Resultados Clásicos de la Transformación Integral de Laplace

Classic Results of Laplace Integral Transformation

Tanausú Aguilar Hernández

Trabajo de Fin de Grado

Análisis Complejo y Transformaciones Integrales

Sección de Matemáticas

Facultad de Ciencias

Universidad de La Laguna

La Laguna, 13 de julio de 2015

Dr. D. **José Manuel Méndez Pérez**, con N.I.F. 42146681-D, Catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna

C E R T I F I C A

Que la presente memoria titulada:

"Resultados Clásicos de la Transformación Integral de Laplace."

ha sido realizada bajo su dirección por D. **Tanausú Aguilar Hernández**, con N.I.F. 78591928-P.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 13 de julio de 2015.

Agradecimientos

A mi familia,
por estar siempre ahí apoyándome en todo momento.

A Mario y María,
por acogerme como un miembro más de la familia estos cuatro años de carrera.

Al profesor José Manuel Méndez Pérez,
por su gran ayuda durante la realización de este trabajo y, especialmente, por ser un gran ejemplo a seguir.

A mis amigos ,
por toda la ayuda durante estos años y, sobre todo, por compartir todos esos buenos momentos durante la carrera.

Resumen

El objetivo de este Trabajo de Fin de Grado ha sido estudiar la transformación integral clásica de Laplace, haciendo énfasis en sus fundamentos teóricos.
Una vez establecidas las principales reglas operacionales, se prueban con rigor y detalle los resultados fundamentales, a saber, los teoremas de existencia (convergencia), unicidad, analiticidad y comportamiento en el infinito. Se ha dedicado una especial atención a la deducción de la fórmula de inversión que, en nuestro caso, viene dada por una integral de línea compleja.
También se presentan algunas aplicaciones de esta transformación a la resolución de problemas que se plantean mediante ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales.

Palabras clave: Transformación integral, Transformación de Laplace, Reglas operacionales, Analiticidad, Convergencia, Convolución, Fórmula de inversión, Aplicaciones.

Abstract

The main objective of this Report has been studying the Laplace integral transformation in a classical setting, by paying a special attention to its theoretical foundations.
Once the most important operational rules have been obtained, we verify in complete generality and with detailed, exact proofs, the paramount results concerning this transformation, namely, the theorems of existence (convergence), uniqueness, analyticity and behaviour near infinity. Next, the inversion formula has been rigorously established, giving rise to a complex line integral.
Finally, the theory developed is used in solving the Cauchy problem for ordinary linear differential equations (and systems) with constant coefficients. This method of the Laplace transform can also be applied to solve some partial differential equations arising in mathematical physics.

Keywords: *Integral transformation, Laplace transform, Operational rules, Analyticity theorem, Convergence theorem, Convolution, Inversion formula, Applications.*

Índice general

Prólogo

Este Trabajo de Fin de Grado en Matemáticas, que se titula "Resultados clásicos de la transformación integral de Laplace", muy bien podría llevar el añadido "según Doetsch", porque fue este matemático alemán quien primero dotó a esta teoría de una fundamentación matemática rigurosa. Su obra [3] se ha convertido en un clásico en este campo y en el estudio de algunos de sus capítulos, precisamente, se basa esta memoria.

En el plan de estudios de la antigua Licenciatura de Matemáticas figuraba una asignatura, "Transformada integral de Laplace", dedicada enteramente a este tema. En la actualidad, en el Grado, apenas se da algo en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales 1, reduciéndose todo a un cálculo operacional.

Sin embargo, un alumno que está finalizando el Grado, dispone de conocimientos y formación para abordar un tratamiento riguroso de este tema. Ciertamente, se trata de un tema interdisciplinar, que se relaciona con otras materias de esta titulación. Por su definición, la transformada de Laplace es una integral impropia, que actúa sobre operadores diferenciales e integrales, y cuyo cálculo se apoya muchas veces en la teoría de la integración y derivación paramétrica, lo que es objeto de estudio en las disciplinas de Análisis Matemático III y IV. La imagen de la transformada de Laplace es una función compleja, analítica en un semiplano derecho del plano complejo, y su fórmula de inversión viene dada por una integral de línea compleja, para cuya evaluación - a veces muy complicada - hay que recurrir a la teoría de los residuos. Todas estas cuestiones forman parte del temario de la asignatura Análisis VI. Por otra parte, la transformación de Laplace es una herramienta poderosa para la resolución de problemas de Cauchy o de valores iniciales de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes, así como para cierta clase de ecuaciones en derivadas parciales, lo que se estudia en materias como Ecuaciones Diferenciales 1 y Ecuaciones Diferenciales 2.

En este trabajo se han tratado los siguientes objetivos concretos

- Definición de la transformación integral de Laplace. Ejemplos. Deducción de las primeras propiedades y reglas operacionales.
- Demostración rigurosa de los principales resultados teóricos: teoremas de existencia (convergencia), unicidad, analiticidad y comportamiento en el infinito.
- Estudiar la transformada de Laplace de los operadores derivación e integración, así como de la convolución.
- Obtención de la fórmula de inversión de la transformación de Laplace.

- Aplicaciones de esta transformada.

A lo largo de este trabajo se consideran numerosos ejemplos, que sirven para ilustrar la teoría y para mostrar sus aplicaciones.

Capítulo 1

Introducción a la Transformación de Laplace

1.1. Introducción

La transformación de Laplace es una de las transformaciones más dúctiles y manipulables debido a su riqueza en reglas operacionales. Si se conoce, por ejemplo, la transformada $F(s)$ de la función $f(t)$, esto es, $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, resulta muy fácil determinar $\mathcal{L}\{f(at)\}$, $\mathcal{L}\{f(at+b)\}$, $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}\}$, $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}$, ..., donde $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Pero destacan fundamentalmente su relación con tres operaciones: la derivación, la integración y la convolución. El principal objetivo de este capítulo es estudiar con detalle estos tres casos, en los que la aplicación de Laplace conduce siempre a un producto algebraico. Además, se establecerá rigurosamente los teoremas de existencia (convergencia), unicidad y analiticidad.

Las funciones que comparecen son integrables en el sentido de Riemann y, cuando se escribe $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, se entenderá que $F(s)$ es la transformada de Laplace de la función dada $f(t)$ y que dicha transformada converge en cierto semiplano derecho, aunque no siempre se especifique.

1.2. Definición y ejemplos

Definición 1.2.1. *Sea f una función real definida en $[0, \infty)$. Denominamos* transformada de Laplace de f *a la función*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

donde $s \in \mathbb{C}$, siempre que esta integral exista.

Nota. *Si la función f tomara valores complejos, se entenderá que f es transformable Laplace si lo son sus partes real e imaginaria.*

Un primer resultado que garantiza la existencia de esta función F es el siguiente.

Teorema 1.2.1. *Supongamos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $e^{-ct}f(t)$ es absolutamente integrable en $(0, \infty)$. Entonces existe la transformada de Laplace de f para todo $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) \geq c$.*

Demostración. Sigue inmediatamente de que , si $Re(s) \geq c$, se tiene

$$\left| \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt \right| \leq \int_0^\infty e^{-(Re(s)-c)t} |e^{-ct} f(t)|\ dt \leq \int_0^\infty e^{-ct} |f(t)|\ dt$$

□

Más adelante profundizaremos en los problemas de convergencia de la transformación de Laplace.

Ejemplo 1.2.1. *La función*

$$u(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \leq 0 \\ \\ 1 & si \quad t > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

se llama función escalón unidad o función de Heaviside (por eso se denota también por $H(t)$). Su transformada de Laplace es

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\ dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s}$$

si, y sólo si, $Re(s) > 0$.

Ejemplo 1.2.2. *Para $f(t) = t^\lambda$, donde λ es una constante compleja, se tiene*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} t^\lambda\ dt.$$

Realizando el cambio de variable $u = st$, se tiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^{\lambda+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\lambda\ dt\ ,$$

que es la integral de Euler para la función gamma. Por lo tanto, llegamos a que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^{\lambda+1}} \Gamma(\lambda + 1)\ ,$$

si $Re(s) > 0$ y $Re(\lambda) > -1$.

Ejemplo 1.2.3. *Si $f(t) = e^{\alpha t}$, donde α es un complejo arbitrario, tenemos que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}\ dt = \frac{1}{s - \alpha}\ ,$$

para $Re(s) > Re(\alpha)$.

Ejemplo 1.2.4. *Si* $f(t) = t^\lambda e^{-\alpha t}$, *(*$\lambda, \alpha \in \mathbb{C}$*), se tiene*

$$\mathcal{L}\{t^\lambda e^{-\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)}t^\lambda \, dt = F(s+\alpha) \ ,$$

donde denotamos $F(s) = \mathcal{L}\{t^\lambda\}$. *Entonces, de acuerdo con el Ejemplo 1.2.2, se concluye que*

$$\mathcal{L}\{t^\lambda e^{-\alpha t}\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{(s+\alpha)^{\lambda+1}} \ , \ \ Re(s) > Re(\alpha) \ , \ \ Re(\lambda) > -1.$$

Ejemplo 1.2.5. *Para determinar la transformada de Laplace de* $f(t) = \mathrm{ch}(kt)$, $k \in \mathbb{C}$, *podemos proceder de dos maneras. Una, calculando directamente la integral; y la segunda, teniendo en cuenta la definición del coseno hiperbólico y el resultado anterior,*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{ch}(kt) \, dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}\right) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(s-k)t} \, dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(s+k)t} \, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right] = \frac{s}{s^2-k^2}$$

para $Re(s) > |Re(k)|$.

Ejemplo 1.2.6. *Análogamente, si* $f(t) = \mathrm{sh}(kt)$, $k \in \mathbb{C}$, *obtenemos*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{sh}(kt) \, dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{kt}-e^{-kt}}{2}\right) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(s-k)t} \, dt - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-(s+k)t} \, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-k} - \frac{1}{s+k}\right] = \frac{k}{s^2-k^2} \ ,$$

para $Re(s) > |Re(k)|$.

Ejemplo 1.2.7. *Dado* $f(t) = \cos(kt) = \frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}$, $k \in \mathbb{C}$, *si recordamos que* $\cos(z) = \mathrm{ch}(iz)$, *sigue que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \mathcal{L}\{\mathrm{ch}(ikt)\} = \frac{s}{s^2-(ik)^2} = \frac{s}{s^2+k^2} \ ,$$

siempre que $Re(s) > |Im(k)|$.

Ejemplo 1.2.8. *De forma similar, de la relación* $\mathrm{sen}(z) = -i\,\mathrm{sh}(iz)$ *se deduce, con* $k \in \mathbb{C}$,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\mathrm{sen}(kt)\} = -i\mathcal{L}\{\mathrm{sh}(ikt)\} = -i\frac{ik}{s^2-(ik)^2} = \frac{k}{s^2+k^2} \ ,$$

para $Re(s) > |Im(k)|$.

Ejemplo 1.2.9. *Sea*

$$u_{a,b}(t) = \begin{cases} 1 & si \quad t \in (a,b) \\ \\ 0 & si \quad t \notin (a,b) \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$. *Su transformada de Laplace es*

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_a^b e^{-st}\ dt = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}$$

para todo $s \in \mathbb{C}$.

Ejemplo 1.2.10. *Para* $f(t) = e^{-t^2}$ *se tiene que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{t(t-s)}\ dt$$

no converge para ningún $s \in \mathbb{C}$, *ya que - fijado arbitrariamente* $s \in \mathbb{C}$ *- siempre es posible determinar* $T > 0$ *de modo que* $Re(t - s) = t - Re(s) > 0$, *para todo* $t > T$.

No siempre es tan sencillo calcular las funciones imágenes. En la mayoría de los casos hay que recurrir a herramientas más potentes del análisis matemático. Lo ilustraremos con dos ejemplos más.

Ejemplo 1.2.11. *Calcular la transformada de Laplace de la función de Bessel* $J_0(t)$ *de primera clase y orden cero.*

Sabemos que esta función viene definida por la serie

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\ ,\ \ 0 \le t < \infty\ ,$$

que converge uniforme y absolutamente en cualquier intervalo de la forma $[0, T]$, *para todo* $T > 0$. *Por tanto, es lícito hacer, para* $Re(s) > 0$,

$$\int_0^T e^{-st}\ J_0(t)\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^T e^{-st} t^{2n}\ dt.$$

Pero el segundo miembro tiene sentido cuando $T \to \infty$ *ya que, por el Ejemplo 1.2.2, se sigue que*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_0^\infty e^{-st} t^{2n}\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\Gamma(2n+1)}{s^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(2n)!}{s^{2n+1}}\ ,$$

expresión que coincide con el desarrollo binomial de la función $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$, $|s| > 1$. *Luego,*

$$J_0(t) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\ ,\ \ |s| > 1.$$

Ejemplo 1.2.12. *Demostrar que*

(i) $\mathcal{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{c}{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-2\sqrt{cs}}$, $Re(c) \geq 0$, $Re(s) > 0$.

(ii) $\mathcal{L}\left\{t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{c}{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-2\sqrt{cs}}$, $Re(c) \geq 0$, $Re(s) > 0$.

(iii) $\mathcal{L}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\}$, $Re(s) > 0$, $x > 0$.

Para establecer (i), partiremos de la integral biparamétrica

$$I(a.b) = \int_0^\infty e^{-a^2u^2-\frac{b^2}{u^2}}\, du.$$

Si derivamos respecto del parámetro b se obtiene

$$\frac{\partial I}{\partial b} = -2aI.$$

Sabemos, además, que $I(a,0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$. La solución de este problema diferencial es

$$I(a,b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-2ab}. \tag{1.2}$$

Vayamos al problema propuesto. Haciendo el cambio $t = u^2$, se tiene

$$\mathcal{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{c}{t}}\right\} = \int_0^\infty e^{-st-\frac{c}{t}}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-su^2-\frac{c}{u^2}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{s}}e^{-2\sqrt{cs}}\ , \tag{1.3}$$

al recurrir a (1.2) *con $a^2 = s$, $b^2 = c$.*

Ahora bien, si en la expresión (1.3) *derivamos paramétricamente respecto de c se obtiene que*

$$\int_0^\infty e^{-st-\frac{c}{t}}\left(-t^{-3/2}\right)\, dt = -\sqrt{\frac{\pi}{s}}\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{c}}e^{-2\sqrt{cs}} = -\sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-2\sqrt{cs}}.$$

Es decir, llegamos así a (ii)

$$\mathcal{L}\left\{t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{c}{t}}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{c}}e^{-2\sqrt{cs}}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta (ii) con $c = \frac{x^2}{4}$, se concluye que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{x}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\mathcal{L}\left\{t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right\} = e^{-x\sqrt{s}}\ ,$$

que es la fórmula (iii).

1.3. Convergencia. Teoremas de existencia.

En esta sección procederemos a estudiar, con mayor detalle, la convergencia de la integral de Laplace.

Teorema 1.3.1. *Si la integral de Laplace converge absolutamente en algún punto s_0, converge absolutamente en el semiplano cerrado derecho, esto es, para $Re(s) \geq Re(s_0)$.*

Demostración. Sean $T_2 > T_1 > 0$. Para $Re(s) \geq Re(s_0)$ se tiene

$$\int_{T_1}^{T_2} |e^{-st}f(t)|\ dt = \int_{T_1}^{T_2} |e^{-(s-s_0)t}e^{-s_0 t}f(t)|\ dt =$$
$$= \int_{T_1}^{T_2} e^{-Re(s-s_0)t}|e^{-s_0 t}f(t)|\ dt \leq \int_{T_1}^{T_2} |e^{-s_0 t}f(t)|\ dt$$

Por hipótesis, la integral $\int_{T_1}^{T_2} |e^{-s_0 t}f(t)|\ dt$ converge. Por ello, para todo $\epsilon > 0$, existe un $T > 0$ tal que

$$\int_{T_1}^{T_2} |e^{-s_0 t}f(t)|\ dt < \epsilon$$

para todo $T_2 > T_1 > T$. El aserto se infiere del criterio de convergencia de Cauchy.

□

Teorema 1.3.2. *Si la integral*

$$\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\ dt = F(s)$$

converge absolutamente en s_0, entonces $F(s)$ está acotada en el semiplano derecho $Re(s) \geq Re(s_0)$.

Demostración. Para $Re(s) \geq Re(s_0)$, el resultado sigue de

$$|F(s)| = \left|\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)\ dt\right| \leq \int_0^{\infty} e^{-Re(s)t}|f(t)|\ dt \leq \int_0^{\infty} e^{-Re(s_0)t}|f(t)|\ dt =$$
$$= \int_0^{\infty} |e^{-s_0 t}f(t)|\ dt.$$

□

Teorema 1.3.3. *El dominio exacto de convergencia absoluta de la integral de Laplace es el semiplano abierto derecho $Re(s) > \alpha$ o el semiplano cerrado derecho $Re(s) \geq \alpha$. Caben las posibilidades $\alpha = \pm\infty$.*

Demostración. Dado el número real s, vamos a considerar tres casos:

- La integral converge absolutamente para todo real s. Entonces, por el Teorema 1.3.1, converge para todo complejo s. Por lo tanto, el Teorema 1.3.3 queda probado para $\alpha = -\infty$.

- La integral no converge absolutamente para ningún real s. Entonces, por el Teorema 1.3.1, no converge para ningún complejo s. Por lo tanto, el Teorema 1.3.3 está probado para $\alpha = \infty$.

- Existe un real s donde la integral converge absolutamente , y existe un real s donde la integral diverge absolutamente. Sea K_1 la clase de los s_1 donde la integral diverge absolutamente y sea K_2 la clase de los s_2 donde la integral converge absolutamente.

  Esta separación en clases implica un corte de Dedekind, ya que

  - Todo real pertenece a una de las dos clases.
  - Las clases son no vacías.
  - Todo número real s_1 de K_1 es menor que todo número s_2 de K_2. Ya que si suponemos que hay un s_1 de K_1 que es mayor que algún s_2 de K_2, entonces por el Teorema 1.3.1 resultaría que s_1 es un punto de convergencia absoluta, contradiciendo la definición de K_1.

  Se define así un número real α de modo que, para todo $s \in \mathbb{C}$, con $Re(s) < \alpha$, la integral diverge absolutamente; mientras que si $Re(s) > \alpha$, la integral converge absolutamente.

  La recta vertical $Re(s) = \alpha$ puede pertenecer o no al dominio de convergencia absoluta. El Teorema 1.3.1 establece que la convergencia absoluta en un punto de esta recta implica la convergencia absoluta en toda la línea. Los siguientes ejemplos son ilustrativos

  - Para $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ tenemos que $\alpha = 0$ y la integral converge absolutamente para todo s con $Re(s) = 0$.
  - Para $f(t) \equiv 1$ tenemos que $\alpha = 0$ y la integral diverge absolutamente para todo s con $Re(s) = 0$.

□

Nota. *A este número α lo llamamos* abscisa de convergencia absoluta *de la transformación integral de Laplace y el semiplano abierto $Re(s) > \alpha$ o el semiplano cerrado $Re(s) \geq \alpha$ se denomina* semiplano de convergencia absoluta *de dicha transformación.*

Teorema 1.3.4 (Teorema Fundamental)**.** *Si la integral de Laplace*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt$$

converge para $s = s_0$, entonces converge en el semiplano abierto $Re(s) > Re(s_0)$, donde puede ser expresada por la integral absolutamente convergente

$$(s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t)\ dt,$$

siendo

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\ d\tau.$$

Demostración. Sea $T > 0$. Usando integración por partes, junto con el el hecho de que $\varphi(0) = 0$, tenemos

$$\int_0^T e^{-st} f(t)\ dt = \int_0^T e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)\ dt =$$

$$= e^{-(s-s_0)T}\varphi(T) + (s - s_0)\int_0^T e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\ dt \qquad (1.4)$$

Si la integral de Laplace converge en s_0, entonces $\varphi(t)$ tiene limite F_0 para $t \to \infty$. Además, la integral $\varphi(t)$ es continua para $t \geq 0$. Por lo tanto, $\varphi(t)$ está acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|\varphi(t)| \leq M$ para $t \geq 0$. Consecuentemente, para $Re(s) > Re(s_0)$, los limites

$$\lim_{T\to\infty} e^{-(s-s_0)T}\varphi(T) = 0$$

y

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\ dt$$

existen.

La integral converge absolutamente, ya que

$$\int_0^\infty |e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)|\ dt \leq M\int_0^\infty e^{-Re(s-s_0)t}\ dt.$$

De la expresión (1.4), se infiere a la vista de las consideraciones anteriores, que:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt = (s - s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\ dt$$

para $Re(s) > Re(s_0)$. □

Teorema 1.3.5. *El dominio exacto de convergencia de la integral de Laplace es un semiplano derecho: $Re(s) > \beta$, posiblemente incluyendo todo, parte o ningún punto de la recta $Re(s) = \beta$.*

Ejemplo 1.3.1. *Para la función $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ tenemos que $\beta = 0$ y la recta $Re(s) = 0$ entera pertenece al dominio de convergencia.*

Ejemplo 1.3.2. *Para la función $f(t) = \frac{1}{1+t}$ se obtiene que $\beta = 0$ y la integral diverge para $s = 0$. Sin embargo, converge para $s = iy$ $(y \neq 0)$, ya que*

$$\int_0^\infty e^{-iyt}\frac{1}{1+t}\ dt = \int_0^\infty \frac{\cos yt}{i+t}\ dt - i\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} yt}{i+t}\ dt$$

y cada integral converge para $y \neq 0$.

Ejemplo 1.3.3. *Para la función $f(t) \equiv 1$ sigue que $\beta = 0$ y ningún punto de la línea $Re(s) = 0$ pertenece al dominio de convergencia.*

Llamamos *abscisa de convergencia* de la integral de Laplace al número β, mientras que el semiplano abierto $Re(s) > \beta$ se denomina el *semiplano de convergencia* de la integral de Laplace.

Nota. *En el siguiente ejemplo, extraído de [3], mostraremos una función cuya transformada converge en todo punto, pero que no converge absolutamente en ningún punto. Se trata de la función*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \; si \quad 0 \le t < \ln\ln 3 = a \\ \\ (-1)^n e^{\frac{e^t}{2}} & , \; si \quad \ln\ln n \le t < \ln\ln(n+1), \end{cases}$$

para $n = 3, 4, \ldots$

La integral diverge absolutamente para todo s, puesto que

$$\int_a^\infty |e^{-st} f(t)| \; dt = \int_a^\infty e^{-Re(s)t + \frac{e^t}{2}} \; dt.$$

Nótese que para $s \in \mathbb{C}$ arbitrariamente fijado, $\frac{e^t}{2}$ crece más rápidamente que $Re(s)t$.

Para establecer la convergencia, es suficiente considerar $s \in \mathbb{R}$. Investigando $f(t)$ en un intervalo de signo constante, tenemos

$$I_n = \int_{\ln\ln n}^{\ln\ln(n+1)} e^{-st + \frac{e^t}{2}} \; dt = \int_n^{n+1} \frac{(\ln x)^{-s-1}}{x^{\frac{1}{2}}} \; dx$$

donde se ha efectuado la sustitución $e^t = \ln x$. Analicemos la función

$$\psi(x) = \frac{(\ln x)^{-s-1}}{x^{\frac{1}{2}}} \; , \; x \ge 3.$$

Se verifica que $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = 0$. En efecto, para $s \ge -1$, resulta obvio. Para $s < -1$, exponente $-s-1$ es positivo, por lo que resulta una expresión indeterminada que se puede resolver aplicando reiteradamente la regla de L'Hôpital hasta que, en el paso k, para cierto $k \in \mathbb{N}$, se consigue al derivar k veces convertir el exponente en negativo, es decir, $-s-1-k < 0$.

Por otra parte,

$$\psi(x) = -x^{-\frac{3}{2}} \; (\ln x)^{-s-1} \; \left(\frac{1}{2} + \frac{s+1}{\ln x} \right).$$

Si $s \ge -1$ se ve fácilmente que $\psi'(x) < 0$ (pues $x > 1$). En cambio, si $s < -1$, esta derivada seguirá siendo negativa cuando, y sólo cuando,

$$\frac{1}{2} + \frac{s+1}{\ln x} > 0 \; ,$$

lo cual ocurrirá solamente si

$$x > e^{-2(s+1)}.$$

Por lo tanto, para x suficientemente grande, la función $\psi(x)$ es estrictamente decreciente y, además, tiende a cero cuando $x \to \infty$. Es decir, a partir de cierto $n \in \mathbb{N}$ en adelante,

$$I_n > I_{n+1} \quad y \quad \lim_{n\to\infty} I_n = 0.$$

Se obtiene así la serie

$$-I_3 + I_4 - I_5 + \ldots$$

cuya convergencia esta garantizada por el Criterio de Leibniz para series alternadas.

En definitiva, hemos encontrado $\alpha \neq \beta$, en cuya caso, necesariamente $\beta < \alpha$, ya que la convergencia absoluta implica la convergencia. Luego, para este caso tenemos una banda de convergencia condicional $\beta < Re(s) < \alpha = \infty$.

Nota. *La transformación de Laplace define un operador lineal. Ciertamente, si f y g poseen transformadas de Laplace $\mathcal{L}\{f\} = F$ y $\mathcal{L}\{g\} = G$ convergentes en los semiplanos $Re(s) > \beta_f$ y $Re(s) > \beta_g$, respectivamente, se tiene -cualquiera que sean las constantes λ y μ - que $\lambda f(t)+\mu g(t)$ admite transformada de Laplace en el semiplano $Re(s) > \max\{\beta_f, \beta_g\}$ y se cumple*

$$\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda F(s) + \mu G(s) = \lambda\mathcal{L}\{f\} + \mu\mathcal{L}\{g\}.$$

Ejemplo 1.3.4. *Para calcular $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^2 t\}$, aplicaremos esta propiedad y resultados anteriores. Así,*

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^2 t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1-\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cos 2t\}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{2}{s(s^2+4)}\ , \quad Re(s) > 0.$$

Teorema 1.3.6. *Si $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ converge en el punto s_0, entonces la integral $\mathcal{L}\{f\}$ converge uniformemente en toda región angular $|\arg(s - s_0)| \leq \psi < \pi/2$.*

Demostración. Si sumamos la identidad

$$0 = F(s_0) - e^{-(s-s_0)T}\ F(s_0) - (s - s_0)\int_0^T\ e^{-(s-s_0)t}\ F(s_0)\ dt\ ,$$

a la expresión (1.4) del Teorema Fundamental, se obtiene

$$\int_0^T\ e^{-st}\ f(t)\ dt = F(s_0)+e^{-(s-s_0)T}\ [\varphi(T)-F(s_0)]+(s-s_0)\int_0^T\ e^{-(s-s_0)t}\ [\varphi(t)-F(s_0)]\ dt\ ,$$

donde

$$\varphi(t) = \int_0^t\ e^{-s_0\tau} f(\tau)\ d\tau.$$

Considérese $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$, $0 < T_1 < T_2$. Con la ayuda de este último resultado, se puede escribir

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-st}\ f(t)\ dt = e^{-(s-s_0)T_2}\ [\varphi(T_2) - F(s_0)] - e^{-(s-s_0)T_1}\ [\varphi(T_1) - F(s_0)] +$$

$$+(s-s_0)\int_{T_1}^{T_2} e^{-(s-s_0)t}\ [\varphi(t) - F(s_0)]\ dt.$$

Puesto que $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = F(s_0)$, para todo $\epsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que

$$|\varphi(t) - F(s_0)| < \epsilon\ ,\ \text{ para } t > T.$$

Eligiendo $T < T_1 < T_2$, y $Re(s) > Re(s_0)$, tenemos

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-st}\ f(t)\ dt\right| \leq 2\epsilon + |s-s_0|\ \epsilon\int_{T_1}^{T_2} e^{-Re(s-s_0)t}\ dt \leq 2\epsilon + |s-s_0|\ \epsilon\int_{0}^{T} e^{-Re(s-s_0)t}\ dt =$$

$$= \epsilon\ \left(2 + \frac{|s-s_0|}{Re(s-s_0)}\right)\ ,$$

ya que $|e^{(s-s_0)T}| < 1$. En la región angular $|\arg(s-s_0)| \leq \psi < \pi/2$, $s \neq s_0$, se tiene

$$\frac{Re(s-s_0)}{|s-s_0|} = \cos[\arg(s-s_0)] \geq \cos\psi\ .$$

Por lo tanto,

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-st}\ f(t)\ dt\right| \leq \epsilon\ \left(2 + \frac{1}{\cos\psi}\right) = K\epsilon\ ,$$

donde la constante $K = 2 + \sec\psi$ no depende de s. Luego, $\mathcal{L}\{f\}$ converge uniformemente en la región angular considerada

□

Teorema 1.3.7. *Si $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ converge en s_0, entonces $F(s)$ tiende hacia cero, cuando, en la región angular $|\arg(s-s_0)| \leq \psi < \pi/2$, s tiende hacia ∞.*

Demostración. Descomponemos $F(s)$ de la siguiente manera

$$F(s) = \int_{0}^{T_1} e^{-st}\ f(t)\ dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st}\ f(t)\ dt + \int_{T_2}^{\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt\ ,$$

y elegimos, para un $\epsilon > 0$ dado, un número suficientemente pequeño $T_1 > 0$, tal que

$$\left|\int_{0}^{T_1} e^{-st}\ f(t)\ dt\right| \leq \int_{0}^{T_1} |f(t)|\ dt < \frac{\epsilon}{3}\ ,\ \text{ para }\ Re(s) \geq 0\ ,$$

y un número $T_2 > 0$ suficientemente grande tal que, por el Teorema 1.3.6,

$$\left|\int_{T_2}^{\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt\right| < \frac{\epsilon}{3}\ ,\ \text{ para todo } s \text{ en la región angular.}$$

Una vez fijados T_1 y T_2, elegimos un $x_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\left|\int_{T_1}^{T_2} e^{-st}\ f(t)\ dt\right| \leq e^{-x_0 T_1} \int_{T_1}^{T_2} |f(t)|\ dt < \frac{\epsilon}{3}\ ,\ \text{ para } Re(s) \geq x_0.$$

Consecuentemente,

$$|F(s)| < \epsilon\ ,\ \text{ para todo } s \text{ en la región angular, con } Re(s) \geq x_0.$$

□

De forma similar se puede demostrar la afirmación siguiente

Teorema 1.3.8. *Si $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ converge absolutamente en $s = s_0 \in \mathbb{R}$ y, en consecuencia, para $Re(s) \geq x_0$, entonces $F(s) = F(x+iy)$ tiende a cero cuando $y \to \pm\infty$, uniformemente en $x \geq x_0$.*

1.4. Teoremas de unicidad y analiticidad

Dos funciones diferentes pueden tener la misma transformada de Laplace. Por ejemplo, las funciones

$$f_1(t) \equiv 1\ ,\ t > 0$$

y

$$f_2(t) = \begin{cases} 1 & ,\ \ si \quad t > 0, t \neq 3 \\ \\ 4 & ,\ \ si \qquad t = 3 \end{cases}$$

poseen la misma imagen $F_1(s) = F_2(s) = \frac{1}{s}$, $Re(s) > 0$.

Para aclarar la situación, introducimos la función nula $n(t)$ que es una función integrable en cualquier intervalo finito de $\mathbb{R}^+$, tal que

$$\int_0^t n(\tau)\ d\tau = 0\ ,\ \forall t \geq 0.$$

Para esta función nula $n(t)$, usando integración por partes, concluimos que

$$\int_0^T e^{-st} n(t)\ dt = e^{-sT} \int_0^T n(\tau)\ d\tau + s \int_0^T e^{-st} \int_0^t n(\tau)\ d\tau\ dt = 0.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} n(t)\ dt = \mathcal{L}\{n\} = 0.$$

Esto demuestra que cualquier función nula $n(t)$ puede ser sumada a la función original sin afectar a su correspondiente función imagen. Vale, pues, el siguiente resultado

Teorema 1.4.1 (Teorema de Unicidad o de Lerch)**.** *Dos funciones originales cuyas imágenes son idénticas (en un semiplano derecho), difieren a lo más en una función $n(t)$.*

Nota. *El Teorema 1.4.1 es equivalente a la afirmación: Si $\mathcal{L}\{f\} = F(s) = 0$, entonces $f(t)$ es una función nula.*

Teorema 1.4.2. *Sea $\psi(x)$ una función continua, y supongamos que los momentos de cualquier orden de $\psi(x)$ en el intervalo finito (a, b) se anulan, esto es*

$$\int_a^b x^m \psi(x)\ dx = 0\ ,\ \ \forall m = 0, 1, \ldots$$

Entonces, $\psi(x) \equiv 0$ en (a, b).

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos considerar ψ una función real. Para funciones complejas, la conclusión puede ser aplicada separadamente para mostrar que la parte real y la parte imaginaria se anulan simultáneamente.

El Teorema de Weierstrass asegura, para todo $\delta > 0$, la existencia de un polinomio $p_\delta(x)$ tal que en el intervalo finito (a, b) la función continua $\psi(x)$ difiere de $p_\delta(x)$ como máximo en δ. Por ello, podemos escribir

$$\psi(x) = p_\delta(x) + \delta\vartheta(x), \text{ con } |\vartheta(x)| \leq 1 \text{ para } a \leq x \leq b.$$

Multiplicando esta igualdad por $\psi(x)$ e integrando entre a y b, da

$$\int_a^b \psi^2(x)\ dx = \int_a^b p_\delta(x)\psi(x)\ dx + \delta \int_a^b \vartheta(x)\psi(x)\ dx$$

La primera integral del segundo miembro es una combinación lineal de momentos de $\psi(x)$ en (a, b), que se anulan por hipótesis. Luego, resultaría la expresión

$$\int_a^b \psi^2(x)\ dx \leq \delta \int_a^b |\psi(x)|\ dx$$

Supongamos que $\psi(x)$ no es idénticamente nula en (a, b). Entonces existe un punto y, por continuidad, un entorno de ese punto, donde $|\psi(x)| > 0$. Como

$$\int_a^b \psi^2(x)\ dx > 0 \quad \text{y} \quad \int_a^b |\psi(x)|\ dx > 0\ ,$$

se infiere que

$$\delta \geq \frac{\int_a^b \psi^2(x)\ dx}{\int_a^b |\psi(x)|\ dx}$$

Ello es imposible, ya que δ puede ser elegido arbitrariamente pequeño.
Así pues, $\psi(x) \equiv 0$ en (a, b). □

Teorema 1.4.3. *Si $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$ se anula en una sucesión infinita de puntos que están equiespaciados (a igual distancia) a lo largo de una recta paralela al eje real*

$$F(s_0 + n\sigma) = 0 \qquad (\sigma > 0,\ n = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

siendo s_0 un punto de convergencia de $\mathcal{L}\{f\}$, entonces $f(t)$ es una función nula.

Demostración. El Teorema 1.3.4, para $Re(s) > Re(s_0)$, nos permite expresar

$$F(s) = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t)\ dt,$$

donde

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\ d\tau.$$

Por ello,

$$F(s_0 + n\sigma) = n\sigma \int_0^\infty e^{-n\sigma t} \varphi(t)\ dt\ ,$$

y, en virtud de la hipótesis (1.5),

$$\int_0^\infty e^{-n\sigma t} \varphi(t)\ dt = 0\ ,\ \ n = 1, 2, \ldots \tag{1.6}$$

Si realizamos la sustitución

$$e^{-\sigma t} = x \Leftrightarrow t = -\frac{\ln x}{\sigma}\ ,$$

y ponemos

$$\varphi\left(-\frac{\ln x}{\sigma}\right) = \psi(x)$$

podemos reescribir (1.6) de la forma

$$\frac{1}{\sigma} \int_0^1 x^{n-1} \psi(x)\ dx = 0\ ,\quad n = 1, 2, \ldots\ ,$$

o sea,

$$\int_0^1 x^{\mu} \psi(x)\ dx = 0\ ,\quad \mu = 0, 1, \ldots$$

Si definimos

$$\psi(0) = \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = F(s_0)\ ,\quad \psi(1) = \varphi(0) = 0$$

y recordemos que $\varphi(t)$ es continua en $[0, \infty)$, la función $\psi(x)$ será continua en $[0, 1]$. Luego, podemos aplicar el Teorema 1.4.2 y observar que $\psi(x) \equiv 0$, esto es

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau)\ d\tau \equiv 0.$$

Integrando por partes

$$e^{-s_0 t}\int_0^t f(\tau)\ d\tau + \int_0^t e^{-s_0\tau}\int_0^\tau f(u)\ du\ d\tau \equiv 0$$

Como el integrando de la segunda integral es continuo, ésta es derivable y, consecuentemente, también la primera, por lo cual

$$-s_0 e^{-s_0 t}\int_0^t f(\tau)\ d\tau + e^{-s_0 t}\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\ d\tau + s_0 e^{-s_0 t}\int_0^t f(u)\ du = 0.$$

Llegamos así a que

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\ d\tau = 0$$

Como $\int_0^t f(\tau)\ d\tau = 0$ para $t = 0$, tenemos que

$$\int_0^t f(\tau)\ d\tau \equiv 0\ ,$$

esto es, $f(t)$ es una función nula.

□

Nota. *Una función imagen no trivial podría tener infinitos ceros a lo largo de una recta paralela al eje real, siempre que no estén a iguales intervalos de espacio a lo largo de dicha recta. Esto se puede observar en los siguientes ejemplos [3].*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{(2s)}}\cos\sqrt{2s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{(2s)}}\operatorname{sen}\sqrt{2s}$$

Teorema 1.4.4 (Teorema Fuerte de Unicidad)**.** *Dos funciones, cuyas imágenes toman valores iguales en una sucesión infinita de puntos equidistantes sobre una recta paralela al eje real, difieren como mucho en una función nula.*

El siguiente aserto nos indicará cuándo dos funciones originales son exactamente iguales.

Teorema 1.4.5. *Dos funciones que difieren en una función nula, son exactamente iguales en aquellos puntos donde ambas funciones son continuas.*

Teorema 1.4.6. *Si la transformada de Laplace $F(s)$ no es idénticamente nula, no puede ser periódica.*

Demostración. Suponemos, por reducción al absurdo, que $F(s)$ es periódica con período complejo σ; esto es, en el semiplano derecho de convergencia se verifica

$$F(s) = F(s+\sigma).$$

Entonces

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\ dt - \int_0^\infty e^{-(s+\sigma)t} f(t)\ dt = \int_0^\infty e^{-st}(1-e^{-\sigma t}) f(t)\ dt = 0$$

Por lo tanto, $(1-e^{-\sigma t})f(t)$ es una función nula. Puesto que $t \in \mathbb{R}$, el factor $(1-e^{-\sigma t})$ sólo se anula:

- Para $\sigma \in \mathbb{C}$, hay exactamente un cero en $t = 0$.

- Para σ imaginario puro, los ceros están dados por la sucesión de valores reales $t = \frac{2\pi n i}{\sigma}$ con $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Tenemos que

$$\int_0^t (1-e^{-\sigma t}) f(t)\ dt = 0$$

o

$$\int_0^t f(\tau)\ d\tau = \int_0^t e^{-\sigma t} f(\tau)\ d\tau \qquad t \geq 0$$

Por ello, poniendo

$$\int_0^t f(\tau)\ d\tau = \varphi(t)$$

y usando integración por partes

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-\sigma\tau} f(\tau)\ d\tau = e^{-\sigma t}\varphi(t) + \sigma \int_0^t e^{-\sigma\tau}\varphi(\tau)\ d\tau\ ,$$

esto es,

$$(1-e^{-\sigma t})\varphi(t) = \sigma \int_0^t e^{-\sigma\tau}\varphi(\tau)\ d\tau \tag{1.7}$$

La función $\varphi(t)$ es continua y, por ello, el segundo miembro puede ser derivado. Consecuentemente, el primer miembro y $\varphi(t)$ son derivables, con la posible excepción de en los ceros de $(1-e^{-\sigma t})$. Si lo hacemos, se tiene

$$\sigma e^{-\sigma t}\varphi(t) + (1-e^{-\sigma t})\varphi'(t) = \sigma e^{-\sigma t}\varphi(t)$$

Por lo tanto

$$\varphi'(t) = 0$$

con la excepción de los ceros de $(1-e^{-\sigma t})$. Como quiere que $\varphi(0) = 0$, se infiere que $\varphi(t) \equiv 0$. Luego, $f(t)$ es una función nula y $F(s) \equiv 0$.

$\square$

Teorema 1.4.7 (Teorema de analiticidad)**.** *La transformada de Laplace es una función analítica en el interior de su semiplano de convergencia, $Re(s) > \beta$, es decir, tiene derivadas de todos los órdenes. Las derivadas se obtienen derivando bajo el signo integral, es decir,*

$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)\ dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$$

Las derivadas son las transformadas de Laplace de la función $(-t)^n f(t)$.

Demostración. Es suficiente demostrar el teorema para $n = 1$, deduciéndose la conclusión general por iteración.

Para un punto interior del semiplano de convergencia s debemos ver que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = -\int_0^\infty e^{-st} t f(t)\ dt \tag{1.8}$$

En virtud del Teorema Fundamental 1.3.4, podemos poner

$$F(s) = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)} \varphi(t)\ dt \qquad (Re(s) > Re(s_0))\ , \tag{1.9}$$

siendo

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{-s_0\tau} f(\tau)\ d\tau\ , \tag{1.10}$$

donde s_0 es un punto de convergencia de $\mathcal{L}\{f\}$.

Como $Re(s) > \beta$, podemos poner $Re(s) - \beta = 3\xi > 0$, y escogemos

$$s_0 = \beta + \xi$$

Por lo tanto,

$$Re(s - s_0) = 2\xi > 0 \tag{1.11}$$

Derivando formalmente (1.9) bajo el signo integral, obtenemos

$$\Psi(s) = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t)\ dt - (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} t\varphi(t)\ dt. \tag{1.12}$$

Todo se reduce ahora a establecer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} = \Psi(s)\ ,$$

donde $|h| < \xi$.

Teniendo presente (1.9), sigue

$$
\begin{aligned}
D(h) &= \frac{F(s+h)-F(s)}{h} - \Psi(s) = \\
&= \frac{1}{h}\{(s+h-s_0)\int_0^\infty e^{-(s+h-s_0)t}\varphi(t)\ dt - (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\ dt\} \\
&- \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\ dt + (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} t\varphi(t)\ dt = \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}(e^{-ht}-1)\varphi(t)\ dt + (s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\left(\frac{e^{-ht}-1}{h}+t\right)\varphi(t)\ dt.
\end{aligned}
$$

Ahora bien, del desarrollo potencial de la exponencial, sigue de una parte

$$
\begin{aligned}
|e^{-ht}-1| = \left|-\frac{ht}{1!}+\frac{(ht)^2}{2!}-\frac{(ht)^3}{3!}+\dots\right| &\leq |h|t\left(1+\frac{|h|t}{1!}+\frac{|h|^2t)^2}{2!}+\dots\right) = \\
&= |h|te^{|h|t} \leq |h|te^{\xi t}
\end{aligned}
$$

Por otra parte,

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{e^{-ht}-1}{h}+t\right| = \left|\frac{ht^2}{2!}-\frac{h^2t^3}{3!}+\frac{h^3t^4}{4!}-\dots\right| &\leq |h|t^2\left(1+\frac{|h|t}{1!}+\frac{|h|^2t^2}{2!}+\dots\right) = \\
&= |h|t^2e^{|h|t} \leq |h|t^2e^{\xi t}\ ,
\end{aligned}
$$

ya que $|h| < \xi$.

La función $\varphi(t)$ es continua para $t \geq 0$ y $\lim_{t\to\infty} \varphi(t)) = F(s_0)$. Por lo tanto, tenemos

$$
|\varphi(t)| \leq M \qquad t \geq 0
$$

Así se deduce que

$$
\begin{aligned}
|D(h)| &\leq |h|M\int_0^\infty e^{-2\xi t}te^{\xi t}\ dt + |s-s_0||h|M\int_0^\infty e^{-2\xi t}t^2e^{\xi t}\ dt = \\
&= |h|M\{\int_0^\infty e^{-\xi t}t\ dt + |s-s_0|\int_0^\infty e^{-\xi t}t^2\ dt\} = |h|const.
\end{aligned}
$$

Consecuentemente, $D(h) \to 0$ cuando $t \to 0$, lo cual implica que $F'(s) = \Psi(s)$.

Ahora, vamos a simplificar la representación de $\Psi(s)$. Integrando por partes tenemos

$$
\int_0^t \tau\left[e^{-s_0\tau}f(\tau)\right]\ d\tau = t\varphi(t) - \int_0^t \varphi(\tau)\ d\tau,
$$

esto es,

$$
t\varphi(t) = \int_0^t \left[\varphi(\tau)+\tau e^{-s_0\tau}f(\tau)\right]\ d\tau. \tag{1.13}
$$

Utilizando (1.13), se obtiene que

$$-(s-s_0)\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\left[t\varphi(t)\right]\,dt = e^{-(s-s_0)t}t\varphi(t)\Big|_0^\infty$$
$$-\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\left[\varphi(t)+te^{-s_0t}f(t)\right]\,dt = -\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)\,dt$$
$$-\int_0^\infty e^{-st}tf(t)\,dt\ , \tag{1.14}$$

ya que por (1.11) y por $|h|<\xi$ tenemos que $e^{-(s-s_0)t}t\varphi(t)\to 0$ para $t\to\infty$.

Sustituyendo (1.14) en (1.12) se llega a la expresión (1.8) para $\Psi(s)$.

□

Se prueba fácilmente que

Teorema 1.4.8. *La transformación finita de Laplace, dada por*

$$\mathcal{L}_T\{f(t)\} = F_T(s) = \int_0^T e^{-st}f(t)\,dt\ ,\ \ s\in\mathbb{C}\ ,$$

donde f es absolutamente integrable en $(0,T)$, $T>0$, define una función entera.

Nota. *Cuando $T\to\infty$ se obtiene la transformación infinita de Laplace o, simplemente, la transformación de Laplace*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}_\infty\{f(t)\} = F_\infty(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt\ ,$$

la cual es holomorfa es un semiplano de convergencia, como acabamos de demostrar.

1.5. Reglas operacionales

Teorema 1.5.1 (Teorema de Semejanza)**.** *Sea $f(t):[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ y supongamos que $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$. Entonces, para todo $a>0$,*

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Demostración.

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)\,dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}v}f(v)\,dv = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

□

Nota. *En general, la sustitución tiene significado sólo para $a>0$, ya que $f(t)$ está definida necesariamente para $t\geq 0$.*

Teorema 1.5.2 (Primer Teorema de Traslación)**.** *Sea $f(t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Entonces, para $b > 0$,*

$$\mathcal{L}\{f(t-b)u(t-b)\} = e^{-bs}F(s) \ ,$$

donde $u(t)$ es la función 1.1.

Demostración.

$$\mathcal{L}\{f(t-b)u(t-b)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t-b)u(t-b)\ dt = \int_b^\infty e^{-st}f(t-b)\ dt =$$
$$= e^{-bs}\int_0^\infty e^{-sv}f(v)\ dv = e^{-bs}F(s).$$

□

Ejemplo 1.5.1. *Considérese una función periódica $p(t)$, de período ω, cuya transformación de Laplace es $P(s)$. Definimos la función $p_\omega(t)$ igual a $p(t)$ en el primer período , $0 \leq t < \omega$, y a cero fuera de ese intervalo. Entonces la transformación de $p_\omega(t)$ vendrá dado por*

$$P_\omega(s) = P(s)(1 - e^{-\omega s})$$

Esto significa que podemos determinar la transformación de Laplace $P(s)$ de una función periódica $p(t)$ usando la transformación de Laplace "finita"$P_\omega(s)$ en el primer período

$$P(s) = \frac{1}{1 - e^{-\omega s}}\int_0^\omega e^{-st}p(t)\ dt$$

Teorema 1.5.3. *Sea $f(t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $a > 0$, $b > 0$. Entonces*

$$\mathcal{L}\{f(at-b)\} = \frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}s}F\left(\frac{s}{a}\right) \ ,$$

siempre que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Demostración.

$$\mathcal{L}\{f(at-b)\} = \int_{\frac{b}{a}}^\infty e^{-st}f(at-b)\ dt = \frac{e^{-\frac{b}{a}s}}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}v}f(v)\ dv = \frac{e^{-\frac{b}{a}s}}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

□

Teorema 1.5.4. *Sea $f(t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y $a > 0$, $b > 0$. Entonces*

$$\mathcal{L}\{f(at+b)\} = \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right) - F_b\left(\frac{s}{a}\right)\right\}$$

Demostración.

$$\mathcal{L}\{f(at+b\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at+b)\ dt = \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}\int_b^\infty e^{-\frac{s}{a}v}f(v)\ dv =$$
$$= \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}\left\{\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}t}f(t)\ dt - \int_0^b e^{-\frac{s}{a}t}f(t)\ dt\right\} = \frac{1}{a}e^{\frac{b}{a}s}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right) - F_b\left(\frac{s}{a}\right)\right\}$$

□

Tomando $a = 1$ obtenemos el siguiente teorema

Teorema 1.5.5 (Segundo Teorema de Traslación)**.** *Sea* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *tal que* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ *y* $b > 0$*. Entonces*

$$\mathcal{L}\{f(t+b)\} = e^{bs}\{F(s) - F_b(s)\}$$

Teorema 1.5.6. *Supongamos que* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *y sea* $c > 0$ *y* d *complejo. Se tiene*

$$F(cs+d) = \frac{1}{c}\mathcal{L}\left\{e^{-\frac{d}{c}t} f\left(\frac{t}{c}\right)\right\}$$

Nota. *Si* $F(s)$ *tiene sentido para* $Re(s) > \beta$*, entonces* $F(cs+d)$ *está definida para*

$$Re(s) > \frac{\beta - Re(d)}{c}$$

Demostración.

$$F(cs+d) = \int_0^\infty e^{-(cs+d)t} f(t)\, dt = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-(cs+d)\frac{v}{c}} f\left(\frac{v}{c}\right)\, dv = \frac{1}{c}\int_0^\infty e^{-st}\left[e^{-\frac{d}{c}t} f\left(\frac{t}{c}\right)\right]\, dt$$

□

Tomando $c = 1$ obtenemos el siguiente teorema

Teorema 1.5.7 (Teorema de Amortiguación)**.** *Sea* $F(s)$ *la transformación de Laplace de la función* $f(t)$ *y sea* d *complejo, entonces*

$$F(s+d) = \mathcal{L}\{e^{-dt} f(t)\}$$

1.6. Operador Integración

Teorema 1.6.1 (Teorema de Integración)**.** *Definimos el operador integral u operador de integración de una función* f *mediante*

$$I(f) = \varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$$

Si $\mathcal{L}\{f\}$ *converge para algún número real* $s = x_0 > 0$*, entonces* $\mathcal{L}\{\varphi\}$ *converge para* $s = x_0$*, y tenemos*

$$\mathcal{L}\{\varphi\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\},$$

esto es,

$$\Phi(s) = \frac{1}{s}F(s)$$

para $s = x_0$ *y* $Re(s) > x_0$*. Además,*

$$\varphi(t) = o(e^{x_0 t}) \qquad t \to \infty$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}\{\varphi\}$ *converge absolutamente para* $Re(s) > x_0$*.*

Nota. *Observamos que x_0 está restringido a $x_0 > 0$. El teorema 1.6.1 puede fallar para $x_0 \leq 0$.*

Demostración. Definimos

$$\psi(z) = \int_0^z e^{-x_0 t} \varphi(t)\ dt$$

$$g(z) = e^{x_0 z} \psi(z), \qquad h(z) = e^{x_0 z}$$

Como la función $\varphi(t)$ es continua, la función $\psi(z)$ y, en consecuencia, $g(z)$ son derivables para $z > 0$. Es obvio que $h(z)$ es también derivable. Además, la función $h(z)$ es real para x_0 real, $h(z) \to +\infty$ para $z \to +\infty$ ya que $x_0 > 0$, y $h'(z) = x_0 e^{x_0 z} \neq 0$. Integrando por partes se obtiene

Usando la integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{g'(z)}{h'(z)} &= \frac{e^{x_0 z}(x_0 \psi + \psi')}{x_0 e^{x_0 z}} = \frac{1}{x_0}(x_0 \psi + \psi') = \\
&= \frac{1}{x_0}[x_0 \int_0^z e^{-x_0 t} \varphi(t)\ dt + e^{-x_0 z} \varphi(z)] = \\
&= \frac{1}{x_0}\left[-e^{-x_0 z} \varphi(z) + \int_0^z e^{-x_0 t} f(t)\ dt + e^{-x_0 z} \varphi(z) \right] = \\
&= \frac{1}{x_0} \int_0^z e^{-x_0 t} f(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Por hipótesis $\mathcal{L}\{f\}$ converge para $s = x_0$, así que entonces $\frac{g'(z)}{h'(z)}$ tiende a $\frac{F(x_0)}{x_0}$ cuando $z \to \infty$. Por la regla de L'Hôpital, $\frac{g(z)}{h(z)}$ tiene el mismo límite

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \psi(z) = \int_0^z e^{-x_0 t} \varphi(t)\ dt \to \frac{F(x_0)}{x_0}\ , \quad z \to \infty$$

Ello implica que

$$\Phi(x_0) = \frac{F(x_0)}{x_0}.$$

Así hemos demostrado la conclusión del teorema 1.6.1 para $s = x_0$. Como quiera que las hipótesis se satisfacen para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > x_0$, también vale

$$\Phi(x) = \frac{F(x)}{x}\ , \qquad x > x_0$$

Puesto que las funciones $\Phi(s)$ y $F(s)$ son analíticas para $Re(s) > x_0$, podemos extender esta ecuación funcional al semiplano $Re(s) > x_0$ [3].

Por otra parte, de

$$\lim_{z \to \infty} \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \to \infty} \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

se tiene que

$$\lim_{z \to \infty} \psi(z) = \lim_{z \to \infty} \frac{1}{x_0}[x_0 \psi(z) + \psi'(z)]$$

Por ello,

$$\lim_{z\to\infty} \psi'(z) = 0 \ ,$$

es decir,

$$\lim_{z\to\infty} e^{-x_0 z}\varphi(z) = 0 \ ,$$

de donde se infiere la última afirmación del teorema.

$\square$

Nota. *Si iteramos n veces, $n \in \mathbb{N}$, el operador integral, se tiene*

$$I^n \ f(t) = \int_0^t \int_0^{z_{n-1}} \cdots \int_0^{z_2} \int_0^{z_1} \ f(z) \ dz \ dz_1 \ dz_2 \ \cdots \ dz_{n-1}.$$

Procediendo análogamente se llega a que

$$\mathcal{L}\{I^n \ f(t)\} = \frac{F(s)}{s^n} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s^n}.$$

Es uno de los resultados más sorprendentes de la transformación de Laplace, pues se ha establecido que integrar en el espacio original significa dividir por una potencia natural de s en el espacio imagen: si se integra una vez, se divide por s; si dos, por s^2; ... En otras palabras, el operador integral se transforma en una sencilla operación algebraica, el cociente de dos funciones.

1.7. Operador Derivación

En este párrafo suponemos que la función $f(t)$ y sus derivadas implicadas son integrables para todo $t > 0$. En particular, se tiene que la integral

$$\int_0^1 \ f'(\tau) \ d\tau$$

existe. Ahora bien,

$$\int_0^1 \ f'(\tau) \ d\tau = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ f'(\tau) \ d\tau = f(1) - \lim_{t\to 0^+} \ f(t).$$

Por tanto, existe $\lim\limits_{t\to 0^+} \ f(t) = f(0^+)$. En consecuencia, si aplicamos el Teorema 1.6.1 a la expresión

$$\int_0^t \ f'(\tau) \ d\tau = f(t) - f(0^+)$$

y tenemos en cuenta queda

$$\mathcal{L}\{f(0^+)\} = \frac{f(0^+)}{s} \ , \ \ Re(s) > 0 \ ,$$

se deduce que

$$\frac{\mathcal{L}\{f'(t)\}}{s} = \mathcal{L}\{f(t)\} - \frac{f(0^+)}{s} ,$$

de donde

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+) = sF(s) - f(0^+) ,$$

siendo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Por otra parte,

$$\frac{f(t)}{e^{x_0 t}} = \frac{f(t) - f(0^+)}{e^{x_0 t}} + \frac{f(0^+)}{e^{x_0 t}} \to 0 \ , \ \text{si} \ \ t \to \infty \ ,$$

ya que $x_0 > 0$.

Hemos demostrado así el siguiente teorema

Teorema 1.7.1 (Teorema de Derivación)**.** *Si $f(t)$ es derivable para $t > 0$ y $\mathcal{L}\{f'\}$ converge para algún real $x_0 > 0$, entonces el límite $f(0^+)$ existe y $\mathcal{L}\{f\}$ también converge para $s = x_0$, valiendo la expresión*

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+) \ , \textit{ para } s = x_0 \textit{ y } Re(s) > x_0$$

Además, como

$$f(t) = o(e^{x_0 t}) \ , \qquad t \to \infty \ ,$$

$\mathcal{L}\{f\}$ converge absolutamente para $Re(s) > x_0$.

Asumamos ahora que $f(t)$ es derivable dos veces para $t > 0$ y $\mathcal{L}\{f''\}$ converge para algún x_0. Entonces podemos aplicar el teorema 1.7.1 a f' en lugar de a f y tenemos que $f'(0^+)$ existe, que $\mathcal{L}\{f'\}$ converge para $s = x_0$ y que

$$\mathcal{L}\{f''\} = s\mathcal{L}\{f'\} - f'(0^+) \text{ para } s = x_0 \text{ y } Re(s) > x_0. \tag{1.15}$$

Aplicando de nuevo el teorema 1.7.1, concluimos que $f(0^+)$ existe, que $\mathcal{L}\{f\}$ converge para $s = x_0$ y que

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0^+) \ , \ \text{ para } s = x_0 \text{ y } Re(s) > x_0. \tag{1.16}$$

Combinando (1.15) y (1.16) llegamos a que

$$\mathcal{L}\{f''\} = s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0^+) - f'(0^+) \ , \ \text{ para } s = x_0 \text{ y } Re(s) > x_0.$$

Además, valen los comportamientos

$$f'(t) = o(e^{x_0 t}) \text{ y } f(t) = o(e^{x_0 t}) \ , \ \text{ cuando } \ t \to \infty.$$

La generalización de este resultado se da en el siguiente

Teorema 1.7.2. *Si $f(t)$ es derivable n veces para $t > 0$ y $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}$ converge para algún real $x_0 > 0$, entonces los límites*

$$\lim_{t\to+0} f(t) = f(0^+),\ \lim_{t\to+0} f'(t) = f'(0^+),\ \cdots,\ \lim_{t\to+0} f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(0^+)$$

existen y $\mathcal{L}\{f\}$ converge para $s = x_0$, verificándose que

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - f(0^+)s^{n-1} - f'(0^+)s^{n-2} - \cdots - f^{(n-1)}(0^+) \tag{1.17}$$

para $s = x_0$ y para $Re(s) > x_0$. Además, como

$$f(t) = o(e^{x_0t}),\ f'(t) = o(e^{x_0t}),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(t) = o(e^{x_0t})\ ,\ \ \text{cuando}\ \ t \to \infty\ ,$$

$\mathcal{L}\{f\}$, $\mathcal{L}\{f'\}$, $\cdots$, $\mathcal{L}\{f^{(n-1)}\}$ converge absolutamente si $Re(s) > x_0$.

Nota. *Si $f \in C^n[0,\infty)$ y existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}$, la fórmula (1.17) se puede reescribir así*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{f\} - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{1.18}$$

O bien,

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\left\{f(t) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}t + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}\right]\right\}.$$

En el supuesto de que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, esta fórmula se reduce a

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} = s^nF(s). \tag{1.19}$$

El Teorema 1.7.2 establece un importante hecho, implica que la derivada n-ésima en el espacio original se corresponde con una operación algebraica en el espacio imagen: la multiplicación por s^n y la sustracción de un polinomio de s, cuyos coeficientes son los valores iniciales de las funciones originales. Obsérvese que entre corchetes aparecen los n primeros términos del desarrollo de Taylor de $f(t)$.

A continuación, recordaremos el teorema 1.4.7

Teorema 1.7.3. *La derivación n-ésima de la función imagen se corresponde con la multiplicación de la función original por $(-t)^n$:*

$$\mathcal{L}\{(-t)^nf(t)\} = F^{(n)}(s). \tag{1.20}$$

Nota. *Los resultados correspondientes al comportamiento de la transformación de Laplace respecto de los operadores integración y derivación se pueden unificar, si interpretamos la multiplicación de $F(s)$ por la potencia s^n en el espacio original como derivar n veces la función $f(t)$, si n es un entero positivo, e integrar n veces $f(t)$, si n es un entero negativo (opuesto). Esta afirmación es consistente con el hecho de que derivar e integrar son operaciones opuestas.*

Además, las fórmulas (1.19) y (1.20) muestran una sorprendente simetría entre lo que ocurre en los dos espacios, el original y el imagen. En efecto, derivar en el primero significa multiplicar en el segundo por una potencia de s; y, recíprocamente, derivar en el segundo se traduce en el primero en multiplicar por una potencia de $-t$.

1.8. La convolución

A continuación estudiaremos el comportamiento de la transformación de Laplace ante operaciones que involucran más de una función, como la suma y el producto de funciones. La fórmula para la suma de funciones

$$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\} = F_1 + F_2$$

es evidente, en virtud de la linealidad de $\mathcal{L}$. Sin embargo, analizar lo que ocurre con el producto de dos funciones originales o de dos funciones imágenes es bastante más complicado. Mientras que la suma de dos funciones en un espacio se corresponde con la suma de sus imágenes en el otro, el producto no se corresponde con el producto.

Supongamos que tenemos el producto $F_1 \cdot F_2$ en el espacio imagen. No preguntamos entonces ¿cuál es su correspondencia en el espacio original? Planteado de otra forma, ¿qué operación hay que realizar con las funciones de partida f_1 y f_2 para que su transformada de Laplace sea precisamente $F_1 \cdot F_2$?

Para dar respuesta a estas cuestiones, aprovecharemos la analogía existente entre la teoría de series y la de integración. Si multiplicamos dos series de potencias convergentes

$$\varphi_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } \varphi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

obtenemos la nueva serie de potencias (producto de Cauchy)

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) \cdot \varphi_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \ ,$$

cuyos coeficientes están dados por la siguiente fórmula

$$c_n = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} f_1(r) f_2(n-r) \ ,$$

si adoptamos la notación funcional para las sucesiones de coeficientes (a_n) y (b_n), es decir, $a_n = f_1(n)$ y $b_n = f_2(n)$, respectivamente.

De igual forma que el producto de dos series potenciales es otra serie potencial, parece natural conjeturar que el producto de las dos integrales

$$F_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t)\ dt \ \text{ y } \ F_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t)\ dt$$

será otra integral

$$F_1(s)F_2(s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\ dt \ ,$$

donde la función original

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\ d\tau \tag{1.21}$$

está formada de manera análoga al coeficiente de la serie producto. A la expresión (1.21) se le denomina *producto de convolución*, o, abreviadamente, *convolución de las funciones* f_1 y f_2. Además, denotaremos simbólicamente a la convolución de la siguiente manera

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau. \tag{1.22}$$

Antes de probar dicha conjetura debemos suponer ciertas hipótesis, ya que en comparación con el producto de series surgen ciertas dificultades:

- La convergencia absoluta en el interior del dominio de convergencia no está garantizada.
- A diferencia de los coeficientes c_n de la serie producto, la integral (1.21) no siempre existe. Por ejemplo, si consideramos las funciones

$$f_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}, \qquad f_2(t) = |1-t|^{-\frac{1}{2}}$$

tenemos que la convolución $f(t)$ no existe para $t = 1$, ya que

$$f(1) = \int_0^1 \tau^{-\frac{1}{2}} |1-(1-\tau)|^{-\frac{1}{2}}\, d\tau = \int_0^1 \tau^{-1}\, d\tau$$

Por lo tanto, vamos a restringir las funciones originales a una clase específica de funciones

Definición 1.8.1. *La* ***clase*** $\mathcal{F}$ *está formada por las funciones* $f(t)$ *absolutamente integrables que están acotadas en todo intervalo finito que no incluye al origen:* $0 < T_1 \le t \le T_2$.

Para esta clase de funciones sí existe la convolución. En efecto, sean f_1 y f_2 funciones de clase $\mathcal{F}$, y sea $t > 0$ fijado. Entonces

$$|f_1(\tau)| \le M_1,\ |f_2(\tau)| \le M_2 \text{ para } \frac{t}{2} \le \tau \le t$$

y por ello

$$\left| \int_0^{t/2} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right| \le M_2 \int_0^{t/2} |f_1(\tau)|\, d\tau,$$

$$\left| \int_{t/2}^{t} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau \right| \le M_1 \int_0^{t/2} |f_2(v)|\, dv.$$

Luego, $f_1 * f_2$ existe siempre en $\mathcal{F}$.

Es sabido que el producto de dos series potenciales absolutamente convergentes es otra serie absolutamente convergente [1]. El resultado análogo para el producto de integrales se recoge en el siguiente

Teorema 1.8.1 (Teorema de Convolución)**.** *Si $\mathcal{L}\{f_1\}$ y $\mathcal{L}\{f_2\}$ convergen absolutamente para $s = s_0$, y si f_1 y f_2 son funciones de clase $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{L}\{f_1 * f_2\}$ converge absolutamente para $s = s_0$ y tenemos*

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{f_2\} \text{ para } Re(s) \geq Re(s_0)$$

Demostración. Definimos

$$f_1(t) = f_2(t) = 0 \text{ para } t < 0.$$

Entonces, para $s = s_0$,

$$\mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{f_2\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0\tau} f_1(\tau)\ d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0\tau} f_2(\tau)\ d\tau. \tag{1.23}$$

Como la segunda integral es constante se puede meter bajo el primer signo integral. Además, introducimos una nueva variable t mediante el cambio de variable $u = t - \tau$ y reescribimos la integral de la siguiente forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0\tau} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0(t-\tau)} f_2(t-\tau)\ dt\right]\ d\tau.$$

Podemos conmutar el orden de integración ya que las integrales convergen absolutamente.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0 t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\ d\tau\right]\ dt. \tag{1.24}$$

Obsérvese que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\ d\tau = \begin{cases} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\ d\tau & si \quad t \geq 0 \\ \\ 0 & si \quad t < 0 \end{cases},$$

que coincide con la expresión que se había conjeturado para la convolución.

Luego, (1.24) se puede escribir

$$\int_0^{\infty} e^{-s_0 t}\ (f_1 * f_2)(t)\ dt = \mathcal{L}\{f_1 * f_2\}. \tag{1.25}$$

El resultado sigue de (1.23) y (1.25). Por lo tanto, el teorema 1.8.1 se verifica para $s = s_0$ y, en consecuencia, para $Re(s) \geq Re(s_0)$.

□

De este teorema podemos deducir algunas propiedades importantes de la convolución:

- Propiedad conmutativa: $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

  Demostración. Llevando a cabo el cambio $t = v - \tau$, sigue que

  $$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\ d\tau = \int_0^t f_1(t-v) f_2(v)\ dv = f_2 * f_1$$

  □

- Propiedad asociativa: $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$.

  Demostración. Aplicando el Teorema 1.8.1 repetidamente obtenemos

  $$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2) * f_3\} = \mathcal{L}\{f_1 * f_2\}\mathcal{L}\{f_3\} = \mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{f_2\}\mathcal{L}\{f_3\} \ ,$$

  expresión idéntica a la obtenida para $\mathcal{L}\{f_1 * (f_2 * f_3)\}$. Es decir,

  $$\mathcal{L}\{(f_1 * f_2) * f_3\} = \mathcal{L}\{f_1 * (f_2 * f_3)\}$$

  Luego, por el Teorema de Unicidad 1.4.1 tenemos que

  $$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3) + n$$

  donde n es una función nula.

  Como demostraremos a continuación que la convolución es continua para $t > 0$, en virtud del teorema 1.4.5 se infiere que $n \equiv 0$ y sigue el resultado deseado.

  □

- Propiedad distributiva: $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$.

  Se prueba de forma similar.

Teorema 1.8.2. *Sean f_1 y f_2 funciones de clase $\mathcal{F}$. Entonces la convolución $f_1 * f_2$ es continua para $t > 0$.*

Demostración. Sea t un número positivo fijo. Tenemos que demostrar que, para $\delta \to 0$,

$$D(t,\delta) = \int_0^{t+\delta} f_1(\tau)f_2(t+\delta-\tau)\ d\tau - \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)\ d\tau$$

converge a cero. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que δ es positivo, ya que la verificación para $\delta < 0$ es análoga. Además, asumimos que

$$0 < \delta \leq 1.$$

Sea t_0 un número positivo tal que

$$0 < t_0 \leq \frac{t}{2}$$

Ahora descomponemos $D(t,\delta)$ como sigue

$$\begin{aligned} D(t,\delta) = &\int_0^{t_0} f_1(\tau)[f_2(t+\delta-\tau) - f_2(\tau)]\ d\tau + \\ &+ \int_{t_0}^{t} f_1(\tau)[f_2(t+\delta-\tau) - f_2(\tau)]\ d\tau + \\ &+ \int_t^{t+\delta} f_1(\tau)f_2(t+\delta-\tau)\ d\tau = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

A continuación, estudiamos cada una de las integrales:

- Para la integral I_1, el menor argumento de f_2 es $(t - t_0)$ y el mayor es $(t + \delta)$; esto es, los argumentos varían, a lo más, en el intervalo $(t/2, t + 1)$ En este intervalo, la función f_2 de clase $\mathcal{F}$ está acotada, digamos $|f_2| \leq M_2$ ($M_2 > 0$ constante).
- Para la integral I_2, el argumento de f_1 está en el intervalo (t_0, t). La función f_1 de clase $\mathcal{F}$ está acotada en dicho intervalo por un cota que depende de la elección de t_0, sea $|f_1| \leq m(t_0)$.
- Para la integral I_3, el argumento de f_1 varía en el intervalo $(t, t+\delta)$, esto es, a lo más, en el intervalo $(t, t + 1)$. En este intervalo tenemos $|f_1| \leq M_1$ ($M_1 > 0$ constante).

De las consideraciones anteriores se infiere la siguiente acotación

$$|D(t, \delta) \leq 2M_2 \int_0^{t_0} |f_1(\tau)|\ d\tau + m(t_0) \int_0^{t-t_0} |f_2(v + \delta) - f_2(v)|\ dv + M_1 \int_0^{\delta} |f_2(v)|\ dv.$$

Dado que

$$\lim_{t_0 \to 0} \int_0^{t_0} |f_1(\tau)|\ d\tau = 0\ ,$$

para cualquier $\epsilon > 0$, podemos encontrar t_0 suficientemente pequeño, de modo que

$$2M_2 \int_0^{t_0} |f_1(\tau)|\ d\tau < \frac{\epsilon}{3}$$

Con este t_0, ya podemos fijar $m(t_0)$. Además, elegimos $\delta_0 > 0$ de forma que para $0 < \delta < \delta_0$, (ver [3, p. 48])

$$m_1(t_0) \int_0^{t-t_0} |f_2(v + \delta) - f_2(v)|\ dv < \frac{\epsilon}{3}$$

y

$$M_1 \int_0^{\delta} |f_2(v)|\ dv < \frac{\epsilon}{3}$$

Por lo tanto, combinando las tres últimas desigualdades tenemos

$$|D(t, \delta)| < \epsilon\ , \quad \text{para} \quad 0 < \delta < \delta_0$$

se concluye así que $(f_1 * f_2)(t)$ es continua para $t > 0$.

□

Nota. *La continuidad de la convolución ha sido establecida para $t > 0$. No tiene por qué ser continua en $t = 0$. Nótese que $(f_1 * f_2)(0) = 0$, aunque $f_1 * f_2$ no tienda a cero cuando $t \to 0$. Por ejemplo,*

$$t^{-\frac{1}{2}} * t^{-\frac{1}{2}} = \int_0^t \tau^{-\frac{1}{2}}(1 - \tau)^{-\frac{1}{2}}\ d\tau = \int_0^1 v^{-\frac{1}{2}}(1 - v)^{-\frac{1}{2}}\ dv =$$
$$= \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1\right)} = \pi\ , \quad t > 0$$

Por ello, el límite de la convolución cuando $t \to 0$ es π, que no coincide obviamente con el valor de la misma en $t = 0$.

Teorema 1.8.3. *Sean f_1 y f_2 funciones de la clase $\mathcal{F}$ y supongamos que bien f_1 o bien f_2 está acotada en un entorno de cero, digamos $|f_1| \leq M_1$, para $0 \leq t \leq T$. Entonces la convolución $f_1 * f_2$ es continua para $t \geq 0$, esto es, también es continua en $t = 0$.*

En efecto, con $0 < t \leq T$ se tiene

$$\left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\ d\tau \right| \leq M_1 \int_0^t |f_2(v)|\ dv \to 0\ ,\ \text{ cuando }\ t \to 0$$

No siempre el producto de dos series convergentes es otra serie convergente. El Teorema de Mertens [1] asegura que si al menos una de ellas converge absolutamente, entonces el producto converge. El análogo a este resultado para el producto de integrales viene dado por

Teorema 1.8.4 (Teorema de Convolución Generalizado)**.** *Si $\mathcal{L}\{f_1\}$ converge absolutamente para $s = s_0$, y $\mathcal{L}\{f_2\}$ converge para $s = s_0$, siendo f_1 y f_2 de clase $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{L}\{f_1 * f_2\}$ converge para $s = s_0$, y se cumple*

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{f_2\}\ ,\ \ \textit{para } s = s_0 \textit{ y } Re(s) > Re(s_0)$$

Demostración. Es suficiente probar el Teorema 1.8.4 para $s_0 = 0$, ya que la aplicación de la conclusión así deducida a $e^{-s_0 t} f_1(t)$ y $e^{-s_0 t} f_2(t)$, junto con el hecho de que

$$e^{-s_0 t} f_1(t) * e^{-s_0 t} f_2(t) = \int_0^t e^{-s_0 \tau} f_1(\tau) e^{-s_0(t-\tau)} f_2(t-\tau)\ d\tau = e^{-s_0 t}(f_1 * f_2)\ ,$$

establece el caso general.

Para $s_0 = 0$, las hipótesis indican que los límites

$$\int_0^\infty |f_1(\tau)|\ d\tau = \lim_{t\to\infty} \int_0^t |f_1(\tau)|\ d\tau \text{ y } \int_0^\infty f_2(\tau)\ d\tau = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f_2(\tau)\ d\tau$$

existen. Además, la tesis a verificar es

$$\lim_{t\to\infty} (f_1 * f_2)(\tau)\ d\tau = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f_1(\tau)\ d\tau \cdot \lim_{t\to\infty} \int_0^t f_2(\tau)\ d\tau$$

Con notación convolucional, la integral $\int_0^t f(\tau)\ d\tau$ puede ser escrita de la forma $f * 1$. Usando esta notación podemos reescribir la conclusión en la forma

$$\lim_{t\to\infty} (f_1 * f_2 * 1)(t) = \lim_{t\to\infty} (f_1 * 1)(t) \cdot \lim_{t\to\infty} (f_2 * 1)(t)$$

- Primero, estudiaremos el caso

  $$F_2(0) = \lim_{t\to\infty} (f_2 * 1)(t) = 0.$$

  Tenemos que verificar que

  $$\lim_{t\to\infty} (f_1 * f_2 * 1)(t) = 0.$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, podemos elegir T tal que

$$|(f_2 * 1)(t)| < \epsilon \ , \quad \text{para } t \geq T.$$

Por otra parte, $f_2 * 1$ es una función continua y, por hipótesis, posee límite finito para $t \to \infty$. Por ello,

$$|f_2 * 1| < M \ , \quad \text{para } t \geq 0 \text{ y cierta constante } M > 0.$$

Para $t \geq T$, obtenemos la acotación

$$|f_1 * f_2 * 1| \leq \left| \int_0^T f_1(t-\tau)\, [f_2 * 1]\,(\tau)\ d\tau \right| + \left| \int_T^t f_1(t-\tau)\, [f_2 * 1]\,(\tau)\ d\tau \right| \leq$$

$$\leq M \int_{t-T}^{t} |f_1(v)|\ dv + \epsilon \int_0^\infty |f_1(v)|\ dv \qquad (1.26)$$

Como la integral $\int_0^\infty |f_1|(v)\ dv$ existe, por el criterio de convergencia de Cauchy,

$$\int_{t_1}^{t_2} |f_1(\tau)|\ d\tau < \epsilon \ , \quad \text{para todos los pares } t_2 > t_1 \geq T. \qquad (1.27)$$

Entonces, para $t \geq 2T$, tenemos que $t - T \geq T$, y usando la acotación (1.27) con la expresión (1.26) se infiere que

$$|f_1 * f_2 * 1| \leq \epsilon \cdot \left(M + \int_0^\infty |f_1(v)|\ dv \right) \ , \quad t \geq 2T$$

Como la expresión entre paréntesis es constante, se deduce que

$$\lim_{t\to\infty} (f_1 * f_2 * 1)(t) = 0$$

y el resultado es cierto para el caso $F_2(0) = 0$.

- Si $F_2(0) \neq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{f_2(t) - F_2(0)e^{-t}\}$$

converge para $s = 0$ y $Re(s) > 0$. Además, es igual a

$$\mathcal{L}\{f_2\} - \frac{F_2(0)}{s+1} \ ,$$

expresión que se anula en $s = 0$. Como tanto $\mathcal{L}\{f_1\}$ como $\mathcal{L}\{e^{-t}\}$ convergen absolutamente en $s = 0$, por el Teorema 1.8.1 tenemos

$$\mathcal{L}\{f_1 * (F_2(0)e^{-t})\}_{s=0} = \mathcal{L}\{f_1\}_{s=0} \cdot \mathcal{L}\{F_2(0)e^{-t}\}_{s=0} = \mathcal{L}\{f_1\}_{s=0} \cdot \left(\frac{F_2(0)}{1+s} \right)_{s=0} =$$

$$= \mathcal{L}\{f_1\}_{s=0} \cdot F_2(0) = \mathcal{L}\{f_1\}_{s=0} \cdot \mathcal{L}\{f_2\}_{s=0}.$$

El resultado sigue sin más que tener en cuenta los resultados que anteceden y que

$$f_1 * f_2 = f_1 * [f_2 - F_2(0)e^{-t}] + f_1 * F_2(0)e^{-t}$$

□

Finalizamos este capítulo estudiando la derivación de la convolución. Por un lado, $(f_1 * f_2)(t)$ no es necesariamente derivable en todo valor de $t \geq 0$; por otro, cuando lo es, su derivada no coincide con la regla de derivación del "producto algebraico" de dos funciones. Veremos, en el siguiente teorema, que al calcular la derivada del "producto de convolución", la derivada sólo afecta a uno de los factores.

Teorema 1.8.5. *Sea $f_1(t)$ derivable para $t > 0$, y supongamos que $f_1'(t)$ y $f_2(t)$ pertenecen a la clase $\mathcal{F}$. Entonces, en todo punto $t > 0$ donde f_2 es continua, $f(t) = f_1 * f_2$ es derivable y se tiene*

$$f'(t) = f_1' * f_2 + f_1(0^+) f_2(t) \tag{1.28}$$

Demostración. En vista de la identidad

$$f_1(\tau) = \int_0^\tau f_1'(v)\ dv + f_1(0^+),$$

sigue que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t f_2(t-\tau) \left[\int_0^\tau f_1'(v)\ dv + f_1(0+) \right] d\tau = \\ &= \int_0^t f_2(t-\tau) \int_0^\tau f_1'(v)\ dv\ d\tau + f_1(0^+) \int_0^t f_2(v)\ dv \end{aligned}$$

Las funciones f_1' y f_2, siendo funciones de clase $\mathcal{F}$, son absolutamente integrables, por lo que podemos escribir

$$\int_0^t f_2(t-\tau) \int_0^\tau f_1'(v)\ dv\ d\tau = \iint_{0 \leq v \leq \tau \leq t} f_2(t-\tau) f_1'(v)\ d\tau\ dv$$

Usando la transformación

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = -y + t \\ v = x - y \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \tau + t + v \\ y = \tau + t \end{array} \right.$$

de Jacobiano $J = 1$, obtenemos la nueva integral doble

$$\iint f_2(y) f_1'(x-y)\ dx\ dy,$$

que se puede expresar de la forma

$$\int_0^t \int_0^x f_1'(x-y) f_2(y)\ dy\ dx.$$

Como la integral interior es una convolución de funciones de clase $\mathcal{F}$, su existencia está asegurada. Por lo tanto, tenemos

$$f(t) = \int_0^t \int_0^x f_1'(x-y) f_2(y)\ dy\ dx + f_1(0^+) \int_0^t f_2(v)\ dv$$

Para la integral con la variable x en el extremo superior, el integrando es una convolución de funciones de clase $\mathcal{F}$ que es continua para $x > 0$. Por lo tanto, esta integral es derivable para todo $t > 0$ y su derivada es $f_1' * f_2$. Por otra parte, al ser f_2 continua, el segundo sumando es derivable y su derivada da $f_1(0^+) f_2(t)$. En definitiva,

$$f'(t) = f_1' * f_2 + f_1(0^+) f_2.$$

□

Nota. *La fórmula* (1.28) *puede fallar para* $t = 0$*. Para probar esto, consideraremos el siguiente ejemplo:* $f_1(t) = t^{1/2}$, $f_2(t) = t^{-1/2}$*. La convolución de estas funciones es*

$$\begin{aligned} f(t) = f_1 * f_2 &= \int_0^t \tau^{1/2} (t-\tau)^{-1/2}\ d\tau = t \int_0^t v^{1/2} (1-v)^{-1/2}\ dv = \\ &= t\mathcal{B}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = t \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2}\pi t, \end{aligned}$$

que también es válido para $t = 0$*. Para* $t \geq 0$ *, la derivada de la convolución es* $\pi/2$*. Cuando usamos la fórmula* (1.28)*, tenemos que*

$$f'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2} * t^{-1/2} = \begin{cases} 0 & si \quad t = 0 \\ \pi/2 & si \quad t > 0. \end{cases}$$

La afirmación del teorema es correcta para $t > 0$*, pero no vale cuando* $t = 0$*.*

Capítulo 2

Teorema de Inversión

2.1. Introducción

Es fundamental que una transformación integral admite fórmula de inversión. Fijémonos en que la transformación de Laplace convierte una función $f(t)$, que está en el espacio original o espacio tiempo t, en una función $F(s)$, en el espacio imagen o espacio s. Si aplicamos esta transformación para resolver un determinado problema en el espacio t, lo convertiremos en otro problema en el espacio s, en general, más sencillo. Supongamos que lo podemos resolver en este último espacio. Pero no nos interesa eso, no nos interesa la resolución del problema transformado; lo que no preocupa es determinar la solución en el espacio original. Para conseguirlo es imprescindible invertir el camino, es decir, volver del espacio s al espacio t. Y ello se logra mediante la fórmula de inversión.

Ese, pues, será el principal objetivo de este capítulo. Primero se establecerá la fórmula de inversión de la transformación integral de Fourier. Después, mediante la aplicación de de estos resultados a la transformación bilateral de Laplace - previa su introducción y estudio - se deducirá la inversión de nuestra transformación de Laplace. La expresión de esta fórmula de inversión viene dada por una integral de línea compleja, no siempre fácil de evaluar.

Este capítulo finaliza en el cálculo directo y efectivo de la fórmula de inversión para algunas funciones.

2.2. Transformación de Fourier

Existen muchas formas de definir la transformación integral de Fourier, tantas como se quiera distribuir la constante $\frac{1}{2\pi}$ entre la expresión de las fórmulas directa e inversa. En lo que sigue las variables $x, y \in \mathbb{R}$ y, dada la función $g(x)$, optamos por definir su transformada de Fourier mediante

$$\mathfrak{F}\{g(x)\} = G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} g(x)\ dx\ , \tag{2.1}$$

porque es la expresión más adecuada para compararlo con la transformación de Laplace. Obviamente, siempre que (2.1) tenga sentido, al menos, para un valor de $y \in \mathbb{R}$. La hipótesis más sencilla que garantiza la existencia de (2.1) es que g sea absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, lo que denotaremos escribiendo $g \in L(\mathbb{R})$. En esta hipótesis, $G(y)$ está definido para todo $y \in \mathbb{R}$, ya que

$$|G(y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\ dx.$$

Un primer resultado para la transformación de Fourier viene dado por el siguiente aserto

Teorema 2.2.1. *Si $g(x)$ es absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$, entonces $G(y) = \mathfrak{F}\{g(x)\}$ está acotada y es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Se infiere inmediatamente de

$$|G(y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} g(x)\ dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|\ dx\ ,$$

que $G(y)$ está acotada en $-\infty < y < \infty$, que es la primera afirmación del teorema. Por otra parte,

$$|G(y+\delta) - G(y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx}(e^{-i\delta x} - 1)\ g(x)\ dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-i\delta x} - 1 \right|\ |g(x)|\ dx\ ,$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$. Como

$$e^{-i\delta x} - 1 = (\cos(\delta x) - 1) - i \operatorname{sen}(\delta x)\ ,$$

se tiene que

$$\left| e^{-i\delta x} - 1 \right|^2 = (\cos(\delta x) - 1)^2 + \operatorname{sen}^2(\delta x) = 2(1 - \cos(\delta x)) = 4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\delta x}{2} \right).$$

Luego,

$$|G(y+\delta) - G(y)| \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \operatorname{sen} \left(\frac{\delta x}{2} \right) \right| |g(x)|\ dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{-X} + \int_{X}^{\infty} \right) |g(x)|\ dx +$$
$$+ \int_{-X}^{X} \left| \delta x \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\delta x}{2}\right)}{\delta x/2} \right|\ |g(x)|\ dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{-X} + \int_{X}^{\infty} \right) |g(x)|\ dx + |\delta| X \int_{-X}^{X} |g(x)|\ dx.$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrariamente fijado se puede encontrar un X suficiente grande tal que

$$2 \left(\int_{-\infty}^{-X} + \int_{X}^{\infty} \right) |g(x)|\ dx < \frac{\epsilon}{2}\ ,$$

puesto que ambas integrales convergen a cero cuando $X \to \infty$.

Una vez fijado este valor de X, se deduce que

$$|\delta| X \int_{-X}^{X} |g(x)|\ dx < \frac{\epsilon}{2}\ ,$$

para δ suficientemente pequeño. Por ello,

$$|G(y+\delta) - G(y)| < \epsilon.$$

Por tanto, $G(y)$ es continua en $-\infty < y < \infty$, de hecho, uniformemente continua, ya que la demostración efectuada es independiente de la variable y.

$\square$

A continuación, nuestro objetivo es determinar si, y en qué condiciones, $g(x)$ puede ser recuperado a partir de $G(y)$ usando la fórmula

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} G(y)\ dy\ , \tag{2.2}$$

para todos los valores de x o para ciertos valores de x.

La integral

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} g(x)\ dx$$

converge uniformemente para todo y, en virtud del Teorema 2.2.1. Por lo tanto, cuando integramos $G(y)$ sobre el intervalo finito $-Y \leq y \leq Y$, podemos intercambiar el orden de integración. Esto sigue siendo válido si multiplicamos primero por la función acotada e^{ixy}, para todo $x \in \mathbb{R}$ fijado.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-Y}^{Y} e^{ixy} G(y)\ dy &= \frac{1}{2\pi} \int_{-Y}^{Y} e^{ixy} \int_{\infty}^{\infty} e^{-iy\xi}\ g(\xi)\ d\xi\ dy = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \int_{-Y}^{Y} e^{-iy(x-\xi)}\ dy\ d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{e^{iY(x-\xi)} - e^{-iY(x-\xi)}}{i(x-\xi)}\ d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(Y(x-\xi))}{x-\xi} g(\xi)\ d\xi. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sea δ un número fijo tal que $0 < \delta < 1$, y sea $X > |x| + 1$. Podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^{-X} + \int_{-X}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{X} + \int_{X}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5.$$

En las integrales I_1 e I_5, tenemos $|x - \xi| > 1$, y $|\operatorname{sen}(Y(x-\xi))| \leq 1$. Por lo tanto, para todos los valores de Y tenemos

$$|I_1| \leq \int_{-\infty}^{-X} |g(\xi)|\ d\xi\ ,\ \ |I_5| \leq \int_{X}^{\infty} |g(\xi)|\ d\xi.$$

Puesto que $g \in L(\mathbb{R})$, estas dos integrales convergen a cero si $X \to \infty$. Entonces, para un ϵ dado, podemos elegir el valor X tan grande que

$$\frac{1}{\pi} |I_1 + I_5| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.4}$$

independientemente de Y.

El intervalo de integración de la integral

$$I_2 = \int_{\delta}^{x+X} \operatorname{sen}(Yu)\frac{g(x-u)}{u}\ du$$

no incluye el origen. Por ello, $g(x-u)/u$ es absolutamente integrable en ese intervalo. Así, por el Lema de Riemann-Lebesgue [1, p. 447] concluimos que

$$I_2 \to 0 \text{ cuando } \ Y \to \infty.$$

El mismo razonamiento prueba que

$$I_4 \to 0 \text{ si } \ Y \to \infty.$$

Consecuentemente, para todo Y suficientemente grande,

$$\frac{1}{\pi}\,|I_2 + I_4| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.5}$$

La integral que resta analizar

$$\frac{1}{\pi} I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\operatorname{sen}(Y(x-\xi))}{x-\xi} g(\xi)\ d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g(x-u)\ du \tag{2.6}$$

es la conocida *integral de Dirichlet* de la teoría de series de Fourier.

Centrémonos en el análisis de la integral

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u)\ du = \left(\int_{-\delta}^{0} + \int_{0}^{\delta}\right) \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u)\ du\ , \tag{2.7}$$

donde $g^*(x) = g(x-u)$. Como vamos a asumir que g es de variación acotada en un cierto entorno del punto x, recordaremos brevemente este concepto.

Definición 2.2.1. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo cerrado $[a,b]$. Se dice que f es de variación acotada en $[a,b]$ si existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M\ ,$$

para todas las particiones de $[a,b]$.

El ejemplo más sencillo de funciones de variación acotada no triviales en $[a,b]$ lo da la clase de funciones monótonas en dicho intervalo. Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) con derivada acotada, la función f también es de variación acotada en $[a,b]$. La continuidad sola no garantiza necesariamente que la función sea de variación acotada, como se puede ver en el contraejemplo [1, p. 159].

Las funciones de variación acotada en $[a,b]$ están caracterizadas porque son diferencia de funciones crecientes (o estrictamente crecientes) [1, p. 162]. Por ello, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que g es creciente y escribir la segunda integral de (2.7) como sigue

$$\int_0^\delta \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u)\ du = g^*(0^+) \int_0^h \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u}\ du + \int_0^h \left[g^*(u) - g^*(0^+)\right] \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u}\ du + \\ + \int_h^\delta \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u)\ du\ , \tag{2.8}$$

para cierto h, $0 < h < \delta$, que fijaremos más abajo.

Para la tercera integral se cumple

$$\int_h^\delta \left|\frac{g^*(u)}{u}\right|\ du \le \frac{1}{h} \int_h^\delta |g^*(u)|\ du < \infty\ ,$$

por lo que se puede aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue [1, p. 447], resultando

$$\lim_{Y\to\infty} \int_h^\delta \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u)\ du = 0. \tag{2.9}$$

Nótese, por otra parte, que

$$\int_0^h \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u}\ du = \int_0^{Yh} \frac{\operatorname{sen} v}{v}\ dv \to \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} v}{v}\ dv = \frac{\pi}{2}\ ,$$

cuando $Y \to \infty$, razón por la cual

$$\lim_{Y\to\infty} g^*(0^+) \int_0^h \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u}\ du = \frac{\pi}{2} g^*(0^+) = \frac{\pi}{2} g(x^-)\ , \tag{2.10}$$

que es el comportamiento del primer término del segundo miembro de (2.8).

Finalmente fijamos nuestra atención en la integral intermedia. Comenzaremos observando que, para cierta $K > 0$,

$$\left|\int_a^b \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u}\ du\right| < K\ ,$$

para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $b \ge a \ge 0$. Ahora bien, g es creciente, lo que entraña que también lo es g^*. Entonces, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, podemos tomar $h \in (0, \delta)$ de modo que se tenga que

$$|g^*(h) - g^*(0^+)| < \frac{\epsilon}{K}$$

(ya queda fijado h, $0 < h < \delta$).

Recordemos ahora el

Teorema 2.2.2 (Segundo Teorema del Valor Medio del cálculo integral [1, p. 209])**.** *Sea ψ continua y supongamos que φ es creciente en $[a, b]$, $\varphi(x) \ge 0$, $x \in [a, b]$. Existe entonces un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\ dx = \varphi(b) \int_{x_0}^b \psi(x)\ dx.$$

En nuestro caso $g^*(u) - g^*(0^+) \geq 0$, $u \in [0, h]$, ya que g es creciente en ese intervalo. Aplicando el anterior teorema, se puede determinar $c \in [0, h]$ tal que

$$\left| \int_0^h [g^*(u) - g^*(0^+)] \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} \; du \right| = \left| [g^*(h) - g^*(0^+)] \int_c^h \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} \; du \right| < \frac{\epsilon}{K} K = \epsilon.$$

Así pues,

$$\lim_{Y \to \infty} \int_0^h [g^*(u) - g^*(0^+)] \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} \; du = 0. \tag{2.11}$$

En definitiva, si hacemos que $Y \to \infty$ en (2.8) y tenemos presente (2.9), (2.10) y (2.11), se deduce que

$$\lim_{Y \to \infty} \int_0^\delta \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u) \; du = \frac{\pi}{2} g(x^-). \tag{2.12}$$

Con el mismo razonamiento se concluye que

$$\lim_{Y \to \infty} \int_{-\delta}^0 \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u) \; du = \frac{\pi}{2} g(x^+). \tag{2.13}$$

De (2.7) y a la vista de (2.12) y (2.13), se infiere que

$$\lim_{Y \to \infty} \int_{-\delta}^\delta \frac{\operatorname{sen}(Yu)}{u} g^*(u) \; du = \frac{\pi}{2} [g(x^+) + g(x^-)].$$

De este modo hemos establecido, para $Y > 0$ suficientemente grande, que

$$\left| \frac{1}{\pi} - \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2} \right| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{2.14}$$

Finalmente, de (2.3), (2.4), (2.5) y (2.14) se llega a que

$$\lim_{Y \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-Y}^Y e^{ixy} G(y) \; dy = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2}. \tag{2.15}$$

Hemos demostrado así el teorema que nos suministra la fórmula de inversión de Fourier

Teorema 2.2.3. *Sea $g \in L(\mathbb{R})$. Entonces existe su transformación de Fourier $G(y) = \mathfrak{F}\{g(x)\}$, para todo $y \in \mathbb{R}$, y en cualquier punto $x \in \mathbb{R}$, en un entorno del cual g sea de variación acotada, se verifica que*

$$\mathfrak{F}^{-1}\{G(y)\} = \frac{g(x^+) + g(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ixy} G(y) \; dy. \tag{2.16}$$

Si g fuera continua en x, se obtiene que $\mathfrak{F}^{-1}\{G(y)\} = g(x)$.

Nota. *El Teorema 2.2.3 necesita inmediatamente una matización. Recordemos que si G es una función integrable en $\mathbb{R}$, se dice que*

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(y)\ dy$$

existe si, y sólo si, existe

$$\lim_{Y_1\to-\infty\ ,\ \ Y_2\to\infty} \int_{Y_1}^{Y_2} G(y)\ dy\ ,$$

es decir, este límite existe cuando Y_1 e Y_2 tienden independientemente a sus respectivos valores infinitos.

En cambio, si existe

$$\lim_{Y\to\infty} \int_{-Y}^{Y} G(y)\ dy$$

a ese resultado se le denomina valor principal de Cauchy y escribimos

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} G(y)\ dy = \lim_{Y\to\infty} \int_{-Y}^{Y} G(y)\ dy.$$

Naturalmente, puede existir este último límite y no el primero. Por ejemplo, para la función impar

$$G(y) = \frac{y}{1+y^2}\ ,\ \ y\in\mathbb{R}\ ,$$

$$\lim_{Y\to\infty} \int_{-Y}^{Y} \frac{y}{1+y^2}\ dy = \lim_{Y\to\infty} 0 = 0\ ,$$

mientras que

$$\int_{Y_1}^{0} \frac{y}{1+y^2}\ dy \ \ y\ \ \int_{0}^{Y_2} \frac{y}{1+y^2}\ dy$$

no posee límite cuando $Y_1 \to -\infty$ e $Y_2 \to \infty$. En consecuencia, no existe

$$\lim_{Y_1\to\infty\ ,\ \ Y_2\to\infty} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{y}{1+y^2}\ dy.$$

Por tanto, como lo que se probó fue la existencia del límite (2.15), queda claro que la conclusión (2.16) del Teorema 2.2.3 hay que interpretarla en el sentido del valor principal de Cauchy.

Ejemplo 2.2.1. *La función $g(x) = e^{-|x|}$ es absolutamente integrable en $(-\infty,\infty)$, así que $G(y) = \mathfrak{F}\{g\}$ existe para todo y, siendo su imagen*

$$G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx}e^{-|x|}\ dx = \int_{0}^{\infty} e^{-iyx}e^{-|x|}\ dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-iyx}e^{-|x|}\ dx =$$
$$\int_{0}^{\infty} e^{-iyx}e^{-x}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{iyx}e^{-x}\ dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x}\cos(yx)\ dx.$$

La última integral es la transformada de Laplace de $\cos(xy)$ *evaluada en* $s = 1$*, que vale*

$$G(y) = \frac{2}{1+y^2} = \mathfrak{F}\{e^{-|x|}\}.$$

La función $e^{-|x|}$ *es de variación acotada en todo intervalo finito. Además, es continua en todo* $\mathbb{R}$*. Por tanto, podemos emplear la fórmula de inversión, resultando* $e^{-|x|}$ *para todo* x*. La integral de la inversión converge en el sentido ordinario, de hecho converge absolutamente, por lo que podemos suprimir el V.P., quedando simplemente*

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\frac{1}{1+y^2}\,dy.$$

2.3. Transformación bilateral de Laplace. Fórmula de inversión de la transformación de Laplace

Para explotar al máximo las posibilidades ofrecidas por el Teorema 2.2.3, primero generalizamos la transformada de Laplace extendiendo el intervalo de integración $(0,\infty)$ a todo el eje real $(-\infty,\infty)$. Denominaremos a la nueva transformación "*transformación de Laplace bilateral*" y la representaremos por el operador $\mathcal{L}_{II}$

$$\mathcal{L}_{II}\{f\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)\,dt \tag{2.17}$$

La notación $\mathcal{L}_I$ será usada en lugar de $\mathcal{L}$ siempre que queramos enfatizar la transformación de Laplace en el sentido de la "*transformación de Laplace unilateral*", o para evitar confusiones con la bilateral, lo que puede ocurrir cuando se estén considerando a la vez.

La integral de Laplace correspondiente al intervalo $(0,\infty)$ converge, como mucho, en un semiplano derecho. La integral en el intervalo $(-\infty,0)$ converge en un semiplano izquierdo, como se demuestra a continuación

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-st}f(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{st}f(-t)\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(-s)t}f(-t)\,dt.$$

Cuando ambos semiplanos tienen una franja en común, entonces esta franja es la región de convergencia de la transformada de Laplace bilateral. Es decir, la transformación bilateral de Laplace se puede expresar como la suma de dos unilaterales

$$\mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = \left(\mathcal{L}_I\{f(t)\}\right)(s) + \left(\mathcal{L}_I\{f(-t)\}\right)(-s). \tag{2.18}$$

Si β_1 es la abscisa de convergencia de la primera transformada unilateral de Laplace (lo que entraña su convergencia en el semiplano derecho $Re(s) > \beta_1$) y β_2 es la de la segunda transformada unilateral de Laplace (lo que implica su convergencia en el semplano izquierdo $Re(s) < \beta_2$), (2.18) tiene sentido si, y sólo si, $\beta_1 < \beta_2$. En tal caso, la transformación bilateral de Laplace convergerá en la franja $\beta_1 < Re(s) < \beta_2$.

Ejemplo 2.3.1. *Si $f(t) = e^{-|t|}$, la primera integral converge para $Re(s) > -1$ y la segunda para $Re(s) < 1$. Por lo tanto, la transformada de Laplace bilateral converge en la franja $-1 < Re(s) < 1$.*

Ejemplo 2.3.2. *Si $f(t) \equiv 1$, las dos integrales convergen para $Re(s) > 0$ y $Re(s) < 0$, respectivamente. Por ello, no podemos encontrar una franja común a ambos semiplanos, y la transformada bilateral de esta función no existe.*

La convergencia de la transformada de Laplace bilateral en un sólo punto no nos permite deducir su comportamiento en otros puntos. Sin embargo, cuando se sabe que la transformada de Laplace bilateral converge en los puntos s_1 y s_2, con $Re(s_1) < Re(s_2)$, entonces converge en la franja $Re(s_1) < Re(s) < Re(s_2)$.

En cuanto a la convergencia absoluta, si la transformada de Laplace bilateral converge absolutamente en algún punto s_0, entonces por el Teorema 1.3.1 la transformada de Laplace bilateral converge en toda la recta vertical $Re(s) = Re(s_0)$.

Consideremos la transformada $\mathcal{L}_{II}$ en los puntos s de una recta vertical $s = x + iy$, con $x =$ constante. Se tiene

$$F(x+iy) = \mathcal{L}_{II}\{f\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}\ [e^{-xt}f(t)]\ dt = \mathfrak{F}\{e^{-xt}f(t)\}. \tag{2.19}$$

La fórmula (2.19) relaciona la transformación bilateral de Laplace con la de Fourier. Si se pretende aplicar el Teorema 2.2.3 de inversión de Fourier, hemos de exigir que la función $e^{-xt}f(t)$ satisfaga las hipótesis del mismo. Así que, por una parte, requerimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt}|f(t)|\ dt < \infty\ ,$$

esto es, $\mathcal{L}_{II}\{f(t)\}$ converge absolutamente en $s = x$ y, por consiguiente, en la recta vertical $Re(s) = x$. Por otra parte, $e^{-xt}f(t)$ tiene que ser de variación acotada en cierto entorno de t. Como quiere que el producto de dos funciones de variación acotada es otra función de variación acotada [1, Teorema 8-9], bastaría imponer que $f(t)$ fuera de variación acotada en dicho entorno.

Bajo estas hipótesis podemos invertir la expresión (2.19) de acuerdo con el Teorema 2.2.3, para obtener

$$e^{-xt}f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}F(x+iy)\ dy$$

o

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(x+iy)}F(x+iy)\ dy\ ,$$

que podemos escribir poniendo $s = x + iy$ como sigue

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}F(s)\ ds.$$

Hemos así deducido la fórmula de inversión.

Teorema 2.3.1. *Supongamos que* $\mathcal{L}_{II}\{f\} = F(s)$ *converge absolutamente para* $s = x$ *(real) y consecuentemente para* $Re(s) = x$*, esto es,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-xt}|f(t)|\ dt < \infty.$$

Sea $t \in \mathbb{R}$ *y asúmase que* f *es de variación acotada en algún entorno de* t*. En estas condiciones, se tiene que*

$$\mathcal{L}_{II}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}F(s)\ ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\lim_{Y\to\infty}\int_{x-iY}^{x+iY} e^{ts}F(s)\ ds = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}. \tag{2.20}$$

Cuando f *es continua en* t*, entonces* (2.20) *toma el valor* $f(t)$*.*

Nota. *Vale aquí la misma observación que se hizo en el caso de la inversión de Fourier. La fórmula* (2.20) *hay que entenderla en el sentido del valor principal de Cauchy.*

Si $f(t)$ está definida sólo cuando $t \geq 0$, podemos extenderlo a todo $\mathbb{R}$ redefiniendo $f(t) = 0$, $t < 0$. De esta manera,

$$\mathcal{L}_{II}\{f(t)\} = \mathcal{L}_{I}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\ , \tag{2.21}$$

es decir, la transformación de Laplace considerada en el Capítulo 1 es un caso particular de la transformación bilateral. A fin de aplicar el Teorema 2.3.1 a (2.21), considérese $t \in \mathbb{R}$ y analicemos los siguientes casos:

(i) Si $f(t)$ es de variación acotada en algún entorno de $t > 0$, entonces (2.20) nos da el valor $\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}$.

En el caso de que f sea continua en t, la fórmula de inversión (2.20) recupera exactamente el valor $f(t)$.

(ii) Si $f(t)$ es de variación acotada en algún entorno de $t = 0$. Como $f(0^-) = 0$, de la fórmula (2.20) da el valor $\frac{f(t^+)}{2}$.

(iii) Si $f(t)$ es de variación acotada en cierto entorno de $t < 0$, como $f(t^-) = f(t^+) = 0$ (ya que $f(t) = 0$, $t < 0$), (2.20) vale cero.

Resumimos estas consideraciones en el siguiente

Teorema 2.3.2 (Teorema de inversión de la transformación de Laplace)**.** *Supongamos que* $\mathcal{L}_I\{f\} = F(s)$ *converge absolutamente para* $s = x_0$ *(real) y, consecuentemente, para* $Re(s) \geq x_0$*, esto es,*

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x_0 t}|f(t)|\ dt < \infty.$$

Si $f(t)$ es de variación acotada en algún entorno de $t > 0$, se tiene

$$\mathcal{L}_I^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}F(s)\ ds = \frac{f(t^+)+f(t^-)}{2} \quad (x \geq x_0)$$

Si $f(t)$ es de variación acotada en algún intervalo a la derecha de $t = 0$, entonces

$$\mathcal{L}_I^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)\ ds = \frac{f(0^+)}{2} \quad (x \geq x_0).$$

Por último, si $t < 0$,

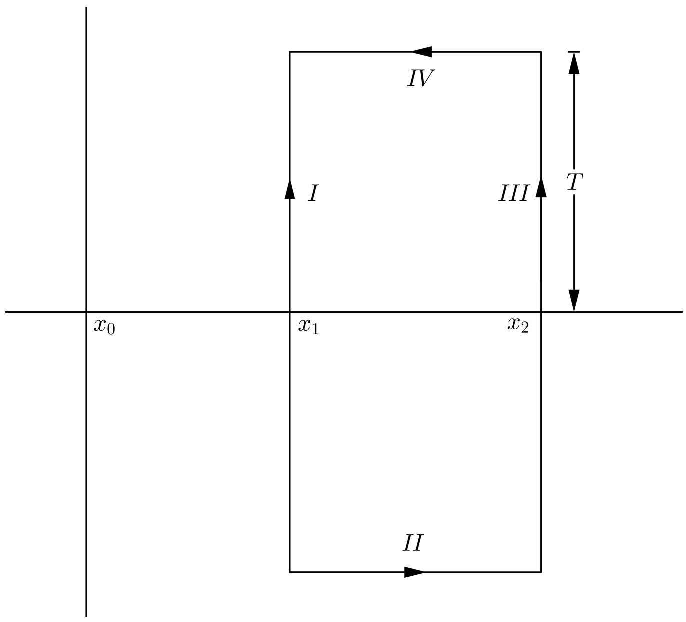
$$\mathcal{L}_I^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts}F(s)\ ds = 0 \quad (x \geq x_0).$$

Nota. *La fórmula de inversión del Teorema* (2.3.2) *es una integral compleja cuyo cambio de integración es la recta vertical $Re(s) = x$, $x \geq x_0$.*

Parece natural esperar que la fórmula de inversión de Laplace sea independiente de la recta vertical $Re(s) = x$ que se considere, siempre que dicha recta permanezca en el semiplano derecho de convergencia. En efecto, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_0 < x_1 < x_2$, y veamos que

$$\int_{x_1-i\infty}^{x_1+i\infty} e^{ts}F(s)\ ds = \int_{x_2-i\infty}^{x_2+i\infty} e^{ts}F(s)\ ds.$$

Construimos el rectángulo de lados verticales $Re(s) = x_1$ y $Re(s) = x_2$ y lados horizontales $Im(s) = T$ y $Im(s) = -T$, donde $T > 0$, llamando a estos cuatro lados I, II, III y IV, con las orientaciones asignadas en la figura.



Las funciones e^{ts} y $F(s)$ son analíticas, por lo que, en virtud del Teorema de Cauchy, se tiene

$$\int_I e^{ts}F(s)\ ds = \int_{II} e^{ts}F(s)\ ds + \int_{III} e^{ts}F(s)\ ds + \int_{IV} e^{ts}F(s)\ ds. \tag{2.22}$$

En el lado horizontal IV es $s = x + iT$, $x_1 \leq x \leq x_2$, y se tiene

$$|e^{ts}| = e^{tRe(s)} \leq C(t; x_1, x_2) \leq \begin{cases} e^{tx_2} & si \quad t \geq 0 \\ e^{tx_1} & si \quad t < 0\ , \end{cases}$$

esto es, $|e^{ts}|$ tiene una cota superior C que no depende del valor de T. Además, por el Teorema 1.3.8, $F(s)$ tiende, uniformemente en $x_1 \leq x \leq x_2$, hacia 0, cuando $T \to \infty$. Luego, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existe $T_0 > 0$ suficientemente grande de modo que para $T > T_0$ se tiene que $F(x+iT)| < \epsilon$, $x \in [x_1, x_2]$. Por tanto,

$$\left| \int_{IV} e^{ts}F(s)\ ds \right| \leq C(t; x_1, x_2)(x_2 - x_1)\epsilon.$$

Hemos verificado que la integral a lo largo del lado IV converge hacia cero, cuando $T \to \infty$. La misma conclusión es válida para la integral a lo largo del lado horizontal II. Así pues, se sigue de (2.22) que

$$\lim_{T\to\infty} \int_I e^{ts}F(s)\ ds = \lim_{T\to\infty} \int_{III} e^{ts}F(s)\ ds\ ,$$

esto es,

$$\int_{x_1 - i\infty}^{x_1 + i\infty} e^{ts}F(s)\ ds = \int_{x_2 - i\infty}^{x_2 + i\infty} e^{ts}F(s)\ ds.$$

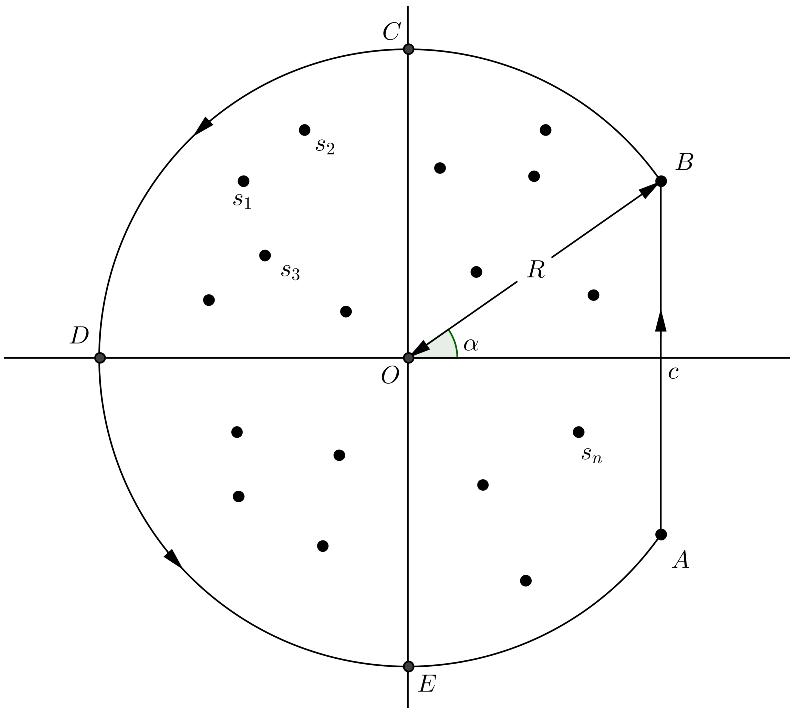
El siguiente resultado nos permite evaluar de una manera sencilla la integral de línea que aparece en la fórmula de inversión de la transformación de Laplace [1].

Teorema 2.3.3. *Sea $F(s)$ una función analítica en $\mathbb{C}$ salvo en un número finito de polos. Supongamos que existen constantes M, k y b positivas tales que*

$$|F(s)| \leq \frac{M}{|s|^k}\ , \quad para\ |s| \geq b.$$

Sea $c > 0$ de modo que todos los polos s_1, s_2, ..., s_n de $F(s)$ están situados a la izquierda de la recta vertical $Re(s) = c$ (es decir, $Re(s_k) < c$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Entonces, para todo $t > 0$, se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}F(s)\ ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{c-iR}^{c+iR} e^{st}F(s)\ ds = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[e^{st}F(s)]_{|s=s_k}.$$



Demostración. Consideremos el recinto limitado por el camino orientado Γ de la figura, donde el radio R de la parte circular se toma suficientemente grande para que $R > b$ y todos los polos estén incluidos en la región dibujada. Por el Teorema de los Residuos sigue que

$$\int_\Gamma e^{st}F(s)\, ds = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}[e^{st}F(s)]_{s=s_j}. \tag{2.23}$$

Ahora bien,

$$\int_\Gamma = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \ , \tag{2.24}$$

denotando por I_1, I_2, I_3, I_4 e I_5, respectivamente, las integrales a lo largo del segmento $\overline{AB}$ y las arcos circulares $\widehat{BC}$,$\widehat{CD}$,$\widehat{DE}$ y $\widehat{EA}$.

Analicemos I_2. Nótese que sobre el arco $\overline{BC}$ es $s = Re^{i\theta}$, $\alpha \le \theta \le \pi/2$. Se tiene

$$|I_2| = \left| \int_{\widehat{BC}} e^{st}F(s)\, ds \right| \le \int_\alpha^{\pi/2} e^{tR\cos\theta}|F(s)|R\, d\theta \le$$

$$\le \frac{M}{R^{k-1}} \int_\alpha^{\pi/2} e^{tR\cos\theta}\, d\theta \le \frac{M}{R^{k-1}} e^{ct}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{M}{R^k} e^{ct}\ R\ \operatorname{arcsen}\left(\frac{c}{R}\right) \ ,$$

ya que, como se ve en la figura, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{c}{R}$. Puesto que $\lim\limits_{R\to\infty} R \operatorname{arcsen}\left(\frac{c}{R}\right) = c$ y $\lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R^k} = 0$, se deduce de la desigualdad anterior que $I_2 \to 0$ cuando $R \to \infty$. El mismo razonamiento nos permite concluir que $I_5 \to 0$ cuando $R \to \infty$.

A continuación estudiaremos I_3. Sobre el arco $\widehat{CD}$ es $s = Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, por lo que

$$|I_3| \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR\cos\theta}\, d\theta = \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-tR\,\mathrm{sen}\,\varphi}\, d\varphi\ ,$$

sin más que efectuar el cambio $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$. Teniendo en cuenta que $\mathrm{sen}(\varphi) \geq \frac{2\varphi}{\pi}$, si $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, llegamos a que

$$|I_3| \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2tR\frac{\varphi}{\pi}}\, d\varphi = \frac{\pi M}{2tR^k}\left(1 - e^{-tR}\right) \to 0$$

cuando $R \to \infty$. Con el mismo argumento se infiere que $I_4 \to 0$, si $R \to \infty$. Haciendo que $R \to \infty$ en (2.23) y (2.24) se deduce que

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{ts} F(s)\, ds = \lim_{R\to\infty} I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}[e^{st}F(s)]_{s=s_j}\ ,$$

es decir,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{ts} F(s)\, ds = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}[e^{st}F(s)]_{s=s_j}$$

□

Nota. *Este aserto puede valer incluso cuando hay infinitos polos a la izquierda de la recta vertical* $Re(s) = c$. *Elegimos un radio* R_n *de la región circular dependiente de* n, *tal que* $R_n \neq |s_n|$ *y* $R_n \to \infty$, *cuando* $n \to \infty$. *Si* $I_j \to 0$, $j = 2, 3, 4, 5$, *para* $n \to \infty$, *y la serie del segundo miembro de* (2.23) *converge, es lícita la generalización*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s)\, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Res}[e^{st}F(s)]_{|s=s_n}.$$

Ejemplo 2.3.3. *Determinar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^4}\right\}$ *aplicando directamente la fórmula de inversión.*

Aquí $F(s) = \frac{1}{(s-1)^4}$, *que tiene un polo en* $s = 1$ *de multiplicidad* 4. *Nótese que* $|F(s)| \leq \frac{1}{|s|^4}$, *para* $|s| \geq b$, *y que basta tomar* $c > 1$. *Se tiene*

$$\mathrm{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^4}\right]_{|s=1} = \frac{1}{3!} \lim_{s\to 1} \frac{d^3}{ds^3}\left[\frac{e^{st}}{(s-1)^4}(s-1)^4\right] = \frac{t^3 e^t}{6}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^4}\right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{st}}{(s-1)^4}\, ds = \frac{t^3 e^t}{6}.$$

Ejemplo 2.3.4. *Calcular* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que la función $F(s) = \frac{s}{s^4+4a^4}$ *es analítica en todo* $\mathbb{C}$ *salvo en los puntos* $s_1 = a(1-i)$, $s_2 = a(-1+i)$, $s_3 = a(-1-i)$ *y* $s_4 = a(1-i)$, *donde posee polos simples. Si elegimos* $c = Re(s) > |a|$, *todos estos polos estarían situados a la izquierda de la recta vertical* $Re(s) = c$. *Además, para cierto* $b > 0$,

$$|F(s)| \leq \frac{1}{|s|^3} \ , \ \textit{siempre que} \ \ |s| \geq b.$$

Se verifican todas las hipótesis del Teorema 2.3.3, por lo que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\frac{s}{s^4+4a^4}\, ds = \sum_{k=1}^{4}\mathrm{Res}[e^{st}F(s)]_{|s=s_k}.$$

Ahora bien, para $k = 1, 2, 3, 4$, *se tiene*

$$\mathrm{Res}[e^{st}F(s)]_{|s=s_k} = \lim_{s\to s_k} e^{st}\frac{s}{s^4+4a^4}(s-s_k) = \frac{e^{s_k t}}{4s_k^2}.$$

Así pues,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\frac{e^{s_k t}}{s_k^2} = \frac{e^{at+iat}}{8a^2 i} - \frac{e^{-at+iat}}{8a^2 i} + \frac{e^{-at-iat}}{8a^2 i} - \frac{e^{at-iat}}{8a^2 i} =$$

$$= \frac{e^{at}}{4a^2}\left(\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right) - \frac{e^{-at}}{4a^2}\left(\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\right) = \frac{(\mathrm{sen}\, at)(\mathrm{sh}\, at)}{2a^2}$$

En definitiva,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \frac{1}{2a^2}(\mathrm{sen}\, at)(\mathrm{sh}\, at).$$

Ejemplo 2.3.5. *Hallar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^3}\right\}$.

En este caso la función $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^3}$ *es analítica en todo* $\mathbb{C}$ *a excepción de los puntos* $s = \pm i$, *que son polos triples.*

Por otra parte, para cierto $b > 0$,

$$|F(s)| \leq \frac{1}{|s|^6} \ , \ \ |s| > b.$$

Por consiguiente, tomando cualquier $c > 1$ *- a fin de que los polos yazcan a la izquierda* *de la recta vertical Re$(s) = c$ - la aplicación del Teorema 2.3.3 nos lleva a que*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{st}}{(s^2+1)^3}\,ds &= \operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+1)^3}\right]_{|s=i}+\operatorname{Res}\left[\frac{e^{st}}{(s^2+1)^3}\right]_{|s=-i}=\\
&=\frac{1}{2!}\lim_{s\to i}\frac{d^2}{ds^2}\left\{(s-i)^3\frac{e^{st}}{(s^2+1)^3}\right\}+\frac{1}{2!}\lim_{s\to -i}\frac{d^2}{ds^2}\left\{(s+i)^3\frac{e^{st}}{(s^2+1)^3}\right\}=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{s\to i}\frac{d^2}{ds^2}\left[e^{st}(s+i)^{-3}\right]+\frac{1}{2}\lim_{s\to -i}\frac{d^2}{ds^2}\left[e^{st}(s-i)^{-3}\right]=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{s\to i}e^{st}\left[t^2(s+i)^{-3}-6t(s+i)^{-4}+12(s+i)^{-5}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\lim_{s\to -i}e^{st}\left[t^2(s-i)^{-3}-6t(s-i)^{-4}+12(s-i)^{-5}\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{t^2(e^{it}-e^{-it})}{8}i-\frac{6t}{16}(e^{it}+e^{-it})-\frac{12}{32}(e^{it}-e^{-it})i\right]=\\
&=-\frac{t^2}{8}\operatorname{sen}t-\frac{3}{8}t\cos t+\frac{3}{8}\operatorname{sen}t.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^3}\right\}=\frac{(3-t^2)\operatorname{sen}t-3t\cos t}{8}.$$

Ejemplo 2.3.6. *Determinar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}\right\}$, $a > b > 0$.

En este caso $F(s) = \frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}$ *posee infinitos polos simples en las raíces de la ecuación* $\operatorname{sh} a\sqrt{s} = 0$*, es decir, en*

$$s_n = -\frac{\pi^2 n^2}{a^2}\ ,\quad n = 1,2,3,\ldots$$

Constátese que $s = 0$ *no es un polo de* $F(s)$*.*

Elijamos R_n *tal que* $|s_n| < R_n < |s_{n+1}|$ *y* $c > 0$*. De este modo* $R_n \to \infty$ *si, y sólo si,* $n \to \infty$*, y todos los polos están a la izquierda de la recta Re*$(s) = c$*. Veamos cómo se comporta* I_2 *cuando* $n \to \infty$ $(R_n \to \infty)$*.*

$$|I_2| \le \int_{\alpha}^{\pi/2} e^{tR_n\cos\theta}O\left(e^{(b-a)\sqrt{R_n}\cos\frac{\theta}{2}}\right)R_n\,d\theta \le Ke^{ct}\int_{\alpha}^{\pi/2} R_n e^{(b-a)\sqrt{R_n}\cos\frac{\theta}{2}}\,d\theta \to 0$$

cuando $n \to \infty$*, ya que* $b - a < 0$ $(K > 0$ *cierta constante). Análogamente se comprueba que* $I_5 \to 0$ *si* $n \to \infty$*.*

Estudiaremos ahora I_3*.*

$$|I_3| \le \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR_n\cos\theta}O\left(e^{(b-a)\sqrt{R_n}\cos\frac{\theta}{2}}\right)R_n\,d\theta \to 0\ ,$$

al hacer $n \to \infty$*, pues* $\cos\theta < 0$ *y* $\cos\frac{\theta}{2} > 0$ *en* $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$*, mientras que* $b-a < 0$*. De forma similar se deduce que* $I_4 \to 0$ *cuando* $n \to \infty$*. Por otra parte, el residuo correspondiente* *al polo* s_n *es*

$$\operatorname{Res}\left[e^{st}\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}\right] = \lim_{s\to -\frac{\pi^2 n^2}{a^2}} e^{st}\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}\left(s+\frac{\pi^2n^2}{a^2}\right) =$$

$$= \frac{2\pi n i}{a^2}\ e^{-\frac{\pi^2n^2}{a^2}t}\ \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{a}n\pi i\right)}{\operatorname{ch}(n\pi i)} = -\frac{2\pi n}{a^2}\ e^{-\frac{\pi^2n^2}{a^2}t}\ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}n\pi\right)}{\cos(n\pi)}.$$

Por tanto, a la vista de todas las anteriores consideraciones y teniendo en cuenta que en el recinto considerado limitado por el segmento $\overline{AB}$ *y arco circular* R_n *hay exactamente* n *polos, por el Teorema de los Residuos sigue que*

$$\int_\Gamma e^{st}\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}\ ds = \sum_{j=1}^{n} I_j = 2\pi i\sum_{l=1}^{n}\operatorname{Res}\left[e^{st}\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}\right]_{|s=s_l}$$

y haciendo tender $n\to\infty$ *(*$R_n\to\infty$*), obtenemos finalmente*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iR_n}^{c+iR_n} e^{st}\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}\ ds = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\pi n}{a^2}\ e^{-\frac{\pi^2n^2}{a^2}t}\ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}n\pi\right)}{\cos(n\pi)}.$$

Hemos establecido que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\operatorname{sh} b\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}\right\} = -\frac{2\pi n}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\ e^{-\frac{\pi^2n^2}{a^2}t}\ \frac{n\operatorname{sen}\left(\frac{b}{a}n\pi\right)}{\cos(n\pi)}\ ,$$

con $0<b<a$*.*

Ejemplo 2.3.7. *Cuando se presenta un punto de ramificación hay que modificar un poco el procedimiento seguido hasta aquí. Ilustraremos lo dicho hallando* $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\}$*. Tenemos que calcular*

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\ e^{-\sqrt{s}}\ ds\ ,$$

donde $c = Re(s) > 0$*.*

Si Γ *denota la curva que limita el recinto de la figura, se tiene*

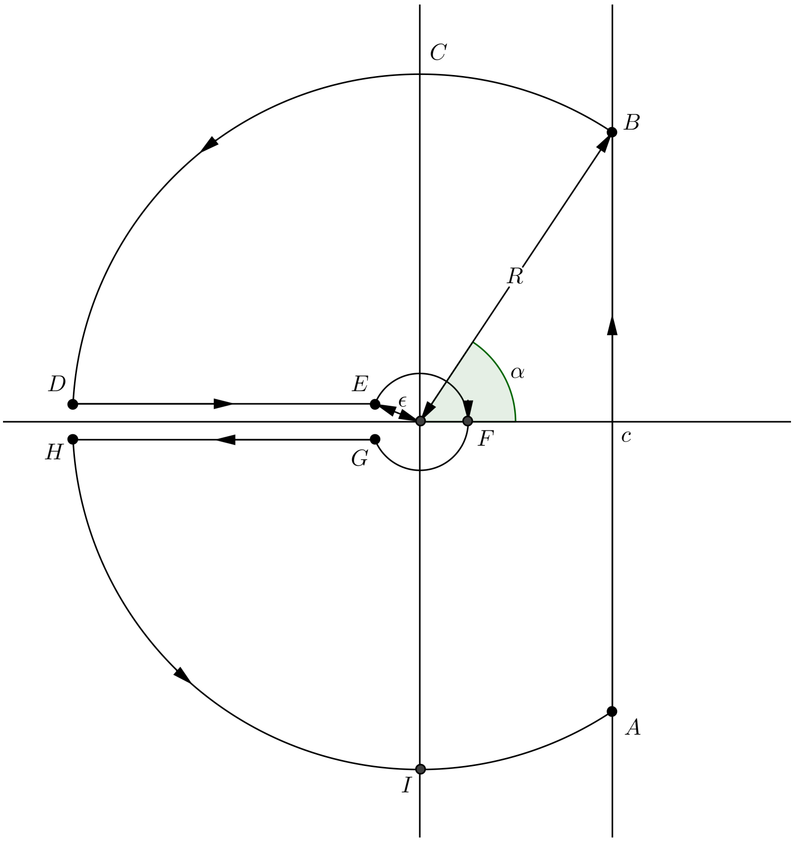
$$\int_\Gamma e^{st-\sqrt{s}}\ ds = 0 = \int_A^B + \int_{\widehat{BC}} + \int_{\widehat{CD}} + \int_{\overline{DE}} + \int_{\widehat{EFG}} + \int_{\overline{GH}} + \int_{\widehat{HI}} + \int_{\widehat{IA}} \tag{2.25}$$

Sobre los arcos de la circunferencia grande es

$$s = Re^{i\theta} \Rightarrow \sqrt{s} = \sqrt{R}\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ ,\quad R>0.$$

En concreto, sobre el arco $\widehat{BC}$ *es*

$$s = Re^{i\theta}\ ,\quad \alpha\le\theta\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{s} = \sqrt{R}\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ ,\quad \frac{\alpha}{2}\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$$



Entonces, como $\alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha \geq \cos\theta \Rightarrow R\cos\alpha \geq R\cos\theta = c$ *tenemos*

$$\left|\int_{\widehat{BC}} e^{st}\ e^{-\sqrt{s}}\ ds\right| \leq \int_{\alpha}^{\pi/2} e^{tR\cos\theta}\ e^{-\sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2}} R\ d\theta \leq e^{tc}\int_{\alpha}^{\pi/2} e^{-\sqrt{\frac{R}{2}}} R\ d\theta =$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) e^{tc} R e^{-\sqrt{\frac{R}{2}}} = \left(\operatorname{arcsen}\frac{c}{R}\right) R e^{-\sqrt{\frac{R}{2}}}\ e^{tc} \to 0\ ,$$

al hacer $R \to \infty$*, para todo* $t > 0$.

Análogamente,

$$\left|\int_{\widehat{IA}} e^{st}\ e^{-\sqrt{s}}\ ds\right| \to 0\ ,\quad R \to \infty.$$

Sobre $\widehat{CD}$ *es* $s = Re^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$*, por lo que*

$$\left|\int_{\widehat{CD}} e^{st}\ e^{-\sqrt{s}}\ ds\right| \leq \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR\cos\theta}\ e^{-\sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2}} R\ d\theta = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{tR\cos\theta - \sqrt{R}\cos\frac{\theta}{2}} R\ d\theta =$$
$$= R\int_{0}^{\pi/2} e^{tR\cos(\pi-\varphi) - \sqrt{R}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right)}\ d\varphi = R\int_{0}^{\pi/2} e^{-tR\cos\varphi - \sqrt{R}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}}\ d\varphi\ ,$$

efectuando el cambio $\varphi = \pi - \theta$.

Analicemos la función

$$A(\varphi) = tR\cos\varphi + \sqrt{R}\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\ ,\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Hallamos su derivada

$$A'(\varphi) = -tR\operatorname{sen}\varphi + \frac{\sqrt{R}}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = -2tR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{R}}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$
$$= \cos\frac{\varphi}{2}\left(-2tR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} + \frac{\sqrt{R}}{2}\right)\ ,\quad \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

Luego, como $\cos\frac{\varphi}{2} > 0\ ,\ \ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, *tenemos que*

- *Si* $\frac{\sqrt{R}}{2} < 2tR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow A'(\varphi) < 0 \Rightarrow A(\varphi)$ *decrece.*
- *Si* $\frac{\sqrt{R}}{2} > 2tR\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow A'(\varphi) > 0 \Rightarrow A(\varphi)$ *crece.*

En resumen

- *Si* $A(\varphi)$ *es creciente si* $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} < \frac{1}{4t\sqrt{R}}$, *es decir, si* $0 \le \varphi \le 2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right)$.
- *Si* $A(\varphi)$ *decrece si* $\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} > \frac{1}{4t\sqrt{R}}$, *o sea, si* $\varphi \ge 2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right)$.

Por otra parte, $A(0) = tR$ *y* $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{R}{2}}$.
Así pues,

$$\left|\int_{\widehat{CD}} e^{st}\ e^{-\sqrt{s}}\ ds\right| \le R\int_0^{\pi/2} e^{-A(\varphi)}\ d\varphi =$$
$$= R\int_0^{2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right)} e^{-A(\varphi)}\ d\varphi + R\int_{2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right)}^{\pi/2} e^{-A(\varphi)}\ d\varphi \le$$
$$\le R\int_0^{2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right)} e^{-tR}\ d\varphi + R\int_{2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right)}^{\pi/2} e^{-\sqrt{\frac{R}{2}}}\ d\varphi =$$
$$= Re^{-tR}2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right) + Re^{-\sqrt{\frac{R}{2}}}\left(\frac{\pi}{2} - 2\arcsen\left(\frac{1}{4t\sqrt{R}}\right)\right) \to 0\ ,\quad R\to\infty.$$

Análogamente,

$$\left|\int_{\widehat{HI}} e^{st}\ e^{-\sqrt{s}}\ ds\right| \to 0\ ,\quad R\to\infty.$$

Sobre la circunferencia pequeña que rodea el punto de ramificación $s = 0$ *se ve que* $s = \epsilon e^{i\theta}$, $-\pi \le \theta \le \pi$, $\epsilon > 0$.
Se obtiene

$$\left|\int_{\widehat{EFG}} e^{st-\sqrt{s}}\ ds\right| \le \left|\int_{\pi}^{-\pi} e^{\epsilon\cos\theta - \sqrt{\epsilon}\cos\frac{\theta}{2}}\epsilon\ d\theta\right| \le 2\pi\epsilon e^{\epsilon+\sqrt{\epsilon}} \to 0\ ,\quad \epsilon\to 0.$$

Sobre los segmentos $\overline{DE}$ *y* $\overline{GH}$*se tiene que* $s = re^{i\pi}$, $R < r < \epsilon$ *y* $s = re^{-i\pi}$, $\epsilon < r < R$, *respectivamente.*

Luego,

$$\int_{\overline{DE}} + \int_{\overline{GH}} = \int_R^{\epsilon} e^{tre^{i\pi} - \sqrt{r}e^{i\frac{\pi}{2}}} \ e^{i\pi} \ dr + \int_{\epsilon}^{R} e^{tre^{-i\pi} - \sqrt{r}e^{-i\frac{\pi}{2}}} \ e^{-i\pi} \ dr =$$
$$= - \int_R^{\epsilon} e^{-tr - i\sqrt{r}} \ dr - \int_{\epsilon}^{R} e^{-tr + i\sqrt{r}} \ dr = \int_{\epsilon}^{R} e^{tr} \left(e^{-i\sqrt{r}} - e^{i\sqrt{r}} \right) \ dr =$$
$$= -2i \int_{\epsilon}^{R} e^{-tr} \operatorname{sen} \sqrt{r} \ dr \to -2i \int_0^{\infty} e^{tr} \operatorname{sen} \sqrt{r} \ dr \ , \quad \epsilon \to 0 \ , \quad R \to \infty.$$

Haciendo en (2.25) *que* $\epsilon \to 0$ *y* $R \to \infty$, *teniendo en cuenta todos estos resultados, se llega a que*

$$\int_{c - i\infty}^{c + i\infty} e^{st} \ e^{-\sqrt{s}} \ ds - 2i \int_0^{\infty} e^{-tr} \operatorname{sen} \sqrt{r} \ dr = 0.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} e^{st} \ e^{-\sqrt{s}} \ ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tr} \operatorname{sen} \sqrt{r} \ dr. \tag{2.26}$$

Calculemos

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tr} \operatorname{sen} \sqrt{r} \ dr.$$

Hacemos el cambio $r = x^2$.

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-tr} \operatorname{sen} \sqrt{r} \ dr = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} xe^{-tx^2} \operatorname{sen} x \ dx. \tag{2.27}$$

Pongamos

$$I(t) = \int_0^{\infty} xe^{-tx^2} \operatorname{sen} x \ dx.$$

Integramos por partes

$$I(t) = \left[-\frac{e^{-tx^2}}{2t} \operatorname{sen} x \right]_{x=0}^{x \to \infty} + \frac{1}{2t} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos x \ dx = \frac{1}{2t} J(t, 1) \ , \tag{2.28}$$

siendo

$$J(t, \lambda) = \int_0^{\infty} e^{-tx^2} \cos \lambda x \ dx.$$

Por derivación paramétrica

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = - \int_0^{\infty} xe^{-tx^2} \operatorname{sen} \lambda x \ dx.$$

Si recurrimos nuevamente a una integración por partes, sigue

$$\frac{\partial J}{\partial \lambda} = - \left\{ \left[\frac{e^{-tx^2}}{-2t} \operatorname{sen} \lambda x \right]_{x=0}^{x \to \infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx^2}}{2t} \lambda \cos \lambda x \ dx \right\} = -\frac{\lambda}{2t} J \ ,$$

es decir,

$$\frac{\partial J(t,\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{\lambda}{2t} J(t,\lambda).$$

Además,

$$J(t,0) = \int_0^\infty e^{-tx^2}\ dx = \int_0^\infty e^{-(\sqrt{t}\ x)^2}\ dx.$$

Haciendo el cambio $u = \sqrt{t}\ x$*, resulta*

$$J(t,0) = \int_0^\infty e^{-u^2}\ \frac{du}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty e^{-u^2}\ du = \sqrt{\frac{\pi}{4t}}.$$

Tenemos así el problema de valores iniciales

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J(t,\lambda)}{\partial \lambda} = -\frac{\lambda}{2t} J(t,\lambda) \\ \\ J(t,0) = \sqrt{\frac{\pi}{4t}} \end{array} \right. ,$$

cuya solución general es la siguiente

$$\left. \begin{array}{l} J(t,\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{4t}} \\ \\ J(t,0) = \sqrt{\frac{\pi}{4t}} = C \end{array} \right\} ,$$

es decir,

$$J(t,\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{4t}}\ e^{-\frac{\lambda^2}{4t}}.$$

Para $\lambda = 1$*, sustituyendo en 2.28, sigue que*

$$I(t) = \frac{1}{2t} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}\ e^{-\frac{1}{4t}}.$$

Por 2.27 se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{tr} \operatorname{sen} \sqrt{r}\ dr = \frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{1}{4t}} \tag{2.29}$$

Sustituyendo en 2.26 se tiene, finalmente, que

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{s}}\} = \frac{t^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}\ e^{-\frac{1}{4t}}.$$

Consecuencias

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\}$, $a > 0$.
Recordamos que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(bs)\} = \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) \;, \;\; b > 0.$$

Así pues, tomando $b = a^2$, resulta

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-\sqrt{a^2 s}}\} = \frac{1}{a^2} \, \frac{\left(\frac{t}{a^2}\right)^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \; e^{-\frac{1}{4\frac{t}{a^2}}} = \frac{at^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \; e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-a\sqrt{s}}\} = \frac{at^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}} \; e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

Capítulo 3

Aplicaciones

3.1. Introducción

La de Laplace es quizás la transformación integral que más aplicaciones tiene, junto con la de Fourier, en física y en las distintas ingenierías. Posee la ventaja sobre esta última de que se dispone de tablas de transformadas de Laplace con miles de entradas.

Por su propia naturaleza la transformación integral de Laplace parece destinada a resolver problemas de valores iniciales. Recordemos la fórmula del primer capítulo

$$\mathcal{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \ldots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0) \ ,$$

donde $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, que convierte la derivada n-ésima en el espacio imagen en un simple producto algebraico, pero que además lleva consigo los datos iniciales. Por eso, el amplio campo de aplicaciones de esta transformación lo ilustramos en este capítulo resolviendo problemas de Cauchy o de valores iniciales para ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. También se aborda la resolución de ecuaciones diferenciales con coeficientes variables, de tipo polinómico.

Finalmente, se muestra cómo la transformación de Laplace es igualmente útil en la resolución de problemas planteados mediante ecuaciones en derivadas parciales.

3.2. Aplicaciones teóricas

Aunque, como se verá en el párrafo siguiente, las aplicaciones más importantes de la transformación integral de Laplace están relacionadas con la resolución de ecuaciones diferenciales, ordinarias o en derivadas parciales, también su utilización puede simplificar la derivación de otros resultados.

Iteración del operador integración y la integral fraccionaria

En lo que sigue $I\ f(t)$ denotará el operador integración

$$I\ f(t) = \int_0^t f(u)\ du. \tag{3.1}$$

Si iteramos n-veces este operador se puede demostrar, usando integración por partes e inducción sobre n, que

$$I^n f(t) = \int_0^t \left(\int_0^{u_{n-1}} \left(\int_0^{u_{n-2}} \cdots \left(\int_0^{u_1} f(u)\ du \right) \cdots\ du_{n-3} \right)\ du_{n-2} \right)\ du_{n-1} =$$

$$= \int_0^t \frac{f(u)(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\ du\ , \tag{3.2}$$

es decir, la iteración del operador (3.1) se puede expresar mediante una única integral.

La anterior fórmula se obtiene fácilmente mediante el teorema de convolución. En efecto, el primer miembro de (3.2) se puede escribir

$$I^n f(t) = f(t) * \overbrace{1 * 1 * \cdots * 1}^{\text{n veces}}$$

Aplicando Laplace y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, $Re(s) > 0$, resulta

$$\mathcal{L}\{I^n f(t)\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \overbrace{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \cdots \frac{1}{s}}^{\text{n veces}} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \frac{1}{s^n} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\} = \mathcal{L}\left\{ f(t) * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

Por el teorema de Lerch (unicidad) y de la definición de convolución, sigue que

$$I^n f(t) = f(t) * \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(x)(t-x)^{n-1}\ dx\ ,$$

expresión que coincide con (3.2).

En realidad, se ha establecido que

$$I^n f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{s^n} \right\}\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ ,$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. El primer miembro de esta fórmula sólo tiene sentido para $n \in \mathbb{N}$, no así el segundo miembro, pues se puede dividir $F(s)$ por una potencia s^n con n fraccionario, real o incluso complejo. Ello nos invita a definir la integral fraccionaria de orden $\alpha \in \mathbb{C}$ mediante

$$I^\alpha f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{F(s)}{s^\alpha} \right\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s^\alpha} \right\} = f(t) * \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(x)(t-x)^{\alpha-1}\ dx\ ,$$

siempre que esta integral tenga sentido. A la expresión

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(x)(t-x)^{\alpha-1}\ dx\ ,\ \ Re(\alpha) > 0\ , \tag{3.3}$$

se le conoce como integral fraccionaria de Riemann-Liouville.

Ejemplo 3.2.1. *Si $f(t) = t$, ¿cuál es el resultado de integrar esta función media vez? Tenemos*

$$\mathcal{L}\left\{I^{1/2}t\right\} = \frac{\mathcal{L}\{t\}}{s^{1/2}} = \frac{1}{s^{5/2}} \ ,$$

por lo que

$$I^{1/2}t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{5/2}}\right\} = \frac{t^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4t^{3/2}}{4\sqrt{\pi}}$$

Análogamente se pueden deducir

$$I^{3/4}t = \frac{t^{7/4}}{\Gamma(11/4)}$$

$$I^{\pi}t = \frac{t^{\pi+1}}{\Gamma(\pi+2)}$$

$$I^{\pi+ei}t = \frac{t^{(\pi+1)+ei}}{\Gamma((\pi+2)+ei)}$$

Ejemplo 3.2.2. *Si calculamos la integral de orden $\alpha = \frac{n}{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, de $f(t) = t$, se tiene*

$$\mathcal{L}\left\{I^{\frac{n}{n+1}}t\right\} = \frac{\mathcal{L}\{t\}}{s^{\frac{n}{n+1}}} = \frac{1}{s^{\frac{n}{n+1}+2}} \ ,$$

de donde

$$I^{\frac{n}{n+1}}t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{\frac{n}{n+1}+2}}\right\} = \frac{t^{\frac{2n+1}{n+1}}}{\Gamma(\frac{3n+2}{n+1})}. \tag{3.4}$$

En particular,

$$I^{2/3}t = \frac{t^{5/3}}{\Gamma(8/3)} \ , \quad \textit{para } n = 2$$

$$I^{3/4}t = \frac{t^{7/4}}{\Gamma(11/4)} \ , \quad \textit{para } n = 3$$

$$I^{4/5}t = \frac{t^{9/5}}{\Gamma(14/5)} \ , \quad \textit{para } n = 4$$

$$I^{9/10}t = \frac{t^{19/20}}{\Gamma(29/10)} \ , \quad \textit{para } n = 9.$$

Si hacemos $n \longrightarrow \infty$ en (3.4), se infiere formalmente que

$$I\ t = \frac{t^2}{\Gamma(3)} = \frac{t^2}{2} \ ,$$

que, como era de esperar, coincide con una de las primitivas de la función $f(t) = t$.

Función relacionada con la ecuación del calor

Otro ejemplo que muestra que operar en el espacio imagen es, en general, mucho más sencillo que en el espacio original es la verificación de la siguiente propiedad aditiva

$$\rho(x_1,t) * \rho(x_2,t) = \rho(x_1+x_2,t)\ ,\ \ x_1>0\ ,\ \ x_2>0$$

para la función

$$\rho(x,t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}\ t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\ ,\ \ x>0\ ,$$

que comparece en la teoría de la ecuación del calor. Se sabe que ([4, p. 143], Ejemplo 1.2.12 (iii))

$$\mathcal{L}\{\rho(x,t)\} = e^{-x\sqrt{s}}.$$

Por el teorema de la convolución,

$$\mathcal{L}\{\rho(x_1,t) * \rho(x_2,t)\} = e^{-x_1\sqrt{s}} \cdot e^{-x_2\sqrt{s}} = e^{-(x_1+x_2)\sqrt{s}}.$$

Y, aplicando la fórmula de inversión, se tiene (Ejemplo 2.3.7)

$$\rho(x_1,t) * \rho(x_2,t) = \mathcal{L}\left\{e^{-(x_1+x_2)\sqrt{s}}\right\} = \frac{x_1+x_2}{2\sqrt{\pi}\ t^{3/2}} e^{-\frac{(x_1+x_2)^2}{4t}}\ ,$$

que es una comprobación elegante de la anterior propiedad. No resulta muy recomendable hacerlo directamente, en el espacio del tiempo, partiendo de la definición de convolución.

Deducción de la integral de Poisson para la función de Bessel $J_0(x)$

Sabemos que ([4, p. 162], Ejemplo 1.2.11)

$$\mathcal{L}\{J_0(x)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{s+i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s-i}}.$$

Recordando la correspondencia (Ejemplo 1.2.4)

$$\mathcal{L}\left\{x^{-1/2}\ e^{-\alpha x}\right\} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s+\alpha}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s+\alpha}}$$

resulta

$$\mathcal{L}\{J_0(x)\} = \frac{1}{\pi}\ \mathcal{L}\left\{x^{-1/2}\ e^{-ix}\right\}\ \mathcal{L}\left\{x^{-1/2}\ e^{ix}\right\}$$

Luego, por el Teorema de Lerch (unicidad) y la definición de la convolución, se obtiene

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\ (x^{-\frac{1}{2}}\ e^{-ix}) * (x^{-\frac{1}{2}}\ e^{ix}) = \int_0^x u^{-\frac{1}{2}}\ e^{-iu}\ (x-u)^{-\frac{1}{2}}\ e^{i(x-u)}\ du =$$

$$= \frac{e^{ix}}{\pi} \int_0^x u^{-\frac{1}{2}} (x-u)^{-\frac{1}{2}} e^{-2iu} \, du = \frac{1}{\pi} \int_0^1 e^{ix(1-2v)} \, [v(1-v)]^{-\frac{1}{2}} \, dv \; ,$$

donde se ha puesto $u = xv$. Realizando el cambio de variable $1 - 2v = z$, se llega a la expresión

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{ixz} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} \, dz$$

Finalmente, con la sustitución $z = \cos\varphi$, se establece el resultado deseado

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{ix\cos\varphi} \, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \, \cos\varphi) \, d\varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(x \, \cos\varphi) \, d\varphi$$

Función Beta

Esta función euleriana viene definida por

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1} \, (1-x)^{n-1} \, dx \; , \;\; Re(m) > 0 \; , \;\; Re(n) > 0.$$

Para deducir su propiedad fundamental

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m) \, \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \; , \tag{3.5}$$

que la relaciona con la función Gamma, escribimos

$$B_t(m,n) = \int_0^t x^{m-1} \, (t-x)^{n-1} \, dx \tag{3.6}$$

Nótese, en particular, que $B_1(m,n) = B(m,n)$. Con ayuda de la convolución, (3.6) adopta la forma

$$B_t(m,n) = t^{m-1} * t^{n-1}$$

Al aplicar Laplace y tener en cuenta que $\mathcal{L}\left\{t^\lambda\right\} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$, $Re(\lambda) > -1$, $Re(s) > 0$, se tiene

$$\mathcal{L}\{B_t(m,n)\} = \mathcal{L}\{t^{m-1}\} \; \mathcal{L}\{t^{n-1}\} = \frac{\Gamma(m)}{s^m} \, \frac{\Gamma(n)}{s^n} = \frac{\Gamma(m) \, \Gamma(n)}{s^{m+n}}$$

Invirtiendo, queda (Ejemplo 1.2.2)

$$B_t(m,n) = \Gamma(m) \, \Gamma(n) \, \frac{t^{m+n-1}}{\Gamma(m+n)}$$

Finalmente, haciendo $t = 1$, resulta la propiedad (3.5).

Cálculo de integrales

(a) Evaluar

$$\int_0^{\infty} t\ e^{-2t} \cos(t)\ dt$$

Por el Teorema 1.4.7

$$\mathcal{L}\{t\ \cos t\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ t\ \cos t\ dt = -\frac{d}{ds}\ \mathcal{L}\{\cos t\} = -\frac{d}{ds}\ \left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\ ,$$

para $s \in \mathbb{C}$, $Re(s) > 0$. En particular, si $s = 2$,

$$\int_0^{\infty} t\ e^{-2t}\ \cos t\ dt = \frac{3}{25}.$$

(b) Calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-3t}}{t}\ dt.$$

Antes de proceder a este cálculo, derivaremos una propiedad más de la transformación de Laplace. Es sabido que integrar en el espacio original se corresponde en el espacio imagen con una operación algebraica, dividir con una potencia de s. Recíprocamente, ¿en qué se traduce la división de $f(t)$ por una potencia de t? Pues que en el espacio imagen se integra. Pongamos

$$\Phi(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\ \frac{f(t)}{t}\ dt$$

Sabemos que $\Phi(s)$ es analítica en cierto semiplano a la derecha y que

$$\Phi'(s) = -\int_0^{\infty} e^{-st}\ f(t)\ dt = -F(s).$$

Entonces

$$\Phi(s) = \int_s^{\infty} F(x)\ dx + C.$$

Como $\lim_{s\to\infty} \Phi(s) = 0$, ha de ser $C = 0$.

Es decir,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(x)\ dx. \tag{3.7}$$

En nuestro caso, se tiene fácilmente que

$$\mathcal{L}\left\{e^{-t} - e^{-3t}\right\} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}\ ,\ \ Re(s) > -1.$$

Por (3.7)

$$\mathcal{L}\{\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\right) dt = \int_s^\infty \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right) dx =$$

$$= \ln\left(\frac{s+3}{s+1}\right) \tag{3.8}$$

Haciendo ahora $s=0$ en (3.8), queda

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}-e^{-3t}}{t}\, dt = \ln 3.$$

(c) Hallar el valor de la integral $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt$.

Es obvio que esta integral converge absolutamente. Por otra parte, sabemos que (Ejemplo 1.3.4)

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen}^2 t\} = \frac{2}{s(s^2+4)} \quad , \quad Re(s) > 0$$

En virtud de (3.7), sigue

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{2\, dx}{x(x^2+4)} = \frac{1}{2}\ \ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s}.$$

Reiterando el proceso

$$\int_0^\infty e^{-st}\ \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt = \mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\frac{\operatorname{sen}^2 t}{t}}{t}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_s^\infty \ln\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}\, dx = \frac{1}{2}\left(\pi - s\ln\frac{\sqrt{s^2+4}}{s} - 2\operatorname{arctg}\frac{s}{2}\right) \tag{3.9}$$

Nótese que

$$\left|\int_0^\infty e^{-st}\ \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt\right| \le \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt\ ,\quad Re(s) \ge 0.$$

Haciendo entonces en (3.9) que $s \longrightarrow 0$, se tiene

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t^2}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

3.3. Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

La transformación integral de Laplace está preparada para resolver problemas de Cauchy o de valores iniciales, como pone de manifiesto el Teorema 1.7.2.

3.3.1. Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Supongamos el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0\ x''(t) + a_1\ x'(t) + a_2\ x(t) = b(t)\ ,\ \ t > 0 \\ \\ x(0) = \alpha\ ,\ \ x'(0) = \beta. \end{cases} \tag{3.10}$$

donde los coeficientes a_0, a_1 y a_2 son constantes, siendo α y β los valores iniciales. Sabemos, gracias al citado Teorema 1.7.2, que

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2\ X(s) - \alpha s - \beta$$
$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - \alpha\ ,$$

denotando $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. Si $B(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}$, al aplicar Laplace, el problema dado se convierte en

$$(a_0s^2 + a_1s + a_2)X(s) - \alpha a_0 s - a_0\beta - a_1\alpha = B(s)\ ,$$

que es una sencilla ecuación algebraica de solución

$$X(s) = \frac{B(s) + \alpha a_0 s + a_0\beta + a_1\alpha}{a_0s^2 + a_1s + a_2}.$$

Bastaría con aplicar la fórmula de inversión para obtener la solución $x(t)$.

Ejemplo 3.3.1. *Resolver el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = te^{-t} \\ \\ x(0) = 1\ ,\ \ x'(0) = 0. \end{cases}$$

Sea $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. *Entonces,*

$$\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - s$$
$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - 1$$
$$\mathcal{L}\{te^{-t}\} = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

Aplicando Laplace, sigue que

$$s^2X(s) - s + 3sX(s) - 3 + 2X(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

La solución del problema transformado es inmediato

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+3s+2)} + \frac{s+3}{s^2+3s+2} =$$

$$= \frac{1}{(s+1)^3(s+2)} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \tag{3.11}$$

Invirtiendo

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} = 2e^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\frac{1}{(s+2)}\right\} = \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}\right) * \left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\right) =$$
$$= \frac{t^2e^{-t}}{2} * e^{-2t} = \frac{1}{2}\int_0^t \tau^2\ e^{-\tau}\ e^{-2(t-\tau)}\ d\tau = \left(\frac{t^2}{2} - t + 1\right)\ e^{-t} - 2e^{-2t}$$

Si al aplicar el Teorema de Inversión en 3.11 tenemos en mente todos estos resultados, se infiere que

$$x(t) = \left(\frac{t^2}{2} - t + 3\right)\ e^{-t} - 2e^{-2t}.$$

Este resultado se generaliza fácilmente. Consideremos el siguiente problema de valores iniciales que involucra la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes a_k, $k = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ n$,

$$\begin{cases} a_0\ x^{(n)} + a_1\ x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-2}\ x'' + a_{n-1}\ x' + a_n\ x = b(t) \\ \\ x(0) = \alpha_1\ ,\ \ x'(0) = \alpha_2\ ,\ \ \dots\ ,\ \ x^{(n-1)}(0) = \alpha_n \end{cases}$$

donde $b(t)$ es una función conocida y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son valores dados. Pongamos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $B(s) = \mathcal{L}\{b(t)\}$. Recurriendo otra vez al Teorema 1.7.2, al aplicar Laplace convertimos el problema de Cauchy de partida en la simple ecuación algebraica

$$P_n(s)\ X(s) + Q_{n-1}(s) = B(s)\ ,$$

donde $P_n(s)$ es el polinomio de grado n

$$P_n(s) = a_0\ s^n + a_1\ s^1 + \cdots + a_{n-1}\ s + a_n$$

y $Q_{n-1}(s)$ un polinomio de grado $n-1$ que envuelve los coeficientes a_k $(k = 0,\ 1,\ 2, \dots,\ n)$ y los datos iniciales α_l $(l = 1,\ 2, \dots,\ n)$. La solución de esta ecuación es

$$X(s) = \frac{B(s) - Q_{n-1}(s)}{P_n(s)}.$$

Aplicando la fórmula de inversión deviene la solución deseada

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}.$$

Ejemplo 3.3.2. *Resolver el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} \frac{d^4x(t)}{dt^4} + 2\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = \operatorname{sen} t \\ \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0 \end{cases}$$

Si ponemos, como antes, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ *y recordamos que* $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} = \frac{1}{s^2+1}$, *aplicando Laplace se llega a que*

$$s^4\ X(s) + 2s^2\ X(s) + X(s) = \frac{1}{s^2+1}\ ,$$

cuya solución es

$$X(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^4+2s^2+1)} = \frac{1}{(s^2+1)^3}.$$

Y antitransformando, se deduce que (Ejemplo 2.3.5)

$$x(t) = \frac{(3-t^2)\operatorname{sen} t - 3t\cos t}{8}.$$

Ejemplo 3.3.3. *Hallar la solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \frac{d^3x(t)}{dt^3} - 3\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = 2te^t \\ \\ x(0) = 1\ ,\ x'(0) = 0\ ,\ x''(0) = 1 \end{cases}$$

Si $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ *y tenemos en cuenta que*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'(t)\} &= sX(s) - 1 \\ \mathcal{L}\{x''(t)\} &= s^2X(s) - s \\ \mathcal{L}\{x'''(t)\} &= s^3X(s) - s^2 - 1 \\ \mathcal{L}\{te^t\} &= \frac{1}{(s-1)^2}\ , \end{aligned}$$

el problema de Cauchy se convierte vía Laplace en la ecuación algebraica

$$s^3X(s) - s^2 - 1 - 3s^2X(s) + 3s + 3sX(s) - 3 - X(s) = \frac{2}{(s-1)^2}.$$

La solución se obtiene fácilmente y es

$$X(s) = \frac{2}{(s-1)^5} + \frac{s^2-3s+4}{(s-1)^3}\ ,$$

que se puede fraccionar de la forma

$$X(s) = \frac{2}{(s-1)^5} + \frac{2}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}.$$

Finalmente, aplicando la fórmula de inversión, se llega a la solución

$$x(t) = \left(\frac{t^4}{12} + t^2 - t + 1 \right) e^t.$$

Nota. *Las ecuaciones diferenciales de segundo orden aparecen con gran frecuencia en ingeniería y todas las ciencias, particularmente, en física. Si en el problema de Cauchy 3.10, la incógnita $x = x(t)$ denota el desplazamiento de una partícula en el instante t y los coeficientes a_0, a_1 y a_2 denotan la masa m, la constante de amortiguación b y el coeficiente de elasticidad k, respectivamente, reemplazando $b(t)$ por la fuerza externa $f(t)$, se tiene el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} m\ x''(t) + b\ x'(t) + k\ x(t) = f(t)\ ,\quad t > 0 \\ \\ x(0) = x_0\ ,\quad x'(0) = v_0. \end{cases}$$

que es la modelización matemática del problema físico de un sistema masa-resorte. Se trata de determinar la posición $x(t)$ de la partícula en cualquier instante $t > 0$, conocidas la posición y velocidad iniciales.

Análogamente, si reinterpretamos los coeficientes a_0, a_1, a_2 y la función $b(t)$ como L (inductancia), R (resistencia), C (capacitancia) y $E(t)$ (potencial o voltaje), respectivamente, y en lugar de $x(t)$ ponemos la carga $q = q(t)$, resulta esto otro problema de valores iniciales

$$\begin{cases} L\ q''(t) + R\ q'(t) + \frac{1}{C}\ q(t) = E(t)\ ,\quad t > 0 \\ \\ q(0) = q_0\ ,\quad q'(0) = i_0. \end{cases}$$

que es la modelización matemática de un circuito eléctrico. En este caso hay que calcular la carga $q = q(t)$ en cualquier instante t, conocidas la carga e intensidad iniciales.

Como se va claramente, dos problemas físicos diferentes responden al mismo modelo matemático.

3.3.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

También se puede utilizar la transformación de Laplace para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Mostraremos este punto con el ejemplo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z\ ,\quad x(0) = 1 \\ \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z\ ,\quad y(0) = 0 \\ \\ \frac{dz}{dt} = x + y + z\ ,\quad z(0) = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

En lo que sigue denotamos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ y $Z(s) = \mathcal{L}\{z(t)\}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{x'(t)\} &= sX(s) - 1 \\
\mathcal{L}\{y'(t)\} &= sY(s) \\
\mathcal{L}\{z'(t)\} &= sZ(s).
\end{aligned}$$

Al aplicar la transformación de Laplace, el sistema (3.12) se reduce al sistema algebraico

$$\begin{cases}
sX(s) - 1 = -X(s) + Y(s) + Z(s) \\
sY(s) = X(s) - Y(s) + Z(s) \\
sZ(s) = X(s) + Y(s) + Z(s)\ ,
\end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases}
(s+1)X(s) - Y(s) - Z(s) = 1 \\
X(s) - (s+1)Y(s) + Z(s) = 0 \\
X(s) + Y(s) - (s-1)Z(s) = 0\ ,
\end{cases}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s^2-2}{(s+2)(s^2-s-2)} = \frac{1/2}{s+2} + \frac{1/6}{s-2} + \frac{1/3}{s+1} \\
Y(s) &= \frac{s}{(s+2)(s^2-s-2)} = \frac{-1/2}{s+2} + \frac{1/6}{s-2} + \frac{1/3}{s+1} \\
Z(s) &= \frac{1}{s^2-s-2} = \frac{1/3}{s-2} - \frac{1/3}{s+1}.
\end{aligned}$$

Invirtiendo para regresar al espacio del tiempo, se obtiene la solución deseada

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \\
y(t) &= -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{6}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t} \\
z(t) &= \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-t}.
\end{aligned}$$

Nota. *Se ha visto cómo un problema complicado en el espacio original, la resolución de un problema de Cauchy, se reduce en el espacio imagen - mediante la aplicación de la transformación de Laplace - a una sencilla ecuación algebraica de primer grado con* *una sola incógnita. Además, con la transformada de Laplace, se introducen de una forma natural los datos iniciales en el proceso.*

El procedimiento clásico consiste en hallar la solución general de la ecuación diferencial, para lo cual es preciso encontrar la solución general de la ecuación homogénea y añadirle una solución particular de la ecuación completa, y después utilizar los datos iniciales para determinar las constantes arbitrarias que figuran en la solución general.

Nota. *En el caso de la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales, el uso de la transformación de Laplace lo convierte en un sistema algebraico de solución inmediata, por ejemplo, recurriendo al método de Cramer. También ahora son obvias las ventajas de usar Laplace.*

3.4. Aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables

En este caso los coeficientes de la ecuación diferencial lineal no son constantes, como en el párrafo anterior, sino polinomios en la variable t. También es factible resolver este tipo de ecuaciones mediante la transformación de Laplace.

El fundamento teórico de este método es el siguiente. Sea $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ un polinomio de grado n con coeficientes constantes a_k. A tenor del Teorema 1.7.2

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{P(t)f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k t^k f(t)\right\} = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k \mathcal{L}\left\{(-t)^k f(t)\right\} = \\ = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k} = M(-D_s)F(s)\ ,\end{aligned}$$

donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ y $D_s = \frac{d}{ds}$.

Ejemplo 3.4.1. *Hallar la solución del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} tx''(t) + (1-2t)x'(t) - 2x(t) = 0 \\ \\ x(0) = 1\ ,\ \ x'(0) = 2. \end{cases}$$

Si ponemos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$, se tiene $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - 1$, por lo que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(1-2t)x'(t)\} = \mathcal{L}\{x'(t)\} + 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x'(t)\} = \\ = sX(s) - 1 + 2\left(sX'(s) + X(s)\right) = 2sX'(s) + (s+2)X(s) - 1.\end{aligned}$$

Análogamente, $\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - s - 2$, de modo que

$$\mathcal{L}\left\{tx''(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left[s^2X(s) - s - 2\right] = -s^2X'(s) - 2sX(s) + 1.$$

Al aplicar Laplace, el problema de partida se transforma en este otro

$$-s^2X'(s) - 2sX(s) + 1 + 2sX'(s) + (s+2)X(s) - 1 - 2X(s) = 0 \ ,$$

esto es,

$$(2s - s^2)X'(s) - sX(s) = 0 \ ,$$

que es una ecuación diferencial en el espacio imagen, de variable separada, ya que

$$\frac{X'}{X} = \frac{1}{2-s}.$$

Su solución general es

$$X(s) = \frac{C}{2-s} \ ,$$

donde C representa una constante arbitraria. Invirtiendo se tiene la solución

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = -Ce^{2t}.$$

Por la condición inicial $x(0) = 1$, se infiere finalmente la solución pedida, que es

$$x(t) = e^{2t}.$$

Ejemplo 3.4.2. *Resolver el siguiente problema*

$$\begin{cases} tx''(t) + (t-1)x'(t) - x(t) = 0 \\ \\ x(0) = 5 \ , \ \ x(t) \to 0 \ \ si \ \ t \to \infty. \end{cases}$$

Llamemos $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y, como no conocemos su valor, pongamos $x'(0) = k$. Entonces, $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s) - 5$ y, en consecuencia,

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\{(t-1)x'(t)\} = -\mathcal{L}\{(-t)x'(t)\} - \mathcal{L}'\{x'(t)\} = \\ = -\frac{d}{ds}\{sX(s) - s\} - sX(s) + 5 = -sX'(s) - (s+1)X(s) + 5. \end{gathered}$$

Por otra parte, $\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - 5s - k$ y, por tanto,

$$\mathcal{L}\{tx''(t)\} = -\mathcal{L}\{(-t)x''(t)\} = -\frac{d}{ds}\left\{s^2X(s) - 5s - k\right\} = -s^2X'(s) - 2sX(s) + 5.$$

Teniendo en cuenta estos resultados, al aplicar Laplace al problema original, se obtiene

$$-s^2X'(s) - 2sX(s) + 5 - sX'(s) - (s+1)X(s) + 5 - X(s) = 0 \ ,$$

esto es,

$$\frac{dX(s)}{ds} + \frac{3s+2}{s^2+s}X(s) = \frac{10}{s^2+s} \ ,$$

que es una ecuación lineal de primer orden, cuya solución general es

$$X(s) = \frac{5}{s+1} + \frac{C}{s^2(s+1)} \ ,$$

siendo C la constante arbitraria de integración. Aplicando la fórmula de inversión, resulta la solución

$$x(t) = 5e^{-t} + C(t - 1 + e^{-t}).$$

Para que $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ necesariamente debe ser $C = 0$. Así pues, la solución es

$$x(t) = 5e^{-t}.$$

3.5. Aplicación a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales

Ilustraremos este apartado con dos ejemplo relacionados con la ecuación del calor.

Ejemplo 3.5.1. *Resolver el problema de tipo mixto [5]*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \ \ 0 < x < 1 \ , \ \ t > 0 \\ \\ u(x,0) = 3\,\mathrm{sen}(2\pi x) \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u(1,t) = 0 \ , \end{cases} \tag{3.13}$$

donde $u = u(x,t)$. Aplicaremos primero Laplace respecto de la variable t, lo que indicamos así

$$U(x,s) = \mathcal{L}\left\{u(x,t); \ t \to s\right\}.$$

Admitimos que, para la variable que no interviene,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{u(x,t)\} = \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2}.$$

Por otra parte,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0) = sU(x,s) - 3\,\mathrm{sen}(2\pi x) \ ,$$

mientras que las condiciones de frontera se transforman en $U(0,s) = 0$ y $U(1,s) = 0$.

A la vista de estas consideraciones, al aplicar la transformación de Laplace al problema dado, se llega a este otro

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} - sU(x,s) = -3\,\mathrm{sen}(2\pi x) \\ \\ U(0,s) = 0 \\ \\ U(1,s) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

que es un problema de valores en la frontera para una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Podemos resolverlo directamente, pero optaremos por aplicar de nuevo la transformación de Laplace, poniendo $U_x(0,s) = k$. Téngase en cuenta que ahora se aplica Laplace en la variable x, que se transforma en la variable p, como se indica a continuación

$$V(p,s) = \mathcal{L}\{U(x,s);\ x \to p\}.$$

Puesto que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\} = p^2 V - pU(0,s) - U'(0,s) = p^2 V(p,s) - k$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}(2\pi x)\} = \frac{2\pi}{p^2 + 4\pi^2}\ ,$$

este último problema se convierte en

$$p^2 V(p,s) - k - sV(p,s) = -\frac{6\pi}{p^2 + 4\pi^2}\ ,$$

ecuación algebraica de solución inmediata

$$V(p,s) = -\frac{6\pi}{p^2 + 4\pi^2}\frac{1}{(p^2 - s)} + \frac{k}{(p^2 - s)}.$$

O bien, fraccionándola,

$$V(p,s) = -\frac{6\pi}{2\sqrt{s}(s + 4\pi^2)}\frac{1}{(p - \sqrt{s})} + \frac{6\pi}{2\sqrt{s}(s + 4\pi^2)}\frac{1}{(p + \sqrt{s})} +$$
$$+ \frac{6\pi}{s + 4\pi^2}\frac{1}{p^2 + 4\pi^2} + \frac{k}{2\sqrt{s}}\left(\frac{1}{p - \sqrt{s}} - \frac{1}{p + \sqrt{s}}\right).$$

Antitransformando, la variable imagen p convirtiéndose en x, para obtener $U(x,s) = \mathcal{L}\{V(p,s); p \to x\}$, resulta

$$U(x,s) = \left(\frac{k}{2\sqrt{s}} - \frac{6\pi}{2\sqrt{s}(s + 4\pi^2)}\right)\left(e^{\sqrt{s}x} - e^{-\sqrt{s}x}\right) + \frac{3}{s + 4\pi^2}\,\mathrm{sen}(2\pi x).$$

Aprovechamos la condición $U(1,s) = 0$ para determinar la constante k. Se infiere así que

$$U(x,s) = \frac{3}{s + 4\pi^2}\,\mathrm{sen}(2\pi x)\ , \tag{3.15}$$

que es la solución del problema (3.14).

Por último, invirtiendo (3.15) *respecto de s, se halla la solución pedida, a saber,*

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x,s);\ s \to t\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s + 4\pi^2}\,\mathrm{sen}(2\pi x);\ s \to t\right\} = 3e^{-4\pi^2 t}\,\mathrm{sen}(2\pi x).$$

Ejemplo 3.5.2. *Hallar la solución del problema de tipo mixto, donde* $u = u(x,t)$, *[4]*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\quad k>0\ ,\quad 0<x<a\ ,\quad t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=f(t)\ ,\quad u(a,t)=0. \end{cases}$$

Procediendo como en el problema anterior, si representamos $U(x,s) = \mathcal{L}\{u(x,t);\ t\to s\}$, *al aplicar Laplace, resulta*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U(x,s)}{\partial x^2} = \frac{s}{k}U(x,s)\ ,\quad 0<x<a \\ U(0,s)=F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\} \\ U(a,s)=0. \end{cases}$$

que es un problema de valores en la frontera para ecuación diferencial ordinaria de segundo orden. Su solución general es

$$U(x,s) = A(s)e^{-x\sqrt{\frac{s}{k}}} + B(s)e^{x\sqrt{\frac{s}{k}}}\ ,$$

donde las constantes $A(s)$ *y* $B(s)$, *que dependen paramétricamente de* s, *se determinan a partir de las condiciones de frontera. Así se llega a*

$$U(x,s) = \frac{F(s)}{2\,\mathrm{sh}(a\sqrt{\frac{s}{k}})}\left[e^{(a-s)\sqrt{\frac{s}{k}}} - e^{-(a-s)\sqrt{\frac{s}{k}}}\right]$$

o sea,

$$U(x,s) = F(s)\frac{\mathrm{sh}\left((a-s)\sqrt{\frac{s}{k}}\ \right)}{\mathrm{sh}\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\ \right)}. \tag{3.16}$$

Puesto que $\mathcal{L}\{F(s)\} = f(t)$, *si llamamos*

$$g(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{sh}\left((a-s)\sqrt{\frac{s}{k}}\ \right)}{\mathrm{sh}\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\ \right)}\right\}\ ,$$

invirtiendo (3.16) *vía la convolución de Laplace, obtendremos la solución*

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathrm{sh}\left((a-s)\sqrt{\frac{s}{k}}\ \right)}{\mathrm{sh}\left(a\sqrt{\frac{s}{k}}\ \right)}\right\} = f(t)*g(x,t) =$$

$$= \int_0^t f(u)\ g(x,t-u)\ du. \tag{3.17}$$

Si recurrimos al Ejemplo 2.3.6 del Capítulo 2, sin más que sustituir a *por* $\frac{a}{\sqrt{k}}$ *y* b *por* $\frac{(a-x)}{\sqrt{k}}$, *se tiene que*

$$g(x,t) = \frac{2\pi k}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{a^2}t}.$$

Esta serie converge uniforme y absolutamente en $0 \leq x \leq a$ *y para* $t \geq t_0$*, cualquiera que sea* $t_0 > 0$*. Por tanto, si la llevamos a* (3.17) *y hacemos las cuentas oportunas, se deduce que*

$$u(x,t) = \frac{2\pi k}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \ \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \ ,$$

donde

$$b_n(t) = n \int_0^t \ f(u) \ e^{-\frac{k\pi^2 n^2}{a^2}(t-u)} \ du.$$

Nota. *Obsérvese que en problemas planteados para ecuaciones en derivadas parciales también se simplifican notablemente los cálculos si se pasa al espacio imagen por medio de la transformación de Laplace. Ciertamente, mediante ella se convierte una ecuación en derivadas parciales en una ecuación ordinaria, que a su vez se puede resolver aplicando de nuevo la transformación de Laplace - como se hizo en el primer caso - o bien se resuelve directamente - como se realizó en el segundo.*

Bibliografía

[1] T.M. Apostol. *Análisis Matemático.* Reverté, Barcelona, 1960.

[2] W.E. y R.C. DiPrima Boyce. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.* Limusa, 1996.

[3] G. Doetsch. *Introduction to the theory and application of the Laplace transformation.* Springer-Verlag, Berlín, 1974.

[4] I.N. Sneddon. *The Use of Integral Transforms.* McGraw-Hill, 1979.

[5] M.R. Spiegel. *Transformadas de Laplace.* Colección Schaum. McGraw-Hill, México, 1996.

[6] J. Williams. *Transformadas de Laplace.* Limusa, México, 1975.

Classic Results of Laplace Integral Transformation

Tanausú Aguilar Hernández

Universidad de La Laguna

Definition

Let f be a real-valued function defined on $[0,\infty)$. We call the Laplace transform of f to the function

$$\mathcal{L}\{f\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \,,$$

where $s \in \mathbb{C}$, whenever the integral exists.

Convergence and existence

(i) The exact domain of absolute convergence of Laplace transform is either an open right half-plane $Re(s) > \alpha$ or else a closed right half-plane $Re(s) \geq \alpha$. Also, there are the possibilities $\alpha = \pm\infty$.

(ii) The exact domain of convergence of Laplace transform is an open right half-plane $Re(s) > \beta$, possibly including none of, part of or all of the line $Re(s) = \beta$.

Uniqueness and analyticity theorems

Theorem 1 (Uniqueness theorem or Lerch's theorem). *Two original functions, whose images are identical, differ at most by a nullfunction $n(t)$.*

Theorem 2 (Strengthened Uniqueness Theorem). *Two functions, whose images take equal values on an infinite sequence of equidistant points along a line parallel to the real axis, differ at most by a nullfunction.*

Theorem 3 (Analyticity theorem). *The Laplace transform is an analytic function in the interior of of its half-plane of convergence, $Re(s) > \beta$, that is, it has derivatives of all orders. The derivatives are obtained by differentiation under the integral symbol,*

$$F^n(s) = (-1)^n \int_0^\infty e^{-st} t^n f(t)\, dt = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}.$$

Operational rules

Let $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ be a function and we assume that $\mathcal{L}\{f\} = F(s)$. Then,

(i) for $a > 0$ and $b > 0$,

$$\mathcal{L}\{f(at-b)\} = \frac{1}{a} e^{-bs} F(\frac{s}{a})$$

whenever $f(t) = 0$ for $t < 0$.

(ii) for $c > 0$ and $d \in \mathbb{C}$,

$$F(cs+d) = \frac{1}{c}\mathcal{L}\left\{ e^{-\frac{d}{c}t} f\left(\frac{t}{c}\right) \right\}$$

Integral operator

We define the integral operador of the function f by means of

$$I(f) = \varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau.$$

If $\mathcal{L}\{f\}$ converge for some real $s = x_0 > 0$, then $\mathcal{L}\{\varphi\}$ converges for $s = x_0$, and we have

$$\mathcal{L}\{\varphi\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\} \,,$$

that is,

$$\Phi(s) = \frac{1}{s} F(s) \quad \text{for} \quad s = x_0 \quad \text{and} \quad Re(s) > x_0.$$

Differential operator

If $f(t)$ is diferentiable n times for $t > 0$ and $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}$ converges for some real $x_0 > 0$, then the limits

$$\lim_{t\to+0} f(t) = f(0^+) \,, \quad \cdots \lim_{t\to+0} f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(0^+)$$

exist, and $\mathcal{L}\{f\}$ converges for $s = x_0$, verifying that

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathcal{L}\{f\} - f(0^+)s^{n-1} - f'(0^+)s^{n-2} - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).$$

The convolution

We define the convolution of the functions f_1 and f_2 as

$$f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau.$$

Theorem 4 (Convolution theorem). *If $\mathcal{L}\{f_1\}$ and $\mathcal{L}\{f_2\}$ converge absolutely for $s = s_0$, and if f_1 and f_2 are absolutely integrable functions which are bounded in every finite interval that does not include the origin, then $\mathcal{L}\{f_1 * f_2\}$ converges absolutely for $s = s_0$, and we have*

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} \cdot \mathcal{L}\{f_2\} \quad para \quad Re(s) \geq Re(s_0).$$

Theorem 5 (Extended convolution theorem). *If $\mathcal{L}\{f_1\}$ converges absolutely for $s = s_0$, and $\mathcal{L}\{f_2\}$ converges for $s = s_0$, f_1 and f_2 being absolutely integrable functions which are bounded in every finite interval that does not include the origin, then $\mathcal{L}\{f_1 * f_2\}$ converges for $s = s_0$, and we have*

$$\mathcal{L}\{f_1 * f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} \cdot \mathcal{L}\{f_2\} \quad para \quad S = s_0 \quad and \quad Re(s) > Re(s_0).$$

Inversion theorem

Theorem 6 (Inversion theorem). *Suppose that $\mathcal{L}_I\{f\} = F(s)$ converges absolutely for $s = s_0$ (real) and, consequently, for $Re(s) \geq x_0$, that is*

$$\int_0^\infty e^{-x_0 t} |f(t)|\, dt < \infty.$$

- *If $f(t)$ is of bounded variation in some neighbourhood of $t > 0$, we have*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s)\, ds = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2} \quad (x \geq x_0).$$

- *If $f(t)$ is of bounded variation in an interval on the right of $t = 0$, then*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)\, ds = \frac{f(0^+)}{2} \quad (x \geq x_0).$$

- *Ultimately, if $t < 0$,*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{ts} F(s)\, ds = 0 \quad (x \geq x_0).$$

Applications

(i) Theoretical applications: Beta function, calculate integrals, . . .

(ii) Solving linear differential equations with constant coefficients.

(iii) Solving linear differential equations with variable coefficients.

(iv) Solving partial differential equations