánea (por la que un estado cede energía a un nivel inferior) y la emisión inducida en la que el baño fuerza a un estado a ceder energía a un nivel inferior. Aparte del efecto de intercambio de energía debido al término de interacción  $\gamma'$  que hemos explicado anteriormente. Todos estos mecanismos provocan que cada población tienda a un estado asintótico a tiempos largos. La suma de las probabilidades de cada estado de cada población deberá ser igual al 100 %.

### Coherencias

Por último, analizaremos las coherencias:  $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$

$$w_C = 5 \quad \gamma' = 1 \quad \tilde{n} = 0,5 \quad \Delta = 1$$

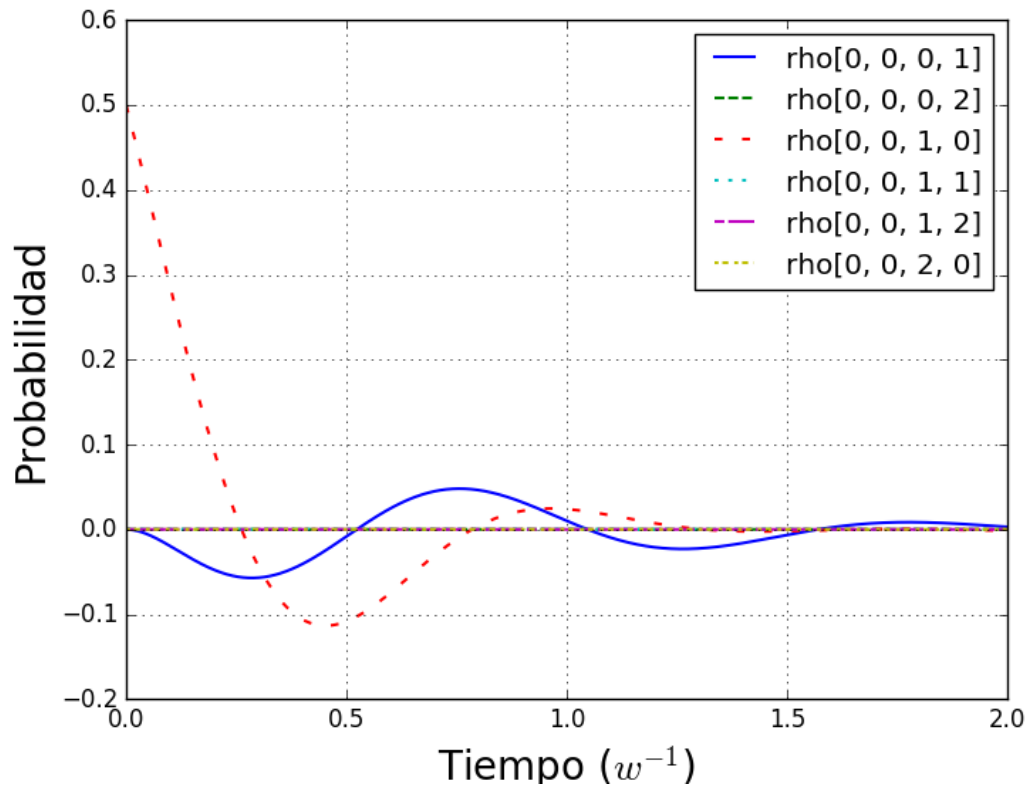


Figura 15: Coherencias del doble oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 0,5$ ,  $\gamma = 1$  y  $k = 1$

$k = 1$

Podemos ver en la figura 15 que a diferencia de las poblaciones, las coherencias no alcanzan un estado asintótico (distinto de cero) a medida que avanza el tiempo, sino que decaen a cero. Es decir, los efectos cuánticos de superposición desaparecen de nuestro sistema.

Ahora vamos a ver qué ocurre cuando aumentamos el término de acoplamiento del sistema  $S$  con el baño:

(\*)Solo hemos trazado las primeras seis coherencias (debido a que son muchas) pero todas tienden a cero.

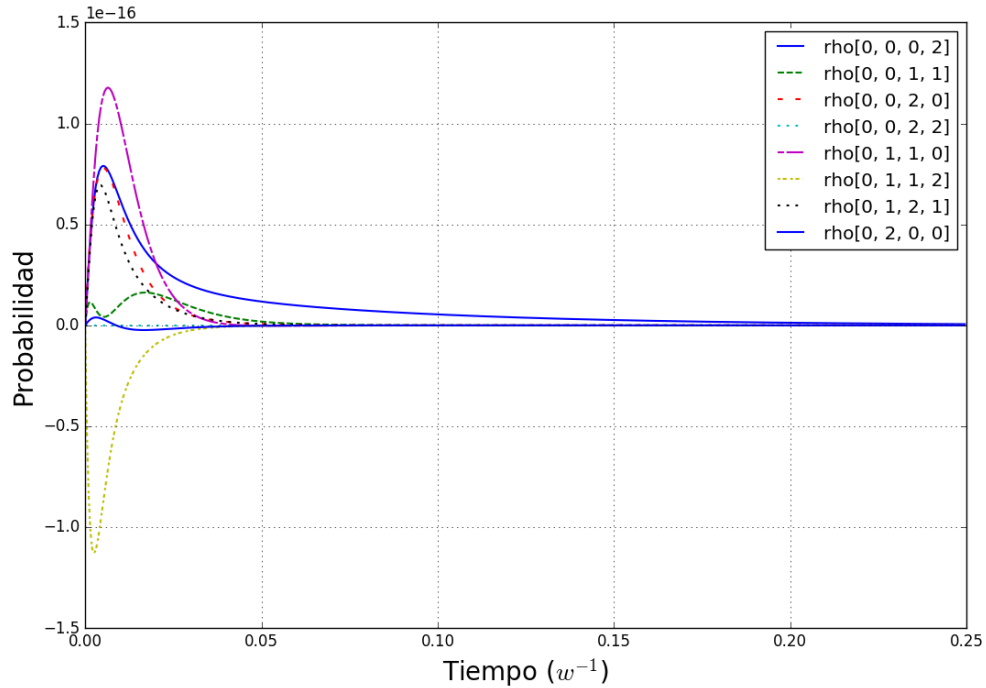


Figura 16: Coherencias del doble oscilador armónico (2 estados) para  $\tilde{n} = 0,5$ ,  $\gamma = 1$  y  $k = 50$

Podemos apreciar en esta última figura 16, que las coherencias tienden a cero mucho más deprisa a medida que el término de interacción de los osciladores armónicos con el baño aumenta.

Una vez más, solo hemos graficado algunas coherencias debido a que no caben todas en la leyenda. Todas ellas tienden a cero aunque no se vea representado aquí.

**Summary** *We have analysed the last system: Two Harmonic oscillators coupled with a reservoir. At first, we have calculated the master equation for this system. Then we have worked out the time evolution of the density matrix using the master equation for some particular cases of initial wavefunctions as we did in the previous cases. We had to take into account that now we have two small systems so the states of the initial wavefunction are the tensorial product from the states of each system. As result, we have obtained huge matrixes that we had to solve to calculate the final time evolution of the elements of the density matrix.*

*Finally we can see some the properties of some parameters. The element  $k$  as we saw before in the first system is represents the coupling of the harmonic oscillators with the reservoir, wit the EM field. The parameter  $\gamma$  is the object which links the states between the two harmonic oscillators. Finally the coefficient  $w_C$  gives us the energy gap between the states of the oscillators.*

## 6. Resumen y conclusiones

Pese a que hemos ido explicando los resultados que hemos ido obteniendo de la ecuación maestra para los distintos sistemas estudiados, procederemos a puntualizar una vez más todas las conclusiones importantes de los fenómenos producidos por el proceso de medida de un sistema cuántico.

La ecuación maestra es una herramienta que nos permite calcular la evolución de una matriz densidad de un sistema cuántico inmerso en un baño térmico cuyo espectro en frecuencias es muy ancho. Se trata por tanto de un sistema abierto, debido a que los fotones recibidos por el baño del sistema cuántico pequeño no se pueden volver a reabsorber por el sistema  $S$ . Pese a que los sistemas  $S$  estudiados en los tres casos son diferentes, podemos sacar unas conclusiones generales y luego puntualizar para el caso particular del doble oscilador armónico.

La ecuación maestra presenta tres mecanismos de transferencia de energía entre niveles: emisión inducida, emisión espontánea y absorción inducida (inducida por el baño).

En todos los sistemas estudiados, el baño posee una papel de disipador de energía, haciendo que las poblaciones alcancen estados estacionarios determinados mientras que las coherencias tienden a cero conforme pasa el tiempo.

Si estudiamos la ecuación para  $\tilde{n} = 0$ , entonces se consigue un sistema (no conservativo tampoco, ya que aunque no hayan fotones en el baño, no se desacopla el campo EM responsable de la emisión inducida) cuyos estados tienden a tener una probabilidad nula de encontrar población en ellos, salvo el estado fundamental, el cual alcanza la probabilidad máxima.

Por último, en el caso del doble oscilador armónico, existe un término de interacción entre los dos osciladores, lo cual introduce un nuevo mecanismo que permite la transferencia de energía entre elementos diagonales y no diagonales del sistema (algo nuevo con respecto al oscilador armónico del primer caso). Además, provoca que existan oscilaciones entre dichos estados (con misma energía  $H_S$ ) mientras van decayendo a cierto estado asintótico debido al efecto inevitable disipativo del baño térmico.

*The master equation allows us to calculate the evolution of the components of the density matrix of a quantum system immersed in a thermal bath, which has a wide spectrum in frequencies. It is an open system where photons obtained by the reservoir from the small system can not be reabsorbed by the small system again.*

*Even if we have studied three different kind of systems  $S$ , we can point general conclusions for them. In the final case of double harmonic-oscillator, we can make some concrete conclusions about that system.*

*Master equation presents three mechanisms of energy transference: induced emission, spontaneous emission and induced absorption (induced by the reservoir).*

*In all the systems we have studied, the reservoir has a roll of energy dissipator. It makes that the populations reach stationary states meanwhile the coherences go to zero along the time. If we set  $\tilde{n} = 0$ , then we will obtain a system (which is not still energy conservative due to the coupling of the system  $S$  with the EM field) which all the populations (diagonal terms of the density matrix) go to zero except the ground state which reaches the maximum probability.*

*Finally, we need to specify some features about the two harmonic-oscillator system. In this case there is an extra term in the hamiltonian as also in the master equation which links one harmonic oscillator with the other one which makes the populations be coupled with the coherences. Also, it produces some oscillations between the states connected by that term while all their probabilities go to zero due to the reservoir dissipation effect.*

## 7. Referencias

[1] An open systems approach to quantum optics, Howard Carmichael. Lectures presented at the Université Libre de Bruxelles October 28 to November 4, 1991

[2] Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications. Claude Cohen Tannoudji